Czechoslovak Mathematical Journal

Ladislav Mišík

Über approximative derivierte Zahlen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 1, 154–159

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101301

Czechoslovak Mathematical Journal, 25 (100) 1975, Praha

ÜBER APPROXIMATIVE DERIVIERTE ZAHLEN

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

(Eingegangen am 2. Januar 1974)

1. L. ZAJÍČEK hat in [5] folgendes interessantes Resultat (Corollary 1.) bewiesen. Die Menge aller Zahlen x, für die $D^+_{\mathrm{ap}} f(x) \cap D^-_{\mathrm{ap}} f(x) = \emptyset$ gilt, ist für jede reelle Funktion f einer reellen Veränderlichen mit der Lipschitze Eigenschaft höchstens abzählbar. Dabei bedeutet $D^+_{\mathrm{ap}} f(x)$, bzw. $D^-_{\mathrm{ap}} f(x)$ die Menge aller approximativen derivierten Zahlen der Funktion f im Punkte x von rechts, bzw. von links. Hier geben wir einen neuen Beweis dieser Behauptuhg.

Zuerst geben wir eine Eigenschaft für die Funktionen, die in einer offenen Halbebene definiert sind, an, welche dazu genügend ist, daß die Menge aller approximativen Limeszahlen in der Richtung θ und die Menge aller Limeszahlen in der Richtung θ in einem Grenzpunkt der offenen Halbebene gleich sind. Daraus bekommen wir mit Hilfe eines Satzes von V. JARNÍK [3] die Behauptung von L. Zajíček. Ferner werden einige weitere Folgerungen unseres Satzes gegeben.

2. Unter der Menge $\langle -\infty, \infty \rangle$ werden wir die übliche zweipunktige Kompaktifikation von $(-\infty, \infty)$ verstehen. Unter einem offenen Intervall in $\langle -\infty, \infty \rangle$ verstehen wir offene Intervalle in $(-\infty, \infty)$ und die Intervalle $(\alpha, \infty\rangle$, $\langle -\infty, \alpha)$ und $\langle -\infty, \infty\rangle$, wobei $\alpha \in \langle -\infty, \infty\rangle$ ist. Es sei R_2^+ eine offene Halbebene und H ihre Grenze. Wenn $P \in H$ und $0 < \theta < \pi$ ist, dann bedeutet $P(\theta)$ die offene Halbgerade $\overrightarrow{PQ}$ mit $Q \in R_2^+$, die den Winkel θ mit H hat. Für eine lineare Menge A wird $|A|_1$ das lineare äußere Lebesguemaß von A bedeuten. Wenn $X, Y \in R_2^+ \cup H$ ist, dann wird $\varrho(X, Y)$ in euklidische Metrik in $R_2^+ \cup H$ bedeuten. Für $A \subset P(\theta)$ definieren wir für jede positive Zahl ε folgende Zahl: $d_\varepsilon^\theta(A; P) = \varepsilon^{-1} |\{X : \varrho(X, P) < \varepsilon\} \cap A|_1$.

Es sei $f : R_2^+ \to (-\infty, \infty)$ und $P \in H$. Dann sagen wir, daß $y \in \langle -\infty, \infty\rangle$ eine Limeszahl von f im P in der Richtung θ ist, wenn P ein Häufungspunkt der Menge $f^{-1}(U(y)) \cap P(\theta)$ für jede Umgebung $U(y)$ von y ist. Wir sagen, daß $y \in \langle -\infty, \infty\rangle$ eine approximative Limeszahl von f in der Richtung θ ist, wenn für jede Umgebung von y $\limsup_{\varepsilon \to 0^+} d_\varepsilon^\theta(f^{-1}(U(y)); P) > 0$ ist. Die Menge aller Limeszahlen von f im P in der Richtung θ bezeichnen wir mit $C^{\theta}(f; P)$. Die Menge aller approximativen Limeszahlen von f im Punkte P in der Richtung θ werden wir mit $C_{\mathrm{ap}}^{\theta}(f; P)$ bezeichnen.

Es sei $f: R_2^+ \to (-\infty, \infty)$. Wir sagen, daß f die Eigenschaft $K(\theta)$ im Punkte P hat, wenn es ein $\tau > 0$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für ein Paar (I, I_1) von solchen offenen Intervallen in $\langle -\infty, \infty \rangle$, für das $\bar{I} \subset I_1$ gilt, existieren zwei solche positive Zahlen η und C, daß für jeden Punkt $Q \in P(\theta) \cap f^{-1}(I) \cap \{X : \varrho(X, P) < \tau\}$ ein solcher Punkt $U \in P(\theta)$ existiert, daß $\varrho(U, P) \leqq C\,\varrho(Q, P)$ und $d_{\varrho(U,P)}^{\theta}(f^{-1}(I_1); P) \geqq$ $\geqq \eta$ ist.

Satz 1. *Es sei $f: R_2^+ \to (-\infty, \infty)$ eine Funktion, die im Punkte $P \in H$ die Eigenschaft $K(\theta)$ besitzt. Dann gilt $C^{\theta}(f; P) = C_{\mathrm{ap}}^{\theta}(f; P)$.*

Beweis. Aus der Definition von Limeszahlen und approximativen Limeszahlen ist es offensichtlich, daß $C_{\mathrm{ap}}^{\theta}(f; P) \subset C^{\theta}(f; P)$ gilt.

Es sei $y \in C^{\theta}(f; P)$, $\tau > 0$ die Zahl aus der Eigenschaft $K(\theta)$ und (I, I_1) ein Paar offener Intervalle in $\langle -\infty, \infty \rangle$ für welche $y \in I \subset \bar{I} \subset I_1$ gilt. Es seien η und C zwei positive Zahlen, die zu dem Paar (I, I_1) nach der Eigenschaft $K(\theta)$ gehören. Es sei $\varepsilon > 0$. Da $y \in C^{\theta}(f; P)$ ist, muß so ein Punkt $Q \in P(\theta) \cap f^{-1}(I)$ existieren, für den $\varrho(Q, P) < \min(\tau, \varepsilon/C)$ ist. Nach der Eigenschaft $K(\theta)$ muß ein solcher Punkt $U \in P(\theta)$ existieren, daß $\varrho(U, P) \leqq C\,\varrho(Q, P) < \varepsilon$ und $d_{\varrho(U,P)}^{\theta}(f^{-1}(I_1); P) \geqq \eta$ ist. Daraus geht hervor, daß $\limsup_{\varepsilon \to 0^+} d_{\varepsilon}^{\theta}(f^{-1}(I_1); P) \geqq \eta > 0$ für jedes offene Intervall I_1, das y enthält, gilt. Also ist $y \in C_{\mathrm{ap}}^{\theta}(f; P)$ und der Satz ist bewiesen.

Satz 2. *Es seien θ_1 und θ_2, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ zwei Richtungen. Es sei $f: R_2^+ \to$ $\to (-\infty, \infty)$ eine Funktion. die die Eigenschaften $K(\theta_1)$ und $K(\theta_2)$ in jedem Punkt $P \in H - H_0$ besitzt. Wenn H_0 eine höchstens abzählbare Menge ist, dann ist die Menge $\Pi_{\mathrm{ap}}^{\theta_1,\theta_2}$ aller Punkte $P \in H$, für welche $C_{\mathrm{ap}}^{\theta_1}(f; P) \cap C_{\mathrm{ap}}^{\theta_2}(f; P) = \emptyset$ ist, höchstens abzählbar.*

Beweis. V. Jarník hat bewiesen ([3]), daß die Menge Π aller $P \in H$, für welche zwei solche Richtungen φ_1 und φ_2 existieren, daß $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$ und $C^{\varphi_1}(f; P) \cap$ $\cap C^{\varphi_2}(f; P) = \emptyset$ ist, höchstens abzählbar ist. Nach dem Satz 1 gilt: $C_{\mathrm{ap}}^{\theta_1}(f; P) =$ $= C^{\theta_1}(f; P)$ und $C_{\mathrm{ap}}^{\theta_2}(f; P) = C^{\theta_2}(f; P)$. Da die Menge $\Pi_{\mathrm{ap}}^{\theta_1,\theta_2}$ eine Teilmenge von $H_0 \cup \Pi$ ist, ist die Menge $\Pi_{\mathrm{ap}}^{\theta_1,\theta_2}$ höchstens abzählbar.

Ähnlich beweist man folgenden Satz:

Satz 2'. *Wenn eine Funktion $f: R_2^+ \to (-\infty, \infty)$ die Eigenschaft $K(\theta)$ für alle Richtungen θ in jedem Punkt $P \in H - H_0$ hat, wobei H_0 eine abzählbare Menge ist, dann ist die Menge Π_{ap} aller Punkte $P \in H$, für welche zwei solche Richtungen θ_1*

und θ_2 *existieren, daß* $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi$ *und* $C_{\mathrm{ap}}^{\theta_1}(f; P) \cap C_{\mathrm{ap}}^{\theta_2}(f; P) = \emptyset$ *gilt, höchstens abzählbar.*

3. Satz 3. *Es sei* $R_2^+ = \{(x, y) : x, y \in (-\infty, \infty), x < y\}$. *Dann ist* $H = \{(x, x) : : x \in (-\infty, \infty)\}$. *Es sei* $0 < \theta < \pi$ *und* $g : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ *eine Funktion, die die Lipschitzeigenschaft hat. Dann hat die Funktion*

$$f(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}$$

die Eigenschaft $K(\theta)$ *in jedem Punkt* $(x, x) \in H$.

Beweis. Es sei L so eine positive Zahl, für welche $|g(x) - g(y)| \leqq L|x - y|$ für alle $x, y \in (-\infty, \infty)$ gilt.

Es sei (I, I_1) so ein Paar offener Intervalle, daß $\bar{I} \subset I_1$ gilt. Da $|f(x, y)| \leqq L$ ist, genügt es nur solche Paare (I, I_1), $\bar{I} \subset I_1$ zu nehmen, für welche $I_1 \subset \langle -L, L\rangle$ ist. Es sei also $I_1 \subset \langle -L, L\rangle$. Dann existiert ein $d > 0$ so, daß $\{z : \varrho(z, \bar{I}) \leqq d\} \subset I_1$ gilt. Es sei $P(\theta) = \{(x + at, x + bt) : t > 0\}$, wobei $|a| + |b| > 0$ und $a \neq b$ ist. Setzen wir

$$\omega = \min\left(\frac{|a - b|\, d}{2(|a| + |b|)\, L}, \frac{1}{2}\right), \quad C = \frac{1}{1 - \omega} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{2\omega}{(1 + \omega)}.$$

Es sei $u > 0$ und $v > 0$. Dann gilt:

$$g(x + au) - L|a|\,|v - u| \leqq g(x + av) \leqq g(x + au) + L|a|\,|v - u|.$$

Daraus bekommen wir:

$$g(x + au)\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) - \frac{L}{v}|a|\,|v - u| \leqq \frac{g(x + av)}{v} - \frac{g(x + au)}{u} \leqq$$

$$\leqq g(x + au)\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) + \frac{L}{v}|a|\,|v - u|.$$

Ähnlich bekommen wir:

$$g(x + bu)\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) - \frac{L}{v}|b|\,|v - u| \leqq \frac{g(x + bv)}{v} - \frac{g(x + bu)}{u} \leqq$$

$$\leqq g(x + au)\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) + \frac{L}{v}|b|\,|v - u|.$$

Aus diesen zwei Ungleichungen bekommen wir:

$$-\left|g(x + au) - g(x + bu)\right| \frac{|v - u|}{uv} - \frac{L}{v}(|a| + |b|)\,|v - u| \leqq$$

$$\leqq (g(x + au) - g(x + bu))\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) - \frac{L}{v}(|a| + |b|)\,|v - u| =$$

$$= g(x + au)\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) - \frac{L}{v}|a|\,|v - u| - \left(g(x + bu)\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) + \frac{L}{v}|b|\,|v - u|\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{g(x + av)}{v} - \frac{g(x + au)}{u} - \frac{g(x + bv)}{v} + \frac{g(x + bu)}{u} \leqq$$

$$\leqq g(x + au)\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) + \frac{L}{v}|a|\,|v - u| - g(x + bu)\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u}\right) + \frac{L}{v}|b|\,|v - u| \leqq$$

$$\leqq \left|g(x + au) - g(x + bu)\right| \frac{|v - u|}{uv} + \frac{L}{v}(|a| + |b|)\,|v - u|\,.$$

Daraus folgt:

$$\left|\frac{g(x + av) - g(x + bv)}{v} - \frac{g(x + au) - g(x + bu)}{u}\right| \leqq$$

$$\leqq \left|g(x + au) - g(x + bu)\right| \frac{|v - u|}{uv} + \frac{L}{v}(|a| + |b|)\,|v - u|\,.$$

Also für jedes $u > 0$ und $v > 0$ gilt:

$$\left|f((x + av,\ x + bv)) - f((x + au,\ x + bu))\right| =$$

$$= \left|\frac{g(x + av) - g(x + bv)}{(a - b)\,v} - \frac{g(x + au) - g(x + bu)}{(a - b)\,u}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{|a - b|}\left(\left|g(x + au) - g(x + bu)\right| \frac{|v - u|}{uv} + \frac{L}{v}(|a| + |b|)\,|v - u|\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{|a - b|}\left(L|a - b|\,u\,\frac{|v - u|}{uv} + \frac{L}{v}(|a| + |b|)\,|v - u|\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{2L(|a| + |b|)}{|a - b|}\left|1 - \frac{u}{v}\right|.$$

Es sei $Q \in P(\theta) \cap f^{-1}(I)$. Dann existiert ein $t > 0$ so, daß $Q = (x + at,\ x + bt)$ ist. Es sei $U = (x + au,\ x + bu)$, wobei $u = t/(1 - \omega)$ ist. Dann gilt

$$\varrho(U, P) = \surd(a^2 + b^2)\frac{t}{1 - \omega} = \frac{1}{1 - \omega}\varrho(Q, P) = C\,\varrho(Q, P)\,.$$

Es sei $v \in \langle t/(1+\omega), t/(1-\omega)\rangle$ und $V = (x + av, x + bv)$. Dann gilt:

$$\left|1 - \frac{t}{v}\right| \leqq \omega$$

und

$$|f(V) - f(Q)| = |f(x + av, x + bv) - f(x + at, x + bt)| \leqq$$
$$\leqq \frac{2L(|a| + |b|)}{|a - b|}\left|1 - \frac{t}{v}\right| \leqq \frac{2L(|a| + |b|)}{|a - b|}\,\omega \leqq d\,.$$

Da $f(Q) \in I$ ist, gilt $\varrho(f(V), \bar{I}) \leqq d$. Daraus bekommen wir, daß $f(V) \in I_1$ ist.

Also ist

$$d^{\theta}_{\varrho(U,P)}(f^{-1}(I_1); P) = \frac{1}{\varrho(U, P)}\,|\{X \in P(\theta) : \varrho(X, P) < \varrho(U, P), f(X) \in I_1\}|_1 \geqq$$
$$\geqq \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{\varrho(U, P)}\left|\left\langle\frac{t}{1+\omega}, \frac{t}{1-\omega}\right\rangle\right|_1 =$$
$$= \frac{(1-\omega)\sqrt{(a^2 + b^2)}}{\sqrt{(a^2 + b^2)}\,t}\,t\left(\frac{1}{1-\omega} - \frac{1}{1+\omega}\right) = \eta\,.$$

4. Aus den Sätzen 2 und 3 bekommen wir das Resultat von L. Zajíček:

Folgerung 1. *Wenn $g : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ eine Funktion ist, die die Eigenschaft von Lipschitz besitzt, dann ist die Menge aller $x \in (-\infty, \infty)$, für welche $D^+_{\mathrm{ap}} f(x) \cap D^-_{\mathrm{ap}} f(x) = \emptyset$ gilt, höchstens abzählbar.*

A. Khintchine hat in [4] folgendes bewiesen: *Wenn f eine monotone Funktion ist, die im Punkte x die approximative Ableitung besitzt, dann besitzt sie auch die Ableitung und beide sind einander gleich.* Aus den Sätzen 1 und 3 geht folgendes stärkeres Resultat für Funktionen, die die Lipschitzeigenschaft besitzen, hervor:

Folgerung 2. *Es sei $g : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ eine Funktion, die die Lipschitzeigenschaft besitzt. Dann ist die Menge aller approximativen derivierten Zahlen (approximativen derivierten Zahlen von rechts, bzw. approximativen derivierten Zahlen von links, bzw. approximativen symmetrischen derivierten Zahlen) der Funktion g in jedem Punkt x gleich der Menge aller derivierten Zahlen (derivierten Zahlen von rechts, bzw. derivierten Zahlen von links, bzw. symmetrischen derivierten Zahlen) der Funktion g in x.*

Aus dem Beweis des Satzes 3 ist klar, daß die Funktion $f : R_2^+ \to (-\infty, \infty)$ die Eigenschaft $K(\theta)$ im Punkte (x, x) hat, wenn es ein $\tau > 0$ und eine Konstante $C(\theta)$ so gibt, daß $|f(x + at, x + bt) - f(x + au, x + bu)| \leqq C(\theta)\,|1 - t/u|$ für alle $0 < t \leqq \tau$, $0 < u \leqq 2t$ gilt, wenn $P(\theta) = \{(x + at, x + bt) : t > 0\}$ ist.

Es sei A die Klasse aller Funktionen $f : R_2^+ \to (-\infty, \infty)$, für welche in jedem (x, x) und für jede Richtung θ ein $\tau > 0$ und eine Konstante $C(\theta)$ so existiert, daß $|f(x + at, x + bt) - f(x + au, x + bu)| \leqq C(\theta) |1 - t/u|$ für alle $0 < t \leqq \tau$ und $0 < u \leqq 2t$ gilt, wenn $P(\theta) = \{(x + at, x + bt) : t > 0\}$ ist. Man kann leicht beweisen, daß $f : R_2^+ \to (-\infty, \infty)$ aus A ist, wenn f die Lipschitzeigenschaft besitzt.

A. M. Bruckner und C. Goffman haben in [1] bewiesen, daß für jede stetige Funktion $f : R_2^+ \to (-\infty, \infty)$ und alle Paare von Richtungen θ_1 und θ_2 die Menge aller Punkte $P \in H$, für welche $C_{ap}^{\theta_1}(f; P) \cap C_{ap}^{\theta_2}(f; P) = \emptyset$ gilt, von erster Kategorie von Baire ist. C. Goffman und W. T. Sledd haben in [2] bewiesen, daß für jede stetige Funktion $f : R_2^+ \to (-\infty, \infty)$ und jede Richtung θ die Menge aller Punkte $P \in H$, für welche $C_{ap}^{\theta}(f; P) = C^{\theta}(f; P)$ gilt, eine Menge von erster Kategorie von Baire ist. Auf Grund unseres Satzes 1 und des zitierten Satzes von V. Jarník gilt für die Klasse A folgendes:

Satz 4. *Wenn f eine Funktion aus der Klasse A ist, dann ist die Menge aller Punkte $P \in H$, für welche zwei solche Richtungen θ_1 und θ_2 existieren, daß $C_{ap}^{\theta_1}(f; P) \cap C_{ap}^{\theta_2}(f; P) = \emptyset$ ist, höchstens abzählbar. Für jede Funktion f aus der Klasse A gilt $C_{ap}^{\theta}(f; P) = C^{\theta}(f; P)$ in jedem Punkt $P \in H$ und für jede Richtung θ.*

Aus dem Satz 4 bekommen wir:

Folgerung 3. *Für jede Funktion $f : R_2^+ \to (-\infty, \infty)$ mit der Lipschitzeigenschaft ist die Menge aller Punkte $P \in H$, für welche zwei solche Richtungen θ_1 und θ_2 existieren, daß $C_{ap}^{\theta_1}(f; P) \cap C_{ap}^{\theta_2}(f; P) = \emptyset$ gilt, höchstens abzählbar. Für jede Funktion $f : R_2^+ \to (-\infty, \infty)$ mit der Lipschitzeigenschaft gilt $C_{ap}^{\theta}(f; P) = C^{\theta}(f; P)$ in jedem Punkt $P \in H$ und jeder Richtung θ.*

Literatur

[1] *A. M. Bruckner, C. Goffman,* The boundary behavior of real functions in the upper half plane, Revue Roum. Math. pures et appl. *11* (1966), 507—518.

[2] *C. Goffman, W. T. Sledd,* Essential cluster sets, J. London Math. Soc. *1*, Ser. 2 (1969), 295—302.

[3] *V. Jarník,* Sur les fonctions de deux variables réelles, Fund. Math. *27* (1936), 147—150.

[4] *A. Khintchine,* Recherches sur la structure des fonctions measurables, Fund. Math. *9* (1927), 212—279.

[5] *L. Zajíček,* On the intersection of the sets of the right and left internal approximate derivatives, Czech. Math. J. *23* (*98*) (1973), 629—634.

Anschrift des Verfassers: 886 25 Bratislava, Obrancov mieru 41, ČSSR (Matematický ústav SAV).