Czechoslovak Mathematical Journal

Jaroslav Kurzweil; Břetislav Novák

Professor Vojtěch Jarník ist gestorben

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 21 (1971), No. 3, 493–(524)

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101051`

Czechoslovak Mathematical Journal, 21 (96) 1971, Praha

NEWS AND NOTICES

PROFESSOR VOJTĚCH JARNÍK IST GESTORBEN

JAROSLAV KURZWEIL, BŘETISLAV NOVÁK, Praha

Dienstag, am 22. September 1970 hat die tschechoslowakische Wissenschaft und die Weltmathematik einen unersetzlichen Verlust erlitten. In den Abendstunden starb in Prag, nach einer längeren schweren Krankheit, der Professor der Karlsuniversität RNDr. VOJTĚCH JARNÍK, ordentliches Mitglied der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften. Bei einer einfachen Trauerfeier, Montag, am 28. September 1970 in der grossen Zeremonienhalle des Krematoriums in Prag-Strašnice verabschiedeten sich von Professor Jarník die Akademiemitglieder J. Bačkovský und J. Novák im Namen der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften und im Namen der Karlsuniversität und deren mathematisch-physikalischer Fakultät Prof. Dr. A. Švec DrSc., Dekan der Fakultät. Das Andenken Prof. Jarníks verehrte durch ihre Anwesenheit fast die ganze Prager mathematische Gemeinde, soeben wie auch viele Mathematiker von Instituten und Hochschulen ausser Prag.

In diesem Artikel möchten wir an die bedeutendsten Züge des Lebens, Werkes und Persönlichkeit Prof. Jarníks erinnern. Mit Rücksicht auf seine reiche und langjährige Tätigkeit in verschiedenen Gebieten der Mathematik, Teilnahme an Wissenschafts- und Hochschulereignissen, kann dieser Artikel nich erschöpfend sein; es ist nur ein kleiner Beitrag zur Erkenntnis des Lebens und Werkes von Prof. Jarník. In diesem Zusammenhang deuten wir noch auf die Abhandlungen von V. Knichal und Š. Schwarz (Časopis pro pěst. matematiky *82* (1957), 463–492, Czech. Math. Journal *8* (*83*) (1958), 155–161), V. Kořínek (Pokroky mat. fyz. a astronomie *III* (1958), 1–8), J. Kurzweil (Časopis pro pěst. matematiky *92* (1967), 486–489, Czech. Math. Journal *17* (*92*) (1967), 624–628) hin, welche den Lebensjubiläen Prof. Jarníks gewidmet sind, und an den Nekrolog von Š. Schwarz und B. Novák (Acta Arithmetica *19* (1971)).

Professor Jarník wurde am 22. Dezember 1897 in Prag geboren, wo sein Vater Jan Urban Jarník Professor der romanischen Philologie an der philosophischen Fakultät der Karlsuniversität war. Nach dem Abitur am 1. tschechischen Realgymnasium in Prag im Jahre 1915 inskribierte er sich als ordentlicher Hörer an der damaligen philosophischen Fakultät der tschechischen Universität, wo damals Mathematik und Physik vorgetragen wurden. Sein Hochschulstudium beendete er im Jahre 1921 (schon an der naturwissenschaftlichen Fakultät der Karlsuniversität) mit dem Doktorat der Naturwissenschaften (als Doktordissertation reichte Jarník im Grunde die Arbeit [1] ein).

Die Anfänge der Lehrtätigkeit Prof. Jarníks sind in Brno zu suchen, wo er in den Jahren 1919–1921 als Assistent bei Prof. J. Vojtěch an der dortigen technischen Hochschule wirkte. Im Jahre 1921 ging er nach Prag über, wo er bis 1929 Assistent des mathematischen Seminars der naturwissenschaftlichen Fakultät der Karlsuniversität war. Da arbeitete er unter dem unmittelbaren Einfluss von Prof. K. Petr. Während dieser Zeit verbrachte Jarník fast drei Jahre in Göttingen (in den Zeitabschnitten 1923–25 und 1927–28), wo er vorwiegend Schüler einer der leitenden Gestalten der damaligen Mathematik – Prof. E. Landau – war. Die Persönlichkeit von Landau und seine wissenschaftliche Richtung beeinflussten wesentlich die weitere Arbeit von Prof. Jarník. Landau selbst hat ihn für einen seiner besten Schüler und Mitarbeiter gehalten. Nach der Heimkehr vom ersten Aufenthalt in Göttingen im Jahre 1925 habilitierte sich Jarník (als Habilitationsschrift lege er die Arbeit [7] vor).

Im Jahre 1929 wurde er zum ausserordentlichen Professor der Mathematik an der Karlsuniversität ernannt und vom Jahre 1935, nur mit einer, von der Okkupation erzwungenen, Pause, arbeitete er, bis zu seiner Pensionierung im Sommer 1968, als ordentlicher Professor der Mathematik an der naturwissenschaftlichen und später an der mathematisch-physikalischen Fakultät der Universität.

Prof. Jarník beschränkte sich aber nicht nur auf die wissenschaftliche und pädagogische Arbeit. Er war eine anerkannte Persönlichkeit bei der Organisation der Wissenschaft und der Arbeit der Hochschulen in der Tschechoslovakei. Insbesondere ist dieses im Zeitabschnitt nach dem Jahre 1945 merkbar, wo er mit einer Reihe von bedeutungsvollen Funktionen wörtlich überhäuft war. Wir führen nur die langjährige Arbeit am Boden der Karlsuniversität in den Würden eines Prodekans, Dekans oder Prorektors an, die opferwillige Arbeit bei dem Aufbau der Tschechoslovakischen Akademie der Wissenschaften, deren ordentliches Mittglied – Akademiker – er sofort nach deren Gründung im Jahre 1952 geworden ist. Mehr als ein halbes Jahrhundert arbeitete er in der Vereinigung der tschechoslovakischen Mathematiker un Physiker, fünfzehn Jahre als leitender Redakteur des mathematischen Teiles der Zeitschrift Časopis pro pěstování matematiky, welcher er ein anerkanntes Niveau einprägte. Nicht an letzter Stelle steht seine aufopfernde und erfolgreiche Tätigkeit als Leiter des Lehrstuhles, welcher er sich, trotz aller Belastung, voll gewidmet hat.

Übergehen wir nun zu einer kurzgefassten Charakteristik der wissenschaftlichen und pädagogischen Arbeit von Prof. Jarník.

Seine wissenschaftliche Arbeit was ausserordentlich vielseitig. Dieses bezeugen neunzig wissenschaftliche Originalartikel, welche verschiedenen Gebieten der Mathematik gewidmet sind (Zahlentheorie, Theorie der reellen Funktionen aber auch Reihentheorie, Graphentheorie, Topologie usw.). Kennzeichnend ist, dass fast jede Arbeit eine ganze Reihe von Originalergebnissen und oft einen neuen, überraschenden Anblick der Probleme mit sich bringt. Ein wesentlicher Zug der meisten Arbeiten von Jarník ist die grosse Schärfe der Ergebnisse. Jarník veröffentlichte einfach seine Ergebnisse nicht, bis nur die kleinste Hoffnung für deren Verbesserung bestand. Darum widmet er auch eine grosse Aufmerksamkeit der Schärfe der Ergebnisse und zeigt, dass diese man nicht verbessern kann.

Das Hauptgebiet der wissenschaftlichen Arbeit von Prof. Jarník war die Zahlentheorie und namentlich die Gitterpunkttheorie, diophantische Approximationen und Geometrie der Zahlen. Sein zweites Arbeitsgebiet war die mathematische Analysis, insbesondere die Theorie der reellen Funktionen.

Beachten wir zuerst die Zeitfolge seiner Arbeiten. In den Arbeiten ist immer die Zahlentheorie überwiegend; die die Funktionentheorie betreffenden Arbeiten kommen einesteils in der Anfangszeit (1920 – 1927) vor, wo Jarník auch eine interessante, die Reihentheorie betreffende, Gruppe von Arbieten veröffentlicht hat, und anderenteils insbesondere in den Jahren 1933 – 1936 (ein offensichtlicher Einfluss der sog. „polnischen Schule“). Selbst in der Zahlentheorie ist ausdrücklich die Gitterpunkttheorie überwiegend, welcher sich Prof. Jarník eigentlich vom Anfang seiner wissenschaftlichen Laufbahn bis zum Lebensende, ohne sichtbaren Pausen, widmete. Ähnliches gilt auch für die Theorie der diophantischen Approximationen, welche etwas später die Aufmerksamkeit von Jarník anzog und in der er etwas weniger Arbeiten veröffentlichte. In dem kurzem Zeitraum 1939 – 1949 tritt er zu einer Serie von Publikationen über die Geometrie der Zahlen zu.

Die Planmässigkeit der wissenschaftlichen Arbeit von Prof. Jarník folgt von der Feststellung, dass er praktisch in jedem Jahr zumindest zwei – oft sehr inhaltsreiche – Arbeiten veröffentlicht hat; zwei Ausnahmsfälle grösserer Bedeutung entsprechen der Umgebung des Jahres 1945 und dem Zeitraum nach dem Jahre 1950.

Zu den erfolgreichsten Perioden gehören insbesondere die Jahre 1928 – 31 (welche fast ausschliesslich den, mehr als zwanzig, Arbeiten von der Gitterpunkttheorie in mehrdimensionalen Ellipsoiden gewidmet ist) und der Zeitraum 1934 – 35 (da ist die Theorie der reellen Funktionen und insbesondere die sogenannte Methode der Kategorien überwiegend).

Übergehen wir nun zur Analyse der Arbeiten von Jarník über die Gitterpunkttheorie. Mit Rücksicht auf deren Anzahl und Umfang (27 Arbeiten auf mehr als 500 Seiten), beschränken wir uns nur auf eine unvollständige Auswahl der wichtigsten und am leichtesten beschreibbaren Ergebnisse und auf die Begrenzung der fundamentalen Zusammenhänge.

Das bekannteste und auch älteste ist das sogenannte Gausssche „Kreisproblem“. Sei für $x > 0$, $A(x)$ die Anzahl der Paare ganzer Zahlen u und v, für welche $u^2 + v^2 \leqq$ $\leqq x$ gilt. $A(x)$ für $x > 0$ gibt also die Anzahl der im abgeschlossenen Kreis mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt und mit dem Halbmesser $\sqrt{x}$ liegenden Gitterpunkte an. Wir werden also ganz natürlich die Funktion $A(x)$ mit der Oberfläche $V(x)$ des Kreises d. h. mit dem Ausdruck πx annähern zu versuchen. Das „Kreisproblem“ beruht nun in der Auffindung der womöglich besten Abschätzungen der Grösse der Differenz $P(x) = A(x) - V(x)$ im folgenden Sinne:

Elementare Erwägungen zeigen, dass $P(x) = O(\sqrt{x})$ [1]) ist. Im Jahre 1906 hat der polnische Mathematiker Sierpiński bewiesen, dass $P(x) = O(x^{1/3})$ ist. Zu einem wichtigen Ergebnis gelangten im Jahre 1915 Hardy mit Landau, welche die Beziehung $P(x) = \Omega(x^{1/4})$ [2]) bewiesen haben. Daher folgt, dass für den „richtigen" Exponenten der Abschätzungen der Funktion $P(x)$ d. h. für den Wert

$$f = \limsup_{x \to +\infty} \frac{\lg |P(x)|}{\lg x} \tag{1}$$

die Ungleichung $\frac{1}{4} \leqq f \leqq \frac{1}{3}$ gilt. (Wir bemerken, dass die Beziehung (1) dasselbe wie die Gültigkeit der Beziehungen $P(x) = O(x^{f+\varepsilon})$, $P(x) = \Omega(x^{f-\varepsilon})$ für jedes $\varepsilon > 0$ bedeutet.) Das „Kreisproblem" beruht also im Grund auf der Bestimmung des Wertes (1).

Einen gewissen Umbruch bedeuteten die Arbeiten von van der Corput, welcher im Jahre 1923 zeigte, dass $f \leqq \frac{37}{112}$ ist. Es ist zu bemerken, dass es trotz der grossen Bemühung einer Reihe hervorragender Mathematiker in den vergangenen fast fünfzig Jahren das angeführte Problem zu lösen nicht gelang (es ist z.B. bekannt, dass $f \leqq \frac{13}{40}$ ist, aber die Ungleichung $f \geqq \frac{1}{4}$ konnte nicht verbessert werden). Wir führen diese Ergebnisse an um zu zeigen wie lange Anstrengungen zu einer ganz „unerheblichen" Verkleinerung des Exponenten benötigt waren: desto mehr ragt dann vielleicht die Bedeutung und Schwierigkeit der Arbeiten von Jarník in diesem Gebiet vor.

Im Mittelpunkt der Interessen von Mathematikern in dieser Zeit standen die verschiedenen Verallgemeinerungen des „Kreisproblems". Wir berühren nur zwei Richtungen, welche zum Gegenstand intensiver Interessen von Prof. Jarník geworden sind.

Die erste Verallgemeinerung ist die folgende. Wir bleiben in der Ebene, aber anstatt des Kreises $u^2 + v^2 \leqq x$ erwägen wir eine konvexe, kompakte Menge, welche durch eine Kurve beschränkt ist, deren Länge höchstens $\sqrt{x}$ ist, welche eine stetig variierende Tangente und Krümmungsradius hat, wobei der letztere von Null verschieden ist und den Wert $c\sqrt{x}$, wo c eine positive Konstante ist, nicht überschreitet. Für diese Mengenklasse hat van der Corput im Jahre 1919 die Abschätzung $P(x) = O(x^{1/3})$ bewiesen, wo $P(x)$ eine analogische Bedeutung, wie oben für den Kreis, hat.

Es erweckte nun den Anschein, dass auch für diese Verallgemeinerung ähnliche Verbesserungen, wie bei dem „Kreisproblem" zu erwarten sind. Sehr überraschend und unerwartet war darum das Ergebnis von Jarník in der Arbeit [9], wo (ausser weiteren feineren Resultaten) eine Menge mit den angeführten Eigenschaften konstruiert wird, für welche $P(x) = \Omega(x^{1/3})$ ist. Den Prunk von diesem Ergebnis doku-

---

[1]) Die Beziehung $f(x) = O(g(x))$ bedeutet, dass für hinreichend grosse x, $g(x) > 0$ ist und $\limsup_{x \to +\infty} |f(x)|/g(x) < +\infty$ gilt.

[2]) Die Beziehung $f(x) = \Omega(g(x))$ bedeutet, dass $f(x) = o(g(x))$ nicht gilt, d. h. $g(x)$ ist für hinreichend grosse x positiv und es ist $\limsup_{x \to +\infty} |f(x)|/g(x) > 0$.

mentiert auch dessen Anklang in der Literatur: E. Landau widmet dieser Konstruktion ein ganzes Kapitel seines Werkes „Vorlesungen über Zahlentheorie“, das Ergebnis ist auch in anderen Monographien angeführt, in der letzten Zeit z.B. im Buch von Gel'fond und Linnik.

In den „Ebenenproblemkreis“ fallen noch weitere Arbeiten von Jarník ein. In [7] verallgemeinert Jarník die oben angeführte Ω-Abschätzung von Landau und Hardy für eine genügend allgemeine Klasse von ebenen Gebieten (diese werden etwas anders als oben charakterisiert). Die Arbeit [12] betrifft diesen Problemkreis von einem etwas anderem Gesichtspunkt. Wir erwägen im Winkel $0 \leqq u \leqq y/x \leqq v \leqq 1$, $x > 0$ eine genügend „vernünftige“ Kurve L, welche einen gewissen Sektor begrenzt und sei $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ die Folge aller positiver Zahlen λ, für welche bei der Homothätie mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt und mit dem Koeffizienten λ das Bild der Kurve L zumindest einen Gitterpunkt enthält. Jarník untersucht nun die interessante Frage des Verhaltens der Differenz $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ für grosse n, besonders gründlich untersucht er den Fall, wenn L ein Teil einer quadratischen Kurve ist. Den „Ebenenproblemkreis“ berühren noch die Arbeiten [8], [33] und [71], welche wir an einer anderen, zweckmässigeren Stelle erwähnen.

Die zweite Richtung der Verallgemeinerung kann folgendermassen charakterisiert werden: vom „Kreisproblem“ behalten wir die Tatsache, dass $u^2 + v^2$ eine positiv definite quadratische Form ist. Das Problem also ist das folgende: $r \geqq 2$ ist eine natürliche Zahl, $Q(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ ist eine positiv definite quadratische Form mit einer symmetrischen Koeffizientenmatrix und für $x \geqq 0$ sei $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im Gebiet $Q(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leqq x$. Bezeichnen wir mit $V(x)$ den Volumen diesen Ellipsoides, d. h. $V(x) = \pi^{r/2} x^{r/2} / \Gamma(r/2 + 1) \sqrt{D}$ wo D die Determinante der Form Q ist und sei $P(x) = A(x) - V(x)$. Wir suchen nun – analogisch wie bei dem „Kreisproblem“ – die womöglich besten O- und Ω-Abschätzungen.

Schon Minkowski zeigte im Jahre 1905 elementarerweise die Abschätzung

$$P(x) = O(x^{r/2 - 1/2}) .$$

In den Jahren 1915–1924 untersuchte dieses (noch viel allgemeiner gestellte) Problem E. Landau und bewies, dass

$$P(x) = O(x^{r/2 - r/(r+1)}) , \quad P(x) = \Omega(x^{r/4 - 1/4}) \tag{2}$$

ist. Bemerken wir, dass für den Fall des Kreises man daher die oben angeführten Ergebnisse von Sierpiński, Landau und Hardy bekommt. Die Lücke zwischen den beiden Abschätzungen ist – besonders für grosse r – sehr beträchtlich und wir haben also das Problem z. B. den Wert $f_Q = f$, welcher nach (1) definiert ist, aufzufinden.

Den ersten Fortschritt bedeuteten die Ergebnisse von A. Walfisz und E. Landau von den Jahren 1924–25. Deren Ergebnis war

$$P(x) = O(x^{r/2 - 1}) \tag{3}$$

für $r \geqq 5$ insofern Q eine sog. rationale Form ist (d. h. deren Koeffizienten sind ganze Vielfache einer und derselben reellen Zahl). Für $r = 4$ und eine rationale Form Q zeigte Landau die Gültigkeit der Abschätzung

$$P(x) = O(x \lg^2 x) . \tag{4}$$

Bemerken wir an dieser Stelle, dass die Probleme für „kleine" Dimensionen ($r = 2, 3, 4$) einen anderen Charakter haben und eine von den „grossen" Dimensionen ($r \geqq 5$) abweichende Behandlung benötigen, wobei der Fall $r = 4$ gewissermassen ein „Übergangsfall" ist.[3]) Dieses folgt z. B. ungefähr von der Tatsache, dass jede natürliche Zahl man als eine Summe von vier Quadraten ganzer Zahlen darstellen kann, aber diese Anzahl kann allgemein nicht verkleinert werden.

Die Methode, welche Walfisz und Landau beim Herleiten ihrer O-Abschätzungen benützen, beruht auf dem folgenden Gedanken (der Einfachheit wegen besitze Q ganzzahlige Koeffizienten). Die Funktion

$$f(z) = \sum z^{Q(m_1, m_2, \ldots, m_r)}$$

(es wird über alle ganze $m_1, m_2, \ldots, m_r$ summiert) ist offenbar im Kreis $|z| < 1$ holomorph und die Koeffizienten a_m deren Taylorschen Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$$

geben offenbar die Anzahl der möglichen Fälle, bei denen die Zahl m durch die Form Q ausgedrückt werden kann, an. Wir haben offenbar

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi f(z)\, z^{-m-1}\, dz ,$$

wobei φ eine positiv gerichtete Kreislinie mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt und mit dem Halbmesser $r < 1$ ist. Benützen wir nun gewisse Transformationseigenschaften der Funktion f, welche deren angenäherte Darstellung in der Umgebung des Punktes $re^{2\pi i h/k}$ (h, k ganz, $(h, k) = 1$, $k > 0$, $r = 1 - 1/m$) ermöglichen, dann erhalten wir die Beziehung

$$a_m = \frac{\pi^{r/2} m^{r/2-1}}{\sqrt{(D)}\, \Gamma(r/2)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{h=0 \\ (h,k)=1}}^{k} \frac{S_{h,k}}{k^r} e^{-2\pi i (mh/k)} + O(m^{r/4}) \tag{5}$$

(für $m \to +\infty$), wobei $S_{h,k}$ gewisse Summen (die sog. Gaussschen Summen) sind, für welche $|S_{h,k}| \leqq ck^{r/2}$ gilt[4]). Nachdem $A(x) = \sum_{\lambda_m \leqq x} a_m$ ist, ergibt sich daher (3) für

[3]) Wie es Walfisz zeigte, ist für rationale Formen und $r = 4$ $P(x) = O(x \lg^{2/3} x)$ und $P(x) = \Omega(x(\lg \lg x)^\tau)$, wo τ nur von Q abhängt.

[4]) Da und auch weiter bedeutet der Buchstabe c (allgemein verschiedene) Konstanten, welche nur von Q abhängen.

$r \geqq 8$. Mittels einer einfachen Abänderung von diesem Verfahren kann man (3) auch für $r \geqq 5$ und die Abschätzung (4) beweisen. Es war aber nicht klar, ob diese Abschätzungen definitiv sind und es stand keine wirksame Ω-Methode (ausser der Methode von Landau, welche zu der Abschätzung (2) führt) zur Verfügung. In dieser Lage richtete Jarník die Aufmerksamkeit zu der überraschenden Tatsache, welche allen entgangen ist, dass für rationale Ellipsoide man ganz elementar die Abschätzung

$$P(x) = \Omega(x^{r/2-1}) \tag{6}$$

beweisen kann. Dadurch war das erste definitive Ergebnis dieser Theorie erreicht.

Das Ergebnis von Jarník hat eine ganze Reihe von Untersuchungen (Landau, Müntz, Petersson, Walfisz und Jarník) angeregt, welche mit Hilfe von verschiedenen Methoden geführt worden sind. Wir erwähnen nur kurz den Beitrag von Jarník in dieser Richtung (anstatt von rationalen Ellipsoiden erwägen wir der Einfachheit wegen nur Ellipsoide mit ganzzahligen Koeffizienten und $r \geqq 5$).

In den Arbeiten [20] und [21] wurde die Existenz soeiner Konstante c gezeigt, dass jede von den Ungleichungen

$$P(n) > (M + c)\, n^{r/2-1}\,, \quad P(n) < (M - c)\, n^{r/2-1}\,, \quad M = \frac{\pi^{r/2}}{2\sqrt{(D)}\,\Gamma(\frac{1}{2}r)}$$

für unendlich viele natürliche n gilt, sogar für alle Gleider einer arithmetischen Folge. Wenn wir also

$$\varrho_Q(n) = \frac{P(n)}{n^{r/2-1}}$$

bezeichnen, bekommen wir sofort, dass

$$\liminf_{n \to +\infty} \varrho_Q(n) < M - c\,, \quad \limsup_{n \to +\infty} \varrho_Q(n) > M + c$$

ist. Wenn $Q(u) = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_r^2$ ist (der Fall der r-dimensionalen Kugel), kann die Folge $\varrho_Q(n) = \varrho_r(n)$ viel ausführlicher untersucht werden. Man kann z. B. (siehe [16]) asymptotisch (in Bezug auf r) $\limsup_{n \to +\infty} \varrho_r(n)$ and $\liminf_{n \to +\infty} \varrho_r(n)$ ausdrücken, beweisen, dass diese Folge unendlich viele Häufungspunkte hat ([31]) oder (für gerade $r \geqq 8$) deren Häufungspunkte untersuchen, wenn n gewisse unendliche Mengen natürlicher Zahlen durchläuft (siehe [24]). Die Wichtigkeit dieser und weiterer Ergebnisse von Jarník in dieser Richtung bezeugt die Tatsache, dass in der bekannten Monographie von Walfisz „Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln" fast ausschliesslich nur von diesen Ergebnissen das ganze dritte Kapitel zusammengestellt ist.

Der Ausgangspunkt für die Mehrheit der soeben zitierten Ergebnisse war die Beziehung (5). Erwähnen wir darum schon an dieser Stelle die Arbeit [32], wenn es sich in dieser auch um die „diskrete" Form des Mittelwertsatzes handelt, welcher weiter behandelt wird. Jarník zeigt, dass für jede Konstante E eine positive Konstante c_E so existiert, dass

$$\sum_{n \leq x} (P(n) - En^{r/2-1})^2 = c_E x^{r-1} + g(x),$$

gilt, wo $g(x) = O(x^{r-2})$ für $r > 8$, $g(x) = O(x^{r/2-1} \lg x)$ für $r = 8$, $g(x) = O(x^{3r/4} \lg x)$ für $r = 5, 6, 7$ und $g(x) = \Omega(x^{r-2})$ für $E = 0$, $r \geqq 5$. Daher bekommen wir wieder die Abschätzung (6) und überdies sehen wir, dass auch im „Mittelwert“ die Werte $P(n)$ nicht asymptotisch durch den Ausdruck $En^{r/2-1}$ mit einem Konstanten E approximiert werden können.

Es ist begreiflich, dass sobald durch die Beziehungen (3) und (6) das Problem für rationale Ellipsoide aufgelöst wurde (wenn auch nur für $r \geqq 5$), konzentrierte sich alle Aufmerksamkeit auf den Fall irrationaler Ellipsoide. Die einzige wirksame Methode ging aus der Beziehung (5) aus. Mit einer grossen Bemühung gelang es Walfisz diese Methode auszunützen und für Formen der Gestalt

$$\alpha u_1^2 + Q_1(u_2, u_3, \ldots, u_r)$$

($\alpha > 0$ ist irrational, Q_1 ist eine rationale Form) für $r \geqq 10$ die Abschätzung

$$P(x) = o(x^{r/2-1})$$

zu beweisen und zugleich auch deren allgemeine Unverbesserbarkeit zu zeigen. Zugleich zeigte er aber, dass für fast alle[5] $\alpha > 0$, $r \geqq 10$ sogar

$$P(x) = O(x^{r/2-6/5} \lg^{1/4} x) \tag{8}$$

ist.

Von der Arbeit von Walfisz folgten zwei Tatsachen: irrationale Ellipsoide verhalten sich offenbar ganz anders als die rationalen und eine weitere wirksame Ausnützung der angeführten Methode kann nicht wesentlich neue Ergebnisse mit sich bringen. Wir machen aber besser, wenn wir den zuständigsten Kenner — A. Walfisz — sprechen lassen, welcher am 26. September 1929 auf dem ersten Kongress der slawischen Mathematiker folgendes sagte: „Obwohl also die Abschätzungen (7) und (8) einen gewissen Einblick in die Gitterpunktheorie für irrationale Ellipsoide mit sich brachten, war es doch vom Anfang an offensichtlich, dass der, zu ihnen führende, Gedankengang, wegen dem Mangel an besseren Mitteln, nur ein gewisses Orientationsmittel bildet. Es war also nötig die Singularreihe[6] über Bord werfen und etwas ganz anderes zu finden. Ich dachte, dass dieses eine Weile dauern wird. Desto mehr überraschten mich — und bestimmt nicht nur mich selbst — die Entdeckungen von Jarník. In einer Reihe von Abhandlungen, deren Publikation in die Mitte des vorigen

[5]) Fast alle im Sinne des Lebesgueschen Masses (ähnlich auch in den weiteren Formulationen).

[6]) Singularreihe — verstehe die Reihe in (5).

Jahres einfällt und deren Originalität, Gedankentiefe und technische Durchführung zu den bemerkenswertesten Arbeiten der modernen Forschung gehören, hat Jarník mit sehr ergiebigen Mitteln das Problem erfasst und erhielt so eine ganze Reihe von Ergebnissen überraschender Genauigkeit.“[7])

Der Beitrag der Arbeiten Prof. Jarníks zu der Gitterpunkttheorie in Ellipsoiden beruht also in der Ausarbeitung neuer, sehr wirksamer O- und Ω-Methoden, mit denen es ihm gelang eine ganze Reihe definitiver Ergebnisse zu beweisen — eine Erscheinung, welche in der Zahlentheorie und insbesondere in der Gitterpunkttheorie einzelstehend ist. Man kann sogar sagen, dass alle definitiven Ergebnisse in diesem Gebiet entweder von ihm abstammen, oder sind diese durch seine Arbeiten bedingt.

Wir behandeln nun kurz die Fundamentalgedanken der Methoden von Jarník für das Studium der O- und Ω-Abschätzungen der Funktion $P(x)$. Im Grunde sehr einfach ist Jarníks Ω-Methode. Die Funktion $A(x)$ ist teilweise konstant; eine Änderung der Funktion $P(x)$ ist also „zumeist“ durch eine Änderung der Funktion $V(x) = cx^{r/2}$ gegeben. Ausführlicher gesagt: es sei $A(x)$ konstant in den Intervallen $[\lambda_n, \lambda_n + h_n]$, wo $0 < h_n < \lambda_n$, $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$. Also ist

$$|P(\lambda_n + h_n) - P(\lambda_n)| = c((\lambda_n + h_n)^{r/2} - \lambda_n^{r/2}) \geqq \tfrac{1}{2}cr\, h_n \lambda_n^{r/2-1} .$$

Wenn wir nun wissen, dass für ein gewisses $\beta \geqq 0$, $h_n \lambda_n^\beta \geqq c$, $n = 1, 2, \ldots$ ist, bekommen wir daher

$$|P(\lambda_n + h_n) - P(\lambda_n)| \geqq c\lambda_n^{r/2-1-\beta} .$$

Es ist also entweder

$$|P(\lambda_n)| \geqq c\lambda_n^{r/2-1-\beta} \quad \text{oder} \quad |P(\lambda_n + h_n)| \geqq c\lambda_n^{r/2-1-\beta} \geqq c(\lambda_n + h_n)^{r/2-1-\beta}$$

d. h. es ist

$$P(x) = \Omega(x^{r/2-1-\beta}) .$$

Ist z. B. Q eine ganzzahlige Form, dann kann $\lambda_n = n$, $h_n = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ gewählt werden und wir bekommen so die Abschätzung (6). Auf welche Weise kann man diesen Gedanken zu irrationalen Ellipsoiden anwenden? Beschränken wir uns (so wie es Jarník tut) im folgenden nur auf Formen „fast diagonaler“ Gestalt:

$$(9) \qquad Q(u) = a_1 Q_1(u_1, u_2, \ldots, u_{r_1}) + a_2 Q_2(u_{r_1+1}, \ldots, u_{r_1+r_2}) + \ldots$$
$$\ldots + a_\sigma Q_\sigma(u_{r_1+r_2+\ldots+r_{\sigma-1}+1}, \ldots, u_r) ,$$

$\sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma$ sind natürliche Zahlen, $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\sigma$ sind positiv definite quadratische Formen mit ganzzahligen Koeffizienten, $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ sind positive reelle Zahlen. Man kann nun zeigen, dass wenn die Ungleichungen

$$\left|\frac{a_j}{a_1} q - p_j\right| \leqq q^{-\gamma} , \quad j = 2, \ldots, \sigma$$

[7]) Siehe Časopis pro pěst. mat. *59* (1929), 200—223.

unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $p_2, \ldots, p_\sigma, q$ haben, dann kann man λ_n und h_n mit den obigen Eigenschaften für $\beta = 1/\gamma$ wählen. Daher folgt also unmittelbar die Abschätzung

$$P(x) = \Omega(x^{r/2-1-1/\gamma}).$$

Jarník modifizierte wohl einigemale diese Methode. Die Ergebnisse zeigen, dass der Wert (1) wahrscheinlich sehr eng mit den Simultanapproximationen der Zahlen $a_2/a_1, a_3/a_1, \ldots, a_\sigma/a_1$ zusammenhängen wird.

Unverhältnissmässig schwieriger ist Jarníks O-Methode. Die oben angedeutete, von der Potenzreihe ausgehende, Methode ist offenbar für irrationale Ellipsoide nicht geeignet. Jarník erwägt darum die Dirichletreihe

$$\Theta_Q(s) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_r} e^{-sQ(m_1, m_2, \ldots, m_r)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}, \tag{10}$$

welche eine holomorphe Funktion im Gebiet $\operatorname{Re} s > 0$ definiert. Die Zahlen λ_m sind die Werte der Form Q in den Gitterpunkten, die Zahl a_m gibt die Anzahl der Gitterpunkte auf der Fläche $Q(u) = \lambda_m$ an. Wie es bekannt ist, kann man nun (der Einfachheit wegen abgesehen von der Tatsache, dass die Gleichung nur für $x \neq \lambda_m$, $m = 1, 2, \ldots$ gilt)

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}\,\Theta_Q(s)}{s}\,\mathrm{d}s \tag{11}$$

für beliebiges positives a schreiben, wo über die Gerade $\operatorname{Re} s = a$ integriert wird. Wir übergehen ferner auch die Tatsache, dass dieses Integral nicht absolut konvergent ist und dass man direkte Abschätzungen nicht durchführen kann[8]). Von (11) ergibt sich sofort der Ausdruck

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{xs}\,F(s)}{s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i} \int_{(a)} \frac{e^{xs}\,F(s)}{s}\,\mathrm{d}s, \tag{12}$$

wo $F(s) = \Theta_Q(s) - \pi^{r/2}/\sqrt{(D)}\, s^{r/2}$ ist. Mit Rücksicht auf das Glied e^{xs} ist es vorteilhaft $a = 1/x$ zu legen. Mit Hilfe der Transformationseigenschaften der Funktion (10) kann nun leicht gezeigt werden, dass das Integral über einen „kleinen" Teil der Integrationsbahn in der Umgebung der reellen Achse verhältnismässig klein ist. Die erwähnten Transformationseigenschaften der Funktion (10) ermöglichen – für rationales Q – die Abschätzung der Gestalt

$$|\Theta_Q(s)| \leqq c \left(\frac{x}{k\left(1 + x\left|t - \frac{2\pi h}{k}\right|\right)} \right)^{r/2}, \quad s = \frac{1}{x} + it \tag{13}$$

[8]) Diese Schwierigkeit kann man mittels der Untersuchung des Integrales $\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$ überwinden.

zu finden, welche dann gilt, wenn die Differenz $|t - 2\pi h/k|$ hinreichend klein ist, wobei $h \neq 0$ und k ganze teilerfremde Zahlen sind, $0 < k \leqq \sqrt{x}$. Für Formen der Gestalt (9) kann man aber

$$\Theta_Q(s) = \Theta_{Q_1}(a_1 s)\,\Theta_{Q_2}(a_2 s)\ldots\Theta_{Q_\sigma}(a_\sigma s)$$

schreiben und daher bekommen wir dann leicht die Abschätzung

$$(14)\qquad |F(s)| \leqq c \prod_{j=1}^{\sigma} \left(\frac{x}{k_j\left(1 + x\left|t - \dfrac{2\pi h_j}{a_j k_j}\right|\right)} \right)^{r_j/2}, \quad s = \frac{1}{x} + it$$

insofern $|t - (2\pi h_j/a_j k_j)|$ hinreichend klein ist und wo h_j, k_j ganze Zahlen sind, $(h_j, k_j) = 1$, $h_j \neq 0$, $0 < k_j \leqq \sqrt{x}$, $j = 1, 2, \ldots, \sigma$. Von der Abschätzung (14) ist es zu sehen, dass der Ausdruck rechts gross sein wird, wenn die Differenzen $|t - (2\pi h_j/a_j k_j)|$ sehr klein sein werden. Sehr klein sind aber dann auch die Differenzen $|h_1/a_j k_j - h_1/a_1 k_1|$ und also können die Zahlen $a_2/a_1, a_3/a_1, \ldots, a_\sigma/a_1$ sehr gut mit Hilfe von rationalen Zahlen simultan approximiert werden. Es kommen so langsam ähnliche Zusammenhänge, wie bei den Ω-Abschätzungen hervor.

Nun ist es aber nötig die grob angedeuteten Gedanken zu präzisieren. Jarník zerlegt in einer sehr sinnreichen Weise die Integrationsbahn in Teile, in denen er genau die Grösse der Differenzen $|t - (2\pi h_j/a_j k_j)|$ beschrieben hat und also auch über einer guten Abschätzung nach der Beziehung (14) verfügt. Nun wird benötigt, dass Mass jeder soeiner Menge abzuschätzen, eine sehr feine Klassifikation durchzuführen und das ganze angedeutete Verfahren zum Endresultat leiten (an dieser Stelle benützt Jarník – und meistens leitet er diese selbst her – neue und sehr feine Sätze von der Theorie der diophantischen Approximationen). Hoffentlich ist es von diesem kurzen Abriss merkbar, dass Jarník Schwierigkeiten solchen Charakters zu überwinden hatte, welche so manchen hervorragenden Mathematiker abwendig gemacht hätten. Daher ist auch ein Zug, welcher für eine ganze Reihe seiner Arbeiten kennzeichnend ist, sichtbar: eine scharfsinnige Kombination von verschiedenen, bis zu der Zeit scheinbar nicht zusammenhängenden, Gebieten der Mathematik.

Wir treten nun zu einer kurzgefassten Übersicht der wichtigsten Ergebnisse der Arbeiten von Jarník über Gitterpunkte in Ellipsoiden. Wir werden leider die feinsten Ergebnisse fast ausser acht lassen müssen, nachdem diese, wie es auch im Wesen der Sache ist, erheblich kompliziert formuliert worden sind.

In den Arbeiten [19] und [27] ist gezeigt worden, dass für $r \geqq 5$ und eine irrationale Form

$$(15)\qquad P(x) = o(x^{r/2-1})$$

gilt. Die Frage der Unverbesserbarkeit dieser Abschätzung löst Jarník in der Arbeit [67] auf eine sehr originale Weise mit Hilfe der Kategorienmethode, welche er (wie es von der Übersicht seiner Arbeiten über die Theorie der reellen Funktionen zu sehen sein wird) meisterhaft beherrschte: wenn $\varphi(x)$ eine positive nichtwachsende Funktion ist, $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$, $r \geqq 5$ dann gilt für jedes System positiver Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ mit Ausnahme einer Menge erster Kategorie für die zugehörige Form (9) die Abschätzung (15) und es ist

$$P(x) = \Omega(x^{r/2-1}\,\varphi(x))\,.$$

In der Arbeit [17] ist gezeigt, dass für fast alle Systeme $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$

$$P(x) = O(x^{r/2-\lambda+\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$ ist, wo $\lambda = \sum\limits_{j=1}^{\sigma} \min\,(1, r_j/4)$. Ist also $r_1 = r_2 = \ldots = r_\sigma = 1$, ist für fast alle $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma : f \leqq r/4$, wenn $r_1 \geqq 4, \ldots, r_\sigma \geqq 4$ ist, dann ist für fast alle $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma : f \leqq r/2 - \sigma$ und diese Abschätzung kann man nicht verbessern, nachdem immer (siehe [18])

$$P(x) = \Omega(x^{r/2-\sigma})$$

ist. Wenn also $r_1 \geqq 4, \ldots, r_\sigma \geqq 4$ ist, dann ist für fast alle $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$

$$f = r/2 - \sigma\,;$$

ist $r_1 = r_2 = \ldots = r_\sigma = 1$, ist für fast alle $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ (siehe (2))

$$\frac{r-1}{4} \leqq f \leqq \frac{r}{4}\,.$$

Dieses Ergebnis „rehabilitiert" gewissermassen die Abschätzung (2) von Landau, welche als eine zu grobe Abschätzung vorkam.

Ist also $r_1 \geqq 4, \ldots, r_\sigma \geqq 4$, haben wir für den Wert (1) die Ungleichung

$$\frac{r}{2} - \sigma \leqq f \leqq \frac{r}{2} - 1\,, \tag{16}$$

welche scharf ist. Es ensteht natürlich die Frage ob zu jedem (16) erfüllenden Wert f eine Form Q der Gestalt (9) so existiert, dass $f_Q = f$ ist. Im Fall $\sigma = 2$, $r_1, r_2 \geqq 4$ zeigt Jarník in [22], dass

$$f_Q = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\gamma} \tag{17}$$

gilt, wo $\gamma = \gamma(a_1, a_2)$ das Supremum aller $\beta > 0$ ist, für welche die Ungleichung

$$\left|q\,\frac{a_2}{a_1} - p\right| \leqq q^{-\beta}$$

unendlich viele Lösungen in natürlichen p, q besitzt. Im Fall $\sigma > 2$ löst Jarník auf eine „nichtkonstruktive" Weise, mit Hilfe des Hausdorffschen Masses, die gestellte Frage. In der Arbeit [30] zeigt er nämlich, dass die Hausdorffsche Dimension[9]) der Menge solcher $a_2/a_1, \ldots, a_\sigma/a_1$, dass für die zugehörige Form (9) $f = f_Q$ ist, durch den Ausdruck

$$\left(1 - \frac{2}{r - 2f}\right)\sigma$$

gegeben ist (diese gilt auch für $\sigma = 2$). Bemerken wir in diesem Zusammenhang, dass eine Erweiterung der Beziehung (17) auch für den Fall $\sigma > 2$ ($\gamma = \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_\sigma)$ ist ähnlich wie oben definiert) unter gewissen Voraussetzungen ($r_j \geqq 2(\gamma + 1)/\gamma$) im Jahre 1968 B. Diviš, einem Schüler von Prof. Jarník, gelungen ist[10]).

In der Arbeit [70] ist eingehend der Fall $\sigma = 2$ untersucht; es werden z. B. die Werte β studiert, für welche

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{|P(x)|}{x^\beta} = +\infty$$

gilt, es werden die Vorzeichenänderungen der Funktion $P(x)$ untersucht usw. Diese Arbeit gehört vielleicht zu den feinsten in diesem Gebiet. Die Arbeit [88] ist der interessanten Frage, welche Werte f annehmen kann, wenn einige a_j fest gewählt werden, gewidmet. Jarník zeigt, dass für $\sigma > 3$, a_1, a_2 fest, $\gamma(a_1, a_2) = 1$ für fast alle $a_3, a_4, \ldots, a_\sigma$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$P(x) = O(x^{r/2 - \lambda + \varepsilon})$$

gilt (Eine interessante Verallgemeinerung stammt von B. Diviš[10])).

Von der obigen, wenn auch kurzen, Übersicht ist ersichtlich, dass definitive Ergebnisse in vielen Fällen nicht erreicht worden sind. Darum begann schon Landau im Jahre 1923 (noch ein Jahr vorher Cramèr) mit der Untersuchung des sog. Mittelwertes $T(x) = \sqrt{(M(x)/x)}$, wo $M(x) = \int_0^x P^2(t)\,\mathrm{d}t$ ist und zeigte, dass für den Fall des Kreises

$$M(x) = cx^{3/2} + O(x^{1+\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Die „Mittelordnung" der Funktion $P(x)$ ist also in diesem Fall $\frac{1}{4}$ gleich. Wir bedenken, dass die Untersuchung der Funktion $M(x)$ relativ leichter ist

---

[9]) Die Hausdorffsche Dimension einer (im euklidischen Raum liegenden) Menge M ist α, wenn α das Infimum aller solcher Zahlen α' ist, für welche zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Würfeln $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ existiert, welche M bedecken, mit den Kanten $h(K_n) < \varepsilon$, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} h^{\alpha'}(K_n) < < \varepsilon$. Bei der auf der Seite 510 eingeführten Bezeichnung bedeutet dieses $L(M, x^{\alpha+\varepsilon}) = 0$, $L(M, x^{\alpha-\varepsilon}) = +\infty$ für alle ε, $0 < \varepsilon < \alpha$.

[10]) Siehe Czech. Math. Journal *20* (1970), 130—139, 149—159.

als das Studium der Funktion $P(x)$ (Nichtnegativität, Monotonie); man kann also genauere O- und Ω-Ergebnisse erwarten. Anderenseits kann man von genug guten Ergebnissen für die Funktion $M(x)$ sehr schöne, auf einem anderen Weg unerreichbare, Ergebnisse für die Funktion $P(x)$ herleiten. Ungefähr von diesen Gründen aus wurde die Untersuchung der Funktion $M(x)$ in einen selbstständigen Bestandteil der Gitterpunkttheorie entwickelt.

Jarník widmete sich diesem Problemkreis fast vom Anfang an. In der Arbeit [8] verallgemeinert er das soeben angeführte Resultat von Landau zu der Gestalt

$$\int_0^x P((\sqrt{(t)} + \alpha)^2)\, P((\sqrt{(t)} + \beta)^2\, \mathrm{d}t = \Phi(\alpha - \beta)\, x^{3/2} + O(x^{1+\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon > 0$, wo Φ eine gewisse positive Funktion ist. Daher leitet er eine Reihe von interessanten Eigenschaften der Funktion $P(x)$ her (eine Analogie der Fastperiodizität usw.). Die oben angeführte Arbeit [32] gehört eigentlich auch zu dieser Gruppe.

Der Hauptbeitrag von Jarník zu der Untersuchung der Funktion $M(x)$ beruht darin, dass es ihm gelungen ist seine Methoden des Studiums der Funktion $P(x)$ in einer auch für die Funktion $M(x)$ gebrauchbaren Gestalt, darzulegen. Jarník geht von dem leicht beweisbaren Ausdruck

$$M(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{(a)} \int_{(a)} \frac{e^{x(s+s)} F(s)\, \overline{F(\bar{s}')}}{ss'(s+s')}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}s' ,$$

welchen man leicht von (12) erreichen kann, aus. Das angeführte Integral schätzt er nun auf eine ähnliche Weise, wie es oben angedeutet wurde, ab. Es ist nur begreiflich, dass bei dem Doppelintegral eine ganze Reihe von spezifischen Schwierigkeiten dazutritt.

Wir führen wenigstens die Fundamentalresultate an. Jarník beschränkt sich – soeben wie es oben angeführt worden ist – auf Formen der Gestalt (9). Mit Benützung eines Einfalles von Landau, kann man zeigen, dass immer

$$M(x) \geqq cx^{r/2+1/2}$$

ist und die Methode von Jarník gibt für rationale Formen

$$M(x) \geqq cx^{r-1} .$$

Für alle Formen der erwägten Gestalt können die Abschätzungen

$$M(x) = O(x^{r-1})$$

für $r > 3$, $M(x) = O(x^2 \lg^2 x)$ für $r = 3$ und $M(x) = O(x^{3/2} \lg^4 x)$ für $r = 2$ gezeigt werden (alles siehe [33]).

Für irrationale Formen der untersuchten Gestalt und $r \geqq 4$ haben wir

$$M(x) = o(x^{r-1})$$

und diese Abschätzung kann man allgemein nicht verbessern und zwar in demselben Sinn, wie es oben für die Funktion $P(x)$ angeführt war (siehe [38], [67]). Für fast alle Formen der Gestalt (9) und $\sigma = r$ ergibt sich

$$M(x) = O(x^{r/2+1/2} \lg^{3r+3} x)$$

d. h. mit der obigen unteren Abschätzung zusammen, bekommen wir für fast alle diese Formen

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lg T(x)}{\lg x} = \frac{r-1}{4},$$

was fast ganz Landaus Abschätzung (2) rehabilitiert. Sehr wichtig ist die Arbeit [71], in welcher für $r = 2, 3$ die oben angeführten O-Abschätzungen zu $M(x) = O(x^{3/2})$ für $r = 2$, $M(x) = O(x^2 \lg x)$ für $r = 3$ verbessert sind. Damit ist ein definitives Ergebnis für $r = 2$ erreicht. Für $r = 3$ bleibt nur der logarithmische Faktor, welchen man, wie es ferner gezeigt wird, nicht beseitigen kann.

Das vielleicht interessanteste Ergebnis der Arbeit [69] ist die Beziehung

$$M(x) = Kx^2 \lg x + O(x^2 \sqrt{\lg x}),$$

welche für $r = 3$ und rationales Q gilt, $K = c$. Daher folgt, für rationale Formen, das Ergebnis

$$P(x) = \Omega((x \lg x)^{1/2}),$$

welches nicht zu erwarten war. In [69] wird ferner gezeigt, dass

$$M(x) = Kx^{r-1} + g(x)$$

ist, wo $g(x) = O(x^{r-2})$ für $r \geqq 6$, $g(x) = O(x^3 \lg^2 x)$ für $r = 5$, $g(x) = O(x^{5/2} \lg x)$ für $r = 4$ und $g(x) = \Omega(x^{r-2})$ für $r \geqq 4$, wo $K = c$ eine Konstante ist.

Zum Schluss deuten wir kurz auf die sehr feinen und komplizierten Arbeiten [40] und [68] hin. In denen ist sehr gründlich und tief der Fall $\sigma = 2, 3$ untersucht. Für $\sigma = 2$ ist z. B. (mittels der Kettenbruchentwicklung der Zahl a_2/a_1) eine verhältnismässig einfache Funktion $G(x)$ so gefunden, dass $M(x)/G(x)$ für $x > c$ zwischen zwei positiven Konstanten liegt.

Die Übersicht der Arbeiten von Prof. Jarník über die Gitterpunkttheorie schliessen wir mit der Arbeit [89] vom Jahre 1968, welche mit ihrem Charakter einigermassen ausser der einzelnen oben beschriebenen Gruppen steht, ab.

Wir haben schon oben angedeutet, dass es vorteilhaft ist nicht die Funktion $P(x)$ selbst, sondern deren Integral $P_1(x) = \int_0^x P(t)\,dt$ zu untersuchen. Landaus Methode, mit der er die Ergebnisse (2) bewiesen hat, stützt sich auf den folgenden Gedanken. Wir führen klarerweise die Funktionen $P_0(t) = P(t), P_1(t), \ldots$ ein. Es ist leicht zu sehen, dass wir für $\varrho > r/2$, ϱ ganz, und für jede Form das definitive Ergebnis

$$P_\varrho(x) = O(x^{(r-1)/4+\varrho/2}), \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{(r-1)/4+\varrho/2})$$

erhalten. Daher kann man (im Grund durch Bildung von Differenzen) die Abschätzungen (2) beweisen.

In der Arbeit [89] legt Jarník für reelles $\varrho > 0$

$$P_\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \int_0^x P(t)\,(x - t)^{\varrho - 1}\,\mathrm{d}t$$

und untersucht das neue Problem der Abhängigkeit der O- und Ω-Abschätzungen der Funktion $P_\varrho(x)$ vom Parameter ϱ. (Wir bemerken, dass für ganze ϱ beide Definitionsweisen die gleichen Ergebnisse liefern.) Wir führen von diesen Ergebnissen nur die definitiven an, welche Jarník durch das Kombinieren seiner und Landaus Methoden beweist. Es sei die Form Q rational. Dann ist

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/2-1}), \qquad P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/2-1})$$

für $0 \leqq \varrho < r/2 - 2$,

$$P_\varrho(x) = O(x^{r/4-1/4+\varrho/2}), \quad P_\varrho(x) = \Omega(x^{r/4-1/4+\varrho/2})$$

für $\varrho > r/2 - \frac{1}{2}$. Für $r/2 - 2 \leqq \varrho \leqq r/2 - \frac{1}{2}$ oder besser gesagt für $2\varrho + 1 \leqq r \leqq \leqq 2\varrho + 4$ ist zwischen den von Jarník erreichten Ergebnissen eine gewisse Lücke, welche für $\varrho = 0$ den klassischen ungelösten Problemen $r = 2, 3, 4$ entspricht. Bei den Funktionen $P_\varrho(x)$ bekommen wir eigentlich eine gewisse „Verschiebung" der klassischen Probleme in eine andere Ebene und das Auffinden definitiver Ergebnisse wird nicht weniger schwer sein. Der Interessantheit wegen führen wir noch an, dass die angeführten Ω-Abschätzungen für alle ϱ gelten; für $\varrho = r/2 - \frac{3}{2} \geqq 0$ handelt es sich also um einen Übergang von einen zu den anderen Abschätzungen.

Vom Angeführten ist es bestimmt ersichtlich, dass Prof. Jarník sich mit seinen Arbeiten würdig, zusammen mit E. Landau und A. Walfisz, zwischen die Forscher einreiht, welche die Gitterpunkttheorie in mehrdimensionalen Ellipsoiden zu einer sehr ergänzten Form gebracht haben. Seine eigene Ergebnisse sind praktisch unüberwindbar und von dem Gesichtspunkt dieser Theorie ist es nur zu bedauern, dass sich Prof. Jarník ihr nicht noch mehr widmete. Es wäre zwar zum Schaden für die anderen Gebiete der Mathematik, in denen er arbeitete, die Gitterpunkttheorie aber wäre bestimmt um eine Reihe von bedeutungsvollen und definitiven Ergebnissen reicher.

Wir wenden uns nun zu den Arbeiten in der Theorie der diophantischen Approximationen.

Es sei $\Theta = (\Theta_{i,j})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$ eine reelle Matrix und sei φ eine nichtwachsende Funktion, $\varphi(t) \to 0$ für $t \to +\infty$. In der Theorie der diophantischen Approximationen wird das System von Ungleichungen

$$(18) \qquad \Big|\sum_{j=1}^{s} \Theta_{ij} x_j + y_i\Big| \leqq \varphi(t), \quad 0 < \max_j |x_j| \leqq t, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

untersucht, wo x_j, y_i ganze Zahlen sind. Für ein gegebenes t nennen wir das System ganzer Zahlen x_j, y_i, $j = 1, 2, \ldots, s$, $i = 1, 2, \ldots, r$ welche (18) erfüllen, eine Lösung des Systems (18). Es ist zu entscheiden, ob die Matrix Θ eine der folgenden Eigenschaften hat: (A) Das System (18) hat eine Lösung für alle hinreichend grosse t, (B) Es gibt eine Folge t_k, $t_k \to +\infty$ für $k \to +\infty$, sodass das System (18) für $t = t_k$, $k = 1, 2, \ldots$ eine Lösung hat.

Nachdem φ nichtwachsend ist, kann man im Fall (B) $t = \max_j |x_j|$ legen; (B) gilt genau dann, wenn das System

$$(19) \qquad \Big|\sum_{j=1}^{s} \Theta_{i,j} x_j + y_i\Big| \leqq \varphi(\max_j |x_j|)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

unendlich viele Lösungen hat. Wenn (B) gilt sagt man, dass Θ die Approximation φ zulässt. Legen wir für $t \geqq 1$

$$\psi_\Theta(t) = \min_{0 < \|x\| \leqq t} \; \max_{i=1,2,\ldots,r} \; \min_{y_i} \Big|\sum_{j=1}^{s} \Theta_{ij}\, x_j + y_i\Big|\,,$$

wo $\|x\| = \max_j |x_j|$ (x_j, y_i sind dabei ganz). (A) gilt offenbar genau dann, wenn ein $T > 0$ so existiert, dass $\psi_\Theta(t) \leqq \varphi(t)$ für $t \geqq T$ ist und (B) gilt genau dann, wenn eine Folge t_k, $t_k \to +\infty$ für $k \to +\infty$ so existiert, dass $\psi_\Theta(t_k) \leqq \varphi(t_k)$ ist.

Wir erwähnen einige Fundamentalergebnisse von der Theorie der diophantischen Approximationen. Vom Dirichlet-Kroneckerschen Satz kann hergeleitet werden, dass

$$(20) \qquad \psi_\Theta(t) < [t]^{-s/r}$$

ist, wo $[t]$ den ganzen Teil von t bezeichnet. Ist $r = s = 1$ und ist Θ eine irrationale Zahl, dann gilt

$$(21) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \leqq \limsup_{t \to +\infty} t\, \psi_\Theta(t) \leqq 1\,, \quad 0 \leqq \liminf_{t \to +\infty} t\, \psi_\Theta(t) \leqq 5^{-1/2}\,.$$

Bei der Untersuchung der Eigenschaften (A), (B) kann man sich, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, auf Matrizen Θ mit $|\Theta_{i,j}| \leqq \frac{1}{2}$ beschränken. Es sei $E_{r,s}(\varphi)$ die Menge solcher Matrizen Θ des Typs r, s, $|\Theta_{i,j}| \leqq \frac{1}{2}$, welche die Approximation φ zulassen. Chinčin hat bewiesen, dass

$$(22) \qquad m(E_{r,1}(\varphi)) = 0\,, \quad \text{wenn} \quad \int^{\infty} \varphi^r(t)\, \mathrm{d}t < +\infty$$

$$(23) \qquad m(E_{r,1}(\varphi)) = 1\,, \quad \text{wenn} \quad \int^{\infty} \varphi^r(t)\, \mathrm{d}t = +\infty\,.$$

Dabei ist m das Lebesguesche Mass im Raum R^r (jede Matrix mit dem Typ r, 1 ist zugleich ein Punkt in R^r). Insbesondere ist $m(E_{r,1}(\delta t^{-\varrho/r})) = 0$, sobald $\varrho > 1$, $\delta > 0$

und $m(E_{r,1}(\delta t^{-1/r})) = 1$. Nach (20) lässt jede Matrix des Typs r, 1 die Approximation $t^{-1/r}$ zu und so ist

$$E_{r,1}(t^{-1/r}) = \{\Theta \mid |\Theta_{i,1}| \leqq \tfrac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, r\}.$$

Natürlich ist $E_{r,1}(t^{-\varrho/r}) \supset E_{r,1}(t^{-\sigma/r})$, sobald $1 \leqq \varrho < \sigma$ ist; im Fall $r = s = 1$ gibt die Kettenbruchentwicklung der Zahl Θ eine eingehende Information darüber, ob Θ eine Approximation φ zulässt oder nicht. So kann man zeigen, dass für jedes ϱ, σ, $1 \leqq \leqq \varrho < \sigma$ Zahlen Θ existieren, welche die Approximation $t^{-\varrho}$ zulassen und welche die Approximation $t^{-\sigma}$ nicht zulassen, also $E_{1,1}(t^{-\varrho}) - E_{1,1}(t^{-\sigma}) \neq \emptyset$.

Von den Ergebnissen, welche Jarník in der Arbeit [35] bewies, folgt unmittelbar, dass

$$E_{r,1}(t^{-\varrho/r}) - E_{r,1}(t^{-\sigma/r}) \neq \emptyset \tag{24}$$

ist, sobald $r \geqq 1$, $1 \leqq \varrho < \sigma$ ist. Die Fälle $r = 1$ und $r > 1$ sind dabei, was es die Schwierigkeit betrifft, nicht zu vergleichen, nachdem für $r > 1$ keine Methode bekannt ist, welche ähnliche Informationen, wie die Kettenbruchentwicklungsmethode im Fall $r = 1$ geben möchte.

Es sei $f : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$ stetig, nichtfallend und $f(0) = 0$. Sei $S \subset R^r$. Für $u \in R^r$, $d > 0$ sei $Q(u, d)$ der Würfel mit dem Mittelpunkt u und der Kante d, d. h. $Q(u, d) = \{v \in R^r \mid |v_i - u_i| \leqq \frac{1}{2}d\}$. Wählen wir $\varphi > 0$ und finden eine höchstens abzählbare Bedeckung der Menge S mit Würfeln $Q(u_k, d_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, sodass $d_k \leqq \varrho$ ist und ordnen dieser Bedeckung die Zahl $\sum_k f(d_k)$ zu. Das Infimum der Menge der, auf diese Weise erworbenen, Zahlen bezeichne man mit $L_\varrho(S, f)$. Offenbar ist $L_\varrho(S, f) \geqq L_\sigma(S, f)$ für $\varrho < \sigma$ und es existiert so $L(S, f) = \lim_{\varrho \to 0+} L_\varrho(S, f)$. Bei festem f ist $L(\,.\,, f)$ ein äusseres Mass; wir nennen dieses das Hausdorffsche Mass (die Mengen S, für welche wir dieses Mass benützen, werden immer Borelsche Mengen und also auch messbar sein).

Wenn $f_1(d)/f_2(d) \to 0$ für $d \to 0+$ ist, dann folgt von $L(S, f_2) < +\infty$ die Beziehung $L(S, f_1) = 0$ und $L(S, f_1) > 0$ hat $L(S, f_2) = +\infty$ zufolge. Wenn $f(d) = d^r$ ist, dann ist aber $L(S, f)$ das äussere Lebesguesche Mass der Menge S und wenn $f_1(d)/d^r \to \to 0$ für $d \to 0+$ ist, dann ist $L(S, f_1) = 0$ für jede Menge S. Wenn $f(d)/d^r \to +\infty$ für $d \to 0+$ ist, dann folgt von $L(S, f) = 0$ die Gleichung $m(S) = 0$, es kann aber der Fall vorkommen, dass $m(S) = 0$ und $L(S, f) > 0$ ist; das Hausdorffsche Maas ist ein passendes Instrument zu der Beurteilung der „Grösse" einer Menge, deren Lebesguesches Mass Null gleich ist.

Die Matrix Θ mit dem Typ r, 1 nennen wir eigentlich, wenn folgendes gilt: sobald $\sum_{i=1}^{r} \Theta_{i,1} x_i + y = 0$ ist, wo x_i, y ganze Zahlen sind, ist $x_i = 0 = y$ für $i = 1, 2, \ldots, r$. Mit $E_{r,1}^{vl}(\varphi)$ sei die Menge aller eigentlichen $\Theta \in E_{r,1}(\varphi)$ bezeichnet.

Jarník hat in der Arbeit [35] für eine weite Klasse der Funktionen φ, f folgendes bewiesen:

$$L(E_{r,1}(\varphi), f) = 0\,, \qquad \text{wenn} \quad \int^{\infty} f(2\varphi(t)/t)\, t^r\, \mathrm{d}t < +\infty \tag{25}$$

$$L(E^{vl}_{r,1}(\varphi), f) = +\infty\,, \quad \text{wenn} \quad \int^{\infty} f(2\varphi(t)/t)\, t^r\, \mathrm{d}t = +\infty\,. \tag{26}$$

Der Beweis der Behauptung (25) ist einfach und Jarník arbeitet mit so allgemeinen Voraussetzungen, dass die Behauptung (22) ein Spezialfall der Behauptung (25) ist. Der Beweis von (26) aber ist recht kompliziert und verlangt einige spezielle Voraussetzungen über φ und f. Von (25) und (26) folgert Jarník (unter gewissen wenig einschränkenden Voraussetzungen über φ so, dass er eine passende Funktion f konstruiert) folgendes: Wenn $\lambda : [1, \infty) \to [1, +\infty)$ eine stetige Ableitung hat, $\lambda(t)/t$ nichtfallend ist und es ist $\lambda(t)/t \to \infty$ für $t \to \infty$, dann ist

$$E^{vl}_{r,1}(\varphi) - E_{r,1}(\varphi \circ \lambda) \neq \emptyset$$

d. h. es existieren solche eigentliche Θ, welche die Approximation φ zulassen aber diese lassen die Approximation $\varphi \circ \lambda$ nicht zu (dieses ist eine wesentlich stärkere Behauptung als (24)).

Das Hausdorffsche Mass benützte Jarník in den Arbeiten [26], [30], [84] zur Untersuchung von Mengen, deren Elemente durch ihre Approximationseigenschaften oder die Eigenschaften ihrer Kettenbruchentwicklungen charakterisiert sind. (In der Arbeit [30] handelt es sich z. B. um Mengen M_ϱ ($\varrho > 1$) solcher Zahlen, welche die Approximation $t^{-\varrho}$ zulassen, aber welche die Approximation $t^{-\sigma}$ für kein $\sigma > \varrho$ zulassen. Es wird dort gezeigt, dass $2/(\varrho + 1)$ die Hausdorffsche Dimension der Menge M_ϱ ist.)

Wenn die Matrix Θ den Typ r, s hat, sei $\xi_{r,s}(\Theta)$ das Supremum solcher $\varrho \geqq s/r$, dass (A) für $\varphi(t) = t^{-\varrho}$ gilt und $\eta_{r,s}(\Theta)$ sei das Supremum solcher $\varrho \geqq s/r$, dass (B) für $\varphi(t) = t^{-\varrho}$ gilt; es ist also $\xi_{r,s}(\Theta)$ das Supremum solcher $\varrho \geqq s/r$, dass $\limsup_{t \to +\infty} t^\varrho\, \psi_\Theta(t) = 0$ und $\eta_{r,s}(\Theta)$ das Supremum solcher $\varrho \geqq s/r$, dass $\liminf_{t \to +\infty} t^\varrho\, \psi_\Theta(t) = 0$ ist. Offenbar ist $s/r \leqq \xi_{r,s}(\Theta) \leqq \eta_{r,s}(\Theta)$.

In der Arbeit [37] leitet Jarník gewisse Ungleichungen her, welche die gemeinsame Abhängigkeit zwischen $\eta_{1,1}(\Theta_1)$, $\eta_{11}(\Theta_2)$ und $\eta_{2,1}\left(\begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{pmatrix}\right)$ ausdrücken und insbesondere beweist er, dass diese Ungleichungen scharf sind (d. h. dass man diese nicht verstärken kann). In [63] untersucht er die ähnliche Abhängigkeit für $\eta_{1,1}(\Theta_1)$, $\eta_{1,1}(\Theta_2)$ und $\eta_{1,2}(\Theta_1, \Theta_2)$ und zeigt wieder, dass die gefundenen Ungleichungen scharf sind.

Es sei Θ' die zu der Matrix Θ adjungierte Matrix. Den Zusammenhang zwischen $\eta_{r,1}(\Theta)$ und $\eta_{1,r}(\Theta')$ beachtete Chinčin; in einer Arbeit vom Jahre 1926 bewies er, dass für jede Matrix Θ des Typs r, 1, wo $r \geqq 2$, die Ungleichungen

$$\eta_{1,r} \geqq r\eta_{r,1} + r - 1\,, \tag{27}$$

$$\eta_{r,1} \geqq \eta_{1,r}((r-1)\,\eta_{1,r} + r)^{-1} \tag{28}$$

gelten (da schreiben wir $\eta_{1,r}, \eta_{r,1}$ anstatt $\eta_{1,r}(\Theta), \eta_{r,1}(\Theta)$). Mit den Ungleichungen (27), (28) befasste sich Jarník in den Arbeiten [53], [54], [56] und zeigte, dass diese scharf sind. In der Arbeit [62] löste er den ähnlichen Problemkreis für $\xi_{1,r}$ und $\xi_{r,1}$. Wir beachten diese Arbeit eingehender. Jarník zeigt: Für jede eigentliche Matrix Θ des Typs 2, 1 gilt

$$\xi_{2,1} = 1 - (\xi_{1,2})^{-1}\,. \tag{29}$$

Dieses ist etwas ganz anderes als (27), (28). Wenn $r > 2$ ist, dann gilt (27) und (28) für jede eigentliche Matrix Θ mit dem Typ r, 1, wenn wir $\xi_{r,1}, \xi_{1,r}$ anstatt $\eta_{r,1}, \eta_{1,r}$ schreiben. Dieser Einklang ist gewissermassen formal, nachdem zu jedem ϱ, $1/r \leqq \leqq \varrho \leqq +\infty$ eine Matrix Θ mit dem Typ r, 1 so existiert, dass $\eta_{r,1}(\Theta) = \varrho$ ist (siehe [53], Satz 2). Für jede eigentliche Matrix Θ mit dem Typ r, 1 aber ist $\xi_{r,1}(\Theta) \leqq 1$ (dies folgt von der ersten Ungleichung in (21)).

Jarník bewies folgendes: wenn $r \geqq 3$ und Θ eine eigentliche Matrix des Typs r, 1 ist, dann gilt

$$\xi_{1,r} \geqq r + \frac{2(\xi_{r,1} - 1/r) - 1}{1 - \xi_{r,1}}\,, \qquad \text{sobald} \quad 1 - 1/r < \xi_{r,1} < 1\,, \tag{30}$$

$$\xi_{r,1} \geqq \frac{1}{r-1} - \frac{1}{(r-1)(\xi_{1,r} - 2r + 4)}\,, \quad \text{sobald} \quad \xi_{1,r} \geqq 2r^2 + 3r\,. \tag{31}$$

Ferner zeigte er, dass soeine eigentliche Matrix Θ des Typs r, 1 existiert, dass $\xi_{r,1}(\Theta) = = 1$, $\xi_{1,r}(\Theta') = \infty$ ist und soeben existiert auch eine eigentliche Matrix Θ des Typs r, 1, dass $\xi_{r,1}(\Theta) = 1/(r-1)$, $\xi_{1,r}(\Theta') = +\infty$ gilt. Das Verfahren von Jarník ist dabei sehr allgemein. Zu der, gewisse Voraussetzungen erfüllenden, Funktion φ_1 konstruierte er die Funktion φ_2 und zeigte: wenn für die eigentliche Matrix Θ des Typs r, 1 und $\varphi = \varphi_1$ (A) gilt, dann gilt (A) auch für Θ' und $\varphi = \varphi_2$. Daher leitete er als einen Spezialfall (31) her; die Herleitung der Ungleichung (30) kann ähnlicherweise beschrieben werden. Der Kern des Beweises ist eine virtuose Ausnützung des Minkowskischen Satzes über Linearformen.

Die Arbeit [62] ist zugleich auch ein kleines Dokument von Jarníks enormer Bescheidenheit. Sie trägt den unauffälligen Titel „Zum Khintchinschen Übertragungssatz" und Jarník schreibt über diese als über eine Note. Es handelte sich um eine Bescheidenheit, welche eine innere Eigenschaft von Jarník war und welche mit seiner interessierten Konzentration in der Mathematik, sowie auch mit seiner Wertung der wissenschaftlichen Arbeit und insbesondere seiner eingenen Arbeit sub specie aeternitatis, zusammenhang.

Wenn Θ eine Irrationalzahl ist, dann ist $\liminf_{t \to +\infty} t\, \varphi_\Theta(t) < \limsup_{t \to +\infty} t\, \psi_\Theta(t)$ (vgl. (21)). In der Arbeit [81] beweist Jarník: Es sei $s \geqq 1$, Θ sei eine eigentliche Matrix des Typs 1, s und

$$\limsup_{t \to +\infty} t^s\, \psi_\Theta(t) = B\,, \quad \liminf_{t \to +\infty} t^s\, \psi_\Theta(t) = A\,.$$

Dann ist $(B/A)^{2s+1} \geqq 2$. In derselben Arbeit beweist er, dass $\eta_{1,2} \geqq \xi_{1,2}(\xi_{1,2} - 1)$ ist; also $\eta_{1,2}(\Theta) > \xi_{1,2}(\Theta)$, sobald $2 < \xi_{1,2}(\Theta) < +\infty$ ist. In der Arbeit [83] beweist Jarník drei Ungleichungen, welche zwischen $\eta_{r,s}$ und $\xi_{r,s}$ für allgemeine r, s gelten (es werden die Fälle $r = 1$, $r = 2$ und $r > 2$ unterschieden).

Dyson hat bewiesen, dass für eine Matrix des Typs r, s

$$\eta_{r,s} \geqq \frac{s\eta_{s,r} + s - 1}{(r-1)\,\eta_{s,r} + r} \tag{32}$$

gilt ((27) und (28) sind Spezialfälle der Ungleichung (32)). In [86] beweist Jarník, dass die Ungleichung (32) scharf ist (ausser gewisser Ausnahmefälle, welche unentschieden bleiben). Auch in den Arbeiten [87] und [90] handelt es sich um Matrizen des Typs r, s; Jarník beweist, dass Matrizen, welche gewisse Approximationseigenschaften haben, existieren.

Im Vergleich mit der Gitterpunkttheorie oder mit der Theorie der diophantischen Approximationen, bilden die Arbeiten von Prof. Jarník über die Geometrie der Zahlen eine Gruppe mit einer kleineren Anzahl von Gliedern, diese ist aber sehr ergebnisreich. Seine Arbeiten betreffen insbesondere die sog. Minkowskische sukzessiven Minima.

Erwägen wir im r-dimensionalen euklidischen Raum ($r > 1$) einen konvexen Körper (der Einfachheit halber bedeute dieses eine kompakte, konvexe Menge, welche symmetrisch in Bezug auf den Anfangspunkt ist und mindestens einen inneren Punkt besitzt). Die sog. Minkowskischen sukzessiven Minima $\lambda_j = \lambda_j(K)$, $j = 1, \ldots, r$ definieren wir nun folgenderweise: λ_j ist das Infimum aller Zahlen $\beta > 0$, für welche die Menge βK (welche durch die Homothätie mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkt und mit dem Koeffizienten β von der Menge K entsteht) mindestens j linear unabhängige Gitterpunkte enthält. Offensichtlich ist $0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_r < +\infty$. Wenn wir nun mit $m(K)$ das Lebesguesche Mass der Menge K bezeichnen, besagt der (zweite) Minkowskische Fundamentalsatz der Geometrie der Zahlen, dass

$$\frac{2^r}{r!} \leqq \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r\, m(K) \leqq 2^r \tag{33}$$

gilt. Bemerken wir, dass daher sofort $\lambda_1 \leqq 2/\sqrt[r]{(m(K))}$ folgt und also (der erste Minkowskische Satz) wenn $m(K) \geqq 2^r$ ist, dann ist $\lambda_1 \leqq 1$ d. h. K enthält mindestens einen von dem Anfangspunkt verschiedenen Gitterpunkt. Daher ist die Wichtigkeit der Geometrie der Zahlen mit Rücksicht auf die diophantischen Approximationen sichtbar.

Prof. Jarník widmete sich in seinen Arbeiten einerseits der sehr feinen Frage der Schärfe der Ungleichung (33) und anderenseits der Verallgemeinerung dieser Ungleichung auf allgemeinere Klassen von Mengen. Es ist sofort zu sehen, dass für die durch die Ungleichung $\sum_{i=1}^{r} |x_i| \leqq 1$ bzw. $\max_i |x_i| \leqq 1$ definierte Menge K wir $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 1$ und $m(K) = 2^r/r!$ bzw. $m(K) = 2^r$ haben. Es entsteht nun die natürliche Frage, ob es möglich ist vollkommen solche konvexe Mengen K zu charakterisieren, für welche in (33) eine Gleichung gilt. Insbesondere schwierig ist der Fall der rechten Ungleichung. Mit dieser Frage beschäftigt sich die Arbeit [78], in welcher die Estermannsche Beweismethode für die rechte Ungleichung in (33) so modifiziert wird, dass man mit dieser alle Fälle, in welchen die Gleichung entsteht, erfassen kann.

Die oben angeführten Beispiele bringen das folgende Problem mit sich: kann die Ungleichung (33) für eine genügend vernünftige Klasse der konvexen Körper nicht verbessert werden? Konkreter gesagt: wenn man weiss, dass in (33) die Gleichung entsteht für Körper, welche sich von Polyedern nicht „sehr unterscheiden", kann man diese Ungleichung für „genug abgerundete" Körper nicht verbessern? Diese Frage wird für $r = 2$ in der Arbeit [76] für solche Mengen untersucht, welche durch eine Kurve mit stetig variierendem Krümmungsradius, der ein positives Minimum hat, beschränkt sind. Die gefundene Verbesserung ist genug wesentlich und ist in einigen Grenzfällen definitiv.

Wenden wir uns nun zu der Verallgemeinerung der rechten Hälfte von (33) für den Fall nichtkonvexer Mengen K. In dieser Allgemeinheit muss die Ungleichung (33) etwas anders interpretiert werden, da man offenbar auch sehr „vernünftige" Mengen K so finden kann, dass βK für kein $\beta > 0$ einen Gitterpunkt enthält. Erwäge man darum die Menge $W(K)$ aller Punkte der Form $\frac{1}{2}(x - y)$, wo $x, y \in K$. Offenbar ist für jede messbare Menge K auch $W(K)$ messbar. Für einen konvexen Körper K ist $W(K) = K$. Die Ungleichung (33) kann also für einen konvexen Körper in der Form

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r\, m(K) \leqq 2^r\,, \quad \lambda_j = \lambda_j(W(K))$$

geschrieben werden. Gilt nun eine analoge Ungleichung auch für nichtkonvexe Mengen K? Dazu tritt noch eine weitere Komplikation, welche darauf beruht, dass für nichtkonvexe Mengen man die sukzessiven Minima auf einige natürliche Weisen einführen kann für (konvexe Körper fallen diese zusammen): sei $\mu_j = \mu_j(M)$ (bzw. $\lambda_j = \lambda_j(M)$ oder $\nu_j = \nu_j(M)$, oder $\pi_j = \pi_j(M)$) das Infimum aller $\beta > 0$, für welche die Menge $\bigcup_{0<\alpha\leqq\beta} \alpha M$ (bzw. βM, oder jede Menge αM für $\alpha > \beta$ oder die Menge $\bigcap_{\alpha\geqq\beta} \alpha M$) mindestens j linear unabhängige Gitterpunkte enthält, $j = 1, 2, \ldots, r$. Offenbar ist

$$\mu_j \leqq \lambda_j \leqq \nu_j \leqq \pi_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, r\,,$$

$$\mu_j \leqq \mu_{j+1}\,, \quad \lambda_j \leqq \lambda_{j+1}\,, \quad \nu_j \leqq \nu_{j+1}\,, \quad \pi_j \leqq \pi_{j+1}\,, \quad j = 1, 2, \ldots, r - 1\,.$$

In der Arbeit [72] ist gezeigt worden, dass für die, im Sinne von Jordan, messbare Mengen K, $0 < m(K) < +\infty$

$$\mu_1\mu_2 \ldots \mu_r\, m(K) \leqq 2^{2r-1}\,, \quad \mu_j = \mu_j(W(K)) \tag{34}$$

ist. Nun entstehen zwei Problemarten. Einerseits kommt die Frage der Bestimmung der besten möglichen Konstante rechts und anderenseits die Frage der Gültigkeit einer ähnlichen Ungleichung für die übrigen Einführungen der Minima. Eine ähnliche Ungleichung (mit einer kleineren Konstante rechts) für die Zahlen $\lambda_j = \lambda_j(W(K))$ hat im Jahre 1947 der englische Mathematiker Rogers bewiesen, auf der anderen Seite zeigte Knichal in [74], dass man die Konstante 2^{2r-1} nicht bis zu 2^r verkleinern kann.

In der Arbeit [77] wird bewiesen, dass ähnliche Ergebnisse nicht gelten, wenn man die Zahlen λ_j mit den Zahlen v_j ersetzt. Genauer gesagt, Rogers hat bewiesen, dass für jede im Lebesgueschen Sinn messbare Menge K, $0 < m(K) < +\infty$ und für jeden Index i, $1 \leqq i \leqq r$

$$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{i-1}v_i\lambda_{i+1} \ldots \lambda_r\, m(K) \leqq 2^{2r-1}\,, \quad \lambda_j = \lambda_j(W(K))\,, \quad v_i = v_i(W(K))$$

ist. Demgegenüber zeigt Jarník, dass wenn zwei Indexe i, j, $1 \leqq i < j \leqq r$ gewählt werden, kann man den Ausdruck

$$\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{i-1}v_i\mu_{i+1} \ldots \mu_{j-1}v_j\mu_{j+1} \ldots \mu_r\, m(K)\,, \tag{35}$$
$$v_i = v_i(W(K))\,, \quad v_j = v_j(W(K))\,, \quad \mu_s = \mu_s(W(K))\,, \quad s \neq i, j$$

und ebenso auch den Ausdruck

$$\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{i-1}\pi_i\mu_{i+1} \ldots \mu_r\, m(K)\,, \quad \pi_i = \pi_i(W(K))\,, \quad \mu_j = \mu_j(W(K))$$

nich mit einem, nur von r abhängendem, Wert beschränken.

Anderenseits ist aber desto mehr das folgende Ergebnis überraschend (siehe [74]). Bezeichne man $W^2(K) = W(W(K))$, $W^3(K) = W(W^2(K)), \ldots$ Von der Menge K bilden wir so immer „vernünftigere" Mengen. Nun gibt es zu jeder, im Lebesgueschen Sinn messbarer, Menge K, $0 < m(K) < +\infty$ ein $p_0 \geqq 1$, sodass für alle $p > p_0$

$$\pi_1\pi_2 \ldots \pi_r\, m(K) \leqq 2^r\,, \quad \pi_j = \pi_j(W^p(K))$$

ist. In [77] ist als eine Ergänzung gezeigt, dass man den Wert p_0 nicht von K unabhängig wählen kann und sogar auch der Ausdruck (35), in welchem man $\mu_s = \mu_s(W^p(K))$, $v_i = v_i(W^p(K))$, $v_j = v_j(W^p(K))$ legt, kann, wenn man auch p hinreichend gross wählt, nicht mit einer, nur von r abhängenden Konstante beschränkt werden.

Zum Schluss dieser kurzen Aufzählung der Ergebnisse von Jarník in der Geometrie der Zahlen bemerken wir noch, dass in einigen zitierten Arbeiten und auch in [64] und [65] die Ergebnisse von der Geometrie der Zahlen in der Theorie der diophantischen Approximationen angewandt sind.

Es ist auch nicht leicht in dem umfangreichen mathematischen Werk die Eigenschaften der Persönlichkeit, welche es geschaffen hat, zu suchen; alle, welche Vojtěch Jarník kannten, finden in seinem wissenschaftlichen Werk eine Reihe von Zügen, welche sie an seine Persönlichkeit erinnern werden. Es ist vor allem seine Gründlichkeit, das Bestreben eines genauen und detailierten Wissens und die Fähigkeit auch an solchen Stellen Probleme zu sehen und Lösungen finden, wo einem weniger durchdringenden Geist schon alles entdeckt vorkommen könnte. Dieses ist schon in seiner Arbeit [2] klar merkbar.

Ganze Generationen von Mathematikern haben es wahrgenommen, dass Bolzano eine Funktion, welche später nach ihm benannt wurde, konstruierte und so die älteren Ansichten widerlegte, dass eine stetige Funktion zumindest in einem Punkt eine Ableitung haben muss. In der erwähnten Arbeit von 1922 zeigt Jarník folgendes: Die Funktion von Bolzano hat in keinem Punkt eine endliche Ableitung von links und auch nicht von rechts und diese hat auch keine uneigentliche unendliche Ableitung. Die Punkte, in denen zugleich die uneigentlichen Ableitungen von links und von rechts existieren, sind die Punkte der lokalen Extrema und bilden eine abzählbare Menge. In den sog. Teilpunkten existiert die uneigentliche Ableitung von rechts; die derivierten Zahlen von links in diesen Punkten sind verschieden und haben den gleichen Absolutbetrag. Es existiert eine Menge der Mächtigkeit des Kontinuums, sodass in jedem ihren Punkt beide oberen derivierten Zahlen $+\infty$ und beide unteren derivierten Zahlen $-\infty$ gleich gleich sind.

Um ein Jahr später veröffentlicht Jarník die Arbeit [4], welche durch die folgende Frage angeregt war: welche Eigenschaften muss jede Funktion, welche in keinem Punkt eine Ableitung besitzt, haben? Jarník zeigt unter anderem: wenn eine stetige Funktion f in jedem nichtdegenerierten Intervall eine unendliche Variation hat, dann existiert eine dichte Menge sodass in deren Punkten beide oberen derivierten Zahlen $+\infty$ und beide unteren derivierten Zahlen $-\infty$ sind.

In der Arbeit [5] geht Jarník von dieser offensichtlichen Tatsache aus: wenn eine stetige Funktion f in jedem Punkt die Ableitung f' hat, dann gehört f' zu der ersten Baireschen Klasse. Jarník zeigte, dass die Behauptung auch dann gilt, wenn f nicht stetig ist; er lässt zu, dass f die Werte $\pm\infty$ annimmt (und natürlich $|f'(t)| = +\infty$, sobald f in t nicht stetig ist). Führen wir noch in diesem Zusammenhang ein Ergebnis von der Arbeit [57] an: Es sei S eine Gerade in R^2. Unter Halbebenen werden wir die offenen Halbebenen verstehen, auf welche S die Ebene R^2 zerteilt. Es sei $f : R^2 \to R$. Dann existiert eine höchstens abzählbare Menge $V \subset S$ und jeder Punkt $x \in S - V$ hat diese Eigenschaft: es seien P, Q offene Halbgeraden, deren gemeinsamer Endpunkt x ist und welche in derselben Halbebene liegen. Dann existieren Punktfolgen $p_i \in P$ und $q_j \in Q$ sodass

$$\lim_{i \to +\infty} p_i = x = \lim_{j \to +\infty} q_j$$

und

$$\lim_{i \to +\infty} f(p_i) = \lim_{j \to +\infty} f(q_j)$$

ist.

Am Anfang der dreissiger Jahre wurden die ersten Arbeiten veröffentlicht, in welchen der Begriff einer Residualmenge zur Untersuchung von Mengen stetiger Funktionen, deren Ableitungen bzw. derivierte Zahlen gewisse Bedingungen erfüllten, benützt war. In den Anwendungen der Residualmengen (bis auf die letzte), wird der Fundamentalraum $C = C([0, 1] \to R)$ sein (mit der gleichmässigen Topologie) und für $x \in C$, $t \in (0, 1)$ bedeute $x^+(t)$, $x^-(t)$ die oberen derivierten Zahlen von links und rechts und $x_+(t)$, $x_-(t)$ die unteren derivierten Zahlen, sei $\bar{x}(t) = \max(x^+(t), x^-(t))$, $\underline{x}(t) = \min(x_+(t), x_-(t))$. Führen wir die folgenden Untermengen des Raumes C ein:

$$A_1 = \{x \in C \mid x^+(t) = +\infty \quad \text{oder} \quad x_+(t) = -\infty \quad \text{für jedes} \quad t \in [0, 1)\}$$
$$A_2 = \{x \in C \mid \bar{x}(t) > \underline{x}(t) \quad \text{für jedes} \quad t \in (0, 1)\},$$
$$A_3 = \{x \in C \mid x^+(t) > x_+(t) \quad \text{für jedes} \quad t \in (0, 1)\}.$$

Banach und Mazurkiewicz haben im Jahre 1931 (unabhängig) bewiesen, dass A_1 eine Residualmenge ist. Ein Jahr später zeigte S. Saks, dass A_2 eine Residualmenge ist und dass A_3 eine Menge erster Kategorie ist und Besicovitch zeigte, dass die Menge A_3 nicht leer ist.

Es sei A_4 die Menge solcher $x \in C$, dass folgendes gilt:

(i) $[x_-(t), x^-(t)] \cup [x_+(t), x^+(t)] = [-\infty, +\infty]$ für jedes $t \in (0, 1)$,

(ii) $x^+(t) = x^-(t) = +\infty$, $x_+(t) = x_-(t) = -\infty$ für fast alle $t \in (0, 1)$,

(iii) $\max(|x^+(t)|, |x_+(t)|) = +\infty$ für jedes $t \in [0, 1)$,
$\max(|x^-(t)|, |x_-(t)|) = +\infty$ für jedes $t \in (0, 1]$.

Jarník bewies in der Arbeit [39], dass die Menge A_4 eine Residualmenge ist. Wir bemerken, dass daher folgendes folgt: wenn $x \in A_4$, $t \in (0, 1)$, $a \in R$ ist, dann existiert eine Folge $h_n \to 0$ sodass $h_n^{-1}(x(t + h_n) - x(t)) \to a$ ist.

Die Methode der Residualmengen benützte Jarník beiläufig in 10 Arbeiten und löste, so wie auch eine Reihe von anderen Autoren, die mit der approximativen Ableitung zusammenhängenden Fragen. (Die approximative Ableitung der Funktion x im Punkt τ wird folgendermassen eingeführt: Es bedeute $m(U)$ das Lebesguesche Mass der messbaren Untermenge $U \in R$. Wenn $V \subset R$ eine messbare Menge ist, $\tau \in R$, dann sagen wir, dass die Menge V im Punkt τ die Dichte 1 hat, wenn $\lim_{\gamma \to 0+, \delta \to 0+} (\gamma + \delta)^{-1} . m(V \cap (\tau - \gamma, \tau + \delta)) = 1$ ist. Wenn für eine Menge $V \subset R$, deren Dichte im Punkt τ gleich 1 ist, $\lim (t - \tau)^{-1} (x(t) - x(\tau))$ existiert, wo der Grenzwert für $t \to \tau$, $t \in V$, $t \neq \tau$ genommen wird, dann nennt man diesen die approximative Ableitung der Funktion x im Punkt τ.) Jarník hat in [48] ein Ergebnis erreicht, welches definitiv genannt werden kann: Die Menge solcher $x \in C$, für welche in keinem Punkt die Approximative Ableitung existiert, ist eine Residualmenge. Die letzte Arbeit in dieser Richtung ist [82]. Die Frage (welche mit den Operatoren von J. Mikusiński zusammenhängt) ob stetige Funktionen x, y so existieren, dass deren Faltung $x * y$ in keinem Punkt eine Ableitung hat, beantwortete V. Jarník folgendermassen: es existiert eine Residualmenge $Q \subset C \times C$ sodass $x * y$ für $(x, y) \in Q$ in keinem Punkt eine Ableitung hat.

Mehr als zehn Arbeiten von Jarník kann man in keine der oben beschriebenen vier Gruppen einreihen. Wenn wir unverdient die thematisch alleinstehenden, sehr interessanten Arbeiten [1], [3], [23], [29], [43], [61], [79] und [85] ausser der Acht lassen, bleiben noch einige, zu der Reihentheorie und dem Riemannschen Integral gehörenden Arbeiten. Der Beitrag der Arbeit [15] ist ein neuer Beweis des bekannten Arzelàschen Satzes über den Grenzübergang im Riemannschen Integral, welcher in die zweite Auflage des Werkes von Prof. Petr über Integralrechnung übernommen worden ist. In der Arbeit [25] ist vollkommenerweise die Frage gelöst, wie weit eine beschränkte reelle Funktion durch das System ihrer Darbouxsummen bestimmt ist. Die Arbeiten [11], [13] und [14] sind im Grund der Umordnung von nichtabsolut konvergenten Reihen (allgemein mit komplexen Gliedern) gewidmet.

Von der angeführten Skizze der wissenschaftlichen Arbeit Prof. Jarníks folgt, dass er in den Anfängen seiner wissenschaftlichen Laufbahn insbesondere von dem Werk E. Landaus beeinflusst war. Die Arbeiten von Jarník regten neue Ergebnisse anderer Mathematiker an und es ist ein Zeugnis für deren Gedankentiefe, dass man dafür bis in die Gegenwart Beispiele finden kann. Jarník war in einem lebhaften Kontakt mit vielen bedeutsamen Mathematikern (Landau, Walfisz, Mahler, Rogers, Erdös, Sierpiński, Chinčin, Turán, Zahorski, Saks usw.) und mit einigen hatte er auch gemeinsame Veröffentlichungen. Von der oben angeführten Analyse ist es zu sehen, dass die Arbeiten von Jarník wesentlich die Gitterpunkttheorie, die Theorie der diophantischen Approximationen und auch die Geometrie der Zahlen beeinflusst haben. Es ist interessant und weniger bekannt, dass einen gleichen Einfluss auch seine Arbeiten in der Theorie der reellen Funktionen hatten. Es genügt z. B. die Arbeit [41] anzuführen, welche eine Reihe von Arbeiten von Zahorski anregte, die Arbeit [39], von deren Hauptsatz im vorigen Jahr Garg den bisher stärkesten Satz über die Eigenschaften der derivierten Zahlen im Sinne der Kategorien hergeleitet hat. Ähnlich stand die Arbeit [57] im Ausgangspunkt der ganzen Untersuchungen über Limeswerte reeller Funktionen, welche insbesondere in den letzten Jahren aktuell geworden sind. Interessant ist auch, dass die Ergebnisse der Arbeit [5] schon einigemale wiederentdeckt worden sind; die Tatsache, dass diese Arbeit im Jahre 1923 veröffentlicht worden ist, ist auch für Spezialisten überraschend.

Es ist nur zu bedauern, dass sich Prof. Jarník nicht mehr seinen, zu der Geschichte der Mathematik gerichteten, Studien widmen konnte. Wie es seine Studien über B. Bolzano zeigen, konnte er insbesondere für die Geschichte der mathematischen Analysis und der Zahlentheorie sehr wertvolle Zeugenschaften bewahren, nachdem er den Problemkreis weit kannte, da er an der Entwicklung dieser Disziplinen in unserem Jahrhundert aktiv teilnahm und in einem engen Kontakt mit vielen Wissenschaftlern war, welche zu der Zeit zu den leitenden Persönlichkeiten der Weltmathematik gehörten.

Umfangreich und von grosser Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik in der Tschechoslovakei ist die pädagogische Tätigkeit Prof. Jarníks. Er gehörte zu den besten Lehrern, welche die mathematisch-physikalische Fakultät der Karlsuniversität je hatte. Ausser den Kursvorlesungen über mathematische Analysis (im reellen und auch im komplexen Gebiet) und den Auswahlsvorlesungen über Zahlentheorie, welche den Hauptbestandteil seiner Lehrtätigkeit bildeten, hielt Prof. Jarník auch eine Reihe von Vorträgen und Seminaren, in denen er die Studenten und Lehrer der Fakultät mit neu entstehenden oder weniger bekannten Gebieten der Mathematik vertraut machte (Konstruktive Funktionentheorie, Wahrscheinlichkeitsmethoden in der Zahlentheorie, usw.), wenn auch diese nicht seine eigenen Arbeitsgebiete waren.

Ebenso ist es schwer die Bedeutung seines vierbändigen Werkes über Differential- und Integralrechnung genügend einzuschätzen. Die Erläuterungen in diesen Lehrbüchern, welche fast den Charakter von wissenschaftlichen Monographien haben, sind ausserordentlich klar, präzis und modern, sodass diese zum Ausgangspunkt des Hochschulstudiums der Mathematik wurden und so eine fundamentale Bedeutung für die Erziehung junger Mathematiker in der Tschechoslovakei hatten.

Selbst die Persönlichkeit Prof. V. Jarníks war ebenso aussergewöhnlich wie sein Werk. Es ist eine seltene Erscheinung, dass ein hervorragender Mathematiker auch ein hervorragender Lehrer ist. Bei Professor Jarník trat zu beiden diesen Eigenschaften noch seine grosse persönliche Bescheidenheit zu. Professor Jarník stellte sich selbst immer und überall an die letzte Stelle. Niemals gab er, auch vor den Hochschulhörern nicht, seine wissenschaftliche Überlegenheit zu kennen. Mit seinen persönlichen Gefühlen und Ansichten anvertraute er sich nur in seltenen Augenblicken und erwägte immer konsequent und sorgfältig den richtigen Weg seiner Entschlüsse oder Äusserungen zwischen verschiedenen Gesichtspunkten und Argumenten. Er trachtete immer – manchmal vielleicht auch zum Schaden der Sache selbst – nicht nur seine eigenen Ansichten durchzusetzen.

Professor Jarník gehörte zu Leuten mit einem ungewohnt breiten Kulturüberblick, zu durchaus fortschrittlichen Menschen im besten Sinne dieses Wortes. Ein hervorragender Kenner und Liebhaber von Musik und Kunst allgemein, ein Liebhaber der Geschichte unserer Völker. Ein leidenschaftlicher Leser und aktiver Sportler bis in das hohe Alter, der sich auch in seinem letzten Lebensjahr die Spaziergänge auf seinen beliebten Stellen nicht versagte. Bis zu dem letzten Augenblick arbeitete er unermüdlich, bis zu dem letzten Augenblick widmete er sich seinen Lieben – der Familie, der Mathematik und der Kunst. Sein Fortgang betraf die Reihen von Mathematikern und unseren Hochschullehrern als ein schwerer und unersetzbarer Verlust.

BIBLIOGRAPHIE DES WISSENSCHAFTLICHEN WERKES VON V. JARNÍK

Originalartikel

Die mit dem Buchstaben a gekennzeichneten Arbeiten sind die Zusammenfassungen der entsprechenden, in tschechischer Sprache veröffentlichten, Arbeiten.

[1] O kořenech funkcí Besselových (Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen), Rozpravy Čes. akademie, II. tř., *29* (1920), No 28, 6 S.

[2] O funkci Bolzanově (Über die Funktion von Bolzano), Čas. pro pěst. mat. a fys. *51* (1922), 248—264.

[3] Poznámka k methodě postupných approximací (Une remarque sur la méthode des approximations successives), Čas. pro pěst. mat. a fys. *52* (1922), 51—55.

[4] O číslech derivovaných funkcí jedné reálné proměnné (Sur les nombres dérivés des fonctions d'une variable réelle), Čas. pro pěst. mat. a fys. *53* (1923), 98—101.

[5] O derivaci funkce jedné proměnné, Rozpravy Čes. akademie, II. tř., *32* (1923), No. 5, 8 S.

[5a] Sur la dérivée des fonctions d'une variable, Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1923, 4 S.

[6] O rozšíření definičního oboru funkcí jedné proměnné, při čemž zůstává zachována derivabilita funkce, Rozpravy Čes. akademie, II. tř., *32* (1923), No. 15, 15 S.

[6a] Sur l'extension du domaine de définition des fonctions d'une variable qui laisse intacte la dérivabilité de la fonction, Bull. internat. de l'Academie des sciences de Bohême 1923, 5 S.

[7] O mřížových bodech v rovině, Rozpravy Čes. akademie, II. tř. *33* (1926), No. 36, 23 S.

[7a] Sur les points à coordonnées entières dans le plan, Bull. internat. de l'Academie des sciences de Bohême 1924, 12 S.

[8] Několik poznámek o mřížových bodech v kruhu, Rozpravy Čes. akademie, II. tř., *34* (1925), No. 27, 13 S.

[8a] Quelques remarques sur les points à coordonnées à l'intérieur d'un cercle, Bull. internat. de l'Academie des science, de Bohême, 1925, 3 S.

[9] Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven, Math. Z. *24* (1925), 500—518.

[10] O funkcích první třídy Baireovy, Rozpravy Čes. akademie, II. tř., *35* (1926), No. 2, 13 S.

[10a] Sur les fonctions de la première classe de Baire, Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême, 1926, 11 S.

[11] Über bedingt konvergente Reihen, Math. Z. *24* (1926), 715—732.

[12] Über die Gitterpunkte auf homothetischen Kurven, Math. Z. *26* (1927), 445—459.

[13] Umordnungen von bedingt konvergenten Reihen, Math. Z. *28* (1928), 360—371.

[14] Über die Umordnung unendlicher Reihen, Věstník Král. čes. spol. nauk 1927, No. *8*, 45 S.

[15] O integrování nekonečných řad (Sur l'integration des séries infinies), Čas. pro pěst. mat. a fys. *57* (1928), 103—113.

[16] O mřížových bodech ve vícerozměrných koulích (Sur les points à coordonnées entières à l'intérieur des sphères à plusieurs dimensions), Čas. pro pěst. mat. a fys. *57* (1928), 123—128.

[17] O mřížových bodech ve vícerozměrných elipsoidech, Rozpravy Čes. akademie, II. tř., *37* (1928), No. 27, 19 S.

[17a] Sur les points a coordonnées entières dans les ellipsoides à plusieurs dimensions, Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1928, 10 S.

[18] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Ann. *100* (1928), 699—721.

[19] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, 2. Abhandlung, Math. Ann. *101* (1929), 136—146.

[20] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Z. *27* (1927), 154—160.
[21] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, 2. Mitteilung, Math. Z. *28* (1928), 311—316.
[22] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Tôhoku Math. J. *30* (1929), 354—371.
[23] Bestimmung einer absoluten Konstanten aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Ann. di math., Ser. 4, B. *6* (1928—29), 7 S. (mit K. Grandjot, E. Landau und J. E. Littlewood).
[24] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Math. Z. *30* (1929), 768—786.
[25] Über das Riemannsche Integral, Věstník Král. čes. spol. nauk 1929, No. 1, 14 S.
[26] Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Prace Mat.-Fiz. *36* (1928——29), 16 S.
[27] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Math. Z. *32* (1930), 152—160 (mit A. Walfisz).
[28] Několik poznámek o Hausdorffově míře, Rozpravy Čes. akademie, II. tř., *40* (1930), No. 9, 8 S.
[28a] Quelques remarques sur la mesure de M. Hausdorff, Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1930, 6 S.
[29] O jistém problému minimálním (Über ein Minimalproblem), Práce moravské přírodovědecké společnosti *6*, fasc. 4, 1930, 57—63.
[30] Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass, Мат. сборник *36* (1929), 371—382.
[31] Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoïdes à plusieurs dimensions, Věstník Král. čes. spol. nauk 1930, No. *6*, 11 S.
[32] Sur une fonctions arithmétique, Věstník Král. čes. spol. nauk 1930, No. *7*, 13 S.
[33] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Math. Z. *33* (1931), 62—84.
[34] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 2. Abhandlung, Math. Z. *33* (1931), 85—97.
[35] Über die simultanen diophantischen Approximationen, Math. Z. *33* (1931), 505—543.
[36] Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen, Práce Mat.-Fiz. *39* (1932), 135—144.
[37] Zur Theorie der diophantischen Approximationen. Monatshefte für Math. u. Phys. *39* (1932), 403—438.
[38] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, Věstník Král. čes. spol. nauk 1931, No. *20*, 17 S.
[39] Über die Differenzierbarkeit stetiger Funktionen, Fund. Math. 21 (1933), 48—58.
[40] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 3. Abhandlung, Math. Z. *36* (1933), 581—617.
[41] Über die Menge der Punkte, in welchen die Ableitung unendlich ist, Tôhoku Math. J. *37* (1933), 248—253.
[42] O jedné třídě funkcí spojitých (Sur une classe des fonctions continues), Čas. pro pěst. mat. a fys. *63* (1934), 135—146.
[43] O minimálních grafech, obsahujících *n* daných bodů (Sur les graphes minimal, contenant *n* points donnés), Čas. pro pěst. mat. a fys. *63* (1934), 223—235 (mit M. Kössler).
[44] Sur la dérivabilité des fonctions continues, Spisy přírodov. fakulty univ. Karlovy, No 129 (1934), 7 S.
[45] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorffschen Massbegriffes, Math. Z. *38* (1934), 217—256.
[46] Sur les nombres dérivés approximatifs, Fund. Math. *22* (1934), 4—16.
[47] Über die stetigen Abbildungen der Strecke, Monatshefte für Math. u. Phys. *41* (1934), 408—423.
[48] Sur la dérivée approximative unilatérale, Věstník Král. čes. spol. nauk 1934, No. *9*, 10 S.
[49] Untersuchungen über einen van der Corputschen Satz, Math. Z. *39* (1935), 745—767 (mit E. Landau).

[50] Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositions de deux fonctions, Fund. Math. *24* (1935), 206—208 (mit V. Knichal).
[51] Sur les superpositions des fonctions non décroissantes, Fund. Math. *25* (1935), 190—197 (mit V. Knichal).
[52] Remarque sur les nombres dérivés, Fund. Math. *23* (1934), 1—8.
[53] O simultánních diofantických aproximacích, Rozpravy Čes. Akademie, II. tř., *45* (1935), No. 19, 16 S.
[53a] Sur les approximations diophantiques simultannées, Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1935, 8 S.
[54] Über einen Satz von A. Khintchine, Prace Mat.-Fiz. *43* (1935), 1—16.
[55] Sur une propriéte des fonctions continues, Čas. pro pěst. mat. a fys. *65* (1936), 53—63.
[56] Über einen Satz von A. Khintchine, 2. Mitteilung, Acta Arithm. *2* (1936), 1—22.
[57] Sur les fonctions de deux variables réelles, Fund. Math. *27* (1936), 147—150.
[58] Über die angenäherte Lösung der Gleichung $x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + \ldots + x_n\Theta_n + x_0 = 0$ in ganzen Zahlen, Čas. pro pěst. mat. a fys. *66* (1937), 192—205.
[59] Eine Bemerkung über lineare Kongruenzen, Acta Arithm. *2* (1937), 214—220 (mit P. Erdös).
[60] Neuer Beweis eines Khintchineschen Satzes, Čas. pro pěst. mat. a fys. *67* (1938), 109—113.
[61] Sur un problème de M. Čech, Věstník Král. čes. spol. nauk 1938, No. *6*, 7 S.
[62] Zum Khintchineschen „Übertragungssatz", Труды Тбилиси мат. ин. *3* (1938), 193—216.
[63] Sur les solutions approchées de l'equation $x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 = 0$ en nombres entiers x_1, x_2, x_0, Věstník Král. čes. spol. nauk 1938, No. *7*, 26 S.
[64] Sur un théorème de M. Mahler, Čas. pro pěst. mat. a fys. *68* (1939), 59—60.
[65] Remarques à l'article précédent de M. Mahler, Čas. pro pěst. mat. a fys. *68* (1939), 103—111.
[66] Über einen p-adischen Übertragungssatz, Monatshefte für Math. u. Phys. *43* (1939), 277—287.
[67] Eine Bemerkung zur Gitterpunktlehre, Čas. pro pěst. mat. a fys. *69* (1940), 57—60.
[68] Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $\alpha_1(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqq r$, Věstník Král. čes. spol. nauk 1940, No. *3*, 63 S.
[69] Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 5. Abhandlung, Čas. pro pěst. mat. a fys. *69* (1940), 148—174.
[70] Zur Gitterpunktlehre der Ellipsoide $\alpha_1(u_1^2 + \ldots + u_{r_1}^2) + \alpha_2(u_{r_1+1}^2 + \ldots + u_r^2) \leqq x$. Zweite Abhandlung, Čas. pro pěst. mat. a fys. *70* (1940), 1 — 33.
[71] Věty o střední hodnotě z teorie mřížových bodů, 6. pojednání (Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre, 6. Abhandlung), Čas. pro pěst. mat. a fys. *70* (1941), 89—103.
[72] Dvě poznámky ke geometrii čísel (Zwei Bemerkungen zur Geometrie der Zahlen), Věstník Král. čes. spol. nauk 1941, No. *24*, 12 S.
[73] O lineárních nehomogenních diofantických aproximacích, Rozpravy Čes. akademie *51* (1941), No. 29, 21 S.
[73a] Sur les approximations diophantiques linéaires non homogénes, Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1946, 16 S.
[74] K hlavní větě geometrie čísel, Rozpravy Čes. akademie *53* (1943), No. 43, 15 S. (mit V. Knichal).
[74a] Sur le théorème de Minkowski dans la géometrie des nombres, Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1946, 15 S.
[75] Sur les approximations diophantiques des nombres p-adiques, Revista de Ciencias, Lima, *47* (1945), 489—505.
[76] On the main theorem of the Minkowski geometry of numbers, Čas. pro pěst. mat. a fys. *73* (1948), 1—8.
[77] On the successive minima of arbitrary sets, Čas. pro pěst. mat. a fys. *73* (1948), 9—15.

[78] On Estermann's proof of a theorem of Minkowski, Čas. pro pěst. mat. a fys. *73* (1949), 131—140.
[79] O kružnici křivosti (Sur le cercle de courbure), Čas. pro pěst. mat. a fys. *73* (1949), D37—D51.
[80] Sur la symétrie des nombres dérivés approximatifs, Annales de la société polonaise de mathématique, Kraków, *21* (1948), 214—218.
[81] Une remarque sur les approximations diophantiennes linéaires, Acta scientiarum mathem., Szeged, *12* (1950), 82—86.
[82] Sur le produit de composition de deux fonctions continues, Studia Mathem. *12* (1951), 58—64.
[83] К теории однородных линейных диофантовых приближений (Contribution à la théorie des approximations diophantiennes linéaires et homogénes), Czech. Math. J. *79* (1954), 330—353.
[84] К метрической теории цепных дробей (Contribution à la téorie metrique des fractions continues), Czech. Math. J. *79* (1954), 318—329.
[85] Lineární závislost funkcí jedné proměnné (Sur les fonctions linéairement dépendantes), Čas. pro pěst. mat. *80* (1955), 32—43.
[86] Eine Bemerkung zum Übertragungssatz, Известия на математическия институт (Bulgarian Ac. Sci.), *3* (1959), 170—175.
[87] Eine Bemerkung über diophantische Approximationen, Math. Z. *72* (1959), 187—191.
[88] Zur Gitterpunktslehre von mehrdimensionalen Ellipsoiden, Acta Arithm. *9* (1964), 321—329.
[89] Bemerkungen zu Landauschen Methoden in der Gitterpunktlehre, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Zur Erinnerung an E. Landau, VEB, Berlin 1968, 139—156.
[90] Un théorème d'existence pour les approximations diophantiennes, L'Enseignement mathématique *XV* (1969), 171—175.

Mitteilungen

[1] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln, Sprawozdanie z I. kongresu matematyków krajów słwiańskich, Warszawa 1929, 244—245.
[2] Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden, Verhandlungen des Internat. Matematikerkongresses, Zürich 1932, II, 24—25.
[3] Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens, Oslo 1936, II, 11.
[4] Sur quelques points de la théorie géometrique des nombres, Zprávy o 2. sjezdu matematiků zemí slovanských, Praha 1934 (auch Čas. pro pěst. mat. a fys. *64* (1934—35), 26—48).
[5] Ueber lineare diophantische Approximationen, Bericht über die Mathematikertagung in Berlin 14.—18. I. 1953, 189—192.
[6] Approximations diophantiennes linéaires et homogénes, Proceedings of the Int. Congr. 1954 Amsterodam, Vol. *I* (1957), 430.

Bücher

[1] Úvod do theorie množství (Einführung in die Mengenlehre), Anhang zu K. Petr: Integrální počet (Integralrechnung), 2. Aufl., JČMF, Praha 1931, 655—725.
[2] O derivovaných číslech funkcí jedné reálné proměnné, Anhang zu E. Čech: Bodové množiny (Punktmengen), JČMF, Praha 1936, 245—265.
[3] Úvod do integrálního počtu (Einführung in die Integralrechnung), JČMF, Praha, 1938, 168 S.

[4] Diferenciální počet I (Differentialrechnung I), 1. Aufl. (Úvod do počtu diferenciálního) 1938, JČMF, 448 S., 2. Aufl., 1951, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 448 S., 3. Aufl., 1953, NČSAV, Praha, 449 S., 4. Aufl. (Diferenciální počet I), 1955, NČSAV, Praha, 451 S., 5. Aufl. 1963, NČSAV, Praha, 390 S.

[5] Integrální počet I (Integralrechnung I), 1. Aufl. (Úvod do počtu integrálního), 1948, JČMF, Praha, 324 S., 2. Aufl., 1954, NČSAV, Praha, 295 S., 3. Aufl. (Integrální počet I) 1956, NČSAV, Praha, 299 S., 4. Aufl., 1963, NČSAV, Praha, 243 S.

[6] Diferenciální počet II (Differentialrechnung II), 1. Aufl. (Diferenciální počet. Pokračování do Úvodu počtu diferenciálního), 1953, NČSAV, Praha, 595 S., 2. Aufl., 1956, NČSAV, Praha, 609 S.

[7] Integrální počet II (Integralrechnung II), 1955, NČSAV, Praha, 760 S.

[8] Diferenciální rovnice v reálném oboru (Differentialgleichungen in reellem Gebiet). Nach der Vorlesung von Prof. Jarník bearbeitet von Vladimír Petrův. Učební texty vysokých škol, Státní pedagogické nakl., 1963, Offset, 245 S.

[9] Matematická analýza pro 3. semstr (Mathematische Analysis für den 3. Studiensemester), Učební texty vysokých škol, Státní pedagogické nakl., 1965, Rotaprint, 246 S.

[10] Diferenciální rovnice v komplexním oboru (Differentialgleichungen in komplexem Gebiet), Academia 1972 — in Vorbereitung.