Zbyněk Nádeník

Sur les courbes fermées dont l'indicatrice sphérique des dernières normales est centrée

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 3, 447–459

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100789

Czechoslovak Mathematical Journal, 17 (92) 1967, Praha

SUR LES COURBES FERMÉES DONT L'INDICATRICE SPHÉRIQUE DES DERNIÈRES NORMALES EST CENTRÉE

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Reçu le 5 juillet 1966)

Les pages suivantes sont la suite naturelle de [5]. Nous retenons toutes les suppositions et désignations de l'introduction en [5] (voir p. 363–365) et récapitulons ici seulement les choses les plus essentielles.

Étant donnée, dans un espace euclidien à $2n$ dimensions $(n > 1)$ avec l'origine choisie O, une courbe C réelle fermée, dont le paramétrage $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\beta)$ est de la classe $2n$ et dont les rapports de $2n - 1$ courbures supposées positives sont constants, nous avons désigné par $\mathbf{n}(\beta)$ – le vecteur unitaire de la dernière normale de C, par Γ – l'indicatrice sphérique des vecteurs – $\mathbf{n}(\beta)$, et par b – la longueur de Γ; en outre, nous avons tenu β pour l'arc de Γ.

L'indicatrice Γ est une hypercirconférence. Alors, dans un système de coordonnées rectangulaires convenablement choisi, ses équations peuvent s'écrire comme suit:

$$x_{2i-1} = r_i \sin l_i\beta\,, \quad x_{2i} = r_i \cos l_i\beta \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,; \tag{1}$$

les constantes r_i, l_i sont assujéties aux conditions

$$r_i > 0\,, \quad l_i > 0\,, \quad l_i \neq l_j \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{2}$$
$$\sum_1^n r_i^2 = 1\,, \quad \sum_1^n r_i^2 l_i^2 = 1$$

et le nombre naturel

$$\lambda_i = \frac{b}{2\pi}\, l_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

désigne la multiplicité, sous laquelle l'hypercirconférence Γ se projette dans le plan axial des axes des coordonnées x_{2i-1}, x_{2i} suivant une circonférence. Nous avons encore noté par σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ la $i^{\text{ième}}$ fonction symétrique des nombres $l_1^2, \ldots, l_n^2$ (conventionnellement $\sigma_0 = 1$) et par $V(l_1^2, l_2^2, \ldots, l_n^2)$ le déterminant de Vandermonde, dont la deuxième ligne est $l_1^2, l_2^2, \ldots, l_n^2$.

A l'aide de la fonction d'appui

$$h(\beta) = -\mathbf{x}(\beta) \cdot \mathbf{n}(\beta) \tag{4}$$

de la courbe C, nous avons exprimé le rayon $P(\beta)$ de la dernière courbure de C par la formule suivante (voir (6) et (7) dans [5]; les accents désignent les dérivées par rapport à β et $[.]^{(0)} = [.]$),

$$P(\beta) = \Lambda \sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} h^{(2v)}(\beta)\,, \tag{5}$$

où Λ est la constante

$$\Lambda = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i^2 l_i^2 \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (l_j^2 - l_i^2)^2}\right]^{1/2}. \tag{6}$$

La longueur de la courbe C est (voir (8) dans [5])

$$L = \sigma_n \Lambda \int_0^b h(\beta)\, \mathrm{d}\beta \tag{7}$$

et aussi l'intégrale

$$F = \frac{1}{2}\int_0^b h(\beta)\, P(\beta)\, \mathrm{d}\beta \tag{8}$$

ne dépend pas du choix de l'origine O (voir (12) dans [5]).

Ainsi, nous terminons la récapitulation et nous allons énoncer les résultats, dont les démonstrations sont contenues aux n^{os} 1 – 10.

Lemme 1 (voir le n° 1): *Soit $P(\beta)$ une fonction donnée, continue et définie sur l'indicatrice Γ. La condition nécessaire et suffisante, pour que l'équation différentielle linéaire* (5), *avec une fonction inconnue $h(\beta)$, ait la solution périodique et de période b, est*

$$\int_0^b P(\beta) \sin l_i\beta\, \mathrm{d}\beta = 0\,, \quad \int_0^b P(\beta) \cos l_i\beta\, \mathrm{d}\beta = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{9}$$

La solution recherchée soumise aux conditions initiales

$$h(0) = h'(0) = \ldots = h^{(2n-1)}(0) = 0 \tag{10}$$

est alors

$$h(\beta) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Lambda\,.\, l_1 l_2 \ldots l_n\,.\, V(l_1^2, l_2^2, \ldots, l_n^2)} \int_0^\beta P(\gamma)\, D(\beta, \gamma)\, \mathrm{d}\gamma\,, \tag{11}$$

où

$$D(\beta, \gamma) = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_n \\ l_1^3 & l_2^3 & \ldots & l_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1^{2n-3} & l_2^{2n-3} & \ldots & l_n^{2n-3} \\ \sin l_1(\beta - \gamma) & \sin l_2(\beta - \gamma) & \ldots & \sin l_n(\beta - \gamma) \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Dans ce qui suit nous ne considérons que le cas

$$\lambda_i = 2i - 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Lemme 2 (voir le n° 2): *Puis on peut écrire la solution* (11) *sous la forme*

$$h(\beta) = \frac{1}{(2n-1)!} \cdot \frac{1}{\Lambda} \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^{2n-1} \cdot \int_0^\beta P(\gamma) \left[\sin \frac{2\pi}{b} (\beta - \gamma)\right]^{2n-1} \mathrm{d}\gamma. \tag{14}$$

Vu le choix (13), l'indicatrice Γ est centrée:

$$\boldsymbol{n}(\tfrac{1}{2}b + \beta) = -\boldsymbol{n}(\beta). \tag{15}$$

Cela signifie que les points[1] $\boldsymbol{x}(\beta)$ et $\boldsymbol{x}(\frac{1}{2}b + \beta)$ de la courbe C – que nous nommerons *points opposés de C* – ont les hyperplans osculateurs[2] parallèles. Nous convenons d'appeler *largeur de C en direction du vecteur* $\boldsymbol{n}(\beta)$ – ou, plus brièvement, en direction β – la distance entre ces deux hyperplans.[3]

Théorème 1 (voir le n° 3): a) *Si l'origine O est un point* $\boldsymbol{x}(\beta)$ *de la courbe C, la fonction d'appui* (4) *est – jusqu'au paramètre* β *du point* $O \in C$ *– toujours positive.*

b) $\boldsymbol{x}(\beta)$ *étant un point arbitraire de C, toute la courbe C s'étend – au point* $\boldsymbol{x}(\beta)$ *près – dans le demi-espace ouvert* $E(\beta)$, *déterminé par l'hyperplan osculateur au point* $\boldsymbol{x}(\beta)$, *vers lequel est dirigé le vecteur* $\boldsymbol{n}(\beta)$.

c) *La largeur* $B(\beta)$ *de C dans toute direction* β *est positive*:

$$B(\beta) = h(\beta) + h(\tfrac{1}{2}b + \beta) > 0. \tag{16}$$

d) *La courbe C se trouve sur le corps convexe borné*

$$K(C) = \bigcap\{E(\beta); \beta \in \langle 0, b)\}. \tag{17}$$

Chaque point intérieur de $K(C)$ *– et seulement en tel point – pris pour l'origine O conduit à une fonction d'appui de C partout positive.*

C'était surtout P. VINCENSINI qui a effectué, dans une série de travaux, des applications magnifiques, concernant la notion du domaine vectoriel d'un corps convexe (voir, particulièrement, [8]), laquelle a été introduite par H. RADEMACHER en 1925. Ici, nous modifierons cette notion pour notre courbe C.

Nous convenons d'appeler *la courbe vectorielle de la courbe C* la courbe $\mathscr{C}$ avec

---

[1]) Il est superflu de distinguer ici entre le point et son rayon vecteur.

[2]) Sous ce nom, nous comprenons une variété plane à $2n - 1$ dimensions laquelle a, avec la courbe, un contact d'ordre $2n - 1$, au moins.

[3]) Toutes les deux dernières dénominations ont lieu dès que les nombres (3) sont impairs.

le paramétrage

$$\mathbf{y}(\beta) = \mathbf{x}(\beta) - \mathbf{x}(\tfrac{1}{2}b + \beta)\,. \tag{18}$$

Les propriétés élémentaires de la courbe vectorielle $\mathscr{C}$ sont contenues dans ce

Théorème 2 (voir le n° 4): a) *$\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine O et l'indicatrice sphérique des vecteurs unitaires de la dernière normale de $\mathscr{C}$ est Γ, c'est-à-dire celle de C.*

b) *La fonction d'appui $\mathfrak{h}(\beta)$ de $\mathscr{C}$ est*

$$\mathfrak{h}(\beta) = h(\beta) + h(\tfrac{1}{2}b + \beta)\,. \tag{19}$$

c) *La longueur L de C est la moitié de la longueur $\mathscr{L}$ de $\mathscr{C}$:*

$$\mathscr{L} = 2L \tag{20}$$

d) *Le rayon $\mathscr{R}$ de la dernière courbure de $\mathscr{C}$ au point* (18) *a pour expression*

$$\mathscr{R}(\beta) = P(\beta) + P(\tfrac{1}{2}b + \beta)\,. \tag{21}$$

Nous laissons les dénominations *épaisseur* (largeur minima) et *diamètre* (largeur maxima) de la courbe C pour les quantités

$$d = \min_{\beta\in\langle 0,b)} B(\beta)\,, \quad D = \max_{\beta\in\langle 0,b)} B(\beta) \tag{22}$$

et nous posons encore

$$m = \min_{\beta\in\langle 0,b)} P(\beta)\,, \quad M = \max_{\beta\in\langle 0,b)} P(\beta) \tag{23}$$

et

$$s = \min_{\beta\in\langle 0,b)} \left[P(\beta) + P(\tfrac{1}{2}b + \beta)\right], \quad S = \max_{\beta\in\langle 0,b)} \left[P(\beta) + P(\tfrac{1}{2}b + \beta)\right]. \tag{24}$$

A notre courbe C, nous pouvons étendre quelques théorèmes de la théorie des ovales plans se rapportant à leur courbure. Considérons, hors de la courbe C, encore une autre courbe C^* qui possède les mêmes propriétés comme la courbe C; indiquons, particulièrement, que l'indicatrice sphérique des vecteurs unitaires de la dernière normale de C^* est donc constamment Γ. Nous réservons pour la courbe C^* la même désignation que pour la courbe C, mais avec l'adjonction d'un astérisque; alors $\mathbf{n}^*(\beta) = \mathbf{n}(\beta)$.

Nous commençons par une analogie d'un théorème bien connu de W. Blaschke (voir [2], p. 114–116):

Théorème 3 (voir le n° 5): *Si les courbes C et C^* ont un point commun, qui a pour les deux la même valeur de β — nous lui ajoutons le paramètre $\beta = 0$* [4]) *— et si*

$$P^*(\beta) > P(\beta) \quad \textit{pour} \quad \beta \in (0, b)\,, \tag{25}$$

[4]) C'est-à-dire, les courbes C et C^* ont, au point en question, le repère de Frenet commun.

il y a

$$h^*(\beta) > h(\beta) \quad pour \quad \beta \in (0, b)\,. \tag{26}$$

Les deux théorèmes suivants ne sont que les conséquences faciles du théorème 3 (voir le n° 5):

Théorème 4. *Sous les suppositions du théorème* 3, *on a*

$$L^* > L\,, \quad F^* > F\,, \quad K(C^*) \supset K(C)\,. \tag{27}$$

Théorème 5. *Si C^* est une hypercirconférence dont le rayon constant P^* de la dernière courbure satisfait à l'inégalité $P^* \geqq M$ [ou $P^* \leqq m$; voir* (23)], *on a, de nouveau, les inégalités* (27) [*ou celles aux signes inverses*] *et, partant de la première supposition du théorème* 3, *on a aussi l'inclusion* (27) [*ou celle au signe contraire*].

Aussi le théorème de B. Segre, concernant la différence des rayons de la courbure des deux arcs convexes plans (voir [6] et [8], le n° 26), est susceptible d'une extension sur nos courbes gauches:

Théorème 6 (voir le n° 6): *Supposons que les courbes C et C^* aient, pour la même valeur donnée de β, un point commun — nous le munissons du paramètre $\beta = 0$* [5] — *et, pour un $\bar{\beta} \in (0, \frac{1}{2}b\rangle$, encore un hyperplan osculateur commun. Alors, dans l'intervalle $(0, \bar{\beta})$, la différence des rayons de la dernière courbure des courbes C et C^* change de signe ou est nulle; ce deuxième cas n'a lieu que si les arcs*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\beta)\,, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\beta)\,, \quad \beta \in \langle 0, \bar{\beta}\rangle \tag{28}$$

des courbes C et C^* sont identiques.

En employant la notion de la courbe vectorielle d'une courbe donnée, nous démontrerons, par un procédé analogue à celui qui est — pour $n = 1$ — dû à P. Vincensini (voir [6], le n° 27), aux n^os^ 8–10 les théorèmes suivants, dont les cas plans ont été indiqués par B. Segre [6], [7]; nous nous servirons aussi des désignations (22)–(24):

Théorème 7. *On a, pour toute courbe C,*

$$m \leqq \tfrac{1}{2}Hd \leqq \tfrac{1}{2}HD \leqq M\,, \tag{29}$$

où, vu les relations (3) *et* (13),

$$H = l_1^2 \ldots l_n^2 \,.\, \Lambda = \left[2n \binom{2n-1}{n} \left(\frac{\pi}{b}\right)^n\right]^2 .\, \Lambda\,, \tag{30}$$

Λ étant donné dans (6). *Le signe d'égalité à gauche ou à droite dans* (29) *n'a lieu que pour une hypercirconférence.*

[5]) Voir la remarque au théorème 3.

Théorème 8. *Si la courbe C n'est pas de largeur constante, on a*

$$s < Hd < \frac{2}{b} L < HD < S \,. \tag{31}$$

Pour un ovale plan, il y a $n = 1$ et $r_1 = l_1 = 1$, $b = 2\pi$. Donc, d'après (30) et (6), $H = 1$; alors, (29) et (31) ne sont que les inégalités en question de B. Segre.

Enfin, le dernier théorème formule les propriétés extrémales de l'hypercirconférence:

Théorème 9. *Parmi toutes les courbes C ayant un rayon de la dernière courbure minimum (maximum) donné, c'est l'hypercirconférence qui a la longueur minimum (maximum).*

Les alinéas numérotés suivants contiennent les démonstrations des lemmes et des théorèmes précédents.

1. Le système fondamental de l'équation différentielle linéaire homogène

$$\sum_{v=0}^{n} \sigma_{n-v} h^{(2v)}(\beta) = 0 \tag{1,1}$$

étant

$$\sin l_1\beta,\ \cos l_1\beta,\ \sin l_2\beta,\ \cos l_2\beta, \ldots, \sin l_n\beta,\ \cos l_n\beta \,, \tag{1,2}$$

le déterminant $D(\beta, \gamma)$ dans (12) est une solution de (1,1) qui dépend d'un paramètre arbitraire γ. De plus, un calcul facile montre que

$$D(\gamma, \gamma) = 0 \,, \quad \left.\frac{\partial D}{\partial \beta}\right|_{\beta=\gamma} = 0, \ldots, \left.\frac{\partial^{2n-2} D}{\partial \beta^{2n-2}}\right|_{\beta=\gamma} = 0 \,,$$

$$\left.\frac{\partial^{2n-1} D}{\partial \beta^{2n-1}}\right|_{\beta=\gamma} = (-1)^{n-1} \,.\, l_1 l_2 \ldots l_n \,.\, V(l_1^2, l_2^2, \ldots, l_n^2) \neq 0 \,.$$

Par conséquent, d'après la formule de Cauchy pour l'équation non homogène, la solution particulière de l'équation différentielle linéaire (5) — la solution soumise aux conditions initiales (10) — est précisément de la forme (11).

En premier lieu, on voit tout de suite que la solution générale de (5) est périodique et de période b si, et seulement si, la solution particulière (11) témoigne de la même propriété. En second lieu, à l'égard de (10), la condition nécessaire et suffisante, pour que la solution particulière (11) soit périodique et de période b, est évidemment (cf. [1], p. 24)

$$h(b) = h'(b) = \ldots = h^{(2n-1)}(b) = 0 \,.$$

Désignons — pour un instant — par Λ_i le déterminant qui se forme de la matrice

$$(1,3) \qquad \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \dots & l_n \\ l_1^3 & l_2^3 & \dots & l_n^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1^{2n-3} & l_2^{2n-3} & \dots & l_n^{2n-3} \end{pmatrix}$$

par l'ommission de la $i^{\text{ième}}$ colonne. Un calcul simple fondé sur (11) et (12) montre, à l'égard de (3), que

$$(1,4) \qquad h^{(2j)}(b) = 0 \Leftrightarrow \int_0^b P(\gamma) \cdot \begin{vmatrix} l_1 & \dots & l_n \\ \vdots & & \vdots \\ l_1^{2n-3} & \dots & l_n^{2n-3} \\ l_1^{2j} \sin l_1\gamma & \dots & l_n^{2j} \sin l_n\gamma \end{vmatrix} \mathrm{d}\gamma = 0\,,$$

$$h^{(2j+1)}(b) = 0 \Leftrightarrow \int_0^b P(\gamma) \cdot \begin{vmatrix} l_1 & \dots & l_n \\ \vdots & & \vdots \\ l_1^{2n-3} & \dots & l_n^{2n-3} \\ l_1^{2j+1} \cos l_1\gamma & \dots & l_n^{2j+1} \cos l_n\gamma \end{vmatrix} \mathrm{d}\gamma = 0\,,$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1\,.$$

Les côtés droits dans (1,4) ne sont que les systèmes

$$(1,5) \qquad \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Lambda_i l_i^{2j} \,.\, \int_0^b P(\gamma) \sin l_i\gamma \,\mathrm{d}\gamma = 0\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Lambda_i l_i^{2j+1} \,.\, \int_0^b P(\gamma) \cos l_i\gamma \,\mathrm{d}\gamma = 0\,,$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1\,.$$

En tenant ici les intégrales pour des inconnues, nous voyons tout de suite, conformément à (3), que tous les deux déterminants des systèmes (1,5) ne sont pas nuls; donc, on obtient (9).

2. Pour démontrer le lemme 2, nous rappelons d'abord la formule (voir [4], p. 206, la dernière relation pour $2n - 1$ au lieu de n)

$$(2,1) \qquad \sin^{2n-1} \alpha = (-1)^{n-1} \,.\, 2^{2-2n} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \binom{2n-1}{n-i} \sin (2i-1)\,\alpha\,.$$

Le déterminant Λ_i d'ordre $n - 1$ de la matrice (1,3) est le déterminant de Vandermonde $V(l_1^2, \dots, l_{i-1}^2, l_{i+1}^2, \dots, l_n^2)$ multiplié par $(\prod_{j=1}^{n} l_j) : l_i$; par conséquent, d'après (2) évidemment $\Lambda_n \neq 0$. Donc, en utilisant les propriétés bien connues du déterminant de Vandermonde, nous obtenons par un calcule facile que (nous posons $\prod_{m=a}^{b} f(m) = 1$

si $a > b$)

$$(2,2)\qquad \frac{A_i}{A_n} = \frac{l_n \prod\limits_{p=1}^{i-1}(l_n^2 - l_p^2) \prod\limits_{q=i+1}^{n-1} (l_n^2 - l_q^2)}{l_i \prod\limits_{p=1}^{i-1}(l_i^2 - l_p^2) \prod\limits_{q=i+1}^{n-1} (l_q^2 - l_i^2)} \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Dès ce moment, nous considérons exclusivement le cas (13), c'est-à-dire, d'après (3), celui dans lequel

$$(2,3)\qquad l_i = \frac{2\pi}{b}(2i - 1) \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

De (2,2) et (2,3) il s'ensuit que, par certaines simplifications, nous pouvons écrire

$$(2,4)\qquad A_i = \binom{2n-1}{n-i} A_n \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Mais, les A_i étant les déterminants d'ordre $n - 1$ de la matrice (1,3) formée de la première jusqu'à la $(n - 1)^{\text{ième}}$ ligne du déterminant $D(\beta, \gamma)$ dans (12), il résulte de (2,1), (2,3), (2,4) et (12) que

$$(2,5)\qquad \left[\sin \frac{2\pi}{b}(\beta - \gamma)\right]^{2n-1} = (-1)^{n-1} \,.\, 2^{2-2n} \,.\, A_n^{-1} \,.\, D(\beta, \gamma)\,.$$

Donc, conformément à $A_n = l_1 \ldots l_{n-1} \,.\, V(l_1^2, \ldots, l_{n-1}^2)$ et d'après (11) et (2,5),

$$(2,6)\qquad h(\beta) = \frac{2^{2n-2} \,.\, V(l_1^2, \ldots, l_{n-1}^2)}{A \,.\, l_n \,.\, V(l_1^2, \ldots, l_n^2)} \int_0^\beta P(\gamma) \left[\sin \frac{2\pi}{b}(\beta - \gamma)\right]^{2n-1} d\gamma\,.$$

Cependant, dans le cas (2,3) en question, il y a

$$(2,7)\qquad V(l_1^2, \ldots, l_n^2) : V(l_1^2, \ldots, l_{n-1}^2) = \prod_{i=1}^{n-1} (l_n^2 - l_i^2) = \left(\frac{2\pi}{b}\right)^{2n-2} \,.\, 2^{2n-2} \,.\, (2n - 2)!$$

Finalement, on déduit de (2,6), (2,7) et (2,3) la forme définitive (14) de notre solution.

3. Nous allons démontrer le théorème 1.

a) Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que l'origine O choisie sur la courbe C possède le paramètre $\beta = 0$. Pour $\beta \in (0, \frac{1}{2}b)$ et $\gamma \in \langle 0, \beta)$, on a $\sin 2\pi(\beta - \gamma)/b > 0$; donc, d'après (14), assurément $h(\beta) > 0$ pour $\beta \in (0, \frac{1}{2}b\rangle$. Pareillement, pour $\beta \in (-\frac{1}{2}b, 0)$ et $\gamma \in (\beta, 0\rangle$, il y a $\sin 2\pi(\beta - \gamma)/b < 0$; par conséquent, selon (14), aussi $h(\beta) > 0$ pour $\beta \in \langle -\frac{1}{2}b, 0)$.

b) Supposons au contraire que l'hyperplan osculateur de la courbe C au point $P \in C$ coupe celle-ci encore dans un autre point. En le prenant pour l'origine O et en désignant, dans cette situation, par $\beta \neq 0$ le paramètre du point P, nous obtenons, d'après (3), que $h(\beta) = 0$ ce qui est en contradiction avec la partie a). Il en résulte déjà la justesse de la partie b), à condition que nous nous servions encore du fait bien connu de la géométrie différentielle locale, que la courbe, possédant au point Q toutes les courbures positives, s'étand, dans un certain voisinage de Q, exclusivement du côté de l'hyperplan osculateur en Q, vers lequel côté est dirigé le vecteur de la dernière normale de la courbe considérée.

c) Cette partie est une conséquence facile de b) et de (4) et (15).

d) Ici, il y a seulement une assertion qui n'est pas encore évidente; c'est-à-dire celle que le corps (17) est borné. Si ce corps contenait une demi-droite, il existerait un tel vecteur constant $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ que $\boldsymbol{v} \, . \, \boldsymbol{n}(\beta) = 0$ pour tout β; mais, d'après (1), il est impossible de satisfaire identiquement la relation $\boldsymbol{v} \, . \, \boldsymbol{n}(\beta) = 0$.

4. Voici la démonstration du théorème 2:

a) La symétrie de la courbe vectorielle $\mathscr{C}$ avec le paramétrage (18) est évidente. Parce que $\boldsymbol{x}^{(m)}(\beta) \, . \, \boldsymbol{n}(\beta) = 0$, $\boldsymbol{x}^{(m)}(\frac{1}{2}b + \beta) \, . \, \boldsymbol{n}(\frac{1}{2}b + \beta) = 0$ pour $m = 1, \ldots, 2n - 1$, on vérifie – en tenant compte de (15) et (18) – sans difficulté que l'hyperplan $[\boldsymbol{z} - \boldsymbol{y}(\beta)] \, . \, \boldsymbol{n}(\beta) = 0$ passant par le point $\boldsymbol{y}(\beta)$ de $\mathscr{C}$ a avec la courbe $\mathscr{C}$ à ce point le contact d'ordre $2n - 1$ ce qui démontre l'assertion a).

b) D'après a) la fonction d'appui de $\mathscr{C}$ est $\mathfrak{h}(\beta) = -\boldsymbol{y}(\beta) \, . \, \boldsymbol{n}(\beta)$; il en résulte, selon (18), (15) et (4), la relation (19).

c), d) Les formules (20) et (21) ne sont que les conséquences immédiates de (5)–(7) et (19).

5. Le théorème 3 découle du lemme 2. En prenant le point commun des courbes C et C^* en question pour l'origine, nous avons $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}^*(0) = \boldsymbol{0}$ et parce que, d'après les formules de Frenet, $\boldsymbol{x}'(\beta) \, . \, \boldsymbol{n}^{(m)}(\beta) = 0$ et $\boldsymbol{x}^{*\prime}(\beta) \, . \, \boldsymbol{n}^{(m)}(\beta) = 0$ ($m = 0, 1, \ldots, 2n - 2$; voir aussi [5], le commencement du n° 1), la dérivation successive de (4) nous conduit aux conditions (10) et à celles pour la fonction d'appui $h^*(\beta)$ de la courbe C^*. Si nous appliquons maintenant le lemme 2 aux courbes C et C^*, nous obtenons, d'après (14), que

$$(5,1) \qquad h^*(\beta) - h(\beta) = \frac{1}{(2n-1)!} \cdot \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^{2n-1} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\beta [P^*(\gamma) - P(\gamma)] \cdot \left[\sin \frac{2\pi}{b}(\beta - \gamma)\right]^{2n-1} \mathrm{d}\gamma$$

et en utilisant le raisonnement du n° 3a), nous voyons aussitôt que l'inégalité (25) a pour conséquence l'inégalité (26).

Pour déduire les inégalités (27), il suffit de joindre le théorème 3 aux formules (7) et (8) pour la courbe C et à celles pour la courbe C^*. En employant la désignation introduite dans la partie b) du théorème 1, nous obtenons, d'après le théorème 3, tout de suite que $E^*(\beta) \supset E(\beta)$; il en découle, selon (17), l'inclusion (27).

Le théorème 4 étant ainsi démontré, le théorème 5 n'est que son corollaire.

6. Aussi le théorème 6 est fondé sur le lemme 2. Les parties initiales des suppositions des théorèmes 6 et 3 étant les mêmes, on a de nouveau (5,1) et l'hyperplan osculateur, commun aux points $\mathbf{x}(\bar{\beta})$ et $\mathbf{x}^*(\bar{\beta})$ des courbes C et C^*, veut dire que $h^*(\bar{\beta}) = h(\bar{\beta})$; il en résulte

$$\int_0^{\bar{\beta}} [P^*(\gamma) - P(\gamma)] \cdot \left[\sin \frac{2\pi}{b} (\bar{\beta} - \gamma)\right]^{2n-1} \mathrm{d}\gamma = 0 .$$

Donc, vu l'inégalité $\sin 2\pi(\bar{\beta} - \gamma)/b > 0$ pour $\gamma \in (0, \bar{\beta}) \subset (0, \frac{1}{2}b)$, la différence $P^*(\beta) - P(\beta)$ est nulle, ou prend des valeurs positives et des valeurs négatives dans l'intervalle $(0, \bar{\beta})$. Finalement, il est clair que $P^*(\beta) = P(\beta)$ pour $\beta \in (0, \bar{\beta})$ si et seulement si les arcs (28) sont identiques.

7. Avant de démontrer les théorèmes 7 et 8, nous allons approfondir un peu l'étude des hypercirconférences en vérifiant leurs propriétés suivantes:

Chaque courbe C, dont la fonction d'appui est constante, est une hypercirconférence. Inversement, si la courbe C est une hypercirconférence, on peut toujours choisir l'origine O de manière que sa fonction d'appui est constante.[6]

La longueur L et le rayon constant P de la dernière courbure d'une hypercirconférence C sont liés par la formule

(7,1) $$L = bP .$$ [7]

Si la courbe C est une hypercirconférence, elle est de largeur constante B qui, à l'aide du rayon constant P de C, s'exprime par la formule

(7,2) $$B = \frac{2}{H} \cdot P ,$$

où H est donné dans (30).

En effet, $h(\beta) =$ const. entraîne, d'après (5), $P(\beta) =$ const. ce qui caractérise une hypercirconférence. Inversement, si $P(\beta) =$ const., il résulte tout de suite de (11) et (12) que la fonction d'appui de C est la somme d'une constante et d'une combinaison

[6]) [7]) Ces affirmations sont vraies aussi dans le cas général, c'est-à-dire sans les suppositions (13).

linéaire des fonctions (1,2) — c'est-à-dire d'une solution de l'équation (1,1) — laquelle combinaison peut être supprimée par un choix convenable de l'origine O (voir [5], le n° 4 et [3], les n$^{\text{os}}$ 1 et 2).

La formule (7,1) découle de la proposition vérifiée et des relations (5) et (7).

Aussi la troisième proposition est facile à démontrer. Le rayon de la dernière courbure $P(\beta) = P$ étant maintenant constant, la largeur de C est, d'après (14) et (16),

$$(7,3) \qquad B(\beta) = -\frac{1}{(2n-1)!} \cdot \frac{P}{\Lambda} \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^{2n-1} \int_{\beta}^{\beta+b/2} \left[\sin \frac{2\pi}{b}(\beta - \gamma)\right]^{2n-1} \mathrm{d}\gamma \, .$$

Mais

$$\int_{\beta}^{\beta+b/2} \left[\sin \frac{2\pi}{b}(\beta - \gamma)\right]^{2n-1} \mathrm{d}\gamma = -\frac{b}{\pi} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdots \frac{2}{3}$$

ce qui conduit, conformément à (7,3) et (30), à la formule (7,2) qui explique la largeur constante de C.

8. Nous nous mettons à la démonstration du théorème 7, au cours de laquelle nous ferons usage des désignations (22) et (23).

Supposons que $\boldsymbol{x}(0)$ soit un tel point de la courbe C que la largeur de C en direction du vecteur $\boldsymbol{n}(0)$ est précisément l'épaisseur d. Construisons l'hypercirconférence C^* avec le paramétrage $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*(\beta)$, laquelle a la largeur d et pour laquelle $\boldsymbol{x}^*(0) = \boldsymbol{x}(0)$; le rayon constant P^* de la dernière courbure de C^* est donc d'après (7,2)

$$(8,1) \qquad P^* = \tfrac{1}{2}Hd \, .$$

Il est clair que, pour $\bar{\beta} = \frac{1}{2}b$, les courbes C et C^* en question satisfont aux suppositions du théorème 6. Il existe donc, sur la courbe C, deux points au moins auxquels le rayon de courbure $P(\beta)$ de C est égal à celui P^* de C^*. Vu la relation (8,1), il en résulte la première inégalité dans (29).

Si cette inégalité se réduit à l'égalité, il résulte de (8,1) que $P^* = m$, c'est-à-dire, selon (23), la différence $P^* - P(\beta)$ ne peut pas prendre des valuers positives et cela signifie, d'après le théorème 6, que les courbes C et C^* sont identiques. Si la courbe C est une hypercirconférence, il résulte tout de suite de la deuxième proposition du n° 7 que, dans la première relation (29), l'égalité est valable.

En prenant en considération, au lieu de l'épaisseur d, le diamètre D nous obtenons, par un procédé analogue, la troisième inégalité dans (29) et aussi l'assertion concernant le signe d'égalité.

9. Dans la démonstration suivante du théorème 8, nous nous servons de la courbe vectorielle $\mathscr{C}$ de la courbe C. D'après (16), (19) et (22), l'épaisseur de la courbe vectorielle $\mathscr{C}$ est $2d$ et, conformément à (21) et (24), le rayon de la denière courbure minimum de la courbe vectorielle $\mathscr{C}$ est s. En appliquant la première inégalité du théorème 7 à la courbe vectorielle $\mathscr{C}$, nous obtenons

$$s < Hd\,. \tag{9,1}$$

L'égalité est impossible. Car, d'après le théorème 7, $s = Hd$ signifie que la courbe vectorielle $\mathscr{C}$ est une hypercirconférence et donc, d'après la première proposition du n° 7, d'après la partie b) du théorème 2 et d'après la partie c) du théorème 1, la courbe C est de largeur constante, ce qui est en contradiction avec notre supposition.

Mais, pour la longueur $\mathscr{L}$ de la courbe vectorielle $\mathscr{C}$, on obtient d'après (7), (19), (16) et (22) (parce que notre courbe C n'est pas de largeur constante)

$$\mathscr{L} = Al_1^2 \ldots l_n^2 \int_0^b \mathfrak{h}(\beta)\, \mathrm{d}\beta = Al_1^2 \ldots l_n^2 \int_0^b B(\beta)\, \mathrm{d}\beta > Al_1^2 \ldots l_n^2 bd\,.$$

Donc, d'après les relations (20) et (2,3), il s'ensuit

$$Hd < \frac{2}{b} L\,. \tag{9,2}$$

Mais (9,1) est la première et (9,2) la deuxième inégalité (31).

La démonstration des autres inégalités (31) est entièrement analogue et nous pouvons omettre leur vérification détaillée.

10. Nous terminons par la démonstration presque immédiate du théorème 9: En tenant compte de la relation (7,1), ce théorème n'est qu'une conséquence des théorèmes 7 et 8 (cf. [8], p. 41).

Bibliographie

[1] *L. Bieberbach:* Differentialgeometrie. Leipzig und Berlin 1932.

[2] *W. Blaschke:* Kreis und Kugel. Leipzig 1916, New York 1949, Berlin 1956.

[3] *L. Boček* und *Z. Nádeník:* Beitrag zur globalen Differentialgeometrie der Kurven im euklidischen Raum. Čas. pro pěst. mat. *90* (1965), 209—213.

[4] *E. Hammer:* Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart 1923.

[5] *Z. Nádeník:* Les inégalités isopérimétriques pour les courbes gauches. Czech. Math. J. *16* (*91*) (1966), 363—376.

[6] *B. Segre:* Proprietà in grande delle linee piane convesse: Sulla curvatura degli archi convessi sogetti a date condizioni agli estremi. Atti della Reale Academia dei Lincei (6) *20* (1934), 407—410.

[7] *B. Segre:* Proprietà in grande delle linee piane convesse: Le orbiformi e le corrispondenze eguilonghe fra ovali. Atti della Reale Academia dei Lincei (6) *20* (1934), 455—458.

[8] *P. Vincensini:* Corps convexes. Séries linéaires. Domaines vectoriels. Mémorial des Sci. Math. Fasc. *XCIV*, Paris 1938.

Adresse de l'auteur: Trojanova 13, Praha 2, ČSSR (České vysoké učení technické).

Резюме

О ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ С ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫМ СФЕРИЧЕСКИМ ОТОБРАЖЕНИЕМ ПОСЛЕДНИХ НОРМАЛЕЙ

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага

Для замкнутых кривых в $2n$-мерном евклидовом пространстве, которые имеют центрально-симметричное сферическое отображение последних нормалей и которые имеют постоянные отношения кривизен, получены пространственные аналогии теорем Бляшке о плоских замкнутых выпуклых кривых (см. его книгу „Круг и шар", гл. IV) и теорем Сегре, касающихся разности радиусов кривизны двух выпуклых плоских дуг (см. [6] или [8], Но. 26). Из группы этих теорем пусть приведено по крайнен мере следующее экстремальное свойство гиперокружности (т.е. замкнутой кривой с постоянными кривизнами): Среди кривых, которые имеют данное минимум (максимум) радиуса последней кривизны, минимальную (максимальную) длину имеет гиперокружность.