Czechoslovak Mathematical Journal

M. B. Kudaev

О поведении решений систем дифференциальных уравнений второго порядка

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 2, 179–189

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101309

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1975

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Czechoslovak Mathematical Journal, 25 (100) 1975, Praha

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М. Б. КУДАЕВ, Нальчик

(Поступило в редакцию 12./IV. 1973 г.)

В этой заметке исследуется поведение (ограниченность, стремление к нулю, неограниченность) решений системы n уравнений

$$y'' + A_1(t)\, y' + A_2(t)\, y = 0\,. \tag{1}$$

Основные результаты заключены в леммах 1–3 в виде оценок сверху (леммы 1, 2) и снизу (лемма 3) для норм решений (1) и их производных на $I_T = [t_0, T)$, $T \leqq +\infty$, где последние предполагаются существующими. Из этих оценок получены некоторые признаки поведения $y(t)$ и $y'(t)$ на I_∞ (решение можно понимать в смысле [2], стр. 152–153).

Полученные результаты общее соответствующих предложений работ [1–5]. Например, в теореме 2, которая и по другим причинам общее теоремы 1 [1], снято ограничение $\det A_2(t) \neq 0$ при $t \in I_T$, имевшееся в последней. Из теоремы 3 для скалярного уравнения

$$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0 \tag{2}$$

теорема Хукухара и Нагумо [3] вытекает при $\alpha = 1$, $\beta = c^2 = \text{const} > 0$, $p(t) \equiv 0$ (см. следствие 1.V теоремы 3), а теорема Бернацкого [4] следует из второй части теоремы 4 при $n = 1$, $k = 1$, $A = 1$, $A_1 \equiv 0$, $B = A_2 = q(t)$.

В конце указано на возможные обобщения для нелинейных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Так как все предложения заметки содержат „посторонние операторы“, то число следствий из них бесконечно (см. еще замечание к теореме 2). Причем даже среди тех немногих следствий из теоремы 3 для (2), приведенных ниже, имеются новые. Приведенные ниже теоремы надо считать лишь примерными следствиями из лемм, никак не исчерпывающими подобные возможности последних.

Ниже обозначено $\tilde{A} \equiv 2^{-1}(A + A^*)$, $f_+(t) \equiv 2^{-1}[f(t) + |f(t)|]$. Считаем, что $A_i(t) \in C(I_T)$, $i = 1, 2$, а также удовлетворяют, налагаемым на них ниже, дополнительным ограничениям.

Лемма 1. *Пусть найдутся матрицы* $A(t), B(t) \in C^1(I_T)$ *такие, что на* I_T:

1) $a_1(t)\,\|\xi\|^2 \leqq (B\xi, \xi)$, $a_2(t)\,\|\eta\|^2 \leqq (A\eta, \eta)$;
2) $(B'\xi, \xi) \leqq b_1(t)\,\|\xi\|^2$, $([A' - 2\tilde{A}A_1]\,\eta, \eta) \leqq b_2(t)\,\|\eta\|^2$,

где $a_i(t), b_i(t) \in C(I_T)$, $i = 1, 2$; ξ, η *векторы евклидова пространства* E^n. *Тогда для* (1)

$$(3) \qquad \|y\|^2 + \|y'\|^2 \leqq \frac{c}{a(t)} \exp \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi(s)}{a(s)}\,\mathrm{d}s \quad \text{при} \quad 0 < a(t) \leqq a_i(t)\,, \quad i = 1, 2\,;$$

$$(4) \qquad \|y\|^2 \leqq \frac{c}{a_1(t)} \exp \int_{t_0}^{t} \frac{u_1(s)}{a_1(s)}\,\mathrm{d}s \quad \text{при} \quad 0 < a_1(t)\,, \quad 0 \leqq a_2(t)\,, \quad u_2(t) = 0\,,$$

где)* $[b_1 + \|\tilde{B} - A_2^*\tilde{A}\|]_+ \leqq u_1(t)$, $[b_2 + \|\tilde{B} - A_2^*\tilde{A}\|]_+ \leqq u_2(t)$, $c = |c_1|$, $c_1 = [(By, y) + (Ay', y')]_{t=t_0}$, $\varphi(t) \geqq u_i(t)$, $i = 1, 2$.

Замечание. Очевидно, можно полагать, что в 1) и 2) $a_1(t) \leqq \min \lambda(\tilde{B})$, $b_1 \geqq \max \lambda(\tilde{B}')$ (аналогично и в других подобных случаях). Отметим еще, что оценка типа (4) могла быть выписана и для $y'(t)$. Такие пропуски будут и дальше. Что касается условий на свойства функций и матриц, то очень часто здесь непрерывность можно смягчить до интегрируемости, гладкость — до кусочной гладкости и т. п. (например, в 1) и 2)).

Доказательство. Если $y(t)$ решение (1) на I_T, то умножая (1) скалярно на A^*y' и используя функцию (By, y), где $A(t)$ и $B(t)$ „посторонние" (т. е. не входящие в (1)) n-матрицы, можно получить тождество

$$(5) \qquad (By, y)' + (Ay', y')' = (B'y, y) + ([A' - 2\tilde{A}A_1]\,y', y') + {} + (2[\tilde{B} - A_2^*\tilde{A}]\,y', y)\,.$$

При 1) и 2) из (5) следует:

$$(6) \qquad a_1(t)\,\|y\|^2 + a_2(t)\,\|y'\|^2 \leqq c_1 + \int_{t_0}^{t} [u_1(s)\,\|y(s)\|^2 + u_2(s)\,\|y'\|^2]\,\mathrm{d}s\,.$$

Значит при $0 < a(t)$

$$a(t)\,(\|y\|^2 + \|y'\|^2) \leqq c + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,(\|y(s)\|^2 + \|y'(s)\|^2)\,\mathrm{d}s\,,$$

при $0 \leqq a_2(t)$, $0 < a_1(t)$, $u_2(t) = 0$

$$a_1(t)\,\|y\|^2 \leqq c + \int_{t_0}^{t} u_1(s)\,\|y(s)\|^2\,\mathrm{d}s\,.$$

---

*) Здесь и далее в подобных случаях можно было вместо $b_i + \|\tilde{B} - A_2^*\tilde{A}\|$ получить $b_1 + \varepsilon\|\tilde{B} - A_2^*\tilde{A}\|$ и $b_2 + \varepsilon^{-1}\|\tilde{B} - A_2^*\tilde{A}\|$ (что иногда лучше), если воспользоваться неравенством $|2ab| \leqq \varepsilon|a|^2 + \varepsilon^{-1}|b|^2$, $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$.

Чтобы получить (3) и (4) остается к последним двум неравенствам применить лемму Беллмана.

Ниже будут использованы и введеные выше обозначения. Теоремы 1 – 3 следуют из леммы 1 непосредственно.

Теорема 2. *Пусть при* $t \geqq t_0$:

1) *выполнены условия леммы* 1, *достаточные для* (3) (*для* (4));
2) $\int^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ $\left(\int^\infty u_1(t)\,\mathrm{d}t < \infty\right)$;
3) $a(t) \to +\infty$ $(a_1(t) \to +\infty)$ *при* $t \to +\infty$.

Тогда решения уравнения (1) *и их первые производные* (*соответственно, решения* (1)) *стремятся к нулю при* $t \to +\infty$.

Замечание. Первая часть теоремы 1 дает достаточное условие асимптотической устойчивости системы (1), т. е. системы $y' = z$, $z' = -A_2 y - A_1 z$.

Теорема 2. *Если при* $t \geqq t_0$:

1) *выполнены первые два условия теоремы* 1;
2) $0 < a_0 \leqq a(t)$, $a_0 = \mathrm{const}\,(0 < a_0 \leqq a_1(t))$,

то решения (1) *и их первые производные* (*соответственно, решения* (1)) *ограничены*

$$\|y\|^2 + \|y'\|^2 \leqq \frac{c}{a_0} \exp \frac{1}{a_0} \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s \left(\|y\|^2 \leqq \frac{c}{a_0} \exp \frac{1}{a_0} \int_{t_0}^{t} u_1(s)\,\mathrm{d}s\right), \quad t \geqq t_0\,.$$

Замечание 1. Первая часть теоремы представляет достаточный признак устойчивости системы (1) по Ляпунову. В дальнейшем подобные замечания не приводятся. Теорема 2 упомянута в [5].

Замечание 2. Из первой части теоремы 2 при $B = B^* = AA_2$, $A = A^*$ следует теорема 1 [1] ($A_0 = E$), а если еще $A = E$, то – теорема 1.1 [2]. При $B = B^* = AA_2$, $A = A^*$ вторая часть теоремы 2 дает теорему 7 [1]. Вообще, если в каждом предложении, содержащем посторонние матрицы A и B, положить

$$A = F_1(A_1, A_2, B_1, \ldots, B_j)\,, \quad B = F_2(A_1, A_2, B_1, \ldots, B_j)\,,$$

где F_1 и F_2 некоторые функции, $B_i = B_i(t)$ – посторонние матрицы ($i = 1, 2, 3, \ldots, j$), можно получить множество предложений, заключающее в себе помимо новых и некоторые известные.

В качестве примера возьмем скалярное уравнение*)

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0\,. \tag{2}$$

Для него теоремы 1, 2 дают такой результат.

Теорема 3. *Пусть имеются функции $\alpha(t), \beta(t) \in C^1(I_\infty)$ такие, что при $t \geqq t_0$:*

1) $\beta'(t) \leqq b_1(t)$, $\alpha'(t) - 2\,\alpha(t)\,p(t) \leqq b_2(t)$;

2) $\int^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ $(\int^\infty u_1(t)\,\mathrm{d}t < \infty)$,

где $\varphi(t) \geqq u_i(t) \geqq [b_i + |\beta - \alpha q|]_+$; $\varphi, b_i \in C(I_\infty)$, $i = 1, 2$.

Тогда: 1) *решения уравнения* (2) *ограничены вместе с первыми производными* (*решения* (2) *ограничены*), *если* $0 < a_0 \leqq a(t)$, $a_0 = \mathrm{const} > 0$, $a(t) \leqq \alpha(t), \beta(t)$ $(0 \leqq \alpha(t),\ 0 < a_0 \leqq \beta(t),\ u_2(t) = 0)$;

2) *решения уравнения* (2) *вместе с производными* (*решения* (2)) *стремятся к нулю при* $t \to +\infty$, *если, соответственно,* $a(t) \to +\infty$ $(\beta(t) \to +\infty)$.

Следствие 1. *Решения уравнения* (2) *ограничены при* $t \geqq t_0$ *вместе с первыми производными, если выполняется хотя бы одно из условий* I–VI (всюду $a_0 = \mathrm{const} > 0$):

I. $a_0 \leqq p$,	$\int^\infty(p' + \lvert p - q\rvert)_+\,\mathrm{d}t < \infty$,	$\int^\infty(-2p + \lvert p - q\rvert)_+\,\mathrm{d}t < \infty$;
II. $a_0 \leqq p$,	$\int^\infty\lvert 1 - pq\rvert\,\mathrm{d}t < \infty$,	$\int^\infty(p' - 2p^2 + \lvert 1 - pq\rvert)_+\,\mathrm{d}t < \infty$;
III. $a_0 \leqq q$,	$\int^\infty q'_+\,\mathrm{d}t < \infty$,	$\int^\infty(-p)_+\,\mathrm{d}t < \infty$;
IV. $a_0 \leqq q$,	$\int^\infty\lvert 1 - q^2\rvert\,\mathrm{d}t < \infty$,	$\int^\infty(q' - 2pq + \lvert 1 - q^2\rvert)_+\,\mathrm{d}t < \infty$;
V. $c^2 = \mathrm{const} > 0$,	$\int^\infty\lvert c^2 - q\rvert\,\mathrm{d}t < \infty$,	$\int^\infty(-2p + \lvert c^2 - q\rvert)_+\,\mathrm{d}t < \infty$;
VI. $a_0 < q^{-1}$,	$q' + 2pq = 0$.	

Для обоснования следствия 1 достаточно проверить соответствующие условия теоремы 3 по очереди при таких значениях посторонних функций α и β: 1) 1 и $p(t)$; 2) $p(t)$ и 1; 3) 1 и $q(t)$; 4) $q(t)$ и 1; 5) 1 и C^2; 6) $q^{-1}(t)$ и 1.

Ясно, что число подобных случаев далеко не исчерпано.

Замечание. Для уравнения (2′), т. е. при $p(t) \equiv 0$ случай V следствия 1 дает теорему Хукухара и Нагумо [3].

---

*) Известно, что (2), вообще, может быть приведено к виду

$$y'' + Q(t)\,y = 0\,, \tag{2′}$$

но здесь мы предпочли (2).

Придавая α и β значения $p^{(i)}$, $q^{(i)}$, $q^m - \lambda p^n$, из теоремы 3 выведем и

Следствие 2. *Если в каком-нибудь из пунктов* I–XVII *интегралы сходятся, а* $0 < a(t)$, $a(t) \to +\infty$ (*соответственно* $0 < a_0 \leqq a(t)$) *при* $t \to +\infty$, *то решения уравнения* (2) *вместе с первыми производными стремятся к нулю* (*соответственно, ограничены*):

I.	$a(t) \leqq p, q,$	$\int^\infty (q' + q\lvert 1 - p\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (p' - 2p^2 + q\lvert 1 - p\rvert)_+ \, dt;$
II.	$a(t) \leqq p, q,$	$\int^\infty (p' + \lvert p - q^2\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (q' - 2pq + \lvert p - q^2\rvert)_+ \, dt;$
III.	$a(t) \leqq p,$	$\int^\infty (p' + p\lvert 1 - q\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (p' - 2p^2 + p\lvert 1 - q\rvert)_+ \, dt;$
IV.	$a = q,$	$\int^\infty (q' + q\lvert 1 - q\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (q' - 2pq + q\lvert 1 - q\rvert)_+ \, dt;$
V.	$a \leqq p',$	$\int^\infty (p'' + p'\lvert 1 - q\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (p'' - 2pp' + p'\lvert 1 - q\rvert)_+ \, dt;$
VI.	$a \leqq q',$	$\int^\infty (q'' + q'\lvert 1 - q\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (q'' - 2pq' + q'\lvert 1 - q\rvert)_+ \, dt;$
VII.	$a \leqq p, p',$	$\int^\infty (p'' + \lvert p' - pq\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (p' - 2p^2 + \lvert p' - pq\rvert)_+ \, dt;$
VIII.	$a \leqq p, p',$	$\int^\infty (p' + \lvert p - p'q\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (p'' - 2pp' + \lvert p - p'q\rvert)_+ \, dt;$
IX.	$a \leqq q, q',$	$\int^\infty (q'' + \lvert q' - q^2\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (q' - 2pq + \lvert q' - q^2\rvert)_+ \, dt;$
X.	$a \leqq q, q',$	$\int^\infty [q' + q\lvert 1 - q'\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (q'' - 2pq' + q\lvert 1 - q'\rvert)_+ \, dt;$
XI.	$a \leqq p', q',$	$\int^\infty (q'' + \lvert q' - p'q\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (p'' - 2pp' + \lvert q' - p'q\rvert)_+ \, dt;$
XII.	$a \leqq p', q',$	$\int^\infty (p'' + \lvert p' - qq'\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (q'' - 2pq' + \lvert p' - qq'\rvert)_+ \, dt;$
XIII.	$a \leqq p, q',$	$\int^\infty (q'' + \lvert q' - pq\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (p' - 2p^2 + \lvert q' - pq\rvert)_+ \, dt;$
XIV.	$a \leqq p, q',$	$\int^\infty (p' + \lvert p - qq'\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (q'' - 2pq' + \lvert p - qq'\rvert)_+ \, dt;$
XV.	$a \leqq p', q,$	$\int^\infty (p'' + \lvert p' - q^2\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (q' - 2pq + \lvert p' - q^2\rvert)_+ \, dt;$
XVI.	$a \leqq p', q,$	$\int^\infty (q' + q\lvert 1 - p'\rvert)_+ \, dt,$	$\int^\infty (p'' - 2pp' + q\lvert 1 - p'\rvert)_+ \, dt;$
XVII.	$a \leqq q^m - \lambda p^n,$	$\int^\infty [(q^m - \lambda p^n)' + \lvert q^m - \lambda p^n - q^{m+1} + \lambda p^n q\rvert]_+ \, dt,$	

$$\int^\infty [(q^m - \lambda p^n)' - 2pq^m + 2\lambda p^{n+1} + \lvert q^m - \lambda p^n - q^{m+1} + \lambda p^n q\rvert]_+ \, dt,$$

где m, n, λ — *постоянные.*

В теоремах 4, 5 продолжаем исследование случаев $a(t) \to +\infty$ и $a_1(t) \to +\infty$ (обозначения из леммы 1).

Теорема 4. *Пусть при* $t \geqq t_0$:

1) *выполнены условия леммы* 1 *достаточные для* (3) (*для* (4));
2) $a(t)$ $(a_1(t))$ *монотонно* $\to +\infty$ *при* $t \to +\infty$;
3) $\varphi(t) \leqq \lambda\, a'(t)$ $(u_1(t) \leqq \lambda\, a_1'(t))$, *где* $0 < \lambda \leqq 1$, $\lambda = \text{const}$.

Тогда решения (1) *и их первые производные* (*решения* (1)) *ограничены. При* $0 < \lambda < 1$ *они, сверх того, стремятся к нулю, когда* $t \to +\infty$.

Доказателство. Из (6), в силу 1) и 3), в первом случае имеем

$$a(t)\, w(t) \leqq c + \lambda \int_{t_0}^{t} \frac{a'(s)}{a(s)}\, w(s)\, a(s)\, \mathrm{d}s\,, \quad w = \|y\|^2 + \|y'\|^2\,,$$

т. е.

$$a(t)\, w(t) \leqq c_2 \exp\left[\lambda \ln a(t)\right] = c_2\, a^{\lambda}(t)\,, \quad 0 < \lambda \leqq 1\,, \quad c_2 = c a^{-\lambda}(t_0)\,.$$

Поэтому

$$w(t) \leqq c_2\, a^{\lambda - 1}(t)\,. \tag{7}$$

Значит, $w(t) \leqq c_2$ при $\lambda = 1$, а при $0 < \lambda < 1$ $w(t) \to 0$, когда $t \to +\infty$. Аналогично, во втором случае

$$\|y(t)\|^2 \leqq c_3\, a_1^{\lambda-1}(t)\,, \quad c_3 = c\, a_1^{-\lambda}(t_0)\,. \tag{8}$$

Остальное ясно.

Замечание 1. Из второй части теоремы 4 (т. е. при $a_1(t) \to \infty$ монотонно) вытекает, как следствие, теорема Бернацкого [4], если положить $n = 1$, $\lambda = 1$, $A = 1$, $A_1 = 0$, $B = A_2 = q(t)$.

Замечание 2. Формулы (7) и (8) справедливы и при $1 < \lambda$, если выполнены остальные условия.

Теорема 5. *Пусть при* $t \geqq t_0$:

1) *выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 4;

2) $\varphi(t) \leqq \dfrac{\lambda\, a'(t)}{a^m(t)}$, $\left(u_1(t) \leqq \dfrac{\lambda\, a_1'(t)}{a_1^m(t)}\right)$, $0 < m = \mathrm{const} \neq 1$, $0 < \lambda = \mathrm{const}$.

Тогда решения (1) *и их первые производные* (*решения* (1)) *стремятся к нулю, когда* $t \to +\infty$, *и*

$$\|y\|^2 + \|y'\|^2 \leqq \frac{c_4}{a(t)} \exp\left[-\frac{\lambda}{m}\, a^{-m}(t)\right], \quad \left(\|y\|^2 \leqq c_5 a_1^{-1}(t) \exp\left[-\frac{\lambda}{m}\, a_1^{-m}(t)\right]\right),$$

$$c_4 = c \exp\left[\frac{\lambda}{m}\, a^{-m}(t_0)\right], \quad c_5 = c \exp\left[\frac{\lambda}{m}\, a_1^{m}(t_0)\right].$$

Доказательство. В силу условий теоремы в первом случае имеем

$$a(t)\, w(t) \leqq c + \lambda \int_{t_0}^{t} \frac{a'(s)}{a^m(s)}\, w(s)\, \mathrm{d}s\,, \quad w = \|y\|^2 + \|y'\|^2\,.$$

Отсюда по лемме Беллмана

$$a(t)\, w(t) \leqq c \exp \lambda \int_{t_0}^{t} \frac{a'(s)}{a^{m+1}(s)}\, ds = c_4 \exp \left[- \frac{\lambda}{m\, a^m(t)} \right].$$

Во втором случае, аналогично,

$$a_1(t)\, \|y(t)\|^2 \leqq c_5 \exp \left[- \frac{\lambda}{m\, a_1^m(t)} \right].$$

Остальное ясно.

В некоторых случаях полезно следующее обобщение леммы 1.

Лемма 2. *Пусть для* (1) *при* $t \in I_T$ *найдутся матрицы* $A(t)$, $B(t) \in C^1(I_T)$ *такие, что*:

1) *выполнено первое условие леммы* 1;

2) $([B' + gB]\, \xi, \xi) \leqq \beta_1 \|\xi\|^2$, $([A' - gA - 2\tilde{A}A_1]\, \eta, \eta) \leqq \beta_2 \|\eta\|^2$, $a_i(t)$, $g(t)$, $\beta_i(t) \in C(I_T)$, $i = 1, 2$; $\xi, \eta \in E^n$.

Тогда для (1) *на* $[t_0, T]$

$$\text{(9)} \quad w(t) \leqq c\, a^{-1}(t) \exp \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\psi(s)}{a(s)} - g(s) \right] ds \quad \textit{при} \quad 0 < a(t) \leqq a_i(t)\,, \quad i = 1, 2\,;$$

$$w = \|y\|^2 + \|y'\|^2\,;$$

$$\text{(10)} \quad \|y\|^2 \leqq c\, a_1^{-1}(t) \exp \int_{t_0}^{t} \left[\frac{v_1(s)}{a_1(s)} - g(s) \right] ds \quad \textit{при} \quad 0 < a_1(t)\,, \quad 0 \leqq a_2(t)\,,$$

$$v_2(t) = 0\,,$$

где

$$\psi(t) \geqq v_i(t) \geqq [\beta_i + \|\tilde{B} - A_2^* \tilde{A}\|]_+\,, \quad i = 1, 2\,,$$

c — *то же, что и в* (3).

Доказательство. Из (5) можно получить тождество

$$\text{(11)} \qquad v' + gv = ([B' + gB]\, y, y) + ([A' + gA - 2\tilde{A}A_1]\, y', y') + \\ + 2([\tilde{B} - A_2^* \tilde{A}]\, y', y)$$

где $v = (By, y) + (Ay', y')$. Из (11) следует:

$$v' + gv \leqq \psi w\,, \quad t \in I_T\,.$$

Значит, при $0 < a(t) \leqq a_i(t)$, $i = 1, 2$,

$$(12) \quad aw \leqq c_1 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} g \, \mathrm{d}s\right) + \int_{t_0}^{t} \psi(s) \exp\left[-\int_{s}^{t} g(\tau) \, \mathrm{d}\tau\right] w(s) \, \mathrm{d}s\,, \quad c_1 = v(t_0)\,,$$

или усиливая (12),

$$a(t)\, w(t) \exp \int_{t_0}^{t} g \, \mathrm{d}s \leqq c + \int_{t_0}^{t} \frac{\psi(s)}{a(s)}\, a(s)\, w(s) \exp \int_{t_0}^{s} g(\tau) \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}s\,, \quad c = |c_1|\,.$$

Это по лемме Беллмана дает

$$a(t)\, w(t) \exp \int_{t_0}^{t} g \, \mathrm{d}s \leqq c \exp \int_{t_0}^{t} \frac{\psi(s)}{a(s)} \, \mathrm{d}s\,,$$

что приводит к (9).

Если же $0 \leqq a(t)$, точнее $0 < a_1(t)$, $0 \leqq a_2(t)$ и $v_2(t) = 0$, то, поступая аналогично только что проделанному, мы получим (10).

Замечание. При $g(t) \equiv 0$ лемма 2 переходит в лемму 1. Все результаты, доказанные выше с помощью леммы 1, могут быть дублированы на уровне более общей леммы 2. Мы ограничимся лишь следующим следствием последней.

Теорема 6. *Пусть при* $t \geqq t_0$:

1) *выполнены условия достаточные для* (9);

2) $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{\psi(t)}{a(t)} - g(t)\right] \mathrm{d}t = N < \infty\,, \quad \lim_{t \to +\infty} a(t) = a_0 \neq 0 \quad \left(\lim_{t \to +\infty} a(t) = \infty\right).$

Тогда решения (1) *и их первые производные ограничены* (*стремятся к нулю*) *при* $t \to +\infty$. *Если выполнено* 1) *и*

3) $\displaystyle\int^{\infty} \left[\frac{\psi(t)}{a(t)} - g(t)\right] \mathrm{d}t = -\infty\,, \quad \lim_{t \to +\infty} a(t) = a_0 \neq 0\,,$

то решения (1) *и их первые производные* $\to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Замечание. Если в теореме 6 заменить (9), $a(t)$, $\psi(t)$, соответственно, на (10), $a_1(t)$, $v_1(t)$, слова „решения (1) и их первые производные" на „решения (1)", то получим справедливую теорему.

Переходим к оценкам снизу.

Лемма 3. *Пусть на* I_T *при некоторых матрицах* $A(t), B(t) \in C^1(I_T)$ *для* (1) *имеют место условия*:

1) 1) $r_1(t)\, \|\xi\|^2 \geqq (B\xi, \xi)$, $r_2(t)\, \|\eta\|^2 \geqq (A\eta, \eta)$;

2) $([B' + gB]\,\xi, \xi) \geqq q_1(t)\,\|\xi\|^2$, $([A' + gA - q\tilde{A}A_1]\,\eta, \eta) \geqq q_2(t)\,\|\eta\|^2$,

$g, r_i, q_i \in C(I_T)$, $i = 1, 2$;

3) $f_1(t) = q_1(t) - \|\tilde{B} - A_2^*\tilde{A}\| \geqq 0$, $f_2(t) = q_2(t) - \|\tilde{B} - A_2^*\tilde{A}\| \geqq 0$,

$f(t) \leqq f_i(t)$, $i = 1, 2$, $c_1 = [(By, y) + (Ay', y')]_{t=t_0} > 0$.

Тогда для (1) *на* I_T

$$(13) \qquad \|y\|^2 + \|y'\|^2 \geqq \frac{c_1}{r(t)} \exp \int_{t_0}^{t} \left(\frac{f}{r} - g\right) \mathrm{d}s \quad \text{при} \quad 0 < r(t)\,, \quad r(t) \geqq r_i(t)\,, \quad i = 1, 2\,;$$

$$(14) \qquad \|y(t)\|^2 \geqq \frac{c_1}{r_1(t)} \exp \int_{t_0}^{t} \left(\frac{f_1}{r_1} - g\right) \mathrm{d}s \quad \text{при} \quad 0 < r_1(t)\,, \quad r_2(t) \leqq 0\,.$$

Доказательство. Из (11) в условиях леммы 3

$$v' + gv \geqq f_1\|y\|^2 + f_2\|y'\|^2 \geqq fw\,,$$

$$v = (By, y) + (Ay', y')\,, \quad w = \|y\|^2 + \|y'\|^2\,.$$

Это дает:

$$v \geqq \exp\left(-\int_{t_0}^{t} g\,\mathrm{d}s\right)\left[c_1 + \int_{t_0}^{t} f(s)\,w(s) \exp \int_{t_0}^{s} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s\right].$$

В силу 1), отсюда следует, что при $r(t) \geqq r_i(t)$, $i = 1, 2$,

$$r(t)\,w(t) \exp \int_{t_0}^{t} g\,\mathrm{d}s \geqq c_1 + \int_{t_0}^{t} f(s)\,w(s) \exp \int_{t_0}^{s} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s\,.$$

Отсюда по лемме Беллмана

$$r(t)\,w(t) \exp \int_{t_0}^{t} g\,\mathrm{d}s \geqq c_1 \exp \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{r(s)}\,\mathrm{d}s\,.$$

Если же $0 < r_1(t)$, $r_2(t) \leqq 0$, то, аналогично, из (11) получаем

$$r_1(t)\,\|y(t)\|^2 \exp \int_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s \geqq c_1 \exp \int_{t_0}^{t} \frac{f_1(s)}{r_1(s)}\,\mathrm{d}s\,.$$

Остальное ясно.

Теорема 7. *Если при* $t \geqq t_0$ *для* (1):

1) *имеет место* (13);

2) $\displaystyle\int^{\infty}\left(\frac{f}{r}-g\right)\mathrm{d}t$ *расходится* (*сходится*);

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} r(t) = r_0 \neq \infty \; (=0)$,

то $\|y(t)\|^2 + \|y'(t)\|^2 \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$.

Замечание. Условия неограниченности решений (1) при $t \to +\infty$ мы получим, если в теореме 7 заменить (13), $f(s)$, $r(s)$, соответственно, на (14), $f_1(s)$, $r_1(s)$.

Справедливость теоремы 7 и замечания к ней следует из леммы 3.

Рассмотрим на I_T решение нелинейной системы

$$y'' + A_1(t)\,y' + A_3(t)\,\tilde{y}' + A_2(t)\,y + A_4(t)\,\tilde{y} = F(t, y, \tilde{y}, y', \tilde{y}')\,, \tag{15}$$

F — нелинейный вектор, $y^{(k)} = y^{(k)}(t)$, $\tilde{y}^{(i)} = y^{(i)}(t - h(t))$, $k = 0, 1, 2$; $i = 0, 1$, $0 \leqq h(t) \leqq h_0 = \text{const} < \infty$, $h'(t) < 1$, удовлетворяющее на $[t_0 - h_0, t_0]$ условиям $y^{(i)}(t) = \gamma^{(i)}(t)$, $i = 0, 1$, $\gamma^{(i)}$, $\gamma^{(i)}(t_0 - 0) = y^{(i)}(t_0 + 0)$.

Если $F \equiv 0$, то, поступая как и выше, получим тождество, где все как в (5) кроме двух дополнительных членов справа: $(AA_3\tilde{y}', y') + (AA_4\tilde{y}, y')$. Это приводит к неравенству (a_j, b_j-те, что выше):

$$a_1\|y\|^2 + a_2\|y'\|^2 \leqq \bar{c} + \int_{t_0}^{t}(\varphi_1\|y\|^2 + \varphi_2\|y'\|^2)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \in I_T\,, \tag{16}$$

где $\bar{c} = \text{const} > 0$, $\varphi_j(t) \geqq \{b_j(t) + \|\tilde{B}(t) - A_2^*(t)\,\tilde{A}(t)\| + \frac{1}{2}\tau_j[u(t)]\}_+$, $j = 1, 2$, $\tau_1[u(t)] = S_1[u(t)]$, $\tau_2[u(t)] = S_2[u(t)] + 2\|A(t)\|$, $S_1 = \|A\|\,\|A_4\|\,(\|A_3\| + \|A_4\|)\,.$ $.\,(1 - h')^{-1}$, $S_2 = \|A\|\,\|A_3\|\,(\|A_3\| + \|A_4\|)\,(1 - h')^{-1}$, $t = u(z)$ функция, обратная к $z = t - h(t)$. Аналогично тому, что делалось выше, теперь, пользуясь (16), изучаем верхние оценки и ограниченность y и y' для (15). Сходно изучаем и нижние оценки последних.

Если же $F \not\equiv 0$, и, например,

$$(F, y') \leqq p_1\|y\|^{\alpha_1} + p_2\|\tilde{y}\|^{\alpha_2} + p_3\|y'\|^{\alpha_3} + p_4\|\tilde{y}'\|^{\alpha_4} + p_5\,, \tag{17}$$
$$p_i(t) \in C(I_T)\,, \quad 1 \leqq i \leqq 5\,,$$

$\alpha_i = \text{const} \geqq 0$, то при $\alpha_i = 2$ можно прийти к неравенству типа (16). Тогда можно вести изучение, в основном, по приведенной выше схеме. Если же в (17) не все $\alpha_i = 2$, то в некоторых случаях можно воспользоваться леммой Бихари [6], а также другим способами, охватив, во всяком случае $\alpha_i \neq 2$.

Все вышеизложенное соответственно обобщается на случай нелинейного операторного уравнения (16) в любом пространстве Гильберта H (A_i — линейные, F — нелинейный операторы; $y^{(k)}$, $\tilde{y}^{(k)} \in H$).

Некоторые результаты статьи доложены на конференциях 1966—1968 гг. в г. Нальчике, в 1969 г. — в Университете им. Лумумбы и в 1971 г. — в г. Рязани на Всесоюзной конференции по качественной теории.

Для исследования решений нелинейных систем (15) в более общих случаях F, чем указано выше, можно применить леммы из [7, 8], о чем автором доложено на научных конференциях в Кабардино-Балкарском госуниверситете (г. Нальчик) в 1972 г.

Заметим еще, что по схеме этой работы обобщаются и результаты [9] если ввести там еще одну постороннюю матрицу $B(t)$.

Цитированная литература

[1] *Кудаев М. Б.*, По поводу критериев ограниченности решений уравнения $A_0(t)\,x'' + A_1(t)\,x' + A_2(t)\,x = 0$. Дифференциальные уравнения, т. *IV*, № 10 (1968), 1801—1813.

[2] *Скрипник В. П.*, Некоторые критерии ограниченности и неограниченности решений систем линейных дифференциальных уравнений, Изв. ВУЗ, мат., № 2 (*27*) (1962), 151—161.

[3] *Fukuhara M.*, *Nagumo M.*, On a condition of stability for a differential equation, Proc. of the Imp. Ac., Tokyo, *6*, No 4 (1930), 131—132.

[4] *Biernacki M.*, Sur l'equation $x'' + A(t)\,x = 0$, Prac. Mat. Fiz., *40* (1943), 163—171.

[5] *Кудаев М. Б.*, К ограниченности решений систем дифференциальных уравнений, Ученые записки Кабардино-Балкарского ГУ, мат., вып. *30* (1966), 72—73.

[6] *Bihari I.*, Researches of the boundedness and stability of the solutions of non-linear differential equations, Acta math. Acad. s. Hung., *8*, No 3—4 (1957), 261—278.

[7] *Кудаев М. Б.*, Одно обобщение леммы Гронуолла и его применение к исследованию систем интегро-дифференциальных уравнений, Ученые записки Кабардино-Балкарского ГУ, Строительные конструкции и архитектура, вып. *44*, часть II (1972), 288—289.

[8] *Кудаев М. Б.*, Об одном интегральном неравенстве, Межвузовская конференция по физике межфазных явлений и избранным вопросам математики, посвященная 50-летию образования СССР (научные осообщения), г. Нальчик, 1972 г., 172.

[9] *Шолтес П.*, Заметка об ограниченности. Дифференциальные уравнения, т. *VIII*, № 12 (1972), 2277—2280.

Адресс автора: Кабардинно-Балкарская АССР, г. Нальчик 17, улица Кирова 18, СССР.