Czechoslovak Mathematical Journal

Zdeněk Hustý

Asymptotische Eigenschaften der Differentialgleichung $y'' + 2a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 2, 208–240

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100890

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y'' + 2a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0$

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 2. Februar 1967)

Herrn O. BORŮVKA *zum 70. Geburtstag am 10. Mai 1969 gewidmet.*

VORBEMERKUNGEN

0.1 Anstatt „homogene lineare Differentialgleichung" sagen wir kurz „Gleichung". Die Symbole $f', f^{(n)}[\dot{f}]$ bedeuten die Ableitungen der Funktion f nach $x[t, \tau]$. Die Funktion $x = T_{-1}(t)$ ist die zu $t = T(x)$ inverse Funktion. Insofern kein Mißverständnis zu befürchten ist, werden wir kurz T statt $T(x)$ schreiben. Ist q eine nichtnegative ganze Zahl, so bedeutet das Symbol $T(x) \in C_q(I)$, daß die Funktion $T^{(q)}$ im Intervall I stetig ist. Mit E_1 bezeichnen wir die Menge aller (endlichen) reellen Zahlen; $E_1 \cup \infty = E_1^*$. Die Bezeichnung lim bezieht sich immer auf den Fall, daß die unabhängige Veränderliche gegen ∞ strebt. Mit I_ν resp. J_ν bezeichnen wir das Intervall $\langle x_\nu, \infty)$ resp. $\langle t_\nu, \infty)$, $\nu = 0, 1, 2$.

0.2 Es seien die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ im Intervall I_0 definiert.

0.2,1 Wir sagen, $f(x)$ ist ein „*Groß-O*" von $g(x)$, und schreiben „$f(x) = O[g(x)]$", wenn für irgendeine positive Konstante M und alle $x \in I_0$ die Ungleichung $|f(x)| \leqq M|g(x)|$ gilt. Diese O-Relation ist reflexiv und transitiv. Ist $g(x) = 1$, so besagt $f(x) = O(1)$ offenbar, daß $f(x)$ für alle $x \in I_0$ beschränkt ist.

0.2,2 Wir sagen, $f(x)$ ist ein „*Klein-o*" von $g(x)$, und schreiben „$f(x) = o[g(x)]$", wenn es für jede Konstante $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\xi_\varepsilon \geqq x_0$ gibt, so daß $|f(x)| \leqq \varepsilon|g(x)|$ für alle $x \geqq \xi_\varepsilon$ gilt. Diese o-Relation ist transitiv. Für $g(x) = 1$ besagt $f(x) = o(1)$, daß $f(x)$ für $x \to \infty$ gegen Null strebt.

0.2,3 Aus den Definitionen 0.2,1 und 0.2,2 ergeben sich folgende Regeln, siehe [1; § 1].

$$o(g) \pm o(g) = o(g)\,, \qquad o(f) \pm o(g) = o(|f| + |g|)\,,$$
$$f\,O(g) = O(fg)\,, \qquad f\,o(g) = o(fg)\,,$$

$$c\,O(g) = O(g)\,, \qquad c\,o(g) = o(g)\,, \quad 0 \neq c \in E_1\,,$$
$$O(f)\,O(g) = O(fg)\,, \quad O(f)\,o(g) = o(f)\,o(g) = o(fg)\,,$$
$$O[O(g)] = O(g)\,, \qquad O[o(g)] = o[O(g)] = o[o(g)] = o(g)\,.$$

0.2,4 Gilt $f(x) = O[\varkappa\, g(x)]$ resp. $f(x) = o[\varkappa\, g(x)]$, $\varkappa(x) > 0$, so sagen wir, $f(x)$ ist ein „*Groß-O*" resp. ein „*Klein-o*" von $g(x)$ mit Schätzfunktion $\varkappa(x)$.

0.2,5 Gilt sowohl $f(x) = O[\varkappa_1\, g(x)]$, $g(x) = O[\varkappa_2\, f(x)]$, $\varkappa_i(x) > 0$, $i = 1, 2$, so nennen wir die Funktionen $f(x), g(x)$ asymptotisch äquivalent mit Schätzfunktionen $\varkappa_1, \varkappa_2$.

Ist $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, so daß gleichzeitig $f(x) = O[g(x)]$, $g(x) = O[f(x)]$ gilt, so nennen wir die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ asymptotisch äquivalent und benutzen die Schreibweise

$$f(x) \asymp g(x)\,.$$

Diese asymptotische Äquivalenz ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

0.2,6 Wir sagen, die Funktionen $f(x), g(x)$ sind stark asymptotisch äquivalent, und schreiben

(0.2,1) $$f(x) \approxeq g(x)\,,$$

falls eine derartige Zahl $A \neq 0$ existiert, daß $\lim f(x)/g(x) = A$. Die Relation (0.2,1) ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Die Beziehung (0.2,1) kann man auch in der Form

(0.2,2) $$f(x) = A\,g(x) + o[g(x)] \quad \text{oder} \quad f(x) = g(x)\,[A + o(1)]$$

schreiben. Es gilt

(0.2,3) $$f(x) \approxeq g(x) \Rightarrow f(x) \asymp g(x)$$

0.2,7 Wir sagen, $f(x)$ ist asymptotisch gleich $g(x)$, und schreiben

(0.2,4) $$f(x) \sim g(x)\,,$$

falls $\lim\,(f(x)/g(x)) = 1$. Die Beziehung (0.2,4), die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, nennen wir eine asymptotische Gleichung. Ist sie erfüllt, so sagen wir auch „$f(x)$, $g(x)$ sind asymptotisch gleich".

Es gilt

$$f(x) \approxeq g(x) \Leftrightarrow f(x) \sim A\,g(x)\,, \quad 0 \neq A \in E_1$$

und statt (0.2,4) können wir

(0.2,5) $$f(x) = g(x) + o[g(x)] \quad \text{oder} \quad f(x) = g(x)\,[1 + o(1)]$$

schreiben.

0.2,8 Asymptotische Gleichungen darf man multiplizieren, dividieren und in eine beliebige Potenz erheben. Ist $f_\nu(x) \sim g_\nu(x)$, $g_\nu(x) > 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, so folgt

$$\sum_{\nu=1}^{k} f_\nu(x) \sim \sum_{\nu=1}^{k} g_\nu(x)\,, \tag{0.2,6}$$

siehe [1; S. 13].

1. TRANSFORMATION

Die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung ist von der Gestalt

$$\text{(a)}\qquad L[z(x)] = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} a_i(x)\, z^{(2-i)}(x) = 0\,, \quad a_0 \not\equiv 0\,, \quad a_i \in C_0(I_1)\,, \quad i = 0, 1, 2\,.$$

Ist $a_i/a_0 \in C_0(I_1)$, $i = 1, 2$, $(a_0 \equiv 1)$, so wird (a) regulär (normal) genannt. Ist (a) regulär, so wird die Gleichung

$$\text{(a}_\text{n}\text{)}\qquad z'' + 2\,\frac{a_1}{a_0}\, z' + \frac{a_2}{a_0}\, z = 0$$

die Normalform von (a) genannt.

Mit dem Symbol $M(I_1)$ bezeichnen wir die Menge, deren Elemente folgendermaßen definiert sind: eine zweigliedrige Folge $\{H(x), h(x)\} \in M(I_1)$, falls $H(x), h(x) \in C_2(I_1)$, $H'(x)\, h(x) \neq 0$ in I_1 ist.

Es sei $\{H(x), h(x)\} \in M(I_1)$. Wenn wir in der Gleichung (a) die Substitutionen $z(x) = h(x)\, y(x)$, $t = H(x)$ einführen, so erhalten wir eine Gleichung (ā), die wir das Bild der Gleichung (a) in I_1 der Koordinaten $H(x), h(x)$ nennen; wir führen die Bezeichnung (ā) $\{H(x), h(x)\}$ ein. Das Bild (ā) ist im Intervall $J_1 = H(I_1)$ definiert. Mit dem Symbol $O_a(I_1)$ bezeichnen wir die Menge aller Bilder der Gleichung (a) in I_1, deren Koordinaten Elemente der Menge $M(I_1)$ sind. Das Symbol (ā) $\{H(x), h(x)\} \in$ $\in O_a(I_1)$ lesen wir folgendermaßen: Die Gleichung (ā) ist in I_1 das Bild von (a) mit den Koordinaten $H(x), h(x)$, wo $\{H(x), h(x)\} \in M(I_1)$.

2. HILFSSÄTZE

2.1 Es sei die Gleichung

$$\text{(p)}\qquad Z^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} [a_i(x) + p_i(x)]\, Z^{(n-i)}(x) = 0\,,$$

$$a_i, p_i \in C_0(I_0)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

gegeben. Es bilden ferner die Funktionen

$$z_k(x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

ein Hauptsystem der Gleichung

$$\text{(a)} \qquad z^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i(x)\, z^{(n-i)}(x) = 0\,.$$

Die Gleichung (p) bezeichnen wir als perturbierte Gleichung und die Funktionen $p_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ nennen wir Perturbationskoeffizienten.

2.2 Lemma. *Es gelte*

$$\int_{x_0}^{\infty} \left|\frac{W_j(x)}{W(x)}\right| \left|\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} p_i z_k^{(n-i)}\right| \mathrm{d}x < \infty\,, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

wo $W(x)$ die Wronskische Determinante der Funktionen (2.1) *und $W_j(x)$ das Komplement des Elementes $z_j^{(n-1)}$ in der Determinante $W(x)$ darstellen. Dann hat die Gleichung* (a) *das Hauptsystem*

$$Z_k^{(s)}(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i^{(s)}(x)\,[\delta_{ik} + o(1)]\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,; \quad s = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

wo $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$, $\delta_{kk} = 1$ zu nehmen ist. Siehe [2].

2.3 Lemma. *Es gelte*

$$\text{(2.3,1)} \qquad \int_{x_0}^{\infty} x^{i-1} |a_i(x)|\, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Dann hat die Gleichung (a) *das Hauptsystem*

$$z_k^{(s-1)} = \begin{cases} \dfrac{x^{k-s}}{(k-s)!}[1 + o(1)]\,, & s = 1, 2, \ldots, k, \\ o(1)\,, \quad s = k+1, k+2, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Siehe [3].

Bemerkung. Gilt

$$\text{(2.3,2)} \qquad \int_{x_0}^{\infty} |a_1(x)|\, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad \int_{x_0}^{\infty} x |a_2(x)|\, \mathrm{d}x < \infty\,,$$

so hat die Gleichung (a) für $n = 2$ das Hauptsystem

$$z_1 = 1 + o(1)\,, \quad z_2 = x[1 + o(1)]\,,$$
$$z_1' = o(1)\,, \qquad z_2' = 1 + o(1)\,.$$

Es folgt aus Lemma 2.3 für $n = 2$.

2.4 Lemma. *Es sei i ganz,* $0 \leqq i \leqq n - 1$ *und* $0 \leqq \varepsilon \in E_1$. *Wenn* (2.3,1) *und*

$$\int_{x_0}^{\infty} \left| \sum_{j=n-i}^{n} (n - j)! \binom{i}{n - j} x^{j+i-1+\varepsilon} a_j(x) \right| \mathrm{d}x < \infty$$

gilt, so hat die Gleichung (a) *eine Lösung* $z(x)$ *von der Form*

$$z^{(s)}(x) = \begin{cases} i(i - 1) \dots (i - s + 1)\, x^{i-s} + o(x^{-s-\varepsilon}), & s = 0, 1, .., i \\ o(x^{-s-\varepsilon}), \quad s = i + 1, i + 2, \dots, n - 1 . \end{cases}$$

Siehe [4; Satz 1].

Bemerkung. Es gelte (2.3,2); dann hat die Gleichung (a) für $n = 2$ eine Lösung $z(x)$ von der Form

$$z = 1 + o(1), \quad z' = o(x^{-1}).$$

Es folgt aus Lemma 2.4 für $n = 2$, $\varepsilon = 0$, $i = 0$.

2.5 Lemma. *Es gelte* (2.3,2), *dann hat die Gleichung* (a) *für* $n = 2$ *ein Hauptsystem von der Gestalt*

$$z_1 = 1 + o(1), \quad z_2 = x[1 + o(1)],$$
$$z_1' = o(x^{-1}), \quad z_2' = 1 + o(1).$$

Folgt aus den Bemerkungen 2.3 und 2.4.

3. EINIGE EIGENSCHAFTEN EINER NICHTOSZILLATORISCHEN GLEICHUNG

3.1 Es sei $z(x)$ eine Lösung der Gleichung

(a) $$z''(x) + 2a_1(x)\, z'(x) + a_2(x)\, z(x) = 0, \quad a_i \in C_0(I_0), \quad i = 1, 2$$

mit der folgenden Eigenschaft: es gibt $x_1 \geqq x_0$ derart, daß $z(x) \neq 0$ für $x \in I_1$. Bilden wir die Funktion $G(x; z) = \int_{x_1}^{x} e(-2a_1; s)\, z^{-2}(s)\, \mathrm{d}s$ mit

(3.1,1) $$e(-2a_1; s) = \exp\left\{-2 \int_{x_1}^{s} a_1(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\right\}.$$

Es gibt $\lim G(x; z) = c$, $0 < c \in E_1^*$. Ist $c = \infty$, so nennt man $z(x)$ eine Hauptlösung der Gleichung (a) im Intervall I_1. Ist $c < \infty$, so bilden wir die Funktion

(3.1,2) $$g(x; z) = \int_{x}^{\infty} e(-2a_1; s)\, z^{-2}(s)\, \mathrm{d}s.$$

Dann ist die Funktion $z_1(x) = z(x)\, g(x; z)$ eine Hauptlösung der Gleichung (a) im Intervall I_1, weil $z_1(x) \neq 0$ für $x \in I_1$ und $\lim G(x; z_1) = \infty$ ist.

Lemma. *Die Gleichung* (a) *ist dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn sie eine Hauptlösung hat. Jede zwei Hauptlösungen der Gleichung* (a) *sind linear abhängig.*

Siehe [5; Lemma 17, Seite 212].

Bemerkung. Das Symbol (3.1,1) wird in der ganzen Arbeit verwendet. Demnach ist z. B. $e(2a_1; x) = \exp\{2\int_{x_1}^{x} a_1(\sigma)\, d\sigma\}$.

3.2 Jede zweigliedrige Folge von voneinander (linear) unabhängigen Lösungen der Gleichung (a) nennt man Basis von (a).

Lemma. *Es sei*

$$z_1(x), \quad z_2(x) \tag{3.2,1}$$

ein geordnetes Paar der Lösungen von (a) *mit den folgenden Eigenschaften*:

$$z_2(x) \neq 0 \quad \text{für} \quad x \in I_1 \subset I_0, \quad \lim G(x; z_2) < \infty,$$

$$z_1(x) = z_2(x)\, g(x; z_2). \tag{3.2,2}$$

Dann gelten folgende Behauptungen:

(i) *Die Lösungen* (3.2,1) *sind* (*voneinander*) *unabhängig*;

(ii) $z_1(x)$ *ist eine Hauptlösung*;

$$z_1(x) = o[z_2(x)]; \tag{3.2,3}$$

ist $\bar{z}_2(x)$ *eine beliebige von* $z_1(x)$ *unabhängige Lösung der Gleichung* (a), *so gilt*

$$\bar{z}_2(x) \asymp z_2(x) \tag{3.2,4}$$

$$z_1(x) = o[\bar{z}_2(x)]. \tag{3.2,5}$$

Beweis. Die Behauptung (i) ist bekannt, (ii) gilt nach Abs. 3.1 und die Gleichung (3.2,3) folgt aus (3.2,2), (3.1,2). Ferner ist

$$\bar{z}_2 = c_1 z_1 + c_2 z_2, \quad c_1 \in E_1, \quad 0 \neq c_2 \in E_1, \tag{3.2,6}$$

so daß nach (3.2,3) $\bar{z}_2 = o(z_2) + c_2 z_2$ gilt. Daraus folgt mit Rücksicht auf Abs. 0.2,6 die Beziehung (3.2,4). Die Gleichung (3.2,5) ergibt sich aus (3.2,3), (3.2,4).

Folgerung. Es sei (3.2,1) eine beliebige Basis von (a), wobei $z_1(x) \neq 0$ in I_1 ist. *Die Funktion* $z_1(x)$ *ist dann und nur dann eine Hauptlösung von* (a) *im Intervall* I_1, *wenn* (3.2,3) *in Kraft ist.*

Bemerkung. Ist $z_2 = O(1)$, so $z_1 = o(1)$.

3.3 Definitionen. A. Eine zweigliedrige Folge von unabhängigen Lösungen (3.2,1) bildet eine Hauptbasis von (a) im Intervall $I_1 \subset I_0$, falls $z_1(x)$ in I_1 eine Hauptlösung von (a) und $z_2(x) \neq 0$ für $x \in I_1$ ist.

B. Wir nennen die Basis (3.2,1) regelmäßig im Intervall $I_2 \subset I_1$ mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(x)$, $\varkappa_2(x)$, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1° Die Lösungen (3.2,1) bilden in I_1 eine Hauptbasis von (a);
2° $z_i'(x) \neq 0$ in I_2, $i = 1, 2$;
3° es gilt

$$z_j z_k' = O(\varkappa_j z_j' z_k), \quad \varkappa_j(x) > 0, \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k. \tag{3.3,1}$$

C. Wir nennen die Basis (3.2,1) halbregelmäßig j-ter Art im Intervall $I_2 \subset I_1$ mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(x)$, $\varkappa_2(x)$, $j = 1, 2$, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1° Die Lösungen (3.2,1) bilden in I_1 eine Hauptbasis von (a);
2° $z_j'(x) \neq 0$ in I_2;
3° es gilt

$$z_j z_k' = O(\varkappa_j z_j' z_k), \quad z_j' z_k = O(\varkappa_k z_j), \quad \varkappa_i(x) > 0, \\ i = 1, 2, \quad k = 2, 1, \quad k \neq j. \tag{3.3,2}$$

D. Wir nennen die Basis (3.2,1) unregelmäßig im Intervall I_1 mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(x)$, $\varkappa_2(x)$, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1° Die Lösungen (3.2,1) bilden in I_1 eine Hauptbasis von (a);
2° es gilt

$$z_j z_k' = O(\varkappa_j z_k), \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k. \tag{3.3,3}$$

Bemerkungen. a) Eine regelmäßige Basis kann man auch als eine halbregelmäßige Basis beliebiger Art bezeichnen. Eine halbregelmäßige Basis beliebiger Art kann man auch als eine unregelmäßige Basis bezeichnen.

b) Die in I_1 halbregelmäßige Basis k-ter Art (3.2,1) ist regelmäßig im Intervall $I_2 \subset I_1$ dann und nur dann, wenn $z_j'(x) \neq 0$ in I_2, $j, k = 1, 2, j \neq k$.

c) Die in I_1 unregelmäßige Basis (3.2,1) ist im Intervall $I_2 \subset I_1$ halbregelmäßig k-ter Art dann und nur dann, wenn $z_k'(x) \neq 0$ in I_2, $k = 1, 2$.

d) In [5; Def. 21, S. 212] ist der Begriff der regelmäßigen Gleichung eingeführt. Nach [5; (36), (37), S. 212] schließen wir, daß eine regelmäßige Gleichung immer eine regelmäßige Basis besitzt. Die umgekehrte Behauptung gilt nicht. Zum Beispiel die Funktionen $\sqrt{(x)}$, $\sqrt{(x)} \log x$ bilden eine regelmäßige Basis der Gleichung $y'' + (2x)^{-2} y = 0$ mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$. Diese Gleichung ist aber nicht regelmäßig.

e) Einfachheitshalber setzen wir

$$\omega(x) = z_1(x)/z_2(x), \tag{3.3,4}$$

wo (3.2,1) eine Hauptbasis von (a) ist. Laut (3.2,3) gilt

$$(3.3,5) \qquad \omega(x) = o(1).$$

E. Wir nennen die Basis (3.2,1) normal im Intervall $I_2 \subset I_1$, falls sie folgende Eigenschaften hat:

1° Die Lösungen (3.2,1) bilden in I_1 eine Hauptbasis von (a);
2° $z_2'(x) \neq 0$ in I_2;
3° es gibt $\varkappa_2(x) > 0$ derart, daß

$$(3.3,6) \qquad z_1'z_2 = O(\varkappa_2 z_1 z_2'), \quad \varkappa_2 z_1/z_2 = o(1).$$

Bemerkungen. f) Nach den Definitionen B.–E. darf nur eine regelmäßige oder halbregelmäßige Basis zweiter Art normal sein.

g) Eine regelmäßige oder halbregelmäßige Basis zweiter Art ist normal, falls $\varkappa_2(x) = O(1)$ ist.

h) Es sei $z_2'(x) \neq 0$ in I_1. *Die Hauptbasis* (3.2,1) *ist in* I_1 *normal dann und nur dann, wenn*

$$(3.3,7) \qquad z_1'(x) = o[z_2'(x)]$$

gilt.

Beweis. Gilt (3.3,6), so ist $z_1'z_2 = o(z_2z_2')$, woraus (3.3,7) folgt. Es gelte umgekehrt (3.3,7). Es sei M die Menge der Nullstellen von $z_1'(x)$. Definieren wir die Funktion $\varkappa_2(x)$ folgendermaßen: $\varkappa_2(x) = 1$ für $x \in M$, so daß (3.3,6) in M gilt; $\varkappa_2(x) = |z_1'z_2/z_1z_2'|$ für $x \in I_1 \dot{-} M$, so daß $\varkappa_2|z_1/z_2| = |z_1'/z_2'| = o(1)$ in $I_1 \dot{-} M$ ist. Es gilt also (3.3,6) im ganzen Intervall I_1.

i) Es sei (3.2,1) eine Hauptbasis von (a) im Intervall I_1. Gilt $z_i(x) > 0$ in I_1, $i = 1, 2$, so bezeichnen wir (3.2,1) als positive Hauptbasis.

j) *Die Wronskische Determinante der positiven Hauptbasis ist positiv.* Beweis. Ist (3.2,1) eine positive Hauptbasis im Intervall I_1, so gilt $z_2 > 0$ in I_1, $z_1 = cz_2g(x; z_2)$ mit $0 < c \in E_1$, so daß $W[z_1, z_2] = ce(-2a_1; x) > 0$ ist.

3.4 Eigenschaften der normalen Basis. Es sei (3.2,1) in I_1 eine normale Basis von (a).

A. Ist $z_2' = O(1)$, so ist $z_1' = o(1)$. Folgt aus (3.3,7).

B. *Ist* $\bar{z}_2(x)$ *eine beliebige von* $z_1(x)$ *unabhängige Lösung der Gleichung* (a), *so gilt*

$$(3.4,1) \qquad \bar{z}_2'(x) \asymp z_2'(x),$$

$$(3.4,2) \qquad z_1'(x) = o[\bar{z}_2'(x)].$$

Beweis. Aus (3.2,6) folgt bei Beachtung von (3.3,7) $\bar{z}_2' = o(z_2') + c_2 z_2'$, so daß mit Rücksicht auf Abs. 0.2,6 die Beziehung (3.4,1) gilt. Die Gleichung (3.4,2) ergibt sich aus (3.3,7), (3.4,1).

C. *Jede Hauptbasis von* (a) *ist im gewissen nach rechts unbeschränkten Intervall normal.*

Beweis. Es sei

$$\bar{z}_1(x),\ \bar{z}_2(x) \tag{3.4,3}$$

eine Hauptbasis von (a) im Intervall $\langle \xi_1, \infty)$, so daß (3.4,1), (3.4,2) und

$$\bar{z}_1(x) = c\, z_1(x)\,, \quad 0 \neq c \in E_1 \tag{3.4,4}$$

gilt. Nach (3.4,1) gibt es ein $\eta \geqq \max\{x_1, \xi_1\}$ derart, daß $\bar{z}_2' \neq 0$ gilt. Laut (3.4,2), (3.4,4) ist $\bar{z}_1' = o(\bar{z}_2')$, so daß mit Rücksicht auf Bemerk. 3,3 h) die Hauptbasis (3.4,3) im Intervall $\langle \eta, \infty)$ normal ist.

Bemerkungen. a) Gilt die Beziehung (3.3,7) für eine Hauptbasis von (a), so gilt sie für alle Hauptbasen von (a).

b) Gilt für eine Hauptbasis von (a) $\lim(z_1'/z_2') = c$, $0 \neq c \in E_1$, so existiert dieser endliche Limes für jede Hauptbasis von (a) nicht. Zum Beispiel die Gleichung

$$z''[x + (1 + x^2)/\operatorname{arctg} x] + 2z' \frac{x^3 + (1 + x^2)^2 \operatorname{arctg} x}{x(1 + x^2)} - 2z \frac{1}{x(1 + x^2)} = 0$$

besitzt die regelmäßige Basis $z_1 = x^{-1}$, $z_2 = \operatorname{arctg} x$ mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = x^{-1}$, $\varkappa_2 = x$. Diese Basis ist nicht normal, denn $\varkappa_2 z_1/z_2 = (\operatorname{arctg} x)^{-1} \to 2/(2k + 1)\,\pi$ ($k \geqq 0$, ganz). Ferner ist $\lim(z_1'/z_2') = -1$. Eine beliebige Hauptbasis $\bar{z}_1 = cx^{-1}$, $\bar{z}_2 = c_1 x^{-1} + c_2 \operatorname{arctg} x$, $0 \neq c \in E_1$, $c_1 \in E_1$, $0 \neq c_2 \in E_1$, ist regelmäßig mit Schätzfunktionen entweder $\varkappa_1 = x^{-1}$, $\varkappa_2 = x$ für $c_1 \neq c_2$ oder $\varkappa_1 = x^{-3}$, $\varkappa_2 = x^3$ für $c_1 = c_2$. Im Fall $c_1 \neq c_2$ ist $\varkappa_2 \bar{z}_1/\bar{z}_2 = c/(c_1 x^{-1} + c_2 \operatorname{arctg} x) \to 2c/(2k + 1)\,\pi c_2$, $\lim(\bar{z}_1'/\bar{z}_2') = c/(c_1 - c_2)$. Im Fall $c_1 = c_2$ ist $\varkappa_2 \bar{z}_1/\bar{z}_2 = cx^2/(c_1 x^{-1} + c_2 \operatorname{arctg} x)$, $\bar{z}_1'/\bar{z}_2' = c(1 + x^2)/c_1$, so daß beide Funktionen gegen Unendlich streben.

3.5 Eigenschaften der regelmäßigen Basis. Es sei (3.2,1) in I_1 eine regelmäßige Basis von (a) mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(x)$, $\varkappa_2(x)$.

A. Es gilt

$$z_1'(x) = o[\varkappa_2 z_2'(x)]\,. \tag{3.5,1}$$

Beweis. Nach (3.3,1) ist $z_1' = O(\varkappa_2 z_2'(z_1/z_2))$. Daraus ergibt sich mit Rücksicht auf (3.2,5) die Beziehung (3.5,1).

B. Ist $\bar{z}_2(x)$ eine beliebige von $z_1(x)$ unabhängige Lösung der Gleichung (a), so gilt $\bar{z}_2'(x) = z_2'(x)\left[c_2 + o(\varkappa_2)\right]$, $0 \neq c_2 \in E_1$. Den Beweis kann man ganz ähnlich wie im Abs. 3.4 B durchführen.

C. *Ist* (3.2,1) *normal, so ist jede Hauptbasis von* (a) *im gewissen nach rechts unbeschränkten Intervall regelmäßig mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)$.

Beweis. Es sei (3.4,3) eine Hauptbasis von (a) im Intervall $\langle \xi_1, \infty)$, so daß (3.2,4), (3.4,1) und

$$\bar{z}_1(x) \asymp z_1(x)\,, \quad \bar{z}_1'(x) \asymp z_1'(x) \tag{3.5,2}$$

gilt. Die Multiplikation dieser asymptotischen Gleichungen liefert $\bar{z}_j\bar{z}_k' \asymp z_j z_k'$, $j, k = 1, 2$, $j \neq k$. Daraus folgt mit Rücksicht auf (3.3,1) $\bar{z}_j\bar{z}_k' = O(z_j z_k') = O(\varkappa_j z_j' z_k) = O(\varkappa_j \bar{z}_j' \bar{z}_k)$, $j, k = 1, 2$, $j \neq k$. Nach (3.5,2), (3.4,1) gibt es ein $\eta \geqq \max\{x_1, \xi_1\}$ derart, daß $z_i' \neq 0$ für $x \geqq \eta$, $i = 1, 2$ gilt. Auf Grund der Definition 3.3 B ist die Hauptbasis (3.4,3) im Intervall $\langle \eta, \infty)$ regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1, \varkappa_2$.

3.6 Eigenschaften der halbregelmäßigen Basis der ersten Art. Es sei (3.2,1) in I_1 eine halbregelmäßige Basis der ersten Art von (a) mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)$.

A. *Es gilt*

$$z_2'(x) = O(\varkappa_1\varkappa_2)\,, \tag{3.6,1}$$

$$z_1'(x) = o(\varkappa_2)\,. \tag{3.6,2}$$

Beweis. Nach (3.3,2), (3.3,5) ist $z_1 z_2' = O[\varkappa_1 O(\varkappa_2 z_1)]$, $z_1' = O[\varkappa_2\, o(1)]$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

B. *Jede Hauptbasis von* (a) *ist im gewissen nach rechts unbeschränkten Intervall halbregelmäßig der ersten Art mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1 + |\omega|, \varkappa_2$.

Beweis. Es sei (3.4,3) eine Hauptbasis von (a) im Intervall $\langle \xi_1, \infty)$. Nach (3.2,4), (3.2,6), (3.4,4) ist $\bar{z}_1'(x) \neq 0$ in I_1,

$$\frac{\bar{z}_1\bar{z}_2'}{\bar{z}_1'\bar{z}_2} = (c_1 z_1' + c_2 z_2')\, O\left(\frac{z_1}{z_1' z_2}\right) = c_1\, O\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + c_2\, O(\varkappa_1) = O(\omega) + O(\varkappa_1) =$$
$$= O(\varkappa_1 + |\omega|)\,, \quad \frac{\bar{z}_1'\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = O\left(\frac{z_1' z_2}{z_1}\right) = O(\varkappa_2)\,.$$

Auf Grund der Definition 3.3 C ist die Hauptbasis (3.4,3) im Intervall $\langle \eta, \infty)$, wo $\eta = \max\{\xi_1, x_1\}$, halbregelmäßig der ersten Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 + |\omega|, \varkappa_2$.

3.7 Es sei (3.2,1) in I_1 eine Hauptbasis von (a).

A. *Ist*

(3.7,1) $$z_2(x) = c\,, \quad 0 \neq c \in E_1\,,$$

so ist (3.2,1) *in* I_1 *halbregelmäßig der ersten Art mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1 = 1$,

(3.7,2) $$\varkappa_2 = |z_1'/z_1|$$

und gilt

(3.7,3) $$z_1(x) = o(1)\,,$$

(3.7,4) $$z_1'(x) = o(\varkappa_2)\,.$$

Beweis. Weil die Lösungen (3.2,1) unabhängig sind, ist $z_1' \neq 0$ in I_1. Ferner ist $z_1 z_2' = 0$, $z_1' z_2/z_1 = c z_1'/z_1$, so daß wir $\varkappa_1 = 1$, (3.7,2) wählen können. Nach Bemerk. 3.2 und (3.7,1) gilt (3.7,3), aus (3.7,2), (3.7,3) folgt (3.7,4).

B. *Gilt*

(3.7,5) $$z_2(x) = c + c_1\, z_1(x)\,, \quad 0 \neq c \in E_1\,, \quad c_1 \in E_1\,,$$

so ist (3.2,1) *im gewissen nach rechts unbeschränkten Intervall halbregelmäßig der ersten Art mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1 = 1$, (3.7,2).

Beweis. Nach (3.7,5) schließen wir, daß $\bar{z}_2 = c$ eine von z_1 unabhängige Lösung von (a) darstellt. Die Lösungen z_1, $\bar{z}_2$ bilden eine Hauptbasis, die gemäß Abs. 3.7 A halbregelmäßig der ersten Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = 1$, (3.7,2) ist. Wendet man nun das Resultat des Abs. 3.6 B, so wird unsere Behauptung bestätigt.

3.8 Eigenschaften der halbregelmäßigen Basis der zweiten Art. Es sei (3.2,1) in I_1 eine halbregelmäßige Basis der zweiten Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(x)$, $\varkappa_2(x)$.

A. *Es gilt* (3.5,1) *und*

(3.8,1) $$z_1'(x) = O(\varkappa_1 \varkappa_2)\,.$$

Folgt aus (3.3,2), (3.3,5).

B. *Ist* (3.2,1) *normal, so ist jede Hauptbasis von* (a) *im gewissen nach rechts unbeschränkten Intervall halbregelmäßig der zweiten Art mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(x)$, $\varkappa_2(x)$.

Beweis. Ist (3.4,3) eine Hauptbasis von (a), so ist (3.4,3) mit Rücksicht auf Abs. 3.4 C im gewissen nach rechts unbeschränkten Intervall normal. Normale Basis ist halbregelmäßig der zweiten Art. Ferner gelten die asymptotische Gleichungen (3.2,4), (3.4,1), (3.5,2), so daß

$$\frac{\bar{z}_1'\bar{z}_2}{\bar{z}_1\bar{z}_2'} = o\left(\frac{z_1'z_2}{z_1z_2'}\right) = O(\varkappa_2)\,, \quad \frac{\bar{z}_1\bar{z}_2'}{\bar{z}_2} = o\left(\frac{z_1z_2'}{z_2}\right) = O(\varkappa_1)$$

ist.

C. Es sei (3.2,1) eine Hauptbasis von (a). Ist $z_1 = c$, $0 \neq c \in E_1$, so ist (3.2,1) in I_1 eine normale halbregelmäßige Basis der zweiten Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = |z_2'/z_2|$, $\varkappa_2 = 1$ und gilt $1 = o(z_2)$.

Diese Behauptung beweist man ähnlich wie die Behauptung des Abs. 3.7 A.

Beispiele.

1. Es sei die Gleichung

$$(1) \qquad z''[x + n(1 + x^2)\operatorname{arccotg} x] + z'\,\frac{2x^3 - n(n-1)(1 + x^2)^2 \operatorname{arccotg} x}{x(1 + x^2)} -$$

$$- zn\,\frac{(n+1)x^2 + n - 1}{x(1 + x^2)} = 0\,, \quad n \in E_1$$

gegeben.

1° Im Fall $n < -1$ hat (1) die Hauptbasis

$$(1_1) \qquad z_1 = x^n\,, \quad z_2 = \operatorname{arccotg} x\,.$$

2° Im Fall $n = -1$ hat (1) die Hauptbasis

$$(1_2) \qquad z_1 = \frac{1}{x} - \operatorname{arccotg} x\,, \quad z_2 = \frac{1}{x}\,.$$

3° Im Fall $n > -1$ hat (1) die Hauptbasis

$$(1_3) \qquad z_1 = \operatorname{arccotg} x\,, \quad z_2 = x^n\,.$$

Die Hauptbasis (1_1) ist normal und regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$.

Die Hauptbasis (1_2) ist normal und regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = x^3 \operatorname{arccotg} x$, $\varkappa_2 = [x^3 \operatorname{arccotg} x]^{-1}$. Die Hauptbasis (1_2) kann man auch als eine normale halbregelmäßige Basis zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = (1 - x \operatorname{arccotg} x)\,x^{-2}$, $\varkappa_2 = [x^3 \operatorname{arccotg} x]^{-1}$ betrachten.

Die Hauptbasis (1_3) ist für $n \neq 0$ normal und regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, für $n = 0$ halbregelmäßig erster Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = x^{-1}$.

2. Es sei die Gleichung

$$(2) \qquad z''[x - n(1 + x^2)\operatorname{arctg} x] + z' \frac{2x^3 + n(n-1)(1 + x^2)^2 \operatorname{arctg} x}{x(1 + x^2)} -$$

$$- zn \frac{(n+1)x^2 + n - 1}{x(1 + x^2)} = 0\,, \quad n \in E_1$$

gegeben.

1° Im Fall $n \leqq -1$ hat (2) die Hauptbasis

$$(2_1) \qquad z_1 = x^n\,, \quad z_2 = \operatorname{arctg} x\,.$$

2° Im Fall $n > -1$, $n \neq 0$ hat (2) die Hauptbasis

$$(2_2) \qquad z_1 = \operatorname{arctg} x\,, \quad z_2 = x^n\,.$$

3° Im Fall $n = 0$ hat (2) die Hauptbasis (1_3), wo $n = 0$ zu nehmen ist.

Die Hauptbasis (2_1) ist regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = x^{-1}$, $\varkappa_2 = x$. Die Hauptbasis (2_1) kann man auch als eine halbregelmäßige Basis erster Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \varkappa_2 = x^{-1}$ betrachten. Für $n < -1$ ist (2_1) normal, für $n = -1$ siehe Bemerk. 3.4b).

Die Hauptbasis (2_2) ist normal und regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = x$, $\varkappa_2 = x^{-1}$. Die Hauptbasis (2_2) kann man auch als eine normale halbregelmäßige Basis zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \varkappa_2 = x^{-1}$ betrachten.

3. Es sei die Gleichung

$$(3) \qquad z''(\varepsilon x^2 - nx) - z'[x^2 - n(n-1)] + zn[x - \varepsilon(n-1)] = 0\,, \quad n \in E_1$$

gegeben.

Im Fall $\varepsilon = 1$ hat (3) die Hauptbasis

$$(3_1) \qquad z_1 = x^n\,, \quad z_2 = e^x\,.$$

Im Fall $\varepsilon = -1$ hat (3) die Hauptbasis

$$(3_2) \qquad z_1 = e^{-x}\,, \quad z_2 = x^n\,.$$

Die Hauptbasis (3_1) ist normal und für $n \neq 0$ ist regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = x$, $\varkappa_2 = x^{-1}$. Für $n = 0$ ist (3_1) halbregelmäßig zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$. Die Hauptbasis (3_1) kann man auch als eine normale halbregelmäßige Basis zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = x^n$, $\varkappa_2 = x^{-1}$ betrachten.

Die Hauptbasis (3_2) ist für $n \neq 0$ normal und regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = x^{-1}$, $\varkappa_2 = x$, für $n = 0$ halbregelmäßig erster Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$. Die Hauptbasis (3_2) kann man auch als eine halbregelmäßige Basis erster Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = x^{-1}$, $\varkappa_2 = x^n$ betrachten.

4. Es sei die Gleichung

$$(4) \qquad z'' - \frac{n}{x} z' + \frac{n}{x^2} z = 0 \,, \quad n \in E_1$$

gegeben.

Im Fall $n < 1$ hat (4) die Hauptbasis

$$(4_1) \qquad z_1 = x^n \,, \quad z_2 = x \,.$$

Im Fall $n = 1$ hat (4) die Hauptbasis

$$(4_2) \qquad z_1 = x \,, \quad z_2 = x \log x \,.$$

Im Fall $n > 1$ hat (4) die Hauptbasis

$$(4_3) \qquad z_1 = x \,, \quad z_2 = x^n \,.$$

Die Hauptbasis (4_1) ist normal und für $n \neq 0$ regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, für $n = 0$ halbregelmäßig zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = x^{-1}$, $\varkappa_2 = 1$.

Die Hauptbasen (4_2), (4_3) sind normal und regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$.

5. Es sei die Gleichung

$$(5) \qquad z''(1 - n \log x) + z' \frac{1 + n(n-1) \log x}{x} - z \frac{n^2}{x^2} = 0$$

gegeben, $n \in E_1$.

Im Fall $n > 0$ hat (5) die Hauptbasis

$$(5_1) \qquad z_1 = \log x \,, \quad z_2 = x^n \,.$$

Im Fall $n \leqq 0$ hat (5) die Hauptbasis

$$(5_2) \qquad z_1 = x^n \,, \quad z_2 = \log x \,.$$

Die Hauptbasis (5_1) ist normal und regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \log x$, $\varkappa_2 = (\log x)^{-1}$. Die Hauptbasis (5_1) kann man auch als normale halbregelmäßige Basis zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = x^{-1} \log x$, $\varkappa_2 = (\log x)^{-1}$ betrachten.

Die Hauptbasis (5_2) ist normal und für $n \neq 0$ regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = (\log x)^{-1}$, $\varkappa_2 = \log x$, für $n = 0$ ist halbregelmäßig zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = (x \log x)^{-1}$, $\varkappa_2 = 1$. Die Hauptbasis (5_2) kann man für $n \neq 0$ als halbregelmäßige Basis erster Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = (\log x)^{-1}$, $\varkappa_2 = x^{-1} \log x$ betrachten.

6. Es sei die Gleichung

$$(6) \qquad z'' + z' \frac{2(1 + \sin x)}{\cos x + \varepsilon(\sin x + 2)} - z \frac{\cos x - \varepsilon \sin x}{\cos x + \varepsilon(\sin x + 2)} = 0$$

gegeben, $\varepsilon = \pm 1$.

Im Fall $\varepsilon = 1$ hat (6) die Hauptbasis

$$(6_1) \qquad z_1 = e^{-x}, \quad z_2 = 2 + \sin x .$$

Im Fall $\varepsilon = -1$ hat (6) die Hauptbasis

$$(6_2) \qquad z_1 = 2 + \sin x, \quad z_2 = e^x .$$

Die Hauptbasis (6_1) ist halbregelmäßig erster Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$.

Die Hauptbasis (6_2) ist halbregelmäßig zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$.

3.9 Transformation. Es sei

$$(\mathrm{Q}) \qquad \ddot{Y}(t) + 2Q_1(t)\,\dot{Y}(t) + Q_2(t)\,Y(t) = 0, \quad t \in J_1 = H(I_1)$$

die Normalform des Bildes (ā) $\{H(x), h(x)\} \in O_a(I_1)$.

Dann gilt

$$(3.9,1) \qquad Q_1(t) = \frac{1}{H'(x)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{[H'(x)\,h^2(x)]'}{H'(x)\,h^2(x)} + a_1(x) \right\}, \qquad x = H_{-1}(t),$$

$$(3.9,2) \qquad Q_2(t) = \frac{1}{H'^2(x)} \left[\frac{h''(x)}{h(x)} + 2a_1(x)\frac{h'(x)}{h(x)} + a_2(x) \right], \quad x = H_{-1}(t).$$

Daraus folgt

$$(3.9,3) \qquad a_1(x) = -\frac{1}{2} \frac{[H'(x)\,h^2(x)]'}{H'(x)\,h^2(x)} + H'(x)\,Q_1[H(x)],$$

$$(3.9,4) \qquad a_2(x) = -\frac{h''(x)}{h(x)} + \frac{[H'(x)\,h^2(x)]'\,h'(x)}{H'(x)\,h^3(x)} - \frac{2H'(x)\,h'(x)}{h(x)} Q_1[H(x)] + H'^2(x)\,Q_2[H(x)].$$

In der ganzen Arbeit werden wir voraussetzen, daß die Koordinaten des Bildes (ā) $\{H(x), h(x)\}$ folgende Eigenschaften besitzen:

$$(3.9,5) \qquad h(x) > 0, \quad H(x) > 0, \quad H'(x) > 0 \quad \text{in } I_1, \quad \lim H(x) = \infty .$$

Dann ist

$$J_1 = \langle t_1, \infty), \quad t_1 = H(x_1)\,. \tag{3.9,6}$$

3.10 Transformation der Hauptbasis.

A. *Die Funktionen*

$$Y_i(t)\,, \quad i = 1, 2 \tag{3,10,1}$$

bilden in J_1 *genau dann eine Hauptbasis von* (Q), *wenn die Funktionen*

$$z_i(x) = h(x)\, Y_i[H(x)]\,, \quad i = 1, 2 \tag{3.10,2}$$

in I_1 *eine Hauptbasis von* (a) *darstellen.*

Der Beweis ist bei Beachtung des Lemmas 3.2 (Folgerung) einfach und darum lassen wir ihn fort.

Bemerkung. *Die Basis* (3.10,2) *ist genau dann positiv, wenn die Basis* (3.10,1) *positiv ist.* Folgt gemäß (3.9,5).

B. Ist (3.10,1) in J_1 eine Hauptbasis von (Q) und gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h Y_2(H)] \neq 0 \quad \text{in} \quad J_1\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\, Y_1(H)] = o\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\, Y_2(H)]\right\}, \quad x = H_{-1}(t)\,, \tag{3.10,3}$$

so bilden die Funktionen (3.10,2) in I_1 eine normale Basis von (a).

C. Ist (3.10,1) in J_1 eine Hauptbasis von (Q) und gilt

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\, Y_i(H)] \neq 0 \quad \text{in} \quad J_1\,, \quad x = H_{-1}(t)\,, \quad i = 1, 2\,, \\ Y_j(H)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\, Y_k(H)] = O\left\{\varkappa_j\, Y_k(H)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\, Y_j(H)]\right\}, \\ \varkappa_j(t) > 0\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,,\end{gathered} \tag{3.10,4}$$

so bilden die Funktionen (3.10,2) in I_1 eine regelmäßige Basis von (a) mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(H)$, $\varkappa_2(H)$.

D. Ist (3.10,1) in J_1 eine Hauptbasis von (Q) und gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\, Y_j(H)] \neq 0 \quad \text{in} \quad J_1\,, \quad x = H_{-1}(t)\,, \tag{3.10,5}$$

$$Y_j(H)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[h\;Y_k(H)] = o\left\{\varkappa_j\;Y_k(H)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[h\;Y_j(H)]\right\},$$

$$Y_k(H)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[h\;Y_j(H)] = O[\varkappa_k\;Y_j(H)]\,,$$

$$\varkappa_i(t) > 0\,,\quad i = 1, 2\,,\quad j, k = 1, 2\,,\quad j \neq k\,,$$

so kann man die Funktionen (3.10,2) in I_1 als eine halbregelmäßige Basis der j-ten Art von (a) mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(H)$, $\varkappa_2(H)$ betrachten.

E. Gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[h\;Y_1(H)] \neq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[h\;Y_2(H)] \neq 0$$

in keinem Teilintervall $J_2 \subset J_1$ und ist

$$Y_j(H)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[h\;Y_k(H)] = O[\varkappa_j\;Y_k(H)]\,, \tag{3.10,6}$$

$$j, k = 1, 2\,,\quad j \neq k\,,\quad \varkappa_i(t) > 0\,,\quad i = 1, 2\,,$$

so kann man die Funktionen (3.10,2) in I_1 als eine unregelmäßige Basis mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(H)$, $\varkappa_2(H)$ betrachten.

3.11 Transformation der Hauptbasis im Fall $h(x) = 1$. Es bilden die Funktionen (3.10,1) in J_1 eine Hauptbasis des Bildes (ā) $\{H(x), 1\} \in O_a(I_1)$. Dann ist

$$z_i(x) = Y_i[H(x)]\,,\quad i = 1, 2 \tag{3.11,1}$$

eine Hauptbasis von (a) im Intervall I_1.

A. *Die Basis* (3.10,1) *ist in* J_1 *genau dann eine normale Basis, wenn* (3.11,1) *in* I_1 *normal ist.* Folgt aus (3.10,3).

B. *Die Basis* (3.10,1) *ist in* J_1 *genau dann eine regelmäßige Basis mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(t)$, $\varkappa_2(t)$, *wenn* (3.11,1) *in* I_1 *regelmäßig mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(H)$, $\varkappa_2(H)$ *ist.* Folgt aus (3.10,4).

C. *Die Basis* (3.10,1) *ist in* J_1 *genau dann eine halbregelmäßige Basis j-ter Art mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(t)$, $\varkappa_2(t)$, *wenn* (3.11,1) *in* I_1 *halbregelmäßig j-ter Art mit Schätzfunktionen* $\varkappa_j(H)$, $H'\,\varkappa_k(H)$ *ist.* Folgt aus (3.10,5).

D. *Die Basis* (3.10,1) *ist in* J_1 *eine unregelmäßige Basis mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(t)$, $\varkappa_2(t)$, *wenn* (3.11,1) *in* I_1 *unregelmäßig mit Schätzfunktionen* $H'\,\varkappa_1(H)$, $H'\,\varkappa_2(H)$ *ist.* Folgt aus (3.10,6).

E. Gilt $Y_k(t) = c$, $0 \neq c \in E_1$ für $k = 2$ resp. $k = 1$, so ist nach dem Resultat des Abs. 3.7 A resp. 3.8 C die Basis (3.10,1) in J_1 halbregelmäßig erster Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(t) = 1$, $\varkappa_2(t) = |\dot{Y}_1/Y_1|$ resp. normal und halbregelmäßig zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(t) = |\dot{Y}_2/Y_2|$, $\varkappa_2(t) = 1$. Gemäß Abs. 3.11 C bilden die Funktionen (3.11,1) in I_1 eine halbregelmäßige Basis erster Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(H) = 1$, $\varkappa_2(H) = |Y_1'(H)/Y_1(H)|$ resp. eine normale halbregelmäßige Basis zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(H) = |Y_2'(H)/Y_2(H)|$, $\varkappa_2(H) = 1$.

4. PERTURBIERTE GLEICHUNGEN

Es sei die Gleichung

$$\text{(p)} \qquad Z''(x) + 2[a_1(x) + p_1(x)]\, Z'(x) + [a_2(x) + p_2(x)]\, Z(x) = 0\,, \qquad a_i, p_i \in C_0(I_1)\,, \quad i = 1, 2$$

gegeben und es bilden die Funktionen $z_1(x)$, $z_2(x)$ eine Basis der Gleichung

$$\text{(a)} \qquad z''(x) + 2\, a_1(x)\, z'(x) + a_2(x)\, z(x) = 0\,.$$

4.1 Lemma. *Gilt*

$$(4.1,1) \qquad \int_{x_1}^{\infty} e(2a_1; x)\, |p_1(x)\, z_j'(x)\, z_k(x)|\, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad j, k = 1, 2\,,$$

$$(4.1,2) \qquad \int_{x_1}^{\infty} e(2a_1; x)\, |p_2(x)\, z_j(x)\, z_k(x)|\, \mathrm{d}x < \infty\,, \quad j, k = 1, 2\,,$$

so hat die Gleichung (p) *eine Basis von der Gestalt*

$$(4.1,3) \qquad Z_j^{(s)}(x) = z_j^{(s)}(x)\, [1 + o(1)] + z_k^{(s)}(x)\, o(1)\,, \qquad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,, \quad s = 0, 1\,.$$

Folgt aus Lemma 2.2, wo $n = 2$ zu nehmen ist.

Bemerkung. Ist $z_j^{(s)}(x) = O(\varkappa_s)$, $\varkappa_s(x) > 0$, $j = 1, 2$, $s = 0, 1$, so kann die Formel (4.1,3) in der Form

$$(4.1,4) \qquad Z_j^{(s)}(x) = z_j^{(s)}(x) + o(\varkappa_s)\,, \quad j = 1, 2\,, \quad s = 0, 1$$

geschrieben werden.

4.2 Lemma. *Es sei*

$$(4.2,1) \qquad z_1(x),\ z_2(x)$$

eine positive Hauptbasis der Gleichung (a) *im Intervall* I_1.

Gilt

$$\int_{x_1}^{\infty} |p_1(x)|\,\mathrm{d}x < \infty\,, \tag{4.2,2}$$

$$\int_{x_1}^{\infty} e(2a_1; x)|\,2\,p_1(x)\,z_1'(x)\,z_1^{-1}(x) + p_2(x)|\,z_1(x)\,z_2(x)\,\mathrm{d}x < \infty\,, \tag{4.2,3}$$

so existiert ein $x_0 \geqq x_1$ *derart, daß die Gleichung* (p) *im Intervall* I_0 *die Hauptbasis*

$$Z_j(x) = z_j(x)\,[1 + o(1)]\,, \quad j = 1, 2 \tag{4.2,4}$$

hat.

(i_1) *Ist* (4.2,1) *in* I_1 *regelmäßig mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)$, *so ist*

$$Z_j'(x) = z_j'(x)\,[1 + o(\varkappa_j + 1)]\,, \quad j = 1, 2\,. \tag{4.2,5}$$

(i_2) *Ist* (4.2,1) *in* I_1 *halbregelmäßig j-ter Art mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)$, *so gilt*

$$Z_j'(x) = z_j'(x)\,[1 + o(\varkappa_j + 1)]\,, \quad Z_k'(x) = z_k'(x) + \\ + o[\varkappa_k(\varkappa_j + 1)]\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,. \tag{4.2,6}$$

(i_3) *Ist* $z_k(x) = 1$, *so gilt*

$$Z_j'(x) = z_j'(x)\,[1 + o(1)]\,, \quad Z_k'(x) = o(z_j'/z_j)\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,. \tag{4.2,7}$$

(i_4) *Ist* (4.2,1) *in* I_1 *unregelmäßig mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)$, *so gilt*

$$Z_1'(x) = z_1'(x) + o(\varkappa_2\omega + \varkappa_1) \\ Z_2'(x) = z_2'(x) + o(\varkappa_1\omega^{-1} + \varkappa_2)\,, \tag{4.2,8}$$

wobei (3.3,4) *zu nehmen ist.*

Beweis. Die Funktionen

$$H(x) = z_2(x)\,z_1^{-1}(x)\,, \quad h(x) = z_1(x) \tag{4.2,9}$$

unter Berücksichtigung der Bemerk. 3.3 j) erfüllen die Bedingungen (3.9,5), weil (4.2,1) positiv ist. Es sei (Q) die Normalform des Bildes von (p) mit den Koordinaten (4.2,9), siehe Abs. 3.9. Dann gelten nach (3.9,1), (3.9,2), (4.2,9) die Beziehungen $H'h^2 = c_1\,e(-2a_1; x)$, $H/H' = c_2\,e(2a_1; x)\,z_1z_2$, $0 < c_i \in E_1$, $i = 1, 2$,

$$Q_1(H)\,H' = p_1\,, \quad H\,Q_2(H)\,H' = c_2(2p_1z_1'z_1^{-1} + p_2)\,e(2a_1; x)\,z_1z_2\,. \tag{4.2,10}$$

Laut (4.2,2), (4.2,3) unter Beachtung von (4.2,10) gilt

$$\int_{t_1}^{\infty} |Q_1(t)|\,\mathrm{d}t < \infty\,, \quad \int_{t_1}^{\infty} t|Q_2(t)|\,\mathrm{d}t < \infty\,, \quad H(x_1) = t_1\,.$$

Nach Lemma 2.5 gibt es ein $t_0 \geqq t_1$ derart, daß die Gleichung (Q) im Intervall $\langle t_0, \infty)$ die Hauptbasis

$$(4.2,11) \qquad \begin{aligned} Y_1(t) &= 1 + o(1), \quad Y_2(t) = t[1 + o(1)], \\ \dot{Y}_1(t) &= o(t^{-1}), \quad \dot{Y}_2(t) = 1 + o(1) \end{aligned}$$

hat. Gemäß Abs. 3.10 A bilden die Funktionen

$$(4.2,12) \qquad Z_i^{(s)}(x) = \{h(x)\, Y_i[H(x)]\}^{(s)}, \quad i = 1, 2, \quad s = 0, 1$$

im Intervall I_0, $H_{-1}(t_0) = x_0 \geqq x_1$, eine Hauptbasis von (p). Setzen wir (4.2,11) in (4.2,12), so erhalten wir

$$(4.2,13) \qquad Z_1 = h[1 + o(1)], \quad Z_2 = hH[1 + o(1)],$$

$$Z_1' = h'[1 + o)1)] + \frac{hH'}{H}\, o(1), \quad Z_2' = h'H[1 + o(1)] + hH'[1 + o(1)].$$

Wenn wir ferner (4.2,9) in (4.2,13) einsetzen, so erhalten wir (4.2,4) und nach Umformung

$$(4.2,14) \qquad Z_j' = z_j'[1 + o(1)] + \frac{z_j z_k'}{z_k}\, o(1), \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k.$$

Ist (4.2,1) in I_0 regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1, \varkappa_2$, so können wir (4.2,14) in der Form

$$Z_j' = z_j'\left[1 + o(1) + \frac{z_j z_k'}{z_j' z_k}\, o(1)\right], \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k$$

schreiben, woraus (4.2,5) im Hinblick auf (3.3,1) folgt.

Ist (4.2,1) in I_0 halbregelmäßig j-ter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1, \varkappa_2$, so können wir (4.2,14) in der Form

$$(4.2,15) \quad Z_j' = z_j'\left[1 + o(1) + \frac{z_j z_k'}{z_j' z_k}\, o(1)\right], \quad Z_k' = z_k' + z_k'\, o(1) + \frac{z_j' z_k}{z_j}\, o(1),$$
$$j, k = 1, 2, \quad j \neq k$$

schreiben, woraus (4.2,6) im Hinblick auf (3.3,2), (3.6,1), (3.8,1) folgt. Wenn wir in (4.2,15) $z_k = 1$ einsetzen, so erhalten wir (4.2,7).

Ist (4.2,1) in I_0 unregelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1, \varkappa_2$, so läßt sich (4.2,14) mit Hilfe (3.3,3), (3.3,4) in (4.2,8) überführen.

Damit ist der Beweis beendet.

Bemerkungen. a) Es sei

$$(4.2,16) \qquad \bar{z}_1(x), \bar{z}_2(x)$$

eine andere Hauptbasis von (a) im Intervall I_1. Laut (3.2,4) und Lemma 3.1 gilt

(4.2,17) $$z_1 = c_1 \bar{z}_1 \,, \quad z_2 = \bar{z}_2[c_2 + o(1)] \,, \quad 0 \neq c_i \in E_1 \,, \quad i = 1, 2 \,.$$

Ist (4.2,1) in I_0 eine normale regelmäßige Basis mit Schätzfunktionen $\varkappa_1, \varkappa_2$, so ist gemäß Abs. 3.5 C die Hauptbasis (4.2,16) normal und regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1, \varkappa_2$. Laut (3.4,1) und Lemma 3.1 gilt

(4.2,18) $$z'_1 = c_1 \bar{z}'_1 \,, \quad z'_2 = \bar{z}'_2[c_2 + o(1)] \,, \quad 0 \neq c_i \in E_1 \,, \quad i = 1, 2 \,.$$

Ist (4.2,1) in I_0 halbregelmäßig erster Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1, \varkappa_2$, so ist gemäß Abs. 3.6 B die Hauptbasis (4.2,16) halbregelmäßig der ersten Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 + |\omega|, \varkappa_2$. Laut (3.6,2) und Lemma 3.1 gilt

$$z'_1 = c_1 \bar{z}'_1 \,, \quad z'_2 = c_2 \bar{z}'_2 + o(\varkappa_2) \,, \quad 0 \neq c_i \in E_1 \,, \quad i = 1, 2 \,.$$

Ist (4.2,1) in I_0 eine normale halbregelmäßige Basis zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1, \varkappa_2$, so ist gemäß Abs. 3.8 B die Hauptbasis (4.2,16) normal und halbregelmäßig zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1, \varkappa_2$. Laut (3.4,1) und Lemma 3.1 gilt (4.2,18).

b) Wenn (4.2,1) entweder eine normale regelmäßige Hauptbasis oder eine halbregelmäßige erster Art oder eine normale halbregelmäßige Hauptbasis zweiter Art ist, so schließen wir gemäß der Bemerk. a), daß die Formeln (4.2,4)–(4.2,7) für beliebige Hauptbasis von (a) gelten.

c) Laut (3.2,3) können wir statt (4.2,4) $Z_1 = z_2\, o(1)$, $Z_2 = z_2[1 + o(1)]$ schreiben. Ist $z_2 = O(1)$, so ist $Z_1 = o(1)$, $Z_2 = z_2 + o(1)$.

d) Wenn wir in (4.2,5) $j = 1$ einsetzen, so können wir laut (3.5,1) anstatt (4.2,5) $Z'_1 = z'_2 o[(\varkappa_1 + 1)\varkappa_2]$ schreiben. Ist (4.2,1) normal, so ist laut (3.3,7) $Z'_1 = z'_2 o(\varkappa_1 + 1)$. Ist ferner $z'_2 = O(1)$, so kann man (4.2,5) in der Form $Z'_1 = o(\varkappa_1 + 1)$, $Z'_2 = z'_2 + o(\varkappa_2 + 1)$ schreiben. Gilt noch

(4.2,19) $$\varkappa_i = O(1) \,, \quad i = 1, 2 \,,$$

so ist

(4.2,20) $$Z'_1 = o(1) \,, \quad Z'_2 = z'_2 + o(1) \,.$$

e) Ist (4.2,1) halbregelmäßig erster Art, so können wir laut (3.6,2) anstatt (4.2,6) $Z'_1 = o[(\varkappa_1 + 1)\varkappa_2]$, $Z'_2 = z'_2 + o[(\varkappa_1 + 1)\varkappa_2]$ schreiben, wobei $j = 1$, $k = 2$ zu nehmen ist. Gilt ferner (4.2,19), so gilt (4.2,20).

f) Ist (4.2,1) halbregelmäßig zweiter Art, so können wir im Hinblick auf (3.5,1) anstatt (4.2,6) $Z'_1 = z'_2\, o(\varkappa_2) + o[\varkappa_1(\varkappa_2 + 1)]$, $Z'_2 = z'_2[1 + o(\varkappa_2 + 1)]$ schreiben, wobei $j = 2$, $k = 1$ zu nehmen ist. Ist (4.2,1) normal, so ist laut (3.3,7) $Z'_1 = z'_2\, o(1) + o[\varkappa_1(\varkappa_2 + 1)]$. Ist ferner $z'_2 = O(1)$, so ist $Z'_1 = o[\varkappa_1(\varkappa_2 + 1) + 1]$, $Z'_2 = z'_2 + o(\varkappa_2 + 1)$. Gilt noch (4.2,19), so gilt (4.2,20).

g) Die Bedingung (4.2,3) kann durch

$$\text{(4.2,21)} \qquad \int_{x_1}^{\infty} e(2a_1; x)\,|p_1(x)\,z_1'(x)\,z_2(x)|\,dx < \infty\,,$$

$$\int_{x_1}^{\infty} e(2a_1; x)\,|p_2(x)\,z_1(x)\,z_2(x)|\,dx < \infty$$

ersetzt werden.

h) Gilt (4.2,21), so ist die Bedingung (4.2,2) genau dann erfüllt, wenn

$$\int_{x_1}^{\infty} e(2a_1; x)\,|p_1(x)\,z_1(x)\,z_2'(x)|\,dx < \infty$$

in Kraft ist, weil

$$\int_{x_1}^{x} p_1\,ds = c\int_{x_1}^{x} e(2a_1; s)\,p_1(z_1z_2' - z_1'z_2)\,ds\,, \quad 0 \neq c \in E_1$$

ist.

i) Im folgenden setzen wir voraus, daß $x_0 = x_1$.

4.3 Satz. *Es sei*

$$\text{(4.3,1)} \qquad z_1(x), z_2(x)$$

eine Basis der Gleichung

$$\text{(a)} \qquad z''(x) + 2\,a_1(x)\,z'(x) + a_2(x)\,z(x) = 0\,, \quad a_i \in C_0(I_1)\,, \quad i = 1, 2\,.$$

(*i*) *Gilt*

$$\text{(4.3,2)} \qquad \int_{x_1}^{x} e(2a_1; x)\,|p_1(x)\,z_j'(x)\,z_k(x)|\,dx < \infty\,,$$

$$\text{(4.3,3)} \qquad \int_{x_1}^{\infty} e(2a_1; x)\,|p_2(x)\,z_j(x)\,z_k(x)|\,dx < \infty$$

für alle $j, k = 1, 2$, *so hat die Gleichung*

$$\text{(p)} \qquad Z''(x) + 2[a_1(x) + p_1(x)]\,Z'(x) + [a_2(x) + p_2(x)]\,Z(x) = 0\,,$$

$$p_i \in C_0(I_1)\,, \quad i = 1, 2$$

eine Basis von der Gestalt

$$\text{(4.3,4)} \qquad Z_j^{(s)}(x) = z_j^{(s)}(x)\,[1 + o(1)] + z_k^{(s)}\,o(1)\,, \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k\,, \quad s = 0, 1\,.$$

(*ii*) *Ist* (4.3,1) *in* I_1 *eine positive Hauptbasis von* (a) *und gilt* (4.3,2), (4.3,3) *für* $j, k = 1, 2, j \neq k$, *so hat die Gleichung* (p) *in* I_1 *die Hauptbasis*

$$Z_j(x) = z_j(x)\,[1 + o(1)]\,, \quad j = 1, 2\,. \tag{4.3,5}$$

(i_1) *Ist* (4.3,1) *in* I_1 *regelmäßig mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)$, *so hat* (4.3,5) *die Ableitung*

$$Z_j'(x) = z_j'(x)\,[1 + o(\varkappa_j + 1)]\,, \quad j = 1, 2\,. \tag{4.3,6}$$

(i_2) *Ist* (4.3,1) *in* I_1 *halbregelmäßig j-ter Art mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)$, *so gilt*

$$\begin{aligned} Z_j'(x) &= z_j'(x)\,[1 + o(\varkappa_j + 1)]\,, \\ Z_k'(x) &= z_k'(x) + o[\varkappa_k(\varkappa_j + 1)]\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,. \end{aligned} \tag{4.3,7}$$

(i_3) *Gilt* $z_k(x) = 1$, *so ist*

$$\begin{gathered} Z_j'(x) = z_j'(x)\,[1 + o(1)]\,, \quad Z_k'(x) = o(z_j'/z_j)\,, \\ j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,. \end{gathered} \tag{4.3,8}$$

(i_4) *Ist* (4.3,1) *in* I_1 *unregelmäßig mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(x), \varkappa_2(x)$, *so gilt*

$$\begin{aligned} Z_1'(x) &= z_1'(x) + (\varkappa_2\omega + \varkappa_1)\,o(1)\,, \\ Z_2'(x) &= z_2'(x) + (\varkappa_1\omega^{-1} + \varkappa_2)\,o(1)\,, \end{aligned} \tag{4.3,9}$$

wobei (3.3,4) *zu nehmen ist.*

Satz 4.3 ergibt sich aus den Hilfssätzen 4.1; 4.2 und aus den Bemerk. 4.2 g)–h).

Beispiele.

1. Gilt

$$\int_{x_1}^{\infty} |p_1(x)|\,\mathrm{d}x < \infty\,, \quad \int_{x_1}^{\infty} x|p_2|\,\mathrm{d}x < \infty\,, \tag{1}$$

so hat die Gleichung $Z''(x) + 2[p_1(x) - n/2x]\,Z'(x) + [p_2(x) + n/x^2]\,Z(x) = 0$ folgende Hauptsysteme: Im Fall $n < 1$: $Z_1 = x^n[1 + o(1)]$, $Z_2 = x[1 + o(1)]$, $Z_1' = x^{n-1}[n + o(1)]$, $Z_2' = 1 + o(1)$. Im Fall $n = 1$: $Z_1 = x[1 + o(1)]$, $Z_2 = x \log x[1 + o(1)]$, $Z_1' = 1 + o(1)$, $Z_2' = [\log x + 1]\,[1 + o(1)]$. Im Fall $n > 1$: $Z_1 = x[1 + o(1)]$, $Z_2 = x^n[1 + o(1)]$, $Z_1' = 1 + o(1)$, $Z_2' = x^{n-1}[n + o(1)]$.

Bemerkung. Für $n = 0$ erhalten wir Lemma 2.5.

2. Gilt (1), so hat die Gleichung

$$Z''(x) + 2\left[\frac{1}{2x(1 - \log x)} + p_1(x)\right] Z'(x) + \left[p_2(x) - \frac{1}{x^2}\right] Z(x) = 0$$

ein Hauptsystem von der Form $Z_1 = \log x[1 + o(1)]$, $Z_2 = x[1 + o(1)]$, $Z'_1 = (1/x)[1 + o(\log x)]$, falls wir die Hauptbasis $z_1 = \log x$, $z_2 = x$ als eine regelmäßige Basis mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = \log x$, $\varkappa_2 = (\log x)^{-1}$ betrachten; $Z'_1 = 1/x + o(\log x/x)$, falls wir die Hauptbasis $z_1 = \log x$, $z_2 = x$ als eine halbregelmäßige Basis zweiter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1 = z^{-1} \log x$, $\varkappa_2 = (\log x)^{-1}$ betrachten, siehe Abs. 3.8, Beispiel 5; $Z'_2 = 1 + o(1)$.

5. ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN VON GLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

Es seien die Gleichungen

$$(\bar{a}) \qquad \ddot{Y}(\tau) + 2\, A_1(\tau)\, \dot{Y}(\tau) + A_2(\tau)\, Y(\tau) = 0\,,$$
$$A_i(\tau) \in C_0(I_{1\tau})\,, \quad i = 1, 2\,, \quad I_{1\tau} = \langle \tau_1, \infty)\,.$$

$$(b) \qquad \ddot{y}(t) + 2\, b_1(t)\, \dot{y}(t) + b_2(t)\, y(t) = 0\,,$$
$$b_i(t) \in C_0(I_{2t})\,, \quad i = 1, 2\,, \quad I_{1t} = \langle t_1, \infty)$$

vorgelegt.

5.1 Hauptsatz. *Es existieren positive Funktionen $\bar{h}, \bar{H}, f, F, \varphi, \psi$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) $\quad \bar{h}(\tau), \bar{H}(\tau), \varphi(\tau), \psi(\tau) \in C_0(I_1)\,, \quad \dfrac{d}{d\tau} \bar{H}(\tau) > 0\,, \quad \lim \bar{H}(\tau) = \infty\,,$

b) $\quad f(t)\,, \; F(t) \in C_0(I_{2t})\,, \quad \dot{F}(t) > 0\,, \quad \lim F(t) = \infty\,.$

Es gilt ferner

(5.1,1)

$$\int_{t_1}^{\infty} \exp\left\{2 \int_{\tau_1}^{H(x)} A_1(s)\, ds\right\} \left|\frac{d}{dt} \log D(t)\right| \left|\frac{h'}{hH'}\, \Phi(H) + \Psi(H)\right| dt < \infty\,, \quad x = F(t)\,,$$

$$(5.1,2) \qquad \int_{t_1}^{\infty} \exp\left\{2 \int_{t_1}^{t} b_1(s)\, ds\right\} |E(t)|\, \Phi(H)\, dt < \infty\,, \quad x = F(t)\,,$$

wo wir setzen:

$$H(x) = \bar{H}_{-1}(x)\,, \; h(x) = \{\bar{h}[\bar{H}_{-1}(x)]\}^{-1}\,, \; \bar{H}(\tau_1) = F(t_1)\ ^{1})$$
$$\Phi(\tau) = \varphi^2(\tau)\,, \quad \Psi(\tau) = \varphi(\tau)\, \psi(\tau)\,,$$

[1]) Diese Bedingung kann immer durch passende Wahl der Intervalle $I_{1\tau}, I_{1t}$ erfüllt werden.

(D) $$D(t) = f^2 h^2 \dot{H} \exp\left\{2\int_{t_1}^{t} b_1(s)\,\mathrm{d}s - \int_{\tau_1}^{H(x)} A_1(s)\,\mathrm{d}s\right\}, \quad x = F(t),$$

(E) $$E(t) = \ddot{f} f h^2 + 2b_1 \dot{f} f h^2 + b_2 f^2 h^2 + h'' h f^2 \dot{F}^2 - \dot{h} h f^2 \,.$$

$$\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\log h^2 H' \exp\left\{-2\int_{\tau_1}^{H(x)} A_1(s)\,\mathrm{d}s\right\}\right] - f^2 h^2 \dot{H}^2 A_2(H), \quad x = F(t).$$

Dann gelten folgende Behauptungen: 1° *Es gilt der Limes*

(5.1,3) $$\lim D(t) = C, \quad 0 < C \in E_1 .$$

2° *Ist*

(i) $$Y(\tau) = O[\varphi(\tau)], \quad \dot{Y}(\tau) = O[\psi(\tau)],$$

wo $Y(\tau)$ *die allgemeine Lösung von* $(\bar{a})$ *bezeichnet, so hat die Gleichung* (b) *die Basis*

(5.1,4) $$y_j(t) = f(t)\, h[F(t)]\Big[Y_j\{H[F(t)]\}\,[1 + o(1)] + Y_k\{H[F(t)]\}\, o(1)\Big],$$

$$j, k = 1, 2, \quad j \neq k$$

mit den Ableitungen

(5.1,5) $$\dot{y}_j(t) = \dot{f}(t)\, h[F(t)]\Big[Y_j\{H[F(t)]\}\,[1 + o(1)] + Y_k\{H[F(t)]\}\, o(1)\Big] +$$

$$+ f(t)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h[F(t)]\, Y_j\{H[F(t)]\}\Big)[1 + o(1)] +\right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h[F(t)]\, Y_k\{H[F(t)]\}\Big)\, o(1)\right], \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k,$$

wo

(5.1,6) $$Y_1(\tau), Y_2(\tau)$$

eine beliebige Basis von $(\bar{a})$ *darstellt.*

3° *Es sei* (5.1,6) *in* I_1 *eine positive Hauptbasis von* $(\bar{a})$. *Gilt*

(ii) $$Y_j(\tau)\, Y_k(\tau) = O[\Phi(\tau)], \quad \dot{Y}_j(\tau)\, Y_k(\tau) = O[\Psi(\tau)], \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k,$$

so hat die Gleichung (b) *im Intervall* I_{1t} *die Hauptbasis*

(5.1,7) $$y_j(t) = f(t)\, h[F(t)]\, Y_j\{H[F(t)]\}\,[1 + o(1)], \quad j = 1, 2 .$$

(i_1) *Ist*

$$(\mathrm{v}_1) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\,Y_i(H)] \neq 0 \quad \text{in} \quad I_{1\tau}\,, \quad Y_j(H)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\,Y_k(H)] =$$

$$= O\left\{\varkappa_j(H)\,Y_k(H)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\,Y_j(H)]\right\},$$

$$\varkappa_i(\tau) > 0\,, \quad i = 1, 2\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,, \quad x = H_{-1}(\tau)\,, \quad \tau \in I_{1\tau}\,,$$

so gilt

$$(5.1,8) \qquad \dot{y}_j(t) = \dot{f}(t)\,h[F(t)]\,Y_j\{H[F(t)]\}\,[1 + o(1)] +$$

$$+ f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h[F(t)]\,Y_j\{H[F(t)]\}\Big)\{1 + o[\varkappa_j(t) + 1]\}\,, \quad j = 1, 2\,,$$

wo wir statt $\varkappa_j\{H[F(t)]\}$ *kurz* $\varkappa_j(t)$ *schreiben.*

(i_2) *Ist*

$$(\mathrm{v}_2) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\,Y_j(H)] \neq 0 \quad \text{in} \quad I_{1\tau}\,, \quad Y_j(H)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\,Y_k(H)] =$$

$$= O\left\{\varkappa_j(H)\,Y_k(H)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\,Y_j(H)]\right\},$$

$$Y_k(H)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[h\,Y_j(H)] = O[\varkappa_k(H)\,Y_j(H)]\,, \quad \varkappa_i(\tau) > 0\,, \quad i = 1, 2\,,$$

$$x = H_{-1}(\tau)\,, \quad \tau \in I_{1\tau}\,,$$

so gilt

$$(5.1,9) \qquad \dot{y}_j(t) = \dot{f}(t)\,h[F(t)]\,Y_j\{H[F(t)]\}\,[1 + o(1)] +$$

$$+ f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h[F(t)]\,Y_j\{H[F(t)]\}\Big)\{1 + o[\varkappa_j(t) + 1]\}\,,$$

$$\dot{y}_k(t) = \dot{f}(t)\,h[F(t)]\,Y_k\{H[F(t)]\}\,[1 + o(1)] +$$

$$+ f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h[F(t)]\,Y_k\{H[F(t)]\}\Big) +$$

$$+ f(t)\,\dot{F}(t)\,\varkappa_k(t)\,[\varkappa_j(t) + 1]\,o(1)\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,.$$

(i_3) *Ist*

$$(\mathrm{v}_3) \qquad h\,Y_k(H) = 1\,,$$

so gilt

$$(5.1,10) \qquad \dot y_j(t) = \dot f(t)\, h[F(t)]\; Y_j\{H[F(t)]\}\,[1 + o(1)] +$$

$$+ f(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h[F(t)]\; Y_j\{H[F(t)]\}\Big)\,[1 + o(1)]\,,$$

$$\dot y_k(t) = \dot f(t)\,[1 + o(1)] +$$

$$+ f(t)\Big(h[F(t)]\; Y_j\{H[F(t)]\}\Big)^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h[F(t)]\; Y_j\{H[F(t)]\}\Big)\, o(1)\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k,$$

(i_4) *Gilt in keinem Teilintervall* $I_{2\tau} \subset I_{1\tau}$

$$(\mathrm{v}_4) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[h\; Y_1(H)] \neq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[h\; Y_2(H)] \neq 0 \quad \textit{und ist}$$

$$Y_j(H) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[h\; Y_k(H)] = O[\varkappa_j(H)\; Y_k(H)]\,, \quad \varkappa_i(\tau) > 0\,, \quad i = 1, 2\,,$$

$$j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,, \quad x = H_{-1}(\tau)\,, \quad \tau \in I_{1\tau}\,,$$

so gilt

$$(5.1,11) \qquad \dot y_1(t) = \dot f(t)\, h[F(t)]\; Y_1\{H[F(t)]\}\,[1 + o(1)] +$$

$$+ f(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h[F(t)]\; Y_1\{H[F(t)]\}\Big) + f(t)\,\dot F(t)\,\{\varkappa_2(t)\,\omega[F(t)] + \varkappa_1(t)\}\, o(1)\,,$$

$$\dot y_2(t) = \dot f(t)\, h[F(t)]\; Y_2\{H[F(t)]\}\,[1 + o(1)] +$$

$$+ f(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(h[F(t)]\; Y_2\{H[F(t)]\}\Big) + f(t)\,\dot F(t)\,\{\varkappa_1(t)/\omega[F(t)] + \varkappa_2(t)\}\, o(1)\,,$$

wo

$$(5.1,12) \qquad \omega(x) = Y_1[H(x)]/Y_2[H(x)]$$

zu nehmen ist.

Beweis. Es sei

$$(\mathrm{a}) \qquad z''(x) + 2\, a_1(x)\, z'(x) + a_2(x)\, z(x) = 0\,, \quad x \in I_{1x}$$

die Normalform des Bildes (a) $\{\bar H(\tau), \bar h(\tau)\} \in O_{\bar a}(I_{1\tau})$, wo wir $z(x) = Y[\bar H_{-1}(x)] = Y[H(x)]$, $I_{1x} = \langle x_1, \infty)$ setzen. Dann ist (ā) die Normalform des Bildes (ā) $\{H(x), h(x)\} \in O_a(I_{1x})$, so daß die Gleichungen (3.9,3), (3.9,4), wo wir A_i statt Q_i schreiben, gelten. Falls die Funktionen (5.1,6) eine Hauptbasis [eine Basis] von (ā) bilden, so bilden die Funktionen

$$(5.1,13) \qquad z_i(t) = h(x)\; Y_i[H(x)]\,, \quad i = 1, 2$$

in I_x eine Hauptbasis [eine Basis] von ($\bar{a}$). Es sei ferner

$$(\bar{b}) \qquad Z''(x) + 2\,B_1(x)\,Z'(x) + B_2(x)\,Z(x) = 0\,, \quad x \in I_{1x}$$

die Normalform des Bildes $(\bar{b})\,\{F(t), f(t)\} \in O_b(I_{1t})$, wo wir $Z(x) = y[F_{-1}(x)]$, $F(t_1) = x_1$ setzen. Gemäß Abs. 3.9 gelten die Formeln

$$(5.1{,}14) \qquad B_1 = \frac{1}{\dot{F}}\left[\frac{1}{2}\,\frac{(\dot{F}f^2)^{\cdot}}{\dot{F}f^2} + b_1\right], \quad x = F(t)\,,$$

$$B_2 = \frac{1}{\dot{F}^2}\left(\frac{\ddot{f}}{f} + 2b_1\frac{\dot{f}}{f} + b_2\right), \quad x = F(t)\,.$$

Falls die Funktionen $Z_1(x)$, $Z_2(x)$ in I_{1x} eine Hauptbasis [eine Basis] von ($\bar{b}$) bilden, so bilden die Funktionen

$$(5.1{,}15) \qquad y_j(t) = f(t)\,Z_j[F(t)]\,, \quad j = 1, 2\,,$$

$$(5.1{,}16) \qquad \dot{y}_j(t) = \dot{f}(t)\,Z_j[F(t)] + f(t)\,\dot{F}(t)\,Z_j'[F(t)]\,, \quad j = 1, 2$$

in I_{1t} eine Hauptbasis [eine Basis] von (b). Schreiben wir die Gleichung ($\bar{b}$) in der perturbierten Form

$$(\mathrm{p}) \qquad Z''(x) + 2[a_1(x) + p_1(x)]\,Z'(x) + [a_2(x) + p_2(x)]\,Z(x) = 0\,,$$

wo wir

$$(5.1{,}17) \qquad p_1(x) = B_1(x) - a_1(x)\,, \quad p_2(x) = B_2(x) - a_2(x)$$

setzen. Mit Rücksicht auf (3.9,3), (3.9,4), (5.1,14), (D), (E) können wir (5.1,17) in der Form

$$(5.1{,}18) \qquad p_1[F(t)] = \frac{1}{2\dot{F}}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log D(t)\,,$$

$$(5.1{,}19) \qquad p_2[F(t)] = (fh\dot{F})^{-2}\,E(t)$$

schreiben. Laut (5.1,13), (3.9,3), (5.1,18) ist

$$(5.1{,}20) \qquad \int_{x_1}^{\xi} \exp\left\{2\int_{x_1}^{x} a_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} p_1(x)\,z_j'(x)\,z_k(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= c_1 \int_{x_1}^{\xi} \exp\left\{2\int_{\tau_1}^{H(x)} A_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} p_1(x)\left[\frac{h'}{hH'}\,Y_j(H)\,Y_k(H) + \dot{Y}_j(H)\,Y_k(H)\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,c_1 \int_{t_1}^{\tau} \exp\left\{2\int_{\tau_1}^{H(x)} A_1(s)\,\mathrm{d}s\right\}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log D(t)\right]\left[\frac{h'}{hH'}\,Y_j(H)\,Y_k(H) + \right.$$

$$\left. + \dot{Y}_j(H)\,Y_k(H)\right]\mathrm{d}t\,, \quad 0 \neq c_1 \in E_1\,,$$

wo $x = F(t)$ zu nehmen ist. Gemäß (5.1,20), (5.1,1) und den Formeln (i) resp. (ii) gilt (4.3,2) für $j, k = 1, 2$ resp. $j, k = 1, 2, j \neq k$. Ferner ist

$$(5.1,21) \qquad \int_{t_1}^{\tau} \left|\frac{d}{dt} \log D(t)\right| dt = c_2 \int_{t_1}^{\tau} \exp\left\{2\int_{t_1}^{H(x)} A_1(s)\, ds\right\} \left|\frac{d}{dt} \log D(t)\right| .$$

$$. \left|Y_1(H)\, \dot{Y}_2(H) - \dot{Y}_1(H)\, Y_2(H)\right| dt\,, \quad 0 < c_2 \in E_1\,, \quad x = F(t)\,.$$

Nach (5.1,1). (i), (ii) schließen wir, daß das Intergral auf der linken Seite der Gleichung (5.1,21) konvergiert, so daß der Limes (5.1,3) existiert. Laut (5.1,13), (3.9,3), (5.1,19) ist

$$(5.1,22) \qquad \int_{x_1}^{\xi} \exp\left\{2\int_{x_1}^{x} a_1(s)\, ds\right\} p_2(x)\, z_j(x)\, z_k(x)\, dx =$$

$$= c_3 \int_{x_1}^{\xi} \frac{1}{H'} \exp\left\{2\int_{\tau_1}^{H(x)} A_1(s)\, ds\right\} p_2(x)\, Y_j(H)\, Y_k(H)\, dx =$$

$$= c_3 \int_{t_1}^{\tau} \exp\left\{2\int_{t_1}^{t} b_1(s)\, ds\right\} \frac{E(t)}{D(t)}\, Y_j(H)\, Y_k(H)\, dt\,, \quad x = F(t)\,, \quad 0 \neq c_3 \in E_1\,.$$

Gemäß (5.1,22), (5.1,3), (5.1,2) und den Formeln (i) resp. (ii) gilt (4.3,3) für $j, k = 1, 2$ resp. $j, k = 1, 2, j \neq k$.

Gilt (i), (5.1,1), (5.1,2), so gilt (4.3.2), (4.3,3) für $j, k = 1, 2$. Gemäß der Behauptung (i) des Satzes 4.3 hat die Gleichung ($\bar{b}$) die Basis (4.3,4). Diese Formeln können wir mit Rücksicht auf (5.1,13) in der Form

$$(5.1,23) \quad Z_j(x) = h(x)\, \{Y_j[H(x)]\, [1 + o(1)] + Y_k[H(x)]\, o(1)\}, \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k,$$

$$Z_j'(x) = \{h(x)\, Y_j[H(x)]\}'\, [1 + o(1)] + \{h(x)\, Y_k[H(x)]\}'\, o(1), \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k.$$

schreiben.

Falls (5.1,6) in I_1 eine positive Hauptbasis von ($\bar{a}$) ist, so ist (5.1,13) gemäß Abs. 3.10 A auch eine positive Hauptbasis von (a). Gilt (ii), (5.1,1), (5.1,2), so gilt (4.3,2), (4.3,3) für $j, k = 1, 2, j \neq k$. Gemäß der Behauptung (ii) des Satzes 4.3 hat die Gleichung ($\bar{b}$) in I_{1x} die Hauptbasis (4.3,5). Die Formeln (4.3,5) nehmen mit Rücksicht auf (5.1,13) folgende Gestalt an:

$$(5.1,24) \qquad Z_j(x) = h(x)\, Y_j[H(x)]\, [1 + o(1)]\,, \quad j = 1, 2\,.$$

Gilt (v_1), so ist nach Abs. 3.10 C die Basis (5.1,13) in I_{1x} regelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(H), \varkappa_2(H)$. Gemäß der Behauptung ($i_1$) des Satzes 4.3 gilt (4.3,6), so daß vermöge (5.1,13)

$$(5.1,25) \qquad Z_j'(x) = \{h(x)\, Y_j[H(x)]\}'\, \{1 + o[\varkappa_j(H) + 1]\}\,, \quad j = 1, 2$$

in Kraft ist.

Gilt (v_2), so ist nach Abs. 3.10 D die Basis (5.1,13) in I_{1x} halbregelmäßig j-ter Art mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(H)$, $\varkappa_2(H)$. Gemäß der Behauptung (i_2) des Satzes 4.3 gilt (4.3,7), so daß vermöge (5.1,13)

$$Z_j'(x) = \{h(x)\, Y_j[H(x)]\}' \{1 + o[\varkappa_j(H) + 1]\}, \tag{5.1,26}$$

$$Z_k'(x) = \{h(x)\, Y_k[H(x)]\}' + \varkappa_k(H)\, [\varkappa_j(H) + 1]\, o(1), \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k$$

in Kraft ist.

Gilt (v_3), so gilt nach der Behauptung (i_3) des Satzes 4.3 die Formel (4.3,8), so daß vermöge (5.1,13)

$$Z_j'(x) = \{h(x)\, Y_j[H(x)]\}' [1 + o(1)], \tag{5.1,27}$$

$$Z_k'(x) = o\{[h\, Y_j(H)]'/h\, Y_j(H)\}, \quad j, k = 1, 2, \quad j \neq k$$

in Kraft ist.

Gilt (v_4), so ist nach Abs. 3.10 E die Basis (5.1,13) in I_{1x} unregelmäßig mit Schätzfunktionen $\varkappa_1(H)$, $\varkappa_2(H)$. Gemäß der Behauptung (i_4) des Satzes 4.3 gilt (4.3,9), so daß vermöge (5.1,13)

$$Z_1'(x) = \{h(x)\, Y_1[H(x)]\}' + [\varkappa_2(H)\, \omega(x) + \varkappa_1(H)]\, o(1), \tag{5.1,28}$$

$$Z_2'(x) = \{h(x)\, Y_2[H(x)]\}' + [\varkappa_1(H)/\omega(x) + \varkappa_2(H)]\, o(1)$$

in Kraft ist, wobei (5.1,12) zu nehmen ist. Werden die Formeln (5.1,23)–(5.1,28) nacheinander in (5.1,15), (5.1,16) eingesetzt, so folgt (5.1,4), (5.1,5), (5.1,7)–(5.1,11).

Der Hauptsatz ist bewiesen.

Bemerkungen. a) Mit Hilfe von (i) können wir mit den Formeln (5.1,4), (5.1,5) folgende Umformungen durchführen:

$$y_j = fh[Y_j + o(\varphi)], \quad j = 1, 2 \tag{5.1,29}$$

$$\dot{y}_j = \dot{f}h[Y_j + o(\varphi)] + f\dot{h}[Y_j + o(\varphi)] + fh\dot{H}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} Y_j + o(\varphi)\right], \quad j = 1, 2. \tag{5.1,30}$$

b) Alle asymptotische Abschätzungen von $y_j^{(s-1)}$, $j, s = 1, 2$ lassen sich vereinfachen, wenn man $h(x) = \alpha$, $0 < \alpha \in E_1$ wählt. Ferner bleiben alle Formeln unverändert, falls wir statt der Funktionen $\tau = H(x)$, $x = F(t)$ die Funktionen $\tau = H[F(x)]$, $x = t$ verwenden.

5.2 Es seien zwei Gleichungen

$$\ddot{Y}(t) + 2\, Q_1(t)\, \dot{Y}(t) + Q_2(t)\, Y(t) = 0, \quad Q_i \in C_0(J_1), \tag{Q}$$

$$i = 1, 2, \quad J_1 = \langle t_1, \infty),$$

(q) $$y''(x) + 2\,q_1(x)\,y'(x) + q_2(x)\,y(x) = 0\,, \quad q_i \in C_0(I_1)\,,$$
$$i = 1, 2\,, \quad I_1 = \langle x_1, \infty)$$

gegeben.

Satz. *Es existieren positive Funktionen H, f, φ, ψ mit folgenden Eigenschaften:*

a) $H(x)\,,\ f(x) \in C_2(I_1)\,,\quad H'(x) > 0\,,\quad \lim H(x) = \infty\,,\quad H(I_1) \subset J_1\,;$

b) $\varphi(t)\,,\quad \psi(t) \in C_0(J_1)\,.$

Es gilt ferner

(I) $$\int_{x_1}^{\infty} \exp\left\{2\int_{H(x_1)}^{H(x)} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} \Psi[H(x)]\,|\mathrm{d}\log D_1(x)| < \infty\,,$$

(II) $$\int_{x_1}^{\infty} \exp\left\{2\int_{x_1}^{x} q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} \Phi[H(x)]\,|E_1(x)|\,\mathrm{d}x < \infty\,,$$

wo wir setzen:

$$\varphi^2 = \Phi\,,\quad \varphi\psi = \Psi\,,$$

$$D_1(x) = f^2 H' \exp\left\{2\int_{x_1}^{x} q_1(s)\,\mathrm{d}s - 2\int_{H(x_1)}^{H(x)} Q_1(s)\,\mathrm{d}s\right\},$$

$$E_1(x) = f''f + 2q_1 f'f + q_2 f^2 - f^2 H'^2 Q_2(H)\,.$$

Dann gelten folgende Behauptungen: 1° *Es gilt der Limes*

(5.2,1) $$\lim D_1(x) = C\,,\quad 0 < C \in E_1\,.$$

2° *Ist*

(i) $$Y(t) = O[\varphi(t)]\,,\quad \dot{Y}(t) = O[\psi(t)]\,,$$

wo $Y(t)$ die allgemeine Lösung von (Q) bezeichnet, so hat die Gleichung (q) die Basis

(5.2,2) $$y_j(x) = f(x)\,\{Y_j[H(x)]\,[1 + o(1)] + Y_k[H(x)]\,o(1)\}\,,\quad j, k = 1, 2\,,\quad j \neq k$$

mit den Ableitungen

(5.2,3) $$y_j'(x) = f'(x)\,\{Y_j[H(x)]\,[1 + o(1)] + Y_k[H(x)]\,o(1)\} +$$
$$+ f(x)\,H'(x)\,\{\dot{Y}_j[H(x)]\,[1 + o(1)] + \dot{Y}_k[H(x)]\,o(1)\}\,,\quad j, k = 1, 2\,,\quad j \neq k$$

wo

(5.2,4) $$Y_1(t),\ Y_2(t)$$

eine beliebige Basis von (Q) darstellt.

3° *Es sei* (5.2,4) *in* J_1 *eine positive Hauptbasis von* (Q). *Gilt*

(ii) $\qquad Y_j(t)\, Y_k(t) = O[\Phi(t)]\,, \quad \dot{Y}_j(t)\, Y_k(t) = O[\Psi(t)]\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,,$

so hat die Gleichung (q) *im Intervall* I_1 *die Hauptbasis*

$$y_j(x) = f(x)\, Y_j[H(x)]\,[1 + o(1)]\,, \quad j = 1, 2\,. \tag{5.2,5}$$

(i_1) *Ist die Basis* (5.2,4) *in* J_1 *regelmäßig mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(t), \varkappa_2(t)$, *so gilt*

$$\begin{aligned} y_j'(x) = f'(x)\, Y_j[H(x)]\,[1 + o(1)] + f(x)\, Y_j'[H(x)]\,. \\ .\,\{1 + o[\varkappa_j(H) + 1]\}\,, \quad j = 1, 2\,. \end{aligned} \tag{5.2,6}$$

(i_2) *Ist die Basis* (5.2,4) *in* J_1 *halbregelmäßig j-ter Art mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(t), \varkappa_2(t)$, *so gilt*

$$\begin{aligned} y_j'(x) &= f'(x)\, Y_j[H(x)]\,[1 + o(1)] + f(x)\, Y_j'[H(x)]\,\{1 + o[\varkappa_j(H) + 1]\}\,, \\ y_k'(x) &= f'(x)\, Y_k[H(x)]\,[1 + o(1)] + f(x)\, Y_k'[H(x)] + \\ &\quad + f(x)\, H'(x)\, \varkappa_k(H)\,[\varkappa_j(H) + 1]\, o(1)\,, \quad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,. \end{aligned} \tag{5.2,7}$$

(i_3) *Ist* $Y_k[H(x)] = 1$, *so gilt*

$$\begin{aligned} y_j'(x) &= f'(x)\, Y_j[H(x)]\,[1 + o(1)] + f(x)\, Y_j'[H(x)]\,[1 + o(1)]\,, \\ y_k'(x) &= f'(x)\,[1 + o(1)] + f(x)\, o\{Y_j'[H(x)]/Y_j[H(x)]\}\,, \\ &\qquad j, k = 1, 2\,, \quad j \neq k\,. \end{aligned} \tag{5.2,8}$$

(i_4) *Ist die Basis* (5.2,4) *in* J_1 *unregelmäßig mit Schätzfunktionen* $\varkappa_1(t), \varkappa_2(t)$, *so gilt*

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f'(x)\, Y_1[H(x)]\,[1 + o(1)] + f(x)\, Y_1'[H(x)] + \\ &\quad + f(x)\, H'(x)\,\{\varkappa_2[H(x)]\,\omega(x) + \varkappa_1[H(x)]\}\, o(1)\,, \\ y_2'(x) &= f'(x)\, Y_2[H(x)]\,[1 + o(1)] + f(x)\, Y_2'[H(x)] + \\ &\quad + f(x)\, H'(x)\,\{\varkappa_1[H(x)]\,[\omega(x)]^{-1} + \varkappa_2[H(x)]\}\, o(1)\,, \end{aligned} \tag{5.2,9}$$

wo (5.1,12) *zu nehmen ist.*

Der Satz 5.2 folgt unter Beachtung von Abs. 3.11 B – E aus Hauptsatz 5.1, falls wir $h(x) = 1$, $F(t) = t$ wählen.

Bemerkungen. a) Mit Hilfe von (i) kann man die Formeln (5.2,2), (5.2,3) umformen zu

$$y_j = f[Y_j + o(\varphi)]\,, \quad y_j' = f'[Y_j + o(\varphi)] + fH'[\dot{Y}_j + o(\psi)]\,, \quad j = 1, 2\,.$$

b) Der Satz 12 aus [5; S. 209] ergibt sich aus Satz 5.2 unter der Voraussetzung, daß (i), $Q_1 \equiv q_1 \equiv 0$ gilt.

c) Der Satz 30 aus [5; S. 215] folgt aus Satz 5.2 unter der Voraussetzung, daß die Gleichung (Q) regelmäßig ist und (ii), $Q_1 \equiv q_1 \equiv 0$ gilt.

d) Wir werden in der Arbeit [6] verschiedene Folgerungen des Satzes 5.2 einführen, die sich durch passende Wahl der Funktionen $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ ergeben.

Literatur

[1] *L. Berg:* Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen, Berlin 1968.

[2] *M. Ráb:* Über lineare Perturbationen eines Systems von linearen Differentialgleichungen. Czechoslovak Math. J. *8* (*83*), (1958), 222—229.

[3] *A. Ghizetti:* Un teorema sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari omogenee. Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni, Roma (*5*), *8*, (1949), 28—42.

[4] *M. Zlámal:* Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Mathematische Nachrichten *10* (1953), 169—174.

[5] *M. Ráb:* Asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + q(x)\, y = 0$. Czechoslovak Math. J. *14* (*89*), (1964), 203—221.

[6] *Z. Hustý:* Asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + 2q_1 y' + q_2 y = 0$. Im Druck.

[7] *Z. Hustý:* Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung, I. Teil, Czechoslovak Math. J. *15* (*90*), (1965), 479—502.

[8] *J. Mařík, M. Ráb:* Asymptotische Eigenschaften der Differentialgleichung $y'' = A(x)\, y$ im nichtoszillatorischen Fall. Czechoslovak Math. J. *10* (*85*), (1960), 501—522.

Anschrift des Verfassers: Brno, Zemědělská 5, ČSSR (Vysoká škola zemědělská).