Zbyněk Nádeník

Zur Geometrie im Großen der Kugelkongruenzen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 4, 700–717

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100866`

Czechoslovak Mathematical Journal, 18 (93) 1968, Praha

ZUR GEOMETRIE IM GROßEN DER KUGELKONGRUENZEN

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingegangen am 30. Juli 1967)

In [5]–[7] ist die Geometrie im Großen der Kanalflächen – d. h. der Enveloppen einer einparametrigen Familie von Kugelflächen – untersucht worden; besonders sind dort solche Integraldarstellungen für das Volumen, die Oberfläche und die Krümmungsintegrale eines Kanalkörpers gefunden worden, welche die Bildung allgemeiner linearer Ungleichungen für diese Maßzahlen ermöglichen. Im folgenden schreiten wir zur ähnlichen Behandlung der zweiparametrigen Kugelflächenfamilien im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n, $n \geqq 4$. Zugrunde gelegt wird ein orthogonales Koordinatensystem.

Es sei also $\mathscr{F} \subset E_n$ eine zweidimensionale zusammenhängende beschränkte Fläche, welche entweder geschlossen ist oder den Rand $\partial\mathscr{F}$ besitzt, und welche eine Parameterdarstellung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(B)$ zweiter Klasse zuläßt; dabei ist B der Fluchtpunkt von $\mathscr{F}$. Den ersten bzw. zweiten Beltramischen Differentialoperator in bezug auf $\mathscr{F}$ bezeichnen wir mit Δ_1 bzw. Δ_2 und ∇_2 soll den von G. DARBOUX (Leçons sur la théorie générale des surfaces, Buch 7, Kap. IV) und L. BIANCHI (Lezioni di geometria differenziale, Kap. II) in der Theorie der Flächenverbiegung benutzten und nur mittels Δ_1 und Δ_2 ausdrückbaren Differentialparameter zweiter Ordnung bedeuten (vgl. [2], S. 165 und s. Abschn. 2).

Auf $\mathscr{F}$ sei eine solche Funktion $\varrho(B)$ zweiter Klasse erklärt, welche folgende Bedingungen erfüllt:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ B \notin \partial\mathscr{F} \Rightarrow \varrho(B) > 0\,;\\ &\text{b)}\ B \notin \partial\mathscr{F} \Rightarrow \Delta_1(\varrho) < 1\,;\\ &\text{c)}\ U > 0\,, \end{aligned}$$

wo U ein Ausdruck ist (ein Analogon zur linken Seite der dritten Ungleichung (1) in [6]; a) und b) sind die Seitenstücke zur ersten und zweiten Ungleichung (1) in [6]; vgl. auch (3) und (4) in [7]), welchen wir erst später im Abschn. 3 formulieren werden.

Die $(n - 1)$-dimensionale Kugelfläche um den Punkt B mit dem Radius $\varrho(B)$ hat wegen a) und b) aus (1) eine reelle Charakteristik $\pi_{n-3}(B; \varrho(B))$. Diese ist eine $(n - 3)$-

dimensionale Kugelfläche[1]), falls $B \notin \partial\mathscr{F}$ oder $B \in \partial\mathscr{F}$, $\varrho(B) > 0$ und sie reduziert sich auf einen Punkt für $B \in \partial\mathscr{F}$, $\varrho(B) = 0$. Die $(n - 2)$-dimensionale Kugel mit dem Rand $\pi_{n-3}(B; \varrho(B))$, bzw. den Punkt $B \equiv \pi_{n-3}(B; \varrho(B))$, bezeichnen wir mit $\varkappa_{n-2}(B; \varrho(B))$.

Der Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist der n-dimensionale Körper

$$\mathscr{K} = \bigcup\{\varkappa_{n-2}(B; \varrho(B)) : B \in \mathscr{F}\} \tag{2}$$

und die $(n - 1)$-dimensionale Fläche

$$\mathscr{S} = \bigcup\{\pi_{n-3}(B; \varrho(B)) : B \in \mathscr{F}\}\,. \tag{3}$$

Sie ist dann und nur dann die völlige Berandung von $\mathscr{K}$, wenn sie geschlossen ist, d. h. wenn entweder $\mathscr{F}$ geschlossen ist oder $B \in \partial\mathscr{F} \Rightarrow \varrho(1 - \Delta_1(\varrho))^{1/2} = 0$ (s. Abschn. 5 und vgl. [7], S. 410). Im entgegengesetzten Fall ist $\mathscr{S}$ nur der „Mantel“ von $\mathscr{K}$ und der restliche Teil der Berandung von $\mathscr{K}$ ist seine $(n - 1)$-dimensionale „Basis“, nämlich $\bigcup\{\varkappa_{n-2}(B; \varrho(B)) : B \in \partial\mathscr{F}\}$.

Die Bedingungen (1) garantieren diese Tatsache (s. Abschn. 5): Nur wenn $\mathscr{F}$ einen Rand hat, auf dem $\varrho = 0$ und zugleich $\Delta_1(\varrho) < 1$ ist, gehört er zu $\mathscr{S}$ und bildet auf $\mathscr{S}$ eine Kante; anders ist $\mathscr{S}$ (im differentialgeometrischen Sinn) singularitätenfrei. Aber noch mehr (s. wieder Abschn. 5): Für $B \in \mathscr{F} \setminus \partial\mathscr{F}$ besitzt $\mathscr{S}$ stetige Hauptkrümmungen R_i^{-1} $(i = 1, \ldots, n - 1)$, aus denen $n - 3$ gleich ϱ^{-1} sind.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{d}\mathscr{K}$ das Volumenelement von $\mathscr{K}$ und mit $\mathrm{d}\mathscr{S}$ bzw. $\mathrm{d}\mathscr{F}$ das Oberflächenelement von $\mathscr{S}$ bzw. $\mathscr{F}$ und endlich mit ω_{n-2} das Volumen der $(n - 2)$-dimensionalen Einheitskugel. *Für das Volumen $V = \int_{\mathscr{K}} \mathrm{d}\mathscr{K}$ von $\mathscr{K}$ und die Oberfläche $O = \int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}\mathscr{S}$ von $\mathscr{S}$ gelten folgende Integraldarstellungen* (s. Abschn. 3 und 4):

$$\begin{aligned} V = {} & \omega_{n-2} \int_{\mathscr{F}} \varrho^{n-2}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-2)/2} \left[1 - \Delta_2(\tfrac{1}{2}\varrho^2) + \nabla_2(\tfrac{1}{2}\varrho^2)\right] \mathrm{d}\mathscr{F} + \\ & + \frac{1}{n}\,\omega_{n-2} \int_{\mathscr{F}} \varrho^n[1 - \Delta_1(\varrho)]^{n/2} K \,\mathrm{d}\mathscr{F} \end{aligned} \tag{4}$$

oder

$$\begin{aligned} V = \omega_{n-2} \int_{\mathscr{F}} \Big\{ & \varrho^{n-2}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{n/2} - \\ & - \varrho^{n-1}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-2)/2} \left[(1 - \Delta_1(\varrho))\,\Delta_2(\varrho) + \tfrac{1}{2}\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho)\right] + \\ & + \varrho^n[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-2)/2} \left[\nabla_2(\varrho) + \frac{1}{n}(1 - \Delta_1(\varrho))\,K\right]\Big\} \mathrm{d}\mathscr{F} \end{aligned} \tag{4*}$$

---

[1]) Für $n = 4$ freilich eine Kreislinie. Es erübrigt sich für $n = 4$ die speziellen Benennungen zum Ausdruck zu bringen.

und

$$(5) \qquad O = (n-2)\,\omega_{n-2}\int_{\mathscr{F}} \varrho^{n-3}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-4)/2}\,[1 - \Delta_2(\tfrac{1}{2}\varrho^2) + \nabla_2(\tfrac{1}{2}\varrho^2)]\,\mathrm{d}\mathscr{F} + \\ + \omega_{n-2}\int_{\mathscr{F}} \varrho^{n-1}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-2)/2}\,K\,\mathrm{d}\mathscr{F}$$

oder

$$(5^*) \qquad O = (n-2)\,\omega_{n-2}\int_{\mathscr{F}}\Big\{\varrho^{n-3}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-2)/2} - \\ - \varrho^{n-2}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-4)/2}\,[(1 - \Delta_1(\varrho))\,\Delta_2(\varrho) + \tfrac{1}{2}\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho)] + \\ + \varrho^{n-1}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-4)/2}\left[\nabla_2(\varrho) + \frac{1}{n-2}(1 - \Delta_1(\varrho))\,K\right]\Big\}\,\mathrm{d}\mathscr{F}\,.$$

Dabei ist noch K eine zur Gaußschen Krümmung einer Fläche in E_3 analoge Invariante von $\mathscr{F}$, welche wir sofort definieren werden:

Es sei $\gamma \subset \mathscr{F}$ eine Kurve, welche in einer Umgebung ihres Fixpunktes $B_0 \in \mathscr{F}$ eine Darstellung zweiter Klasse mit ihrem Bogen s als dem Parameter zuläßt. Der Endpunkt der Projektion des in $B_0 \in \gamma$ gebundenen Vektors $\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}(B) : \mathrm{d}s^2|_{B=B_0}$ auf die Normalebene ν_0 von $\mathscr{F}$ in B_0 (d. h. auf den in B_0 zur Tangentenebene τ_0 von $\mathscr{F}$ in B_0 total orthogonalen $(n-2)$-dimensionalen Unterraum) erzeugt – falls die Tangente von γ in B_0 alle möglichen Lagen einnimmt – die sogenannte Indikatrix der Normalkrümmung (für $n = 4$ siehe [3], S. 20). Diese Indikatrix ist entweder eine Ellipse, deren uneigentliche Punkte den isotropen Richtungen in τ_0 entsprechen, oder eine Strecke oder ein Punkt (s. Abschn. 1). Wir wählen in ν_0 ein beliebiges $(n-2)$-Tupel von einander senkrechten Geraden $p_1, \ldots, p_{n-2}$ mit gemeinsamem Punkt B_0 und wir projizieren die Indikatrix orthogonal auf p_i in die Strecke (bzw. in den Punkt) X_iY_i $(i = 1, \ldots, n-2)$. Falls $B_0 \notin X_iY_i$ (bzw. $B_0 \in X_iY_i$, $B_0 \not\equiv X_i, Y_i$), versehen wir die Längen BX_i, BY_i der Strecken BX_i, BY_i mit denselben (bzw. entgegengesetzten) Vorzeichen. Die Summe

$$(6) \qquad K = \sum_{i=1}^{n-2} BX_i\,.\,BY_i$$

ist von der Wahl der Geraden p_i ganz unabhängig und obwohl die Konstruktion von K den Einbettungsraum E_n von $\mathscr{F}$ benutzt, doch ist K nur mittels der Grundform $\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,.\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ von $\mathscr{F}$ darstellbar (s. Abschn. 1). Somit ist die Invariante (6) einschließlich dieser Eigenschaft ein volles Analogon zur Gaußschen Krümmung einer Fläche in E_3 und zu Gaußens „Theorema egregium".

In [5]–[7] haben wir festgestellt, daß der Rauminhalt, die Oberfläche und die Krümmungsintegrale eines Kanalkörpers von den Krümmungen der durch die

Mittelpunkte der Kugeln erzeugten Kurve C unabhängig sind und daß folglich diese Maßzahlen bei einer Rektifikation von C unverändert bleiben. Ähnliche Behauptung gilt auch für unsere Kugelkongruenzen:

Das Volumen V von $\mathscr{K}$, die Oberfläche O und die Krümmungsintegrale von $\mathscr{S}$ sind invariant gegenüber einer isometrischen Abbildung der Grundfläche $\mathscr{F}$.

In der Tat, betreffs des Volumens und der Oberfläche ist diese Behauptung eine unmittelbare Folge von (4) und (5), wenn man noch die erwähnten Eigenschaften von K in Betracht zieht. Für die Krümmungsintegrale ergibt sich der Satz auf ähnliche Weise unter Zuhilfenahme der Steinerschen Formel für Parallelflächen (s. Abschn. 5).

F. Borel hat in [1] mit jedem Punkt P einer Fläche $F \subset E_3$ mittels ihrer Dreibeine $R(P)$ ein Gebilde $G(P)$ (Gerade, Kreis, Kugelfläche) verbunden, welches bei der Verbiegung von F fest in bezug auf $R(P)$ bleibt, und dann hat er die Eigenschaften von $\bigcup\{G(P) : P \in F\}$ untersucht, welche gegenüber einer beliebigen isometrischen Deformation von F invariant sind. Der obige Satz drückt eine solche Eigenschaft im Großen der Kugelflächenkongruenzen in E_n $(n \geqq 4)$ aus. Die zwar nur für $n \geqq 4$ geführten Rechnungen in den Abschn. $1-4$ werden später genügend klar zeigen, daß er auch in E_3 gültig bleibt. Betreffs (2) und (3) bemerken wir hier nur, daß für $n = 3$ die Charakteristik $\pi_{n-3}(B)$ aus zwei symmetrisch in bezug auf die Tangentenebene von $\mathscr{F}$ in $B \in \mathscr{F} \setminus \partial\mathscr{F}$ liegenden Punkten besteht und $\varkappa_{n-2}(B)$ eine Strecke ist. Es sei aber noch erwähnt, daß die Formeln für V und O ihre einfachste Gestalt nich für $n = 3$, sondern für $n = 4$ einnehmen.

Falls die Grundfläche $\mathscr{F}$ eben ist, so kann man den Körper (2) als einen „Rotationskörper" einsehen, dessen „Rotationsachse" die zweidimensionale Ebene von $\mathscr{F}$ ist. Denn der Durchschnitt von (2) mit einer beliebigen $(n-2)$-dimensionalen Ebene, welche zur zweidimensionalen „Rotationsachse" von $\mathscr{K}$ total orthogonal steht, ist dann nämlich entweder leer oder ein Punkt oder eine $(n-2)$-dimensionale Kugel (für $n = 3$ ist im betrachteten Fall der Körper (2) symmetrisch in bezug auf die Ebene von $\mathscr{F}$). Meines Wissens sind solche konvexen „Rotationskörper" bisher nicht untersucht worden und es ist eine offene Frage, inwieweit sich die besonders von A. Dinghas aufgebaute Theorie der konvexen Rotationskörper in E_n auf die hier betrachteten verallgemeinerten konvexen „Rotationskörper" übertragen läßt. Infolge des Satzes von der Invarianz der Maßzahlen von (2) und (3) sind die Körper (2) einerseits und die konvexen ebenachsigen „Rotationskörper" anderseits in ähnlicher Beziehung, welche wir eingehend in [7], Abschn. B) der Einleitung, für die Kanalkörper und die konvexen Rotationskörper beschrieben haben.

Näher werden wir uns mit dem Fall $n = 4$ beschäftigen. Im Raum von gerader Dimension enthalten die Formel (4*) und (5*) und folglich auch die entsprechenden Integraldarstellungen der Krümmungsintegrale keine Irrationalitäten. Deshalb kann man diese Formeln für $n = 4$ am leichtesten behandeln. Ähnlich wie in der Theorie der konvexen Körper setzen wir jetzt

$$(7) \qquad W_0 = V, \quad W_1 = \tfrac{1}{4}O, \quad W_2 = \frac{1}{12}\int_{\mathscr{S}} (R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1})\,\mathrm{d}\mathscr{S},$$

$$W_3 = \frac{1}{12}\int_{\mathscr{S}} (R_1^{-1}R_2^{-1} + R_2^{-1}R_3^{-1} + R_3^{-1}R_1^{-1})\,\mathrm{d}\mathscr{S}, \quad W_4 = \frac{1}{4}\int_{\mathscr{S}} R_1^{-1}R_2^{-1}R_3^{-1}\,\mathrm{d}\mathscr{S}.$$

Die Funktion $\varrho(B)$ definiert auf $\mathscr{F}$ ein Skalarfeld. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{\tau}$ den durch $|\boldsymbol{\tau}| = \Delta_1^{1/2}(\varrho)$ bestimmten Tangentenvektor[2]) seiner Niveaukurven. *Falls $\mathscr{F}$ eine orientierbare Fläche mit stückweise glattem Rand $\partial\mathscr{F}$ ist, so gelten für die Funktionale* (7) *folgende Integraldarstellungen* (s. Abschn. 7):

$$(8) \qquad W_0 = \pi \int_{\mathscr{F}} [\varrho^2\{1 + \Delta_1(\varrho) + \Delta_1^2(\varrho)\} + \tfrac{1}{2}\varrho^3\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho) + \tfrac{1}{4}\varrho^4 K]\,\mathrm{d}\mathscr{F} + $$
$$+ \tfrac{1}{4}\pi \int_{\partial\mathscr{F}} \varrho^3\boldsymbol{\tau} \,.\, \{\varrho(2 - \Delta_1(\varrho))\,\mathrm{d}\,\mathbf{grad}\,\varrho - 4\mathrm{d}\mathbf{x}\},$$

$$W_1 = \tfrac{1}{4}\pi \int_{\mathscr{F}} [2\varrho\{1 + \Delta_1(\varrho) + \Delta_1^2(\varrho)\} + \tfrac{3}{2}\varrho^2\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho) + \varrho^3 K]\,\mathrm{d}\mathscr{F} + $$
$$+ \tfrac{1}{4}\pi \int_{\partial\mathscr{F}} \varrho^2\boldsymbol{\tau} \,.\, \{\varrho\,\mathrm{d}\,\mathbf{grad}\,\varrho - (2 + \Delta_1(\varrho))\,\mathrm{d}\mathbf{x}\},$$

$$W_2 = \tfrac{1}{6}\pi \int_{\mathscr{F}} [1 + \Delta_1(\varrho) + \Delta_1^2(\varrho) + \tfrac{3}{2}\varrho\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho) + \tfrac{3}{2}\varrho^2 K]\,\mathrm{d}\mathscr{F} + $$
$$+ \tfrac{1}{12}\pi \int_{\partial\mathscr{F}} \varrho\boldsymbol{\tau} \,.\, \{3\varrho\,\mathrm{d}\,\mathbf{grad}\,\varrho - 2(2 + \Delta_1(\varrho))\,\mathrm{d}\mathbf{x}\},$$

$$W_3 = \tfrac{1}{4}\pi \int_{\mathscr{F}} [\tfrac{1}{2}\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho) + \varrho K]\,\mathrm{d}\mathscr{F} + \tfrac{1}{12}\pi \int_{\partial\mathscr{F}} \boldsymbol{\tau} \,.\, \{3\varrho\,\mathrm{d}\,\mathbf{grad}\,\varrho - (2 + \Delta_1(\varrho))\,\mathrm{d}\mathbf{x}\},$$

$$W_4 = \tfrac{1}{4}\pi \int_{\mathscr{F}} K\,\mathrm{d}\mathscr{F} + \tfrac{1}{4}\pi \int_{\partial\mathscr{F}} \boldsymbol{\tau} \,.\, \mathrm{d}\,\mathbf{grad}\,\varrho\,.$$

Obwohl die Integraldarstellungen (8) beträchtlich kompliziert sind, doch ist es möglich wenigstens in einigen Spezialfällen einfache Ungleichungen zu formen:

Unter den Voraussetzungen

$$(9) \qquad B \in \mathscr{F} \Rightarrow K \geqq 0, \quad \Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho) \geqq 0,$$

$$(10) \qquad B \in \partial\mathscr{F} \Rightarrow \boldsymbol{\tau} \,.\, \mathrm{d}\,\mathbf{grad}\,\varrho \geqq 0, \quad \boldsymbol{\tau} \,.\, \mathrm{d}\mathbf{x} \leqq 0$$

ist für jedes feste $y \leqq \min_{B\in\mathscr{F}} \varrho(B)$

$$(11) \qquad W_1 - 3yW_2 + 3y^2W_3 - y^3W_4 \geqq 0$$

---

[2]) Betreffs seiner Orientation s. Ende des Abschn. 6.

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $\varrho(B) = y = konst.$ ist (s. Abschn. 8; die Extremalflächen sind also ein Analogon zu den Röhrenflächen, vgl. [6] und [7]).

Sind entweder a) die durch

$$B \in \partial\mathscr{F} \Rightarrow \Delta_1(\varrho) = 1 \tag{12}$$

ergänzten Forderungen (9) und (10) oder b) die Voraussetzungen (9) und (10) mit den Gleichheitszeichen in (10) erfüllt, so ist für jedes feste $y \leqq \min_{B\in\mathscr{F}} \varrho(B)$

$$W_0 - 4yW_1 + 6y^2W_2 - 4y^3W_3 + y^4W_4 \geqq 0\,. \tag{13}$$

Wenn man im Fall b) die zweite Ungleichung in (9) und im Fall a) die zweiten Ungleichungen in (9) und (10) gegen die umgekehrten austauscht, so gilt (13) für jedes feste $y \geqq \max_{B\in\mathscr{F}} \varrho(B)$. Die Gleichheit tritt in (13) beidesmal dann und nur dann ein, wenn $\varrho(B) = y = konst.$ ist (s. Abschn. 8).

Damit ist freilich die Bildung der linearen Ungleichungen für die Funktionale (7) nicht erschöpft. Nach dem Muster der Hauptsätze in [6] oder [7] kann man auch jetzt die allgemeinen linearen Ungleichungen erhalten, selbstverständlich unter den zu (9) und (10) analogen Voraussetzungen.

Es folgen die Beweise der vorangeführten Behauptungen.

1. Wir versehen jeden Punkt $B \in \mathscr{F}$ mit dem begleitenden n-Bein, welches aus den untereinander orthogonalen Einheitsvektoren $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3 \equiv \mathbf{n}_3, \ldots, \mathbf{t}_n \equiv \mathbf{n}_n$ [3]) erster Klasse, aus denen $\mathbf{t}_1$ und $\mathbf{t}_2$ in der Tangentenebene von $\mathscr{F}$ in B liegen, besteht; dabei $[\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n] = 1$. Dann ist in üblicher Schreibweise des Cartanschen ω-Kalküls

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \omega_1\mathbf{t}_1 + \omega_2\mathbf{t}_2\,, \quad \omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0\,, \tag{1,1}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{t}_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\mathbf{t}_j\,, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0\,, \quad (i, j = 1, \ldots, n)\,, \tag{1,2}$$

$$\omega_{1k} = a_k\omega_1 + b_k\omega_2\,, \quad \omega_{2k} = b_k\omega_1 + c_k\omega_2\,, \quad (k = 3, \ldots, n)\,; \tag{1,3}$$

alle ω sind gewisse Pfaffsche Formen und das Oberflächenelement von $\mathscr{F}$ ist bekanntlich $\mathrm{d}\mathscr{F} = \omega_1 \wedge \omega_2$. Auf die wohlbekannte Weise – mittels der äußeren Differentiation von (1,3) nach den Strukturgleichungen von E_n und mittels des Übergangs zu den Frobeniusschen Kovarianten – erhalten wir folgende Variationen in bezug auf die sekundären Parameter (freilich $\omega_{ij}(\delta) = e_{ij}$; für $n = 4$ siehe [4], S. 252–253):

$$\delta a_k = 2b_ke_{12} - \sum_{l=3}^{n} a_le_{lk}\,, \quad \delta c_k = 2b_ke_{21} - \sum_{l=3}^{n} c_le_{lk}\,,$$

$$\delta b_k = a_ke_{21} + c_ke_{12} - \sum_{l=3}^{n} b_le_{lk} \quad (k = 3, \ldots, n)\,.$$

---

[3]) Gelegentlich werden wir von beiden Bezeichnungsweisen Gebrauch machen.

Mit Rücksicht auf $e_{12} + e_{21} = 0$, $e_{lk} + e_{kl} = 0$ $(k, l = 3, \ldots, n)$ ergibt sich daraus $\delta \sum_{k=3}^{n} (a_k c_k - b_k^2) = 0$, $\delta \sum_{k=3}^{n} (a_k + c_k)^2 = 0$. Folglich sind

$$K = \sum_{k=3}^{n} (a_k c_k - b_k^2) \tag{1,4}$$

und $H = \sum_{k=3}^{n} (a_k + c_k)^2$ zwei Invarianten von $\mathscr{F}$. Von H werden wir hier keinen Gebrauch machen.

Um den geometrischen Sinn von K zu erhalten, berechnen wir $\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}(B)/\mathrm{d}s^2$, wo

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{x} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \omega_1^2 + \omega_2^2 \,. \tag{1,5}$$

Aus (1,1)–(1,3) folgt

$$\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}(B)/\mathrm{d}s^2 = (\,.\,)\,\mathbf{t}_1 + (\,.\,)\,\mathbf{t}_2 + \sum_{k=3}^{n} \boldsymbol{n}_k(\omega_1\omega_{1k} + \omega_2\omega_{2k}) : (\omega_1^2 + \omega_2^2) \,. \tag{1,6}$$

Wir setzen $t = \omega_1 : \omega_2$. Die Projektion des Endpunktes des in B gebundenen Krümmungsvektors $\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}(B)/\mathrm{d}s^2$ auf den durch die Vektoren $\boldsymbol{n}_3, \ldots, \boldsymbol{n}_n$ gespannten Unterraum erzeugt eine Punktmenge, welche nach (1,6) und (1,3) im System der Koordinaten mit der Basis $\boldsymbol{n}_3, \ldots, \boldsymbol{n}_n$ diese Parameterdarstellung hat: $x_k = (a_k t^2 + 2b_k t + c_k) :$ $: (t^2 + 1)$; $k = 3, \ldots, n$, und zwar für alle t einschließlich der Grenzwerte für $t \to$ $\to \pm\infty$. Daraus ergeben sich schon elementar die Behauptungen aus der Einleitung betreffs der Indikatrix. Die leicht bestätigungsfähige Relation $\max x_k \min x_k =$ $= a_k c_k - b_k^2$ beweist dann, zusammen mit (1,4), die geometrische Bedeutung (6) von K.

Für die Invariante (1,4) bleibt noch „Theorema egregium" zu beweisen, was also formal auf dieselbe Weise wie in E_3 durchführbar ist (vgl. [4], 263–264). Wenn $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ in jedem Punkt $B \in \mathscr{F}$ fest gewählt sind, so ist $\omega_{12} = g_1\omega_1 + g_2\omega_2$, wo offensichtlich $g_1 = \mathrm{d}\omega_1 : \omega_1 \wedge \omega_2$, $g_2 = \mathrm{d}\omega_2 : \omega_1 \wedge \omega_2$. Folglich wegen (1,3) und (1,4)

$$\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\omega_1 \wedge \omega_2}\,\omega_1 + \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2}\right) = \mathrm{d}\omega_{12} = \sum_{k=3}^{n} \omega_{1k} \wedge \omega_{k2} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 \,. \tag{1,7}$$

Somit haben wir K nur mittels der Grundform (1,5) von $\mathscr{F}$ ausgedrückt, woraus sich freilich die Invarianz von K gegenüber einer isometrischen Abbildung von $\mathscr{F}$ ohne weiters ergibt.

2. Für die auf $\mathscr{F}$ erklärte Funktion ϱ setzen wir

$$\mathrm{d}\varrho = \varrho_1\omega_1 + \varrho_2\omega_2 \,. \tag{2,1}$$

Im folgenden soll

$$\Delta_1(\varrho) = |\mathbf{grad}\,\varrho|^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 = \mathrm{d}\varrho \wedge (\varrho_1\omega_2 - \varrho_2\omega_1) : \omega_1 \wedge \omega_2 \tag{2,2}$$

den ersten [bzw., falls ϱ^* eine andere auf $\mathscr{F}$ definierte Funktion erster Klasse ist,

$$(2,3) \qquad \Delta_1(\varrho^*, \varrho) = \textbf{grad}\,\varrho^* \,.\, \textbf{grad}\,\varrho = \mathrm{d}\varrho^* \wedge (\varrho_1\omega_2 - \varrho_2\omega_1) : \omega_1 \wedge \omega_2$$

den zum ersten polaren] und

$$(2,4) \qquad \Delta_2(\varrho) = \operatorname{div} \textbf{grad}\,\varrho = \mathrm{d}(\varrho_1\omega_2 - \varrho_2\omega_1) : \omega_1 \wedge \omega_2 =$$
$$= (\mathrm{d}\varrho_1 + \varrho_2\omega_{21}) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (d\varrho_2 + \varrho_1\omega_{12}) : \omega_1 \wedge \omega_2$$

den zweiten Beltramischen Differentialoperator in bezug auf $\mathscr{F}$ bedeuten.

Aber auch

$$(2,5) \qquad \nabla_2(\varrho) = (\mathrm{d}\varrho_1 + \varrho_2\omega_{21}) \wedge (\mathrm{d}\varrho_2 + \varrho_1\omega_{12}) : \omega_1 \wedge \omega_2$$

ist ein invarianter Differentialoperator. Denn z. B. mittels der aus (2,1) folgenden Relation $(\mathrm{d}\varrho_1 + \varrho_2\omega_{21}) \wedge \omega_1 + (\mathrm{d}\varrho_2 + \varrho_1\omega_{12}) \wedge \omega_2 = 0$ kann man sich mühelos überzeugen, daß (vgl. auch [2], S. 165)

$$(2,6) \qquad \nabla_2(\varrho) = \{2\Delta_2(\varrho)\,\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho) - \Delta_1(\Delta_1(\varrho))\} : 4\Delta_1(\varrho)\,.$$

Später werden wir noch $\Delta_2(\frac{1}{2}\varrho^2)$ und $\nabla_2(\frac{1}{2}\varrho^2)$ brauchen. Nach (2,1), (2,2) und (2,4) ist

$$(2,7) \qquad \Delta_2(\tfrac{1}{2}\varrho^2) = \Delta_1(\varrho) + \varrho\,.\,\Delta_2(\varrho)$$

und unter weiterer Zuhilfenahme von (2,3), (2,5) und (2,6) erhalten wir nach einer längeren, aber sonst mechanischen Rechnung, daß

$$(2,8) \qquad \nabla_2(\tfrac{1}{2}\varrho^2) = \varrho^2\,\nabla_2(\varrho) + \varrho\{\Delta_1(\varrho)\,\Delta_2(\varrho) - \tfrac{1}{2}\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho)\}\,.$$

3. Wir kehren zum Körper K aus (2) zurück. Aus der Gleichung der $(n-1)$-dimensionalen Kugelfläche um den Punkt $B \in \mathscr{F}$ mit dem Radius $\varrho(B)$ ergibt sich nach (1,1), (1,2) und (2,1) für ihre Charakteristik $\pi_{n-3}(B)$ diese Darstellung: $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \varrho\varrho_1\mathbf{t}_1 - \varrho\varrho_2\mathbf{t}_2 + \varrho[1 - \Delta_1(\varrho)]^{1/2} \sum_{k=3}^{n} z_k\mathbf{n}_k$ mit festem B und $\sum_{k=3}^{n} z_k^2 = 1$. Daraus folgt schon leicht auch die Parameterdarstellung von $\mathscr{K}$ (vgl. [6], (1,1)):

$$(3,1) \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{x} - \varrho\varrho_1\mathbf{t}_1 - \varrho\varrho_2\mathbf{t}_2 + \varrho[1 - \Delta_1(\varrho)]^{1/2} \sum_{k=3}^{n} z_k\mathbf{n}_k\,;$$

$$(3,2) \qquad B \in \mathscr{F}\,, \quad z_3^2 + \ldots + z_n^2 \leqq 1\,.$$

Das nach (1,1) und (1,2) berechnete Differential von (3,1) ist

$$(3,3) \qquad \mathrm{d}\mathbf{Y} = \Omega_1\mathbf{t}_1 + \Omega_2\mathbf{t}_2 + \sum_{k=3}^{n} \Theta_k\mathbf{n}_k\,,$$

wo

$$(3,4)\qquad \Omega_1 = \omega_1 - \mathrm{d}(\varrho\varrho_1) - \varrho\varrho_2\omega_{21} + \varrho[1 - \Delta_1(\varrho)]^{1/2}\sum_{l=3}^{n} z_l\omega_{l1}\,,$$

$$\Omega_2 = \omega_2 - \mathrm{d}(\varrho\varrho_2) - \varrho\varrho_1\omega_{12} + \varrho[1 - \Delta_1(\varrho)]^{1/2}\sum_{l=3}^{n} z_l\omega_{l2}\,;$$

$$(3,5)\qquad \Theta_k = \varrho[1 - \Delta_1(\varrho)]^{1/2}\,\mathrm{d}z_k +$$

$$+ z_k\,\mathrm{d}(\varrho[1 - \Delta_1(\varrho)]^{1/2}) + \varrho[1 - \Delta_1(\varrho)]^{1/2}\sum_{l=3}^{n} z_l\omega_{lk} -$$

$$- \varrho\varrho_1\omega_{1k} - \varrho\varrho_2\omega_{2k}\quad (k = 3, \ldots, n)\,.$$

Die Formen $\mathrm{d}(\varrho\varrho_1) + \varrho\varrho_2\omega_{21}$ und $\mathrm{d}(\varrho\varrho_2) + \varrho\varrho_1\omega_{12}$ sind gewisse Linearkombinationen von ω_1, ω_2; dies ergibt sich sofort durch äußere Differentiation der aus (2,1) folgenden Relation $\mathrm{d}(\frac{1}{2}\varrho^2) = \varrho\varrho_1\omega_1 + \varrho\varrho_2\omega_2$. Das zusammen mit (1,3) bedeutet, daß die Formen (3,4) gewisse Linearkombinationen von ω_1, ω_2 sind.

Jetzt sind wir schon imstande, die dritte anfangs angemeldete Bedingung (1c) betreffs der auf $\mathscr{F}$ erklärten Funktion ϱ zu formulieren:

$$(3,6)\equiv(1\mathrm{c})\quad B \in \mathscr{F}\,,\quad z_3^2 + \ldots + z_n^2 \leqq 1 \Rightarrow U = (\Omega_1 \wedge \Omega_2) : (\omega_1 \wedge \omega_2) > 0\,.$$

Durch geeignetes Normalisieren der n-Beine $\mathbf{t}_1 \ldots \mathbf{t}_n$ kann man erreichen, daß $\omega_{kl}(k, l = 3, \ldots, n)$ Linearkombinationen von ω_1, ω_2 sind. Nach (2,2) und (1,3) sind dann die in zweiter und dritter Zeile in (3,5) stehenden Formen die Linearkombinationen von ω_1, ω_2.

Nach diesen drei letzten Absätzen ist folglich

$$(3,7)\qquad \Omega_1 \wedge \Omega_2 \wedge \Theta_3 \wedge \ldots \wedge \Theta_n =$$

$$= \varrho^{n-2}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-2)/2}\,\frac{\Omega_1 \wedge \Omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2}\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \mathrm{d}z_3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n$$

und nach (3,3) und (3,6) ist daher (3,7) das Volumenelement $\mathrm{d}\mathscr{K}$ von $\mathscr{K}$.

Nach (3,4) ist $(\Omega_1 \wedge \Omega_2) : (\omega_1 \wedge \omega_2)$ ein quadratisches Polynom in $z_3, \ldots, z_n$. Wir verteilen es auf drei Teile:

Erstens auf die Gruppe der Glieder, welche keine z_k enthalten; diese ist nach (2,1), (2,4) und (2,5)

$$(3,8)\qquad 1 - \Delta_2(\tfrac{1}{2}\varrho^2) + \nabla_2(\tfrac{1}{2}\varrho^2)\,.$$

Zweitens auf die Gruppe der Glieder, welche entweder z_k oder $z_k z_l$ $(k, l = 3, \ldots, n;$ $k \neq l)$ enthalten.

Drittens auf die Gruppe der Glieder mit z_k^2 $(k = 3, \ldots, n)$; diese ist nach (1,3)

$$(3,9)\qquad \varrho^2[1 - \Delta_1(\varrho)]\sum_{k=3}^{n}(a_k c_k - b_k^2)\,z_k^2\,.$$

Es sei jetzt ω_{n-2} das Volumen[4]) der $(n-2)$-dimensionalen Einheitskugel $\mathscr{E}$ mit der Darstellung $\mathbf{z} = z_3\mathbf{n}_3 + \ldots + z_n\mathbf{n}_n$ und mit dem Volumenelement $\mathrm{d}\mathscr{E} = \mathrm{d}z_3 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n$. Es ist geometrisch evident, daß die über $\mathscr{E}$ erstreckten Integrale von z_k oder $z_k z_l$ $(k, l = 3, \ldots, n;\ k \neq l)$ verschwinden. Dagegen dasselbe Integral von z_k^2 ist gleich ω_{n-2}/n, wie man sich z. B. mittels der $(n-2)$-dimensionalen Polarkoordinaten überzeugen kann.

Demzufolge nach der über $\mathscr{E}$ erstreckten Integration von $(\Omega_1 \wedge \Omega_2) : (\omega_1 \wedge \omega_2)$ fällt der zweite Teil weg und der dritte Teil (3,9) mit Rücksicht auf (1,4) liefert $n^{-1}\omega_{n-2}\varrho^2[1 - \Delta_1(\varrho)]\,K$.

Folglich erhält man nach (3,7) und (3,8) für das Volumen V von $\mathscr{K}$, d. h. für

$$V = \int_{\mathscr{K}} \mathrm{d}\mathscr{K} = \int_{\mathscr{E}}\int_{\mathscr{F}} \varrho^{n-2}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-2)/2}\,\frac{\Omega_1 \wedge \Omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2}\,\mathrm{d}\mathscr{F} \wedge \mathrm{d}\mathscr{E}\,,$$

ohne weiters die Formel (4), welche unter Verwendung von (2,7) und (2,8) in (4*) übergeht.

4. In diesem Abschn. behalten wir die Bezeichnungen aus dem vorigen Abschn. 3, aber statt (3,2) setzen wir nur

$$(4,1) \qquad B \in \mathscr{F}\,, \quad z_3^2 + \ldots + z_n^2 = 1\,.$$

Dann ist (3,1) die Parameterdarstellung von $\mathscr{S}$ aus (3). Der Einheitsvektor der Normalen von $\mathscr{S}$ ist offensichtlich

$$(4,2) \qquad \mathbf{N} = \varrho_1\mathbf{t}_1 + \varrho_2\mathbf{t}_2 - [1 - \Delta_1(\varrho)]^{1/2}\sum_{k=3}^{n} z_k\mathbf{n}_k\,,$$

wie eine einfache geometrische Überlegung zeigt und wie auch analytisch mittels (3,3) – (3,5) leicht zu bestätigen ist.

Wir werden noch annehmen, daß – falls $\mathscr{F}$ den Rand $\partial\mathscr{F}$ besitzt – auch

$$(4,3) \qquad B \in \partial\mathscr{F} \Rightarrow \Delta_1(\varrho) < 1\,;$$

vgl. (1b). Zum Schluß dieses Abschn. werden wir uns von dieser Voraussetzung befreien.

Wegen (4,1) gibt es immer eine solche orthogonale Matrix (z_{lk}), daß

$$(4,4) \qquad |z_{lk}| = 1\,, \quad z_{3k} = z_k \quad (k, l = 3, \ldots, n)\,.$$

Die linear unabhängigen Vektoren

$$(4,5) \qquad \mathbf{T}_1 = \mathbf{t}_1 + \varrho_1[1 - \Delta_1(\varrho)]^{-1/2}\sum_{k=3}^{n} z_k\mathbf{n}_k\,,$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{t}_2 + \varrho_2[1 - \Delta_1(\varrho)]^{-1/2}\sum_{k=3}^{n} z_k\mathbf{n}_k\,, \quad \mathbf{T}_l = \sum_{k=3}^{n} z_{l+1,k}\mathbf{n}_k \quad (l = 3, \ldots, n-1)$$

---

[4]) Die Verwechslung gegen die Pfaffschen Formen aus (1,1) — (1,3) ist ausgeschlossen.

sind alle zum Vektor (4,2) orthogonal. Folglich gibt es solche Pfaffschen Formen $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$, daß[5])

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i \boldsymbol{T}_i . \tag{4,6}$$

Wir berechnen selbständig das äußere Produkt $\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_{n-1}$ und das gemischte Produkt der Vektoren (4,2) und (4,5). Für dieses erhalten wir nach einfacher Rechnung, welche die wohlbekannten Eigenschaften der orthogonalen Matrix (z_{lk}) ausnützt, daß

$$[\boldsymbol{N}\boldsymbol{T}_1 \ldots \boldsymbol{T}_{n-1}] = -\,[1 - \Delta_1(\varrho)]^{-1/2} . \tag{4,7}$$

Der mittels (4,5) gemachte Vergleich von (3,3) und (4,6) liefert das Gleichungssystem

$$\Theta_k = z_k[1 - \Delta_1(\varrho)]^{-1/2}\,(\varrho_1\Omega_1 + \varrho_2\Omega_2) + \sum_{l=3}^{n-1} z_{l+1,k}\tau_l \quad (k = 3, \ldots, n)\,, \tag{4,8}$$

$$\Omega_1 = \tau_1\,, \quad \Omega_2 = \tau_2\,. \tag{4,9}$$

In Hinsicht auf die Orthogonalität der Matrix (z_{kl}) und auf (4,4) ergibt sich aus (4,8)

$$\tau_l = \sum_{k=3}^{n} z_{l+1,k}\Theta_k \quad (l = 3, \ldots, n-1)\,. \tag{4,10}$$

Aus (4,9) und (4,10) mit Berücksichtigung der im Abschn. 3 angeführten Eigenschaften der Formen (3,4) und (3,5) – s. besonders die drei Absätze vor der Berechnung des Produkts (3,7) – folgt deshalb

$$\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_{n-1} = \varrho^{n-3}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-3)/2}\,\frac{\Omega_1 \wedge \Omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2}\,. \tag{4,11}$$
$$.\,\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \Big(\sum_{k=3}^{n} z_{4k}\,\mathrm{d}z_k\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\sum_{k=3}^{n} z_{nk}\,\mathrm{d}z_k\Big)\,.$$

Auf der $(n-3)$-dimensionalen Einheitskugelfläche $\partial\mathscr{E}$ mit der Darstellung $\boldsymbol{z} = z_3\boldsymbol{n}_3 + \ldots + z_n\boldsymbol{n}_n$ ist – im offensichtlichen Sinn – fast überall $z_3 \neq 0$ und das Oberflächenelement von $\partial\mathscr{E}$ ist

$$\mathrm{d}(\partial\mathscr{E}) = \frac{1}{|z_3|}\,\mathrm{d}z_4 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z_n\,. \tag{4,12}$$

Verwenden wir die Identität $\mathrm{d}z_3 = -z_3^{-1}(z_4\,\mathrm{d}z_4 + \ldots + z_n\,\mathrm{d}z_n)$ sowie auch die wohlbekannten Eigenschaften der orthogonalen Matrix (z_{kl}), so erhalten wir nach gewisser Rechnung und nach der Schlußbenutzung von (4,12), daß

$$\Big(\sum_{k=3}^{n} z_{4k}\,\mathrm{d}z_k\Big) \wedge \ldots \wedge \Big(\sum_{k=3}^{n} z_{nk}\,\mathrm{d}z_k\Big) = (\operatorname{sgn} z_3)\,\mathrm{d}(\partial\mathscr{E})\,. \tag{4,13}$$

---

[5]) Nach (4,1) bedeutet jetzt $\boldsymbol{Y}$ in (3,1) und (3,3) den Ortsvektor des Fluchtpunktes von $\mathscr{S}$!

Nach (4,7), (4,11) und (4,13) kann man schon das Produkt $[\boldsymbol{N}\boldsymbol{T}_1 \dots \boldsymbol{T}_{n-1}]\, \tau_1 \wedge \wedge \dots \wedge \tau_{n-1}$ leicht bestimmen und in Hinsicht auf (4,6), (4,1) und (3,6) erhalten wir für das Oberflächenelement $\mathrm{d}\mathscr{S}$ von $\mathscr{S}$ folgendes Ergebnis:

$$\mathrm{d}\mathscr{S} = \varrho^{n-3}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-4)/2} \frac{\Omega_1 \wedge \Omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2} \mathrm{d}\mathscr{F} \wedge \mathrm{d}(\partial\mathscr{E}) . \tag{4,14}$$

Das über $\partial\mathscr{E}$ erstreckte Integral von z_k oder $z_k z_l$ ($k, l = 3, \dots, n$; $k \neq l$) ist gleich Null und man überzeugt sich leicht unter Zuhilfenahme von (4,12), daß dasselbe Integral von z_k^2 gleich ω_{n-2} ist. Benützen wir also jetzt – was den Ausdruck $(\Omega_1 \wedge \wedge \Omega_2) : (\omega_1 \wedge \omega_2)$ betrifft – ein zum Abschn. 3 analoges Verfahren, in dem wir nur die über $\mathscr{E}$ erstreckte Integration gegen die über $\partial\mathscr{E}$ austauschen (man soll dabei beachten, daß die Oberfläche von $\partial\mathscr{E}$ dem $(n-2)$-maligen Volumen von $\mathscr{E}$ gleich ist), so bekommen wir aus (4,14) für die Oberfläche O von $\mathscr{S}$, d. h. für

$$O = \int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}\mathscr{S} = \int_{\partial\mathscr{E}} \int_{\mathscr{F}} \varrho^{n-3}[1 - \Delta_1(\varrho)]^{(n-4)/2} \frac{\Omega_1 \wedge \Omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2} \mathrm{d}\mathscr{F} \wedge \mathrm{d}(\partial\mathscr{E}) ,$$

die Formel (5). Die Verwendung von (2,7) und (2,8) führt sie in (5*) über.

Weil der Integrand der obigen Formel für O auch für $\Delta_1(\varrho) = 1$ definiert ist, so ist offensichtlich, daß zur Beseitigung der Annahme (4,3) ein elementarer Grenzübergang genügt.

5. Nach vorigem Abschn. ist jeder Punkt von $\mathscr{S}$, für welchen $\varrho[1 - \Delta_1(\varrho)] \neq 0$ ist, im differentialgeometrischen Sinn regulär. Das ergibt sich nämlich sofort aus (4,14) und (3,6)≡(1c). Aber nach (1a) und (1c) ist

$$\varrho[1 - \Delta_1(\varrho)] = 0 \tag{5,1}$$

nur auf dem eventuellen Rand $\partial\mathscr{F}$ von $\mathscr{F}$ möglich. Zugleich folgt aus der Parameterdarstellung von $\mathscr{S}$, d. h. aus (3,1) mit (4,1), daß – falls $\mathscr{F}$ den Rand hat – die Fläche $\mathscr{S}$ aus (3) dann und nur dann geschlossen ist, wenn auf $\partial\mathscr{F}$ die Gleichung (5,1) erfüllt ist.

Wegen (1a) und (1b) ist auf $\partial\mathscr{F}$ die Gleichung (5,1) nur in diesen zwei Fällen erfüllbar: $B \in \partial\mathscr{F} \Rightarrow \varrho(B) \geqq 0$, $1 - \Delta_1(\varrho) = 0$ oder $\varrho(B) = 0$, $1 - \Delta_1(\varrho) > 0$. Nach (3,1) mit (4,1) entspricht beidesmal dem Punkt $B \in \partial\mathscr{F}$ der einzige Punkt $P \in \mathscr{S}$ mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{x} - \varrho(\varrho_1\mathbf{t}_1 + \varrho_2\mathbf{t}_2)$ und es ist $B \equiv \pi_{n-3}(B) \equiv P \in \mathscr{S}$ dann und nur dann, wenn $\varrho(B) = 0$ ist. Aber der Normalenvektor (4,2) von $\mathscr{S}$ in P ist nur im ersten Fall von $z_3, \dots, z_n$ unabhängig und er liegt dann in der Tangentenebene von $\mathscr{F}$ in B. Dagegen im zweiten Fall erzeugen die Trägergeraden der in $B \equiv P \in \mathscr{S}$ gebundenen Normalenvektoren (4,2) von $\mathscr{S}$ eine $(n-2)$-dimensionale Kegelfläche oder Ebene, je nachdem $\Delta_1(\varrho) > 0$ oder $\Delta_1(\varrho) = 0$ ist.

Das bedeutet, daß während im ersten Fall in $P \in \mathscr{S}$ eine unwesentliche Singularität vorkommt, im zweiten Fall haben wir in $B \equiv P \in \mathscr{S}$ mit einer wesentlichen Singularität zu tun.

Nach (1,1) und (1,2) kann man das Differential von (4,2) leicht berechnen. Auf Grund von (3,1), (4,2) und (1,1) erhalten wir, daß die Differentiale des Ortsvektors $\mathbf{Y}$ des Fluchtpunktes von $\mathscr{S}$ und seines Normalenvektors in folgender Beziehung stehen:

$$(5,2) \qquad \mathrm{d}\mathbf{Y} = -\varrho\, \mathrm{d}\mathbf{N} + \mathbf{t}_1(\omega_1 - \varrho_1\, \mathrm{d}\varrho) + \\ + \mathbf{t}_2(\omega_2 - \varrho_2\, \mathrm{d}\varrho) + [1 - \Delta_1(\varrho)] \sum_{k=3}^{n} z_k \mathbf{n}_k\, \mathrm{d}\varrho\,.$$

In einer Hauptrichtung von $\mathscr{S}$ ist freilich

$$(5,3) \qquad \mathrm{d}\mathbf{Y} = -R\, \mathrm{d}\mathbf{N}\,,$$

wo R den zugehörigen Hauptkrümmungsradius bezeichnet. Aus (5,2) und (5,3) ergibt sich unmittelbar, daß in der Richtung jedes Vektors $z_3\mathbf{n}_3 + \ldots + z_n\mathbf{n}_n$ mit $z_3^2 + \ldots + z_n^2 = 1$, d. h. nach (4,1) beim festen Punkt $B \in \mathscr{F}$, die Gleichung $\mathrm{d}\mathbf{Y} = -\varrho\, \mathrm{d}\mathbf{N}$ gilt. Das bedeutet nach (5,3), daß aus den Hauptkrümmungsradien $R_1, \ldots, R_{n-1}$ von $\mathscr{S}$ $n - 3$ gleich ϱ sind: $R_3 = \ldots = R_{n-1} = \varrho$.

Die Gleichung für die zwei restlichen Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 ist leicht zu finden. Eliminieren wir aus (5,2) und (5,3) das Differential $\mathrm{d}\mathbf{N}$ und benutzen wir dann (3,3) mit (4,1), so erhalten wir wegen der linearen Unabhängigkeit von $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_n$, daß

$$(5,4) \qquad (R - \varrho)\, \Omega_1 = R(\omega_1 - \varrho_1\, \mathrm{d}\varrho)\,, \quad (R - \varrho)\, \Omega_2 = R(\omega_2 - \varrho_2\, \mathrm{d}\varrho)\,.$$

Schon im Abschn. 3 haben wir die für folgende Rechnungen wichtige Tatsache bemerkt, daß die Formen Ω_1 und Ω_2 aus (3,4) gewisse Linearkombinationen von ω_1, ω_2 sind. Verwenden wir noch (2,1) und eliminieren wir ω_1, ω_2 aus (5,4), so entsteht eine quadratische Gleichung für R mit dem absoluten Glied $\varrho^2(\Omega_1 \wedge \Omega_2) : (\omega_1 \wedge \omega_2)$, welches nach (3,6)≡(1c) für $\varrho > 0$ von Null verschieden ist. Daraus ergibt sich wegen (1a) auch die Stetigkeit von $1/R_1$ und $1/R_2$ auf $\mathscr{F} \setminus \partial\mathscr{F}$.

Für genügend kleines positives v erfüllt nach (3,4) die Bedingung (1c)≡(3,6) mit der Funktion $\varrho(B)$ auch die Funktion $\varrho(B) + v$. Folglich kann man auch den n-dimensionalen Körper

$$(5,5) \qquad \bigcup\{\varkappa_{n-2}(B; \varrho(B) + v) : B \in \mathscr{F}\}$$

und die $(n - 1)$-dimensionale Fläche

$$(5,6) \qquad \bigcup\{\pi_{n-3}(B; \varrho(B) + v) : B \in \mathscr{F}\}$$

konstruieren, und zwar freilich auf dieselbe Weise wie in der Einleitung den Körper (2) und die Fläche (3).

Aus dem obigen folgt, daß die Körper (2) und (5,5) dann und nur dann parallel sind, wenn $\mathscr{F}$ entweder geschlossen ist oder wenn

$$(5,7) \qquad B \in \partial\mathscr{F} \Rightarrow 1 - \Delta_1(\varrho) = 0\,.$$

Für $n = 4$ werden wir diese Situation noch später im Abschn. 7 erwähnen.

Die nach der Formel (5*) berechnete Oberfläche von (5,6) ist ein Polynom $(n-1)$-ten Grades in v und sein Koeffizient von v^i $(i = 1, \ldots, n-1)$ ist bekanntlich das über $\mathscr{S}$ erstreckte Integral von i-ter elementarsymmetrischer Funktion der Hauptkrümmungen $1/R_1, \ldots, 1/R_{n-1}$. Folglich sind auch die Krümmungsintegrale von $\mathscr{S}$ invariant gegenüber einer isometrischen Abbildung von $\mathscr{F}$.

6. Wegen der späteren Umformung von (4*) und (5*) leiten wir zwei Integralbeziehungen her. Dabei werden wir voraussetzen, daß die Grundfläche $\mathscr{F}$ den Rand $\partial\mathscr{F}$ hat und daß sie die Anwendung des Stokesschen Satzes zuläßt.

a) *Für alle ganzen nichtnegativen s und r ist*

$$(6,1) \qquad \int_{\mathscr{F}} \varrho^s \Delta_1^r(\varrho)\,\{2(r+1)\,\nabla_2(\varrho) - \Delta_1(\varrho)\,K\}\,\mathrm{d}\mathscr{F} =$$
$$= \int_{\mathscr{F}} s\varrho^{s-1}\,\Delta_1^r(\varrho)\,\{\tfrac{1}{2}\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho) - \Delta_1(\varrho)\,\Delta_2(\varrho)\}\,\mathrm{d}\mathscr{F} +$$
$$+ \int_{\partial\mathscr{F}} \varrho^s \Delta_1^r(\varrho)\,\{\varrho_1\,\mathrm{d}\varrho_2 - \varrho_2\,\mathrm{d}\varrho_1 + \Delta_1(\varrho)\,\omega_{12}\}\,.$$

Zum Beweis benutzen wir die Identität

$$\nabla_2(\varrho)\,\omega_1 \wedge \omega_2 = \mathrm{d}\varrho_1 \wedge \mathrm{d}\varrho_2 + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\Delta_1(\varrho) \wedge \omega_{12}\,,$$

welche aus (2,5) und (2,2) leicht folgt. Wir multiplizieren sie mit $2(r+1)\,\varrho^s\,\Delta_1^r(\varrho)$ und wir integrieren sie über $\mathscr{F}$. Um dann das Integral $\int_{\mathscr{F}}(r+1)\,\varrho^s\,\Delta_1^r(\varrho)\,\mathrm{d}\Delta_1(\varrho) \wedge \wedge\, \omega_{12}$ zu eliminieren, berechnen wir das äußere Differential von $\varrho^s\,\Delta_1^{r+1}(\varrho)\,\omega_{12}$ und dann wenden wir auf sein über $\mathscr{F}$ erstrecktes Integral die Stokessche Formel an. Unter schließlicher Verwendung von (1,7) erhalten wir so diese Beziehung:

$$(6,2) \qquad \int_{\mathscr{F}} \varrho^s \Delta_1^r(\varrho)\,\{2(r+1)\,\nabla_2(\varrho) - \Delta_1(\varrho)\,K\}\,\mathrm{d}\mathscr{F} =$$
$$= \int_{\mathscr{F}} 2(r+1)\,\varrho^s\,\Delta_1^r(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho_1 \wedge \mathrm{d}\varrho_2 - \int_{\mathscr{F}} \Delta_1^{r+1}(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho^s \wedge \omega_{12} + \int_{\partial\mathscr{F}} \varrho^s\,\Delta_1^{r+1}(\varrho)\,\omega_{12}\,.$$

Nach (2,1)–(2,4) ist aber

$$[\mathrm{d}\varrho \wedge (\varrho_1\,\mathrm{d}\varrho_2 - \varrho_2\,\mathrm{d}\varrho_1 + \Delta_1(\varrho)\,\omega_{12})] : (\omega_1 \wedge \omega_2) =$$
$$= \Delta_1(\varrho)\,\Delta_2(\varrho) - \tfrac{1}{2}\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho)\,.$$

Daraus kann man $\Delta_1(\varrho)\, d\varrho \wedge \omega_{12}$ ausdrücken und in das zweite Integral rechts in (6,2) einsetzen:

$$(6,3) \qquad \int_{\mathscr{F}} \varrho^s \Delta_1^r(\varrho) \{2(r+1) \nabla_2(\varrho) - \Delta_1(\varrho) K\}\, d\mathscr{F} =$$

$$= \int_{\mathscr{F}} s\varrho^{s-1} \Delta_1^r(\varrho) \{\tfrac{1}{2}\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho) - \Delta_1(\varrho)\, \Delta_2(\varrho)\}\, d\mathscr{F} +$$

$$+ \int_{\mathscr{F}} 2(r+1)\varrho^s \Delta_1^r(\varrho)\, d\varrho_1 \wedge d\varrho_2 + \int_{\mathscr{F}} s\varrho^{s-1} \Delta_1^r(\varrho)\, d\varrho \wedge (\varrho_1\, d\varrho_2 - \varrho_2\, d\varrho_1) +$$

$$+ \int_{\partial\mathscr{F}} \varrho^s \Delta_1^{r+1}(\varrho)\, \omega_{12}\,.$$

Jetzt berechnen wir die äußeren Differentiale von $\varrho^s \varrho_1 \Delta_1^r(\varrho)\, d\varrho_2$ und $\varrho^s \varrho_2 \Delta_1^r(\varrho)\, d\varrho_1$, dann integrieren wir sie über $\mathscr{F}$ unter Verwendung der Stokesschen Formel und zum Schluß subtrahieren wir von der ersten so gewonnenen Relation die zweite; wir erhalten

$$(6,4) \qquad \int_{\mathscr{F}} 2\varrho^s \Delta_1^r(\varrho)\, d\varrho_1 \wedge d\varrho_2 = \int_{\partial\mathscr{F}} \varrho^s \Delta_1^r(\varrho)\, (\varrho_1\, d\varrho_2 - \varrho_2\, d\varrho_1) +$$

$$+ \int_{\mathscr{F}} (\Delta_1^r(\varrho)\, d\varrho^s + \varrho^s\, d\Delta_1^r(\varrho)) \wedge (\varrho_2\, d\varrho_1 - \varrho_1\, d\varrho_2)\,.$$

Aber nach (2,2) ist $d\Delta_1^r(\varrho) \wedge (\varrho_2\, d\varrho_1 - \varrho_1\, d\varrho_2) = -2r\, \Delta_1^r(\varrho)\, d\varrho_1 \wedge d\varrho_2$. Setzen wir das in (6,4) ein, so sehen wir sofort, daß die Summe der zwei Flächenintegrale in der dritten Zeile in (6,3) dem Kurvenintegral in (6,4) gleich ist. Damit ist freilich (6,1) bewiesen.

b) *Für alle ganzen nichtnegativen s und r gilt die verallgemeinerte Greensche Formel*

$$(6,5) \qquad \int_{\mathscr{F}} \varrho^s \Delta_1^r(\varrho)\, \Delta_2(\varrho)\, d\mathscr{F} = \int_{\partial\mathscr{F}} \varrho^s \Delta_1^r(\varrho)\, (\varrho_1\omega_2 - \varrho_2\omega_1) -$$

$$- \int_{\mathscr{F}} s\varrho^{s-1} \Delta_1^{r+1}(\varrho)\, d\mathscr{F} - \int_{\mathscr{F}} r\varrho^s \Delta_1^{r-1}(\varrho)\, \Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho)\, d\mathscr{F}\,.$$

In der Tat, die Berechnung des äußeren Differentials von $\varrho^s \Delta_1^r(\varrho)\, (\varrho_1\omega_2 - \varrho_2\omega_1)$, die Benutzung von (2,2)–(2,4) und die über $\mathscr{F}$ erstreckte Integration dieses Differentials nach der Stokesschen Formel liefert (6,5); für $r = 0$ fällt hierin das letzte Integral rechts weg.

Den Integranden in den Kurvenintegralen in (6,1) und (6,5) geben wir einen geometrischen Sinn. Für den Tangentenvektor $\boldsymbol{\tau} = \varrho_1 \mathbf{t}_2 - \varrho_2 \mathbf{t}_1$ der Niveaukurven des durch $\varrho(B)$ auf $\mathscr{F}$ definierten Skalarfeldes gilt offensichtlich $[\mathbf{grad}\,\varrho, \boldsymbol{\tau}] = \Delta_1(\varrho)\,.$ $.\,[\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2]$ und weiter ergibt sich aus (1,1) und (1,2), daß

$$\varrho_1\omega_2 - \varrho_2\omega_1 = \boldsymbol{\tau}\,.\,\mathrm{d}\mathbf{x}\,, \tag{6,6}$$

$$\varrho_1\,\mathrm{d}\varrho_2 - \varrho_2\,\mathrm{d}\varrho_1 + \Delta_1(\varrho)\,\omega_{12} = \boldsymbol{\tau}\,.\,\mathrm{d}\,\mathbf{grad}\,\varrho\,. \tag{6,7}$$

7. In den Abschn. 7 und 8 bescheiden wir uns mit dem einfachsten Fall des vierdimensionalen Raumes.

Wir kehren zu den Formeln (4*) und (5*) zurück, um sie auf eine andere Form zu bringen. Wir beginnen mit (5*).

Auf die dritte Zeile der Formel (5*) (für $n = 4$) wenden wir (6,1) für $s = 3$, $r = 0$ an; in Hinsicht auf (6,7) und auf die Bezeichnung (7) erhalten wir

$$\begin{aligned} 4W_1 = \pi \int_{\partial\mathscr{F}} \varrho^3\boldsymbol{\tau}\,.\,\mathrm{d}\,\mathbf{grad}\,\varrho + \pi \int_{\mathscr{F}} \{2\varrho[1 - \Delta_1(\varrho)] - \\ - \varrho^2[2\Delta_2(\varrho) + \Delta_1(\varrho)\,\Delta_2(\varrho) - \tfrac{1}{2}\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho)] + \varrho^3 K\}\,\mathrm{d}\mathscr{F}\,. \end{aligned} \tag{7,1}$$

Weiter machen wir Gebrauch von (6,5), und zwar erstens für $s = 2$, $r = 0$ und zweitens für $s = 2$, $r = 1$, und wir setzen für die zwei ersten Glieder der zweiten Zeile von (7,1) ein; wir erhalten dann aus (7,1) mit Rücksicht auf (6,6) die zweite Formel (8).

Der im Abschn. 5 erwähnte Übergang zur Pallelfläche von $\mathscr{S}$ liefert mit der Bezeichnung (7) aus der zweiten Formel (8) die dritte bis fünfte Integraldarstellung (8) für W_2, W_3, W_4.

Behufs der Umformung von (4*) (für $n = 4$) schreiben wir den in dritter Zeile von (4*) stehenden Teil des Integrands in der Form

$$\tfrac{1}{2}\varrho^4[2\nabla_2(\varrho) - \Delta_1(\varrho)\,K] - \tfrac{1}{4}\varrho^4\,\Delta_1(\varrho)\,[4\Delta_2(\varrho) - \Delta_1(\varrho)K] + \tfrac{1}{4}\varrho^4 K$$

und dann benutzen wir wieder (6,1), und zwar zum erstenmal für $s = 4$, $r = 0$ und zum zweitenmal für $s = 4$, $r = 1$; wir bekommen

$$\begin{aligned} V = \tfrac{1}{4}\pi \int_{\partial\mathscr{F}} \varrho^4(2 - \Delta_1(\varrho))\,\boldsymbol{\tau}\,.\,\mathrm{d}\,\mathbf{grad}\,\varrho + \\ + \pi \int_{\mathscr{F}} [\varrho^2\{1 - \Delta_1(\varrho)\}^2 + \varrho^3\{\tfrac{1}{2}\Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho) - \Delta_2(\varrho)\} + \tfrac{1}{4}\varrho^4 K]\,\mathrm{d}\mathscr{F}\,. \end{aligned} \tag{7,2}$$

Nun genügt es (6,5) für $s = 3$, $r = 0$ anzuwenden und in (7,2) einzusetzen und man erhält sofort die Integraldarstellung (8) für das Volumen $V = W_0$.

Wenn man in dem Flächenintegral in der Formel (8) für W_0 statt ϱ formal $\varrho + v$ schreibt, so entsteht ein Polynom in v und sein durch $(4/i)$ dividierter Koeffizient von v^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ist das Flächenintegral in der Formel (8) für W_i, freilich einschließlich des numerischen Faktors. Unter der Bedingung (5,7) gilt dasselbe auch für die Kurvenintegrale in (8), wie leicht zu verifizieren ist. Dies bestätigt die uns schon vom Abschn. 5 bekannte Tatsache, daß – falls (5,7) gültig ist – die Integraldarstellungen (8) für W_1, W_2, W_3 und W_4 aus der Formel (8) für W_0 mittels der wohlbekannten Steinerschen Formel für das Volumen des Parallelkörpers hergeleitet werden können.

8. Aus (8) ergibt sich, daß die linke Seite von (11) der Summe dieser Integrale gleich ist:

$$\begin{aligned} (8,1) \qquad & \tfrac{1}{2}\pi \int_{\mathscr{F}} (\varrho - y) \{1 + \Delta_1(\varrho) + \Delta_1^2(\varrho)\} \, \mathrm{d}\mathscr{F} + \\ & + \tfrac{3}{8}\pi \int_{\mathscr{F}} (\varrho - y)^2 \Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho) \, \mathrm{d}\mathscr{F} + \tfrac{1}{4}\pi \int_{\mathscr{F}} (\varrho - y)^3 K \, \mathrm{d}\mathscr{F} + \\ & + \tfrac{1}{4}\pi \int_{\partial\mathscr{F}} (\varrho - y)^3 \boldsymbol{\tau} \,.\, \mathrm{d}\, \mathbf{grad}\, \varrho - \tfrac{1}{4}\pi \int_{\partial\mathscr{F}} (\varrho - y)^2 \{2 + \Delta_1(\varrho)\} \boldsymbol{\tau} \,.\, \mathrm{d}\mathbf{x} \,. \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen (9) und (10) ist (8,1) für $y \leqq \min\limits_{B \in \mathscr{F}} \varrho(B)$ immer nichtnegativ, womit die Ungleichung (11) bewiesen ist. Weil der zweite Faktor des Integrands des ersten Integrals von (8,1) durchwegs positiv ist, so verschwindet (8,1) – oder die linke Seite von (11) – dann und nur dann, wenn $y = \varrho(B) =$ konst. für alle $B \in \mathscr{F}$ ist.

Gemäß (8) geht unter der Voraussetzung (12) die linke Seite von (13) in diese Summe über:

$$\begin{aligned} (8,2) \qquad & \pi \int_{\mathscr{F}} (\varrho - y)^2 \{1 + \Delta_1(\varrho) + \Delta_1^2(\varrho)\} \, \mathrm{d}\mathscr{F} + \\ & + \tfrac{1}{2}\pi \int_{\mathscr{F}} (\varrho - y)^3 \Delta_1(\Delta_1(\varrho), \varrho) \, \mathrm{d}\mathscr{F} + \tfrac{1}{4}\pi \int_{\mathscr{F}} (\varrho - y)^4 K \, \mathrm{d}\mathscr{F} + \\ & + \tfrac{1}{4}\pi \int_{\partial\mathscr{F}} (\varrho - y)^4 \boldsymbol{\tau} \,.\, \mathrm{d}\, \mathbf{grad}\, \varrho - \pi \int_{\partial\mathscr{F}} (\varrho - y)^3 \boldsymbol{\tau} \,.\, \mathrm{d}\mathbf{x} \,; \end{aligned}$$

wenn der die Ungleichung (13) betreffende Fall b) eintritt, so verschwinden freilich beide Kurvenintegrale in (8,2). Daraus kann man schon alle Behauptungen betreffs der Ungleichung (13) leicht folgern.

Literatur

[1] *F. Borel:* Sur certaines propriétés invariantes par déformation des congruences de droites, de cercles ou de sphères. Ann. sci. École norm. sup., 3e Sér. *78* (1961), 305—412.

[2] *L. P. Eisenhart:* A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. New York 1960.

[3] *O. Borůvka:* Sur les hypersurconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Spisy přírodov. fak. Masarykovy university v Brně, *146* (1931), 1—40.

[4] *J. Favard:* Cours de géométrie différentielle local. Paris 1957. (Курс локальной дифференциальной геометрии. Москва 1960.)

[5] *Z. Nádeník:* Příspěvek k vlastnostem obálek kulových nadploch. Sborník prací fakulty inženýrského stavitelství ČVUT v Praze, 1961, 79—85.

[6] *Z. Nádeník:* Die Ungleichungen für die Maßzahlen der geschlossenen Kanalflächen. Czech. Math. J. *16* (*91*) (1966), 296—306.

[7] *Z. Nádeník:* Die Ungleichungen für die Maßzahlen der Kanalkörper. Czech. Math. J. *17* (*92*) (1967), 408—419.

Anschrift des Verfassers: Praha 2 - Nové Město, Trojanova 13, ČSSR (České vysoké učení technické).