Vladimír Horák

Contribution à l'étude des transformations développables des congruences de droites et de leurs transformées de Laplace

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 17 (1967), No. 3, 347–371

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100783

Czechoslovak Mathematical Journal, 17 (92) 1967, Praha

# CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS DÉVELOPPABLES DES CONGRUENCES DE DROITES ET DE LEURS TRANSFORMÉES DE LAPLACE

VLADIMÍR HORÁK, Brno

(Reçu le 23 février 1966)

**1.** En suivant l'idée de E. ČECH, nous faisons usage, en étudiant dans l'espace projectif $P_3$ la congruence non parabolique de droites avec les nappes focales non dégénérées, du repère

$$A_1, A_2, A_3, A_4\,, \tag{1.1}$$

assujetti à la condition analytique

$$[A_1A_2A_3A_4] = 1\,. \tag{1.2}$$

Supposons que $L$ est orientée de telle façon, que les points $A_1$ et $A_2$ soient le premier et le second foyer de la droite $[A_1A_2]$ et les points $A_3$ et $A_4$ soient situés sur les transformées de Laplace de $[A_1A_2]$. Alors la transformation infinitésimale du repère (1.1) de la congruence $L$ est déterminée par les relations

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3\,, \\ dA_2 &= \alpha_2\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4\,, \\ dA_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1A_4\,, \\ dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4 \end{aligned} \tag{1.3}$$

et

$$\omega_1 = 0\,, \quad \omega_2 = 0 \tag{1.4}$$

sont les équations différentielles des surfaces développables. Pour les invariants relatifs $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ de la congruence $L$ on a (vu que les nappes focales sont non dégénérées)

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0\,. \tag{1.5}$$

La congruence $L$ considérée est déterminée par le système des équations de Pfaff

$$(1.6)\qquad \omega_{14} = \omega_{23} = 0\,,$$

$$\omega_{12} = \alpha_1\omega_2\,,\quad \omega_{21} = \alpha_2\omega_1\,,\quad \omega_{34} = \beta_2\omega_1\,,\quad \omega_{43} = \beta_1\omega_2\,,$$

dont les conditions d'intégrabilité sont

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} &[\omega_{32}\omega_1] + [\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}), \omega_2] = 0\,,\\ &[\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}), \omega_1] + [\omega_{41}\omega_2] = 0\,,\\ &[\omega_{41}\omega_1] - [\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1(\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44}), \omega_2] = 0\,,\\ &[\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2(\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33}), \omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] = 0\,. \end{aligned}$$

En dehors de cela, on a

$$(1.8)\qquad [\mathrm{d}\omega_1] = [\omega_{11} - \omega_{33}, \omega_1]\,,\quad [\mathrm{d}\omega_2] = [\omega_{22} - \omega_{44}, \omega_2]$$

et de (1.2) suit la relation

$$(1.9)\qquad \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0\,.$$

Dans la suite nous voulons employer pour abréger $[ijk\ldots]$ à la place de $[A_iA_jA_k\ldots]$.

Avec le repère ponctuel nous considérons le repère planaire

$$(1.10)\qquad E_1 = [234]\,,\quad E_2 = -[134]\,,\quad E_3 = [124]\,,\quad E_4 = -[123]$$

et le repère réglé

$$(1.11)\qquad [12], [13], [24], [14], [23], [34]\,,$$

dont les transformations infinitésimales sont

$$(1.12)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}E_1 &= -\omega_{11}E_1 - \alpha_2\omega_1E_2 - \omega_{31}E_3 - \omega_{41}E_4\,,\\ \mathrm{d}E_2 &= -\alpha_1\omega_2E_1 - \omega_{22}E_2 - \omega_{32}E_3 - \omega_{42}E_4\,,\\ \mathrm{d}E_3 &= -\omega_1E_1 - \omega_{33}E_3 - \beta_1\omega_2E_4\,,\\ \mathrm{d}E_4 &= -\omega_2E_2 - \beta_2\omega_1E_3 - \omega_{44}E_4\,, \end{aligned}$$

ou

$$(1.13)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}[12] &= (\omega_{11} + \omega_{22})[12] + \omega_2[14] - \omega_1[23]\,,\\ \mathrm{d}[13] &= \omega_{32}[12] + (\omega_{11} + \omega_{33})[13] + \beta_2\omega_1[14] + \alpha_1\omega_2[23]\,,\\ \mathrm{d}[24] &= -\omega_{41}[12] + \alpha_2\omega_1[14] + \beta_1\omega_2[23] + (\omega_{22} + \omega_{44})[24]\,,\\ \mathrm{d}[14] &= \omega_{42}[12] + \beta_1\omega_2[13] + (\omega_{11} + \omega_{44})[14] + \alpha_1\omega_2[24] + \omega_1[34]\,,\\ \mathrm{d}[23] &= -\omega_{31}[12] + \alpha_2\omega_1[13] + (\omega_{22} + \omega_{33})[23] + \beta_2\omega_1[24] - \omega_2[34]\,,\\ \mathrm{d}[34] &= -\omega_{41}[13] + \omega_{31}[14] - \omega_{42}[23] + \omega_{32}[24] + (\omega_{33} + \omega_{44})[34]\,. \end{aligned}$$

La relation qui existe entre la congruence $L$ et sa dualisation $L^*$ est déterminée par la substitution

$$(1.14)\qquad \begin{pmatrix} A_1\, A_2\, A_3\, A_4\, E_1\, E_2\, E_3\, E_4 & \omega_1 & \omega_2\, \alpha_1\, \alpha_2\, \beta_1\, \beta_2 & \omega_{ik} \\ E_3\, E_4\, E_1\, E_2\, A_3\, A_4\, A_1\, A_2 & -\omega_1 & -\omega_2\, \beta_1\, \beta_2\, \alpha_1\, \alpha_2 & -\omega_{ki} \end{pmatrix}.$$

Le changement d'orientation etraîne la substitution

$$(1.15)\quad \begin{pmatrix} A_1\, A_2\, A_3\, A_4\, E_1\, E_2\, E_3\, E_4\, \omega_1\, \omega_2\, \alpha_1\, \alpha_2\, \beta_1\, \beta_2\,. \\ A_2\, A_1\, A_4\, A_3\, E_2\, E_1\, E_4\, E_3\, \omega_2\, \omega_1\, \alpha_2\, \alpha_1\, \beta_2\, \beta_1\,. \end{pmatrix.$$
$$\begin{matrix} .\, \omega_{11}\, \omega_{22}\, \omega_{33}\, \omega_{44}\, \omega_{31}\, \omega_{32}\, \omega_{41}\, \omega_{42} \\ .\, \omega_{22}\, \omega_{11}\, \omega_{44}\, \omega_{33}\, \omega_{42}\, \omega_{41}\, \omega_{32}\, \omega_{31} \end{pmatrix}.$$

Les formes

$$(1.16)\qquad \varphi = \alpha_1\alpha_2\omega_1\omega_2\,, \quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2\,, \quad F_1 = \alpha_1\beta_1\omega_2^3/\omega_1\,, \quad F_2 = \alpha_2\beta_2\omega_1^3/\omega_2$$

liées par la relation

$$(1.17)\qquad \varphi\varphi^* = F_1F_2$$

et les équations

$$(1.18)\qquad \beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0\,, \quad \alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2 = 0$$

déterminent l'élément linéaire projectif de $L$. On appelle $\varphi$ – forme ponctuelle, $\varphi^*$ – forme planaire, $F_1(F_2)$ – première (seconde) forme focale; la relation $(1.18)_1$ ou $(1.18)_2$ est l'équation différentielle des lignes asymptotiques de la première ou seconde surface focale $(A_1)$ ou $(A_2)$ respectivement. Outre les formes (1.16) E. Čech a introduit encore les formes ( voir [1], p. 266)

$$(1.19)\qquad G_1 = -\alpha_1\omega_2^2/\beta_2\omega_1^2 \quad \text{et} \quad G_2 = -\alpha_2\omega_1^2/\beta_1\omega_2^2$$

qui déterminent pour $G_1 = 1$ et $G_2 = 1$ les équations des asymptotiques des nappes focales.

En passant à la dualisation ou en changeant l'orientation ensuite, nous trouvons la transformation des formes (1.16)–(1.19) déterminée par la relation (1.14) ou (1.15).

Dans ce qui suit, nous allons encore profiter de la relation

$$(1.20)\quad \begin{aligned} \mathrm{d}^2[12] = {} & (\mathrm{d}(\omega_{11} + \omega_{22}) + (\omega_{11} + \omega_{22})^2 + \omega_{31}\omega_1 + \omega_{42}\omega_2)\,[12] + \\ & + (\mathrm{d}\omega_2 + (2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{44})\,\omega_2)\,[14] - \\ & - (\mathrm{d}\omega_1 + (\omega_{11} + 2\omega_{22} + \omega_{33})\,\omega_1)\,[23] + \\ & + (\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2)\,[13] + (\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2)\,[24] + 2\omega_1\omega_2[34] \end{aligned}$$

qui ne dépend pas des formes $\omega_{32}$ et $\omega_{41}$.

**2.** Outre la congruence $L$, nous allons considérer une autre congruence $L'$, du même type que $L(\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0)$. Pour la congruence $L'$ nous voulons supposer une normalisation analogue du repère en désignant les expressions relatives de $L'$ par des notations analogues à celles de $L$, mais avec des accents.

Une *transformation développable* $T$ des congruences $L$ et $L'$ est déterminée par les relations

$$\omega_1 = \omega_1', \quad \omega_2 = \omega_2' \tag{2.1}$$

et l'on obtient *l'homographie tangente* en coordonnées ponctuelles ou coordonnées de droites sous la forme ([1], p. 267)

$$\begin{aligned} HA_1 &= \varrho A_1', \\ HA_2 &= \varrho^{-1} A_2', \\ HA_3 &= \varrho(A_3' + \lambda_1 A_1') + \mu_1 A_2', \\ HA_4 &= \varrho^{-1}(A_4' + \lambda_2 A_2') + \mu_2 A_1', \quad \varrho \neq 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \quad \text{arb.}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

ou

$$\begin{aligned} H[12] &= [1'2'], \\ H[13] &= \varrho^2[1'3'] + \varrho\mu_1[1'2'], \\ H[24] &= \varrho^{-2}[2'4'] - \varrho^{-1}\mu_2[1'2'], \\ H[14] &= [1'4'] + \lambda_2[1'2'], \\ H[23] &= [2'3'] - \lambda_1[1'2'], \\ H[34] &= [3'4'] + (\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2)[1'2'] + \lambda_1[1'4'] - \lambda_2[2'3'] - \\ &\quad - \varrho\mu_2[1'3'] + \varrho^{-1}\mu_1[2'4'], \end{aligned} \tag{2.2'}$$

respectivement.

Une paire de transformées développables $L$ et $L'$ est déterminée par le système des équations de Pfaff (1.6) et

$$\tau_{14} = \tau_{23} = 0, \quad \tau_{13} = \tau_{24} = 0, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \tau_{12} = (\alpha_1' - \alpha_1)\,\omega_2, \quad \tau_{21} = (\alpha_2' - \alpha_2)\,\omega_1, \quad \tau_{34} = (\beta_2' - \beta_2)\,\omega_1, \\ \tau_{43} = (\beta_1' - \beta_1)\,\omega_2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

où l'on a posé $\tau_{ik} = \omega_{ik}' - \omega_{ik}$.

Par la différentiation extérieure des équations $(2.3)_{3,4}$ on obtient

$$[\tau_{11} - \tau_{33}, \omega_1] = 0, \quad [\tau_{22} - \tau_{44}, \omega_2] = 0. \tag{2.5}$$

On peut introduire les expressions $\varrho_i$ ($\neq 0$; $i = 1, 2, 3, 4$), définies à l'aide des invariants relatifs $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et $\alpha_1', \alpha_2', \beta_1', \beta_2'$ des congruences $L$ et $L'$, de la manière

$$\alpha_1' = \varrho_1^2\alpha_1, \quad \alpha_2' = \varrho_2^2\alpha_2, \quad \beta_1' = \varrho_3^2\beta_1, \quad \beta_2' = \varrho_4^2\beta_2, \quad \varrho_i \neq 0. \tag{2.6}$$

Si l'on pose dans les relations de l'homographie (2.2) $\varrho^2 = \begin{Bmatrix} \varrho_1^{-2} \\ \varrho_2^{2} \\ \varrho_3^{2} \\ \varrho_4^{-2} \end{Bmatrix}$, alors l'homographie correspondante réalise un contact analytique du 1$^{\text{er}}$ ordre des courbes $\begin{Bmatrix} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = 0 \\ \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = 0 \end{Bmatrix}$ sur les surfaces $\begin{Bmatrix} (A_1) \text{ et } (A_1') \\ (A_2) \text{ et } (A_2') \\ (E_3) \text{ et } (E_3') \\ (E_4) \text{ et } (E_4') \end{Bmatrix}$ (v. [1], ch. 4 et 5). On voit sans peine que, en général aucune relation ne doit être vraie entre les $\varrho_i$.

E. Čech a introduit dans [1], p. 273, les six types suivants de transformations (déformations) développables du 1$^{\text{er}}$ ordre:

$(2.7)_{1-6}$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{déformation ponctuelle} \\ \textit{déformation planaire} \\ \textit{déformation focale de } 1^{\text{ère}} \textit{ espèce} \\ \textit{déformation focale de } 2^{\text{e}} \textit{ espèce} \\ \textit{déformation asymptotique} \\ \quad \textit{de } 1^{\text{ère}} \textit{ espèce} \\ \textit{déformation asymptotique} \\ \quad \textit{de } 2^{\text{e}} \textit{ espèce} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{caractérisée par} \\ \text{la relation} \end{array} \begin{Bmatrix} \varphi = \varphi' \\ \varphi^* = \varphi^{*\prime} \\ F_1 = F_1' \\ F_2 = F_2' \\ G_1 = G_1' \\ G_2 = G_2' \end{Bmatrix} \text{ ou } \begin{Bmatrix} \varrho_1^2 = \varrho_2^{-2} \\ \varrho_3^2 = \varrho_4^{-2} \\ \varrho_1^2 = \varrho_3^{-2} \\ \varrho_2^2 = \varrho_4^{-2} \\ \varrho_1^2 = \varrho_4^2 \\ \varrho_2^2 = \varrho_3^2 \end{Bmatrix}.$$

Les *déformations* mentionnées *du* 1$^{\text{er}}$ *ordre* peuvent être caracterisées d'une manière géométrique suivante: la transformation développable $T$ déterminée par les relations (2.1) est une déformation

$$\left.\begin{array}{l} \text{ponctuelle} \\ \text{planaire} \\ \text{focale de } 1^{\text{ere}} \text{ espèce} \\ \text{focale de } 2^{\text{e}} \text{ espèce} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{si et seulement s'il existe} \\ \text{une homographie tangente} \\ \text{réalisant des contacts ana-} \\ \text{lytiques du } 1^{\text{er}} \text{ ordre} \\ \text{suivants:} \end{array} \left\{\begin{array}{l} A_1 \to A_1',\ A_2 \to A_2',^{1)} \\ E_3 \to E_3',\ E_4 \to E_4',^{1)} \\ A_1 \to A_1',\ E_3 \to E_3',\ [12] \to [1'2'], \\ A_2 \to A_2',\ E_4 \to E_4',\ [12] \to [1'2'], \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{asymptotique de } 1^{\text{ère}} \\ \text{espèce} \\ \text{asymptotique de } 2^{\text{e}} \\ \text{espèce} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{si et seulement si elle réalise} \\ \text{une transformation asym-} \\ \text{ptotique} \end{array} \left\{\begin{array}{l} (A_1) \to (A_1'), \\ (A_2) \to (A_2'). \end{array}\right.$$

---

1) Une telle homographie réalise en même temps un contact analytique du 1$^{\text{er}}$ ordre $[A_1A_2] \to [A_1'A_2']$.

Si $T$ est en même temps une déformation du 1$^{er}$ ordre de trois types quelconques des six déformations indiquées, elle est aussi une déformation des autres types et alors elle est une *déformation projective du* 2$^e$ *ordre*. Ensuite dans les relations (2.6) on a

$$\varrho_1^{-2} = \varrho_2^2 = \varrho_3^2 = \varrho_4^{-2} = \varrho^2 . \tag{2.8}$$

Des relations (1.7) il découle (en indiquant par $\delta$ la différentiation par rapport aux paramètres secondaires et en posant $\omega_{ik}(\delta) = e_{ik}$)

$$e_{32} = e_{41} = 0 \tag{2.9}$$

et

$$\begin{aligned} &\delta\alpha_1 + \alpha_1(2e_{22} - e_{11} - e_{44}) = 0\,, \quad \delta\beta_1 + \beta_1(e_{22} + e_{33} - 2e_{44}) = 0\,, \\ &\delta\alpha_2 + \alpha_2(2e_{11} - e_{22} - e_{33}) = 0\,, \quad \delta\beta_2 + \beta_2(e_{11} + e_{44} - 2e_{33}) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Les relations analogues sont vraies pour la congruence $L'$. On démontre sans peine que, vu (2.5), on a $(\tau_{ik}(\delta) = t_{ik})$:

$$\begin{aligned} &\delta\,\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}(t_{11} - t_{22})\,, \qquad \delta\,\frac{\alpha_2'}{\alpha_2} = -\,\frac{\alpha_2'}{\alpha_2}(t_{11} - t_{22})\,, \\ &\delta\,\frac{\beta_1'}{\beta_1} = -\,\frac{\beta_1'}{\beta_1}(t_{11} - t_{22})\,, \quad \delta\,\frac{\beta_2'}{\beta_2} = \frac{\beta_2'}{\beta_2}(t_{11} - t_{22})\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Les quotients $\alpha_1'/\alpha_1$, $\beta_1'/\beta_1$, $\alpha_2'/\alpha_2$, $\beta_2'/\beta_2$ sont des invariants relatifs du couple de congruences $L$ et $L'$ en transformation développable. En général, on peut choisir un particularisation du repère de façon qu'un quelconque de ces quotients soit égal à un et alors, vu que $t_{11} - t_{22} = 0$, les autres trois sont des invariants absolus du couple des congruences discutées. Dans le cas où $T$ est une déformation du 1$^{er}$ ordre, on peut choisir une particularisation du repère de façon que justement deux de ces invariants soient égaux à un et alors dans la relation (2.6), ou (2.7) respectivement, les $\varrho_i^2$ relatifs seront égaux à un.

*Si $T$ est une déformation du* 1$^{er}$ *ordre de deux des types fondamentaux, on peut, vu* (2.11), *poser au maximum* 3 *des fonctions $\varrho_i^2$ égales à un; dans le cas où les deux déformations considérées sont une déformation ponctuelle et une déformation planaire ou des déformations focales ou des déformations asymptotiques, alors on peut poser seulement deux des fonctions $\varrho_i^2$ égales à un et les autres deux sont égales l'une à l'autre.*

*Si $T$ est une déformation projective* (*du* 2$^e$ *ordre*), *on peut particulariser le repère* (1.1) *de telle façon que, dans les relations* (2.6) *ou* (2.7), *on puisse poser* $\varrho_i^2 = \varrho^2 = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

On obtient les homographies qui réalisent une déformation ponctuelle ou planaire ou des déformations focales de (2.2) en posant (v. [2], p. 254)

$$(2.12)_{1-4} \qquad \left.\begin{aligned} \varrho_{\varphi}^2 &= \alpha_1/\alpha_1' = \alpha_2'/\alpha_2 \\ \varrho_{\varphi^*}^2 &= \beta_1'/\beta_1 = \beta_2/\beta_2' \\ \varrho_{F_1}^2 &= \alpha_1/\alpha_1' = \beta_1'/\beta_1 \\ \varrho_{F_2}^2 &= \alpha_2'/\alpha_2 = \beta_2/\beta_2' \end{aligned}\right\}, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \quad \text{arb.},$$

respectivement.

Alors le théorème suivant est vrai:

*Si et seulement s'il existe une homographie tangente qui réalise en même temps la déformation ponctuelle et planaire ou les deux déformations focales, alors la transformation développable T est une déformation projective. Dans chacun de ces cas, il y a $\infty^2$ homographies tangentes qui réalisent les déformations considérées du 1^er ordre, vu que $\lambda_1$ et $\lambda_2$ peuvent être arbitraires.*

En employant le lemme de Cartan on obtient de (1.7) les relations

$$(2.13)_{1-6} \qquad \begin{aligned} &\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} + 2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44} = \gamma_7\omega_1 + \gamma_5\omega_2\,, \\ &\frac{d\alpha_2}{\alpha_2} + 2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} = \gamma_6\omega_1 + \gamma_8\omega_2\,, \\ &\frac{d\beta_1}{\beta_1} + \omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44} = -\gamma_1\omega_1 + \gamma_3\omega_2\,, \\ &\frac{d\beta_2}{\beta_2} + \omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33} = \gamma_4\omega_1 - \gamma_2\omega_2\,, \\ &\qquad\qquad \omega_{32} = \beta_2\gamma_2\omega_1 + \alpha_1\gamma_7\omega_2\,, \\ &\qquad\qquad \omega_{41} = \alpha_2\gamma_8\omega_1 + \beta_1\gamma_1\omega_2\,; \end{aligned}$$

des relations analogues sont vérifiées pour la congruence $L'$.

Dans la suite nous voulons indiquer *les transformées de Laplace de la congruence L* engendrées par la droite [13] ou [24] par $L_1$ ou $L_{-1}$ respectivement. Les congruences $L_1$ et $L_{-1}$ se transforment par l'homographie (2.2) d'une manière suivante:

$$(2.14) \qquad H[13] = \varrho^2[1'3'] + \varrho\mu_1[1'2']\,,$$

$$(2.15) \qquad \begin{aligned} H\,d[13] = {} & \beta_2\omega_1[1'4'] + \alpha_1\omega_2[2'3'] + \\ & + (\omega_{32} + \lambda_2\beta_2\omega_1 - \lambda_1\alpha_1\omega_2)\,[1'2'] + (.)\,[1'3'] \end{aligned}$$

et

$$(2.16) \qquad H[24] = \varrho^{-2}[2'4'] - \varrho^{-1}\mu_2[1'2']\,,$$

$$(2.17) \qquad \begin{aligned} H\,d[24] = {} & \alpha_2\omega_1[1'4'] + \beta_1\omega_2[2'3'] + \\ & + (-\omega_{41} + \lambda_2\alpha_2\omega_1 - \lambda_1\beta_1\omega_2)\,[1'2'] + (.)\,[2'4']\,. \end{aligned}$$

En substituant dans ces relations d'après (2.13) à $\omega_{32}$ et $\omega_{41}$ on voit que le théorème suivant est vrai: *Si et seulement si les congruences $L$ et $L'$ sont dans la déformation asymptotique de* $1^{\text{ère}}$ *ou* $2^{\text{e}}$ *espèce, c'est-à-dire si l'on a*

$$(2.18)\quad \beta_2 = \sigma_1^2\beta_2', \quad \alpha_1 = \sigma_1^2\alpha_1' \quad ou \quad \alpha_2 = \sigma_{-1}^2\alpha_2', \quad \beta_1 = \sigma_{-1}^2\beta_1', \quad \sigma_1\sigma_{-1} \neq 0$$

*respectivement, alors l'homographie* (2.2) *pour laquelle on a*

$$(2.19)_{1-3}\qquad \lambda_1 = -(\gamma_7' - \gamma_7), \quad \lambda_2 = \gamma_2' - \gamma_2, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2, \varrho \text{ arb.},$$

*ou*

$$(2.19)_{4-6}\qquad \lambda_1 = \gamma_1' - \gamma_1, \quad \lambda_2 = -(\gamma_8' - \gamma_8), \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_1, \varrho \text{ arb.},$$

*réalise un contact géométrique du* $1^{\text{er}}$ *ordre des congruences* $L_1$ *et* $L_1'$, *ou* $L_{-1}$ *et* $L_{-1}'$ *respectivement, dont le coefficient de dilatation*[2]) *est*

$$(2.20)\qquad j_1 = \sigma_1^2\varrho^{-2}, \quad ou \quad j_{-1} = \sigma_{-1}^2\varrho^2.$$

*Dans chacun des cas discutés, il y a* $\infty^1$ *homographies tangentes qui réalisent un contact analytique des congruences* $L_1$ *et* $L_1'$, *ou* $L_{-1}$ *et* $L_{-1}'$ *respectivement.*

**3.** Avant de passer à l'étude des transformations développables des transformées de Laplace des congruences $L$ et $L'$ dans la transformation développable, signalons quelques *propriétés géométriques* essentielles *des déformations projectives du second ordre des congruences $L$ et $L'$.*

Soit la transformation développable $T$ une déformation projective. Dans ce cas on peut introduire une particularisation du repère telle que (v. chap. 2.)

$$(3.1)\qquad \alpha_1' = \alpha_1, \quad \alpha_2' = \alpha_2, \quad \beta_1' = \beta_1, \quad \beta_2' = \beta_2;$$

puis on obtient outre (1.6) encore (v. [1], p. 279)

$$(3.2)\qquad \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{34} = \tau_{43} = 0,$$

$$(3.3)\qquad -2\tau_{11} = 2\tau_{22} = -2\tau_{33} = 2\tau_{44} = c_1\omega_1 - c_2\omega_2,$$

$$(3.4)\qquad [\tau_{31}\omega_1] = 0, \quad [\tau_{42}\omega_2] = 0,$$

$$(3.5)\qquad \tau_{32} = \beta_2c_2\omega_1 + \alpha_1c_1\omega_2, \quad \tau_{41} = \alpha_2c_2\omega_1 + \beta_1c_1\omega_2.$$

L'homographie osculatrice ${}^0H$ de $T$ est déterminée par les relations

$$(3.6)\qquad {}^0HA_1 = A_1', \quad {}^0HA_2 = A_2', \quad {}^0HA_3 = A_3', \quad {}^0HA_4 = A_4'.$$

---

[2]) Les surfaces $C$ et $C'$ dont les points correspondants possèdent des valeurs égales de leurs paramètres, ont dans un point commun $A \equiv A'$ un contact géométrique du $1^{\text{er}}$ ordre avec le coefficient de dilatation $j$ si et seulement si pour une paire quelconque de courbes correspondantes de ces surfaces on a $A = cA'$, $\mathrm{d}A = cj\,\mathrm{d}A' + (.)\,A'$. Le contact mentionné est un contact analytique si et seulement si $j = 1$.

Nous allons considérer encore, outre l'homographie osculatrice, *l'homographie ponctuellement associée* $^0K$ *et l'homographie planairement associée* $^0K^*$, *données par les relations*

$$(3.7) \qquad {}^0KA_1 = A'_1\,, \quad {}^0KA_2 = A'_2\,,$$
$$ {}^0KA_3 = A'_3 - c_1A'_1\,, \quad {}^0KA_4 = A'_4 - c_2A'_2\,,$$

$$(3.8) \qquad {}^0K^*A_1 = A'_1\,, \quad {}^0K^*A_2 = A'_2\,,$$
$$ {}^0K^*A_3 = A'_3 + c_1A'_1\,, \quad {}^0K^*A_4 = A'_4 + c_2A'_2\,,$$

(v. [1], p. 279–280).

Les homographies (3.6)–(3.8) en coordonnées planaires ou en coordonnées de droites possédent la forme

$$(3.6)' \quad {}^0HE_1 = E'_1\,, \quad {}^0HE_2 = E'_2\,, \quad {}^0HE_3 = E'_3\,, \quad {}^0HE_4 = E'_4\,,$$
$$(3.7)' \quad {}^0KE_1 = E'_1 + c_1E'_3\,, \quad {}^0KE_2 = E'_2 + c_2E'_4\,, \quad {}^0KE_3 = E'_3\,, \quad {}^0KE_4 = E'_4\,,$$
$$(3.8)' \quad {}^0K^*E_1 = E'_1 - c_1E'_3\,, \quad {}^0K^*E_2 = E'_2 - c_2E'_4\,, \quad {}^0K^*E_3 = E'_3\,, \quad {}^0K^*E_4 = E'_4\,,$$

ou

$$(3.6)'' \qquad {}^0H[12] = [1'2']\,, \quad {}^0H[13] = [1'3']\,, \quad {}^0H[24] = [2'4']\,,$$
$$ {}^0H[14] = [1'4']\,, \quad {}^0H[23] = [2'3']\,, \quad {}^0H[34] = [3'4']\,,$$
$$(3.7)'' \qquad {}^0K[12] = [1'2']\,, \quad {}^0K[13] = [1'3']\,, \quad {}^0K[24] = [2'4']\,,$$
$$ {}^0K[14] = [1'4'] - c_2[1'2']\,, \quad {}^0K[23] = [2'3'] + c_1[1'2']\,,$$
$$ {}^0K[34] = [3'4'] - c_1[1'4'] + c_2[2'3'] + c_1c_2[1'2']\,,$$
$$(3.8)'' \qquad {}^0K^*[12] = [1'2']\,, \quad {}^0K^*[13] = [1'3']\,, \quad {}^0K^*[24] = [2'4']\,,$$
$$ {}^0K^*[14] = [1'4'] + c_2[1'2']\,, \quad {}^0K^*[23] = [2'3'] - c_1[1'2']\,,$$
$$ {}^0K^*[34] = [3'4'] + c_1[1'4'] - c_2[2'3'] + c_1c_2[1'2']$$

respectivement.

*La déformation projective* $T$ est nommée déformation

$$(3.9) \qquad \left.\begin{array}{l} \textit{singulière} \\ \textit{demisingulière de } 1^{\text{ère}} \textit{ espèce} \\ \textit{demisingulière de } 2^{\text{e}} \textit{ espèce} \\ \textit{non singulière} \end{array}\right\} \text{si et seulement si} \left\{\begin{array}{l} c_1 = c_2 = 0\,, \\ c_1 \neq 0 = c_2\,, \\ c_1 = 0 \neq c_2\,, \\ c_1 \neq 0 \neq c_2\,. \end{array}\right.$$

Si $T$ est une déformation projective singulière alors nécessairement $L$ et $L'$ sont des congruences $R$ et inversement.

*Le foyer* $\bar{A}_3$ *de la transformée de Laplace* $L_1$ (de la congruence $L$) engendrée par la droite $[A_1A_3]$, est déterminé par la relation

$$(3.10) \qquad \bar{A}_3 = \sigma_3(\varpi_{32}A_1 - \alpha_1\omega_2A_3)\,, \quad \sigma_3 \neq 0\,, \quad \text{arb.}\,,$$

où

$$\bar{\omega}_{32} = (\omega_{32})_{\omega_1=0}\,. \tag{3.11}$$

Supposons une notation analogue pour la congruence $L'$. L'homographie osculatrice (3.6) porte le foyer de la droite [13] dans le point

$${}^0H\bar{A}_3 = \sigma_3(\bar{\omega}_{32}A'_1 - \alpha_1\omega_2A'_3)\,. \tag{3.12}$$

En raison de (2.1) et de (3.1) on voit que le point ${}^0H\bar{A}_3$ est le foyer de la droite $[A'_1A'_3]$ si et seulement si

$$\bar{\tau}_{32} = (\tau_{32})_{\omega_1=0} = 0\,, \tag{3.13}$$

d'où il découle d'après (3.5) la relation

$$c_1 = 0 \tag{3.14}$$

et alors $T$ est soit une déformation singulière soit une déformation demisingulière de 2$^e$ espèce. A l'aide de la substitution (1.14), on obtient un résultat analogue pour le foyer $\bar{A}_4$ de la transformée de Laplace $L_{-1}$. Alors on obtient le théorème suivant: *La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable des congruences L et L' soit une déformation singulière (demisingulière ou non singulière), est: l'homographie osculatrice ${}^0H$ transforme les deux paires de foyers correspondants (juste une des paires des foyers correspondants ou ne transforme aucun des foyers) – différents des foyers $A_1$ et $A_2$ – des transformées de Laplace l'un dans l'autre.*

Nous voulons maintenant expliquer la signification géométrique de l'homographie ponctuellement (planairement) associée ${}^0K({}^0K^*)$ des congruences $L$ et $L'$ dans la déformation projective $T$. On obtient facilement les relations

$${}^0K\bar{A}_3 = \sigma_3\sigma_3'^{-1}\bar{A}'_3\,,\quad {}^0K\bar{A}_4 = \sigma_4\sigma_4'^{-1}\bar{A}'_4\,,\quad \sigma_3\sigma'_3\sigma_4\sigma'_4 \neq 0\,, \tag{3.15}$$

$${}^0K^*\bar{E}_1 = \sigma_1\sigma_1'^{-1}\bar{E}'_1\,,\quad {}^0K^*\bar{E}_2 = \sigma_2\sigma_2'^{-1}\bar{E}'_2\,,\quad \sigma_1\sigma_2\sigma'_1\sigma'_2 \neq 0\,. \tag{3.16}$$

Des relations citées ci-dessus résulte: *l'homographie ponctuellement associée transforme outre les foeyrs des congruences L et L' aussi simultanément les foyers des deux transformées de Laplace; l'homographie planairement associée transforme outre les foyers des dualisations des congruences L et L' simultanément aussi les deux foyers des dualisations des transformées de Laplace.* Cela éclaircit pourquoi dans le cas de la déformation projective singulière les trois homographies ${}^0H$, ${}^0K$ et ${}^0K^*$ se confondent en une seule.

D'après (1.13) et (3.6) on obtient

$${}^0H[13] = [1'3']\,,\quad {}^0H\,\mathrm{d}[13] = \mathrm{d}[1'3'] + (.)\,[1'3'] - \tau_{32}[1'2']\,, \tag{3.17}$$

$${}^0H[24] = [2'4']\,,\quad {}^0H\,\mathrm{d}[24] = \mathrm{d}[2'4'] + (.)\,[2'4'] + \tau_{41}[1'2']\,. \tag{3.18}$$

On a alors: *L'homographie osculatrice réalise un contact analytique du 1er ordre des transformées de Laplace $L_1$ et $L'_1$ et en même temps des transformées de Laplace $L_{-1}$ et $L'_{-1}$ de congruences $L$ et $L'$ en déformation projective si et seulement si elle est une déformation projective singulière et alors $L$ et $L'$ sont des congruences R.*

*Si la déformation projective des congruences $L$ et $L'$ est une déformation demi-singulière de 1ère (2e) espèce, c.-à-d. $c_2 = 0$ ($c_1 = 0$), alors l'homographie osculatrice réalise un contact analytique du 1er ordre des surfaces développables $\omega_2 = 0$ ($\omega_1 = 0$) des congruences $L_1$ et $L'_1$ et en même temps des surfaces développables $\omega_1 = 0$ ($\omega_2 = 0$) de $L_{-1}$ et $L'_{-1}$ qui sont des transformées de Laplace des congruences $L$ et $L'$ et inversement.*

**4.** Dans ce chapitre nous allons *particulariser le repère* de la congruence $L$ employé aux chapitres 1. et 2. Par la différentiation extérieure des relations (2.13) on obtient

$$\begin{aligned}
&[\Delta\gamma_7\omega_1] + [\Delta\gamma_5\omega_2] = 0\,, \quad [\Delta\gamma_6\omega_1] + [\Delta\gamma_8\omega_2] = 0\,,\\
&[\Delta\gamma_1\omega_1] - [\Delta\gamma_3\omega_2] = 0\,, \quad [\Delta\gamma_4\omega_1] - [\Delta\gamma_2\omega_2] = 0\,,\\
&\beta_2[\Delta\gamma_2\omega_1] + \alpha_1[\Delta\gamma_7\omega_2] = 0\,, \quad \alpha_2[\Delta\gamma_8\omega_1] + \beta_1[\Delta\gamma_1\omega_2] = 0\,,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma_1 &= d\gamma_1 + \gamma_1(\omega_{11} - \omega_{33}) - \omega_{31} - \gamma_1^2\omega_1\,,\\
\Delta\gamma_2 &= d\gamma_2 + \gamma_2(\omega_{22} - \omega_{44}) - \omega_{42} - \gamma_2^2\omega_2\,,\\
\Delta\gamma_3 &= d\gamma_3 + \gamma_3(\omega_{22} - \omega_{44}) + 3\omega_{42} - (\alpha_1\alpha_2 + 3\beta_1\beta_2)\,\omega_1 + \gamma_8^2\omega_2\,,\\
\Delta\gamma_4 &= d\gamma_4 + \gamma_4(\omega_{11} - \omega_{33}) + 3\omega_{31} - (\alpha_1\alpha_2 + 3\beta_1\beta_2)\,\omega_2 + \gamma_7^2\omega_1\,,\\
\Delta\gamma_5 &= d\gamma_5 + \gamma_5(\omega_{22} - \omega_{44}) + 3\omega_{42} - (3\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\,\omega_1 + \gamma_2^2\omega_2\,,\\
\Delta\gamma_6 &= d\gamma_6 + \gamma_6(\omega_{11} - \omega_{33}) + 3\omega_{31} - (3\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\,\omega_2 + \gamma_1^2\omega_1\,,\\
\Delta\gamma_7 &= d\gamma_7 + \gamma_7(\omega_{11} - \omega_{33}) - \omega_{31} + \gamma_7^2\omega_1\,,\\
\Delta\gamma_8 &= d\gamma_8 + \gamma_8(\omega_{22} - \omega_{44}) - \omega_{42} + \gamma_8^2\omega_2\,.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

En posant comme autérieurement $\omega_{ik}(\delta) = e_{ik}$, où $\delta$ signifie la différentiation par rapport aux paramètres secondaires, il résulte des relations précédentes

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_1 + \gamma_1(e_{11} - e_{33}) - e_{31} &= 0\,,\\
\delta\gamma_2 + \gamma_2(e_{22} - e_{44}) - e_{42} &= 0\,,\\
\delta\gamma_3 + \gamma_3(e_{22} - e_{44}) + 3e_{42} &= 0\,,\\
\delta\gamma_4 + \gamma_4(e_{11} - e_{33}) + 3e_{31} &= 0\,,\\
\delta\gamma_5 + \gamma_5(e_{22} - e_{44}) + 3e_{42} &= 0\,,\\
\delta\gamma_6 + \gamma_6(e_{11} - e_{33}) + 3e_{31} &= 0\,,\\
\delta\gamma_7 + \gamma_7(e_{11} - e_{33}) - e_{31} &= 0\,,\\
\delta\gamma_8 + \gamma_8(e_{22} - e_{44}) - e_{42} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

De là on voit qu'en raison de (1.15) on peut poser dans chaque quaterne $\gamma_1, \gamma_4, \gamma_6, \gamma_7$ et $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_8$ juste une de ces expressions égale à zéro et les six autres expressions seront les invariants relatifs de la congruence $L$. Pour nos considérations nous choisissons

$$\gamma_7 = \gamma_8 = 0\,, \tag{4.4}$$

de sorte que, outre les relations (1.6), on obtient encore pour la congruence $L$:

$$\begin{aligned}
\omega_{32} &= \beta_2\gamma_2\omega_1 \\
\omega_{41} &= \beta_1\gamma_1\omega_2\,, \\
\mathrm{dlg}\,\alpha_1 + 2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44} &= \gamma_5\omega_2\,, \\
\mathrm{dlg}\,\alpha_2 + 2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} &= \gamma_6\omega_1\,, \\
\mathrm{dlg}\,\beta_1 + \omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44} &= -\gamma_1\omega_1 + \gamma_3\omega_2\,, \\
\mathrm{dlg}\,\beta_2 + \omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33} &= \gamma_4\omega_1 - \gamma_2\omega_2\,.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

A l'aide du lemme de Cartan on obtient des relations (4.1) sous la supposition (4.4) les relations

$$\begin{aligned}
\omega_{31} &= -\beta_2\varepsilon_1\omega_1 - \varepsilon_2\omega_2\,, \\
\omega_{42} &= -\varepsilon_3\omega_1 - \beta_1\varepsilon_4\omega_2\,, \\
\mathrm{d}\gamma_1 + \gamma_1(\omega_{11} - \omega_{33}) &= (\alpha_2\varepsilon_4 + \beta_2\varepsilon_1 + \gamma_1^2)\,\omega_1 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_5)\,\omega_2\,, \\
\mathrm{d}\gamma_2 + \gamma_2(\omega_{22} - \omega_{44}) &= (\varepsilon_3 + \varepsilon_6)\,\omega_1 + (\alpha_1\varepsilon_1 + \beta_1\varepsilon_4 + \gamma_2^2)\,\omega_2\,, \\
\mathrm{d}\gamma_3 + \gamma_3(\omega_{22} - \omega_{44}) &= (\alpha_1\alpha_2 + 3\beta_1\beta_2 - \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 - \varepsilon_5)\,\omega_1 + (\beta_1\varepsilon_4 + \varepsilon_7)\,\omega_2\,, \\
\mathrm{d}\gamma_4 + \gamma_4(\omega_{11} - \omega_{33}) &= (\beta_2\varepsilon_1 + \varepsilon_8)\,\omega_1 + (\alpha_1\alpha_2 + 3\beta_1\beta_2 + 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_6)\,\omega_2\,, \\
\mathrm{d}\gamma_5 + \gamma_5(\omega_{22} - \omega_{44}) &= (3\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3)\,\omega_1 + (3\beta_1\varepsilon_4 - \gamma_2^2 + \varepsilon_9)\,\omega_2\,, \\
\mathrm{d}\gamma_6 + \gamma_6(\omega_{11} - \omega_{33}) &= (3\beta_2\varepsilon_1 - \gamma_1^2 + \varepsilon_{10})\,\omega_1 + (3\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + 3\varepsilon_2 + \varepsilon_3)\,\omega_2
\end{aligned} \tag{4.6}$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{10}$ sont des fonctions nouvelles.

Il est nécessaire d'élargir la transformation (1.15) qui détermine le changement de l'orientation de la congruence $L$ par

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \varepsilon_5 & \varepsilon_6 & \varepsilon_7 & \varepsilon_8 & \varepsilon_9 & \varepsilon_{10} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_6 & \gamma_5 & \varepsilon_4 & \varepsilon_3 & \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 & \varepsilon_8 & \varepsilon_7 & \varepsilon_{10} & \varepsilon_9 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

La transformation infinitésimale du repère (1.1) est déterminée, après la particularisation, par les relations

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3\,, \\
\mathrm{d}A_2 &= \alpha_2\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4\,, \\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{31}A_1 + \beta_2\gamma_2\omega_1A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1A_4\,, \\
\mathrm{d}A_4 &= \beta_1\gamma_1\omega_2A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4\,.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Des relations $(4.8)_{3,4}$ on voit que pour $\omega_1 = 0$ ($\omega_2 = 0$) le point $dA_3$ ($dA_4$) est situé sur la droite $[A_1A_3]$ ($[A_2A_4]$) et alors *le point* $A_3$ ($A_4$) *est le foyer de la transformée de Laplace* $L_1$ ($L_{-1}$) *de la congruence* $L$. De là résulte la signification géométrique des relations (4.4).

On obtient des relations (4.8) – en substituant d'après (1.12) et (1.13) – les relations relatives au repère planaire et réglé; pour la dualisation de la congruence $L$ le plan $E_1$ ou $E_2$ joue le rôle d'un foyer sur la droite $[E_1E_3]$ ou $[E_2E_4]$ respectivement.

Interprétons encore le sens géométrique des relations

$$\gamma_1 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 0\,. \tag{4.9}$$

De la relation $(4.8)_4$ ou $(4.8)_3$ il résulte que dans le cas où $\gamma_1 = 0$ ($\gamma_2 = 0$), le plan tangent dans le point $A_4$ ($A_3$) à la surface focale ($A_4$) (($A_3$)) de la transformée de Laplace $L_{-1} \equiv \{A_2A_4\}$ ($L_1 \equiv \{A_1A_3\}$) passe par le point $A_3$ ($A_4$) et celui-ci est un foyer tant qu'il est vrai $(4.5)_1$ ($(4.5)_2$). Si toutes les deux relations (4.9) sont vraies, alors $L$ est une congruence d'un type spécial. Dorénavant nous supposons

$$\gamma_1\gamma_2 \neq 0\,. \tag{4.10}$$

On voit sans peine que *les équations des lignes asymptotiques des surfaces* ($A_3$) *et* ($A_4$) *sont*

$$\beta_2\varepsilon_6\omega_1^2 - \alpha_1\varepsilon_2\omega_2^2 = 0\,, \tag{4.11}$$

$$\alpha_2\varepsilon_3\omega_1^2 - \beta_1\varepsilon_5\omega_2^2 = 0\,. \tag{4.12}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence $L$ (et en même temps leurs transformées de Laplace) soit une *congruence R* est:

$$\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = 0\,, \quad \varepsilon_2 + \varepsilon_6 = \varepsilon_3 + \varepsilon_5 = 0\,, \tag{4.13}$$

ce que sont les conditions de la correspondance asymptotique des surfaces focales.

**5.** Dans ce chapitre nous étudions les conséquences des particularisations des repères des congruences $L$ et $L'$ en déformation projective introduites au chapitre précédent. Nous utilisons les résultats pour l'étude des transformations développables des transformées de Laplace. Pour la paire des congruences discutées, outre les relations (1.6), (2.3)–(2.5) et (4.5) sont encore vraies les relations suivantes:

$$\tau_{32} = (\beta_2'\gamma_2' - \beta_2\gamma_2)\,\omega_1\,, \quad \tau_{41} = (\beta_1'\gamma_1' - \beta_1\gamma_1)\,\omega_2\,. \tag{5.1}$$

Pour que la transformation développable $T$ soit une déformation projective, il est nécessaire et il suffit que les invariants relatifs $\alpha_i$, $\beta_i$ et $\alpha_i'$, $\beta_i'$ ($i = 1, 2$) remplissent les relations

$$\alpha_1' = \varrho^{-2}\alpha_1\,, \quad \alpha_2' = \varrho^2\alpha_2\,, \quad \beta_1' = \varrho^2\beta_1\,, \quad \beta_2' = \varrho^{-2}\beta_2\,, \quad \varrho \neq 0\,. \tag{5.2}$$

Par la différentiation extérieure des relations (2.4) et en substituant à $\alpha_i'$, $\beta_i'$ et $d\alpha_i'$, $d\beta_i'$ et en appliquant (2.13), (4.4) et (4.5), on obtient les relations

$$[2d\varrho + \varrho(\tau_{11} - \tau_{22}), \omega_2] = 0, \tag{5.3}$$

$$[2d\varrho + \varrho(\tau_{11} - \tau_{22}), \omega_1] = 0, \tag{5.4}$$

$$[2d\varrho + \varrho(\tau_{33} - \tau_{44}), \omega_2] + \varrho(\gamma_1' - \gamma_1)[\omega_1\omega_2] = 0, \tag{5.5}$$

$$[2d\varrho + \varrho(\tau_{33} - \tau_{44}), \omega_1] - \varrho(\gamma_2' - \gamma_2)[\omega_1\omega_2] = 0. \tag{5.6}$$

De (5.3) et (5.4) il résulte

$$2d\varrho/\varrho = \tau_{22} - \tau_{11}. \tag{5.7}$$

En substituant en vertu de (5.7) dans (5.5) et (5.6) on obtient (vu (2.5)),

$$[\tau_{11} - \tau_{33}, \omega_2] - (\gamma_1' - \gamma_1)[\omega_1\omega_2] = 0, \tag{5.8}$$

$$[\tau_{22} - \tau_{44}, \omega_1] - (\gamma_2' - \gamma_2)[\omega_1\omega_2] = 0, \tag{5.9}$$

de sorte que

$$\tau_{11} - \tau_{33} = (\gamma_1' - \gamma_1)\,\omega_1, \quad \tau_{22} - \tau_{44} = (\gamma_2' - \gamma_2)\,\omega_2 \tag{5.10}$$

est vrai; cela est en harmonie avec la relation (2.5).

Comme $d^2[12]$ ne dépend pas de $\omega_{32}$ et $\omega_{41}$, alors, vu (5.10), *l'homographie osculatrice de la transformation développable* (2.1) est déterminée d'après [1], p. 270, par les relations (où $f_1 = \gamma_1' - \gamma_1$ et $f_2 = \gamma_2' - \gamma_2$)

$$\begin{aligned} {}^0HA_1 &= \varrho A_1', \\ {}^0HA_2 &= \varrho^{-1}A_2', \\ {}^0HA_3 &= \varrho(\tfrac{1}{2}(\gamma_1' - \gamma_1)\,A_1' + A_3'), \\ {}^0HA_4 &= \varrho^{-1}(\tfrac{1}{2}(\gamma_2' - \gamma_2)\,A_2' + A_4'), \end{aligned} \tag{5.11}$$

ou, en coordonnées de droites, par

$$\begin{aligned} {}^0H[12] &= [1'2'], \\ {}^0H[13] &= \varrho^2[1'3'], \\ {}^0H[24] &= \varrho^{-2}[2'4'], \\ {}^0H[14] &= [1'4'] + \tfrac{1}{2}(\gamma_2' - \gamma_2)[1'2'], \\ {}^0H[23] &= [2'3'] - \tfrac{1}{2}(\gamma_1' - \gamma_1)[1'2'], \\ {}^0H[34] &= [3'4'] + \tfrac{1}{2}(\gamma_1' - \gamma_1)[1'4'] - \tfrac{1}{2}(\gamma_2' - \gamma_2)[2'3'] + \\ &\quad + \tfrac{1}{4}(\gamma_1' - \gamma_1)(\gamma_2' - \gamma_2)[1'2']. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Des résultats dans le chapitre 3 il suit que *la transformation développable $T$ est une déformation singulière si et seulement si les relations*

$$\gamma_1' = \gamma_1 , \quad \gamma_2' = \gamma_2 \tag{5.13}$$

*sont vraies.* Dans ce cas, l'homographie osculatrice est déterminée par les relations

$$^0HA_1 = \varrho A_1' , \quad ^0HA_2 = \varrho^{-1} A_2' , \quad ^0HA_3 = \varrho A_3' , \quad ^0HA_4 = \varrho^{-1} A_4' . \tag{5.14}$$

On peut déduire les résultats analogues pour les déformations demisingulières.

**6.** Considérons les congruences $L$ et $L'$ dans la transformation développable $T$ qui est donnée par les relations (2.1). Il est clair que (2.1) exprime aussi en même temps la transformation développable des transformées de Laplace $L_1, L_1'$ et $L_{-1}, L_{-1}'$; nous désignons ces transformations développables par $T_1$ et $T_{-1}$.

Dans ce chapitre nous voulons étudier les transformations développables énoncées que l'on peut considérer realisées simultanément en combinaisons diverses, parce qu'elles sont toutes déterminées par les mêmes relations.

Supposons que les repères des congruences $L$ et $L'$ soient normalisées de telle façon que les points $A_3, A_4$ et $A_3', A_4'$ soient les foyers des transformées de Laplace des congruences $L$ et $L'$ (v. chap. 4) et que l'on ait

$$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1' \gamma_2' \neq 0 . \tag{6.1}$$

L'homographie tangente $H$ de la transformation développable $T$ est déterminée par les relations (2.2) et *les homographies tangentes $H_1$ et $H_{-1}$ des transformations développables $T_1(L_1 \to L_1')$ et $T_{-1}(L_{-1} \to L_{-1}')$* par les relations

$$\begin{aligned} (6.2) \qquad H_1 A_1 &= \sigma_1 \varrho_1 A_1' , \\ H_1 A_2 &= \sigma_1 \left( a_{21} A_1' + \varrho_1 \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} A_2' + a_{23} A_3' \right) , \\ H_1 A_3 &= \sigma_1 \varrho_1^{-1} A_3' , \\ H_1 A_4 &= \sigma_1 \left( a_{41} A_1' + \left( \varrho_1^{-1} \gamma_2' \frac{\beta_2'}{\beta_2} - \varrho_1 \gamma_2 \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} \right) A_2' + a_{43} A_3' + \varrho_1^{-1} \frac{\beta_2'}{\beta_2} A_4' \right) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6.3) \qquad H_{-1} A_1 &= \sigma_{-1} \left( \varrho_{-1} \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} A_1' + a_{12} A_2' + a_{14} A_4' \right) , \\ H_{-1} A_2 &= \sigma_{-1} \varrho_{-1} A_2' , \\ H_{-1} A_3 &= \sigma_{-1} \left( \left( \varrho_{-1}^{-1} \gamma_1' \frac{\beta_1'}{\beta_1} - \varrho_{-1} \gamma_1 \frac{\alpha_2'}{\alpha_2} \right) A_1' + a_{32} A_2' + \varrho_{-1}^{-1} \frac{\beta_1'}{\beta_1} A_3' + a_{34} A_4' \right) , \\ H_{-1} A_4 &= \sigma_{-1} \varrho_{-1}^{-1} A_4' , \end{aligned}$$

où $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_{-1} \neq 0$, $a_{21}, a_{23}, a_{41}, a_{43}, a_{12}, a_{14}, a_{32}, a_{34}$ sont arbitraires. Pour les homographies $H_1$ et $H_{-1}$ nous avons

$$H_1[A_1A_2A_3A_4] = \sigma_1^4 \frac{\alpha_1'\beta_2'}{\alpha_1\beta_2} [A_1'A_2'A_3'A_4'],$$

$$H_{-1}[A_1A_2A_3A_4] = \sigma_{-1}^4 \frac{\alpha_2'\beta_1'}{\alpha_2\beta_1} [A_1'A_2'A_3'A_4'],$$

de sorte que, vu (1.2), $\sigma_1^4$ on $\sigma_{-1}^4$ sont déterminés univoquement par les relations

$$\sigma_1^4\alpha_1'\beta_2'/\alpha_1\beta_2 = 1 \tag{6.2)'$$

ou

$$\sigma_{-1}^4\alpha_2'\beta_1'/\alpha_2\beta_1 = 1\,. \tag{6.3)'$$

Des relations précédentes on obtient sans peine les homographies $H_1$ et $H_{-1}$ en coordonnées de droite et de plan.

Chacune des homographies signalées réalise un contact analytique du 1[er] ordre du couple correspondant dans la transformation développable; concrètement, on a

$$\begin{aligned} &H[12] = [1'2'], \\ &H\,\mathrm{d}[12] = \mathrm{d}[1'2'] + (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 - \tau_{11} - \tau_{22})[1'2'], \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} &H_1[13] = \sigma_1^2[1'3'], \\ &H_1\,\mathrm{d}[13] = \sigma_1^2\,\mathrm{d}[1'3'] + \sigma_1^2((\gamma_2a_{23} + a_{43})\,\varrho_1\beta_2\omega_1 + \\ &\qquad + \varrho_1^{-1}\alpha_1a_{21}\omega_2 - \tau_{11} - \tau_{33})[1'3'], \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} &H_{-1}[24] = \sigma_{-1}^2[1'4'], \\ &H_{-1}\,\mathrm{d}[24] = \sigma_{-1}^2\,\mathrm{d}[1'4'] + \sigma_{-1}^2(\varrho_{-1}^{-1}\alpha_2a_{12}\omega_1 + \\ &\qquad + (\gamma_1a_{14} + a_{34})\,\varrho_{-1}\beta_1\omega_2 - \tau_{22} - \tau_{44})[2'4']. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Le changement d'orientation de la congruence $L$ est déterminé par (1.15) et (4.7); pour les homographies tangentes $H$, $H_1$, $H_{-1}$ la transformation suivante est en même temps vraie:

$$\begin{pmatrix} \varrho & \mu_1 & \mu_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & \varrho_1 & \varrho_{-1} & \sigma_1 & \sigma_{-1} & a_{21} & a_{23} & a_{41} & a_{43} & a_{12} & a_{14} & a_{32} & a_{34} \\ \varrho^{-1} & \mu_2 & \mu_1 & \lambda_2 & \lambda_1 & \varrho_{-1} & \varrho_1 & \sigma_{-1} & \sigma_1 & a_{12} & a_{14} & a_{32} & a_{34} & a_{21} & a_{23} & a_{41} & a_{43} \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

et la congruence $L_1$ se transforme dans $L_{-1}$. Pour la congruence $L'$ et ses transformées de Laplace des relations analogues à (1.15) et (4.7) sont valables.

L'homographie (6.2) transforme la congruence $L$ engendrée par la droite $[12]$ de telle manière que

$$(6.8)\qquad H_1[12] = \sigma_1^2\left(\varrho_1^2\,\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\,[1'2'] + \varrho_1 a_{23}[1'3']\right),$$

$$(6.9)\qquad H_1\,\mathrm{d}[12] = \sigma_1^2\left\{(.)\,[1'2'] + \frac{\beta_2'}{\beta_2}\,\omega_2[1'4'] - \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\,\omega_1[2'3'] + \right.$$
$$\left. + \left(\varrho_1 a_{23}(\omega_{11} + \omega_{22}) + \varrho_1 a_{43}\omega_2 - \varrho_1^{-1}a_{21}\omega_1\right)[1'3']\right\}.$$

Désignons ${}_0H_1$ une telle homographie $H_1$ pour laquelle on a

$$(6.10)\qquad a_{23} = a_{43} = a_{21} = 0\,,\quad a_{41}, \varrho_1\ \ \text{arb.}\,;$$

alors pour les congruences $L$ et $L'$ satisfaisant aux relations

$$(6.11)_{1-3}\qquad \frac{\beta_2'}{\beta_2} = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} = \varrho^{-2}\,,\quad \sigma_1^4 = \varrho^4$$

(la dernière est une conséquence des deux premières et de (6.2)′) et seulement pour ces congruences sont valables les relations

$$(6.12)\qquad {}_0H_1[12] = \varrho_1^2[1'2']\,,$$

$$(6.13)\qquad {}_0H_1\,\mathrm{d}[12] = \mathrm{d}[1'2'] + (.)\,[1'2']\,.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant: *Si et seulement si les congruences $L$ et $L'$ sont dans la déformation asymptotique de* 1ère (2e) *espèce, il y a $\infty^2$ homographies tangentes $H_1(H_{-1})$* — dépendant de $\varrho_1$ et $a_{41}$ $(\varrho_{-1}$ et $a_{32})$ — *de la transformation développable $L_1 \to L_1'(L_{-1} \to L_{-1}')$ qui réalisent un contact géométrique du* 1er *ordre des congruences $L$ et $L'$ dont le coefficient de dilatation est*

$$(6.14)\qquad j_1 = \varrho_1^{-2}\left(j_{-1} = \varrho_{-1}^{-2}\right).$$

*Si la relation $j_1 = 1(j_{-1} = 1)$ est valable, alors le contact précité est un contact analytique du* 1er *ordre; il y a $\infty^1$ homographies $H_1(H_{-1})$ qui réalisent ce contact.*

La condition nécessaire et suffisante pour que les homographies $H$ et $H_1$ coïncident, c.-à-d. pour qu'il existe une homographie réalisant en même temps les contacts analytiques du 1er ordre des transformations $T(L \to L')$ et $T_1(L_1 \to L_1')$ est: les relations

$$(6.15)\qquad \varrho_2 = \sigma_1^2\,,\quad \varrho_1^2 = 1\,,\quad \lambda_2 = \gamma_2' - \gamma_2\,,$$
$$\lambda_1 = \mu_1 = a_{23} = a_{21} = a_{43} = 0\,,\quad \mu_2 = \sigma_1 a_{41} = \text{arb.}$$

sont vraies et pour les congruences $L$ et $L'$ sont simultanément valables les relations $(6.11)_{1,2}$. Par une particularisation ultérieure des repères des congruences $L$ et $L'$ on peut obtenir que

$$\varrho^2 = 1\,, \quad \alpha_1' = \alpha_1\,, \quad \beta_2' = \beta_2 \tag{6.16}$$

soit vrai. Par les transformations (1.15), (4.7) et (6.7) on obtient les résultats analogues relatifs aux homographies $H$ et $H_{-1}$. On peut énoncer le théorème suivant:

*La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable* (2.1) *soit une bi-déformation du* 1^er^ *ordre des congruences* $L$ *et* $L'$ *et simultanément de leurs transformées de Laplace* $L_1$ *et* $L_1'$ $(L_{-1}$ *et* $L_{-1}')$, *ou en d'autres mots la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une homographie tangente qui réalise un contact analytique des congruences données, est: la transformation développable* $T$ *est une déformation asymptotique du* 1^ère^(2^e^) *espèce des congruences* $L$ *et* $L'$. *L'ensemble des homographies tangentes qui réalisent une bi-déformation dépend d'un paramètre.*

Si l'on demande que tous le trois homographies tangentes $H$, $H_1$ et $H_{-1}$ coïncident, c.-à-d. qu'il existe une homographie tangente réalisant en même temps les contacts analytiques des transformations développables $T$, $T_1$ et $T_{-1}$, alors il est nécessaire et il suffit que

$$\begin{gathered}\varrho^2 = \sigma_1^2 = \sigma_{-1}^{-2}\,, \quad \varrho_1^2 = \varrho_{-1}^2 = 1\,, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = a_{21} = a_{23} = a_{41} = a_{43} = a_{12} = a_{14} = a_{32} = a_{34} = 0\end{gathered} \tag{6.17}$$

soit vrai et en même temps que les congruences $L$ et $L'$ satisfassent aux relations

$$\begin{gathered}\alpha_1' = \varrho^{-2}\alpha_1\,, \quad \alpha_2' = \varrho^2\alpha_2\,, \quad \beta_1' = \varrho^2\beta_1\,, \quad \beta_2' = \varrho^{-2}\beta_2\,, \\ \gamma_1' = \gamma_1\,, \quad \gamma_2' = \gamma_2\,.\end{gathered} \tag{6.18}$$

L'homographie (6.17) coïncide avec l'homographie osculatrice (5.14). Alors, on a le théorème suivant:

*La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable — donnée par* (2.1) — *soit une tri-déformation du* 1^er^ *ordre des congruences* $L$ *et* $L'$ *et de leurs transformées de Laplace, est:* $T$ *est une déformation projective singulière du* 2^e^ *ordre des congruences* $L$ *et* $L'$ *qui sont des congruences* $R$; *l'homographie* (5.14) *qui réalise la tri-déformation citée est une homographie osculatrice de la transformation développable* $T(L \to L')$. On peut particulariser les repères des congruences $L$ et $L'$ de telle façon que

$$\varrho^2 = 1\,, \quad \alpha_1' = \alpha_1\,, \quad \alpha_2' = \alpha_2\,, \quad \beta_1' = \beta_1\,, \quad \beta_2' = \beta_2 \tag{6.19}$$

soit vrai.

Considérons dans la suite les homographies tangentes $H_1$ et $H_{-1}$ des transformations développables $T_1(L_1 \to L_1')$ et $T_{-1}(L_{-1} \to L_{-1}')$. On voit que la condition pour que l'homographie $H_1$ réalise la transformation [24] → [2'4'] est

$$a_{21} = a_{23} = a_{41} = a_{43} = 0\,, \tag{6.20}$$

c.-à-d. l'homographie considérée, que nous voulons désigner par ${}_{-1}H_1$, est déterminée univoquement (mis à part $\varrho_1$) et l'on a

$$(6.21)\qquad {}_{-1}H_1[24] = \sigma_1^2 \frac{\alpha_1'\beta_2'}{\alpha_1\beta_2}[2'4'] = \sigma_1^{-2}[2'4'],$$

$$(6.22)\qquad {}_{-1}H_1\,\mathrm{d}[24] = \sigma_1^2\left\{\left(\left(\gamma_2'\frac{\beta_2'}{\beta_2} - \varrho_1^2\gamma_2\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\right)\omega_1 - \varrho_1^2\beta_1\gamma_1\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\,\omega_2\right)[1'2'] + \right.$$
$$\left. + \alpha_2\frac{\beta_2'}{\beta_2}\,\omega_1[1'4'] + \beta_1\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\,\omega_2[2'3'] + (.)\,[2'4']\right\}.$$

D'une comparaison avec la relation pour $\mathrm{d}[2'4']$, qui est analogue à $(1.13)_2$, il résulte que *la condition nécessaire et suffisante pour que* ${}_{-1}H_1$ *réalise un contact géométrique ou analytique du* 1[er] *ordre des congruences* $L_{-1}$ *et* $L'_{-1}$, *est donnée par*

$$(6.23)\qquad \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} = \varrho_1^2, \quad \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} = \varrho_1^2\frac{\alpha_1'\beta_2}{\alpha_1\beta_2'}, \quad \frac{\alpha_1'\alpha_2'}{\beta_1'\beta_2'} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2},$$

*ou*

$$(6.24)\qquad \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} = \varrho_1^2, \quad \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} = \varrho_1^2\frac{\alpha_1'\beta_2}{\alpha_1\beta_2'}, \quad \varphi = \varphi', \quad \varphi^* = \varphi^{*\prime}$$

*respectivement.* L'homographie ${}_{-1}H_1$ qui réalise un contact analytique du 1[er] ordre des congruences $L_{-1}$ et $L'_{-1}$ (nous la désignons par ${}_{-1}\overline{H}_1$) est déterminée univoquement par les relations (6.24) et l'on a concrètement

$$(6.25)\qquad {}_{-1}\overline{H}_1A_1 = \sigma_1\varrho_1A_1', \quad {}_{-1}\overline{H}_1A_2 = \sigma_1\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\varrho_1A_2',$$
$$ {}_{-1}\overline{H}_1A_3 = \sigma_1\varrho_1^{-1}A_3', \quad {}_{-1}\overline{H}_1A_4 = \sigma_1\varrho_1^{-1}\frac{\beta_2'}{\beta_2}A_4'$$

où $\sigma_1^4$ est déterminé par la relation (6.2)'. Comme l'homographie ${}_{-1}\overline{H}_1$ est une homographie tangente de la transformation développable $L_{-1} \to L'_{-1}$, alors elle doit être un cas spécial de l'homographie $H_{-1}$. Avant tout on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que les homographies $H_{-1}$ et ${}_{-1}\overline{H}_1$ transforment la droite [24] dans une droite arithmétique analogue de la congruence $L'_{-1}$ est que, outre (6.24), pour $\sigma_1$ et $\sigma_{-1}$ la relation

$$(6.26)\qquad \sigma_{-1}^2 = \sigma_1^2\frac{\alpha_1'\beta_2'}{\alpha_1\beta_2}$$

et alors, vu (6.2)' et (6.3)', la relation

$$(6.26)'\qquad \sigma_{-1}^2 = \sigma_1^{-2}$$

soient vraies. Par une comparaison dès homographies (6.3) et (6.25) on obtient

$$(6.27)\qquad \varrho_{-1}^2 = \varrho_1^2\,\frac{\alpha_1'\beta_2}{\alpha_1\beta_2'}\,,\quad a_{12} = a_{14} = a_{32} = a_{34} = 0\,.$$

En changeant l'orientation des congruences $L$ et $L'$ on obtient des résultats analogues pour les congruences $L_1$ et $L_1'$ et l'homographie ${}_1\overline{H}_{-1}(a_{12} = a_{14} = a_{32} = a_{34} = 0)$.

En résumant toutes les relations (6.24), (6.26) et (6.27) on obtient pour les congruences $L$ et $L'$ dans la transformation développable et pour l'homographie ${}_{-1}\overline{H}_1 \equiv {}_1\overline{H}_{-1}$ qui réalise une bi-déformation du 1[er] ordre de leurs transformées de Laplace ces conditions:

(6.28)

$$\varrho_1^2 = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1}\,,\quad \varrho_{-1}^2 = \frac{\gamma_2'}{\gamma_2}\,,\quad a_{21} = a_{23} = a_{41} = a_{43} = a_{12} = a_{14} = a_{32} = a_{34} = 0$$

$$(6.29)\quad \alpha_1' = \sigma_1^{-2}A^2\alpha_1\,,\quad \alpha_2' = \sigma_1^2 A^{-2}\alpha_2\,,\quad \beta_1' = \sigma_1^2 A^2\beta_1\,,\quad \beta_2' = \sigma_1^{-2}A^{-2}\beta_2\,,$$
$$\sigma_1^2 = \sigma_{-1}^{-2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_1'\beta_2'}\right)}\,,\quad A^4 = \frac{\gamma_1\gamma_2'}{\gamma_2\gamma_1'} = \varrho_{-1}^2\varrho_1^{-2}\,.$$

Des relations précédentes on déduit encore les relations

$$(6.29)'\qquad \alpha_1'\beta_1' : \alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 : \alpha_2'\beta_2' = \gamma_2'\gamma_1 : \gamma_1'\gamma_2\,.$$

On a alors le théorème: *La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable* (2.1) *soit une bi-déformation du* 1[er] *ordre des transformées de Laplace des congruences* $L$ *et* $L'$, *est*: *la transformation développable désignée est en même temps une déformation ponctuelle et planaire des congruences* $L$ *et* $L'$ $(\varphi = \varphi',\ \varphi^* = \varphi^{*\prime})$ *et pour les congruences* $L$ *et* $L'$ *la relation* (6.29) *est encore vraie.*

Des relations $(2.12)_{1,2}$ on voit que l'homographie ${}_1\overline{H}_{-1} \equiv {}_{-1}\overline{H}_1$ qui réalise un contact analytique des congruences $L_1$ et $L_1'$ et en même temps des congruences $L_{-1}$ et $L_{-1}'$, ne réalise en général ni une déformation ponctuelle ni planaire. On peut écrire l'homographie (6.25) sous la forme $(\sigma_1\sigma_{-1} = \pm 1)$

$$(6.25)'\qquad {}_{-1}\overline{H}_1 A_1 = \sigma_1\varrho_1 A_1'\,,\quad {}_{-1}\overline{H}_1 A_2 = \sigma_{-1}\varrho_{-1} A_2'\,,$$
$${}_{-1}\overline{H}_1 A_3 = \sigma_1\varrho_1^{-1} A_3'\,,\quad {}_{-1}\overline{H}_1 A_4 = \sigma_{-1}\varrho_{-1}^{-1} A_4'$$

où $\varrho_1$ et $\varrho_{-1}$ sont déterminés par les relations $(6.28)_1$ et $(6.28)_2$. L'homographie (6.25)' transforme les congruences $L$ et $L'$ d'une manière suivante:

$$(6.30)\qquad {}_{-1}\overline{H}_1[12] = \sigma_1\sigma_{-1}\varrho_1\varrho_{-1}[1'2']\,,$$
$${}_{-1}\overline{H}_1\,\mathrm{d}[12] = \sigma_1\sigma_{-1}\,\mathrm{d}[1'2'] + (.)\,[1'2'] + \sigma_1\sigma_{-1}(\varrho_1\varrho_{-1}^{-1} - 1)\,\omega_2[1'4'] -$$
$$- \sigma_1\sigma_{-1}(\varrho_{-1}\varrho_1^{-1} - 1)\,\omega_1[2'3']\,.$$

*Si et seulement si l'on a*

$$\varrho_1\varrho_{-1}^{-1} = \varrho_1^{-1}\varrho_{-1} = 1\,, \tag{6.31}$$

*l'homographie* $_{-1}\overline{H}_1 \equiv {}_1\overline{H}_{-1}$ *réalise un contact géométrique du* 1^er^ *ordre des congruences* $L$ *et* $L'$ *avec le coefficient de dilatation*

$$j = (\varrho_1\varrho_{-1})^{-1} = \sqrt{(\gamma_1\gamma_2/\gamma_1'\gamma_2')}\,. \tag{6.32}$$

Comme on a dans ce cas (d'après (6.31))

$$\varrho_1 = \varrho_{-1}\,, \tag{6.33}$$

alors des relations (6.29) et (6.28)′ il résulte

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2'} = \frac{\beta_2'}{\beta_2} = \frac{\beta_1}{\beta_1'} = \sigma_1^{-2}\,, \quad \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_2}\,(= \varrho_1^2 = \varrho_{-1}^2)\,, \tag{6.34}$$

et les congruences $L$ et $L'$ sont des déformations projectives. Or, l'homographie $_{-1}\overline{H}_1 \equiv {}_1\overline{H}_{-1}$ ne réalise pas cette déformation. Pour que le contact précité du 1^er^ ordre soit un contact analytique il est nécessaire et il suffit que $j = 1$ ou d'après (6.31) et $(6.28)_{1,2}$ la relation $\varrho_1^2 = \varrho_{-1}^2 = 1$ soit vrai et alors la transformation développable $T$ est une déformation projective singulière du 2^e^ ordre, comme on a déduit déjà antérieurement.

**7.** D'après les relations (6.5) et (6.6) les transformations développables $T_1$ et $T_{-1}$ sont des déformations du 1^er^ ordre, ce qui est vrai pour les transformations développables en général. Dans ce chapitre nous allons établir les conditions sous lesquelles les transformations développables $T_1(L_1 \to L_1')$ et $T_{-1}(L_{-1} \to L_{-1}')$ deviennent des déformations projectives.

Nous supposerons que les nappes focales des congruences $L$, $L_1$ et $L_{-1}$ sont non dégénérées et alors outre (1.5) il est encore vrai:

$$\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_5\varepsilon_6 \neq 0\,. \tag{7.1}$$

En se bornant d'abord à la transformation $T_1$ on voit que cette transformation est une déformation projective s'il y a parmi les homographies tangentes (6.2) une telle homographie $^0H_1$ qui réalise pour les congruences $L_1$ et $L_1'$ un contact analytique du 2^e^ ordre, c.-à-d. si l'on a

$$\begin{gathered} {}^0H_1[13] = \sigma_1^2[1'3']\,, \quad {}^0H_1\,\mathrm{d}[13] = \sigma_1^2(\mathrm{d}[1'3'] + \vartheta_1[1'3'])\,, \\ {}^0H_1\,\mathrm{d}^2[13] = \sigma_1^2(\mathrm{d}^2[1'3'] + 2\vartheta_1\,\mathrm{d}[1'3'] + (.)\,[1'3'])\,, \end{gathered} \tag{7.2}$$

où

$$\vartheta_1 = (\gamma_2 a_{23} + a_{43})\,\varrho_1\beta_2\omega_1 + \varrho_1^{-1}\alpha_1 a_{21}\omega_2 - \tau_{11} - \tau_{33}\,. \tag{7.2$'$}$$

Les deux premières conditions sont remplies par une homographie tangente quelconque des congruences arbitraires dans une transformation développable. Il s'agit de déterminer les conditions pour que les congruences $L_1$ et $L_1'$ soient dans une déformation projective; on substitue dans $(7.2)_3$ à $d^2[13]$ d'après

$$(7.3)\quad \begin{aligned} d^2[13] = {} & [12]\,[d(\beta_2\gamma_2\omega_1) + \beta_2\gamma_2(2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33})\,\omega_1 + \\ & + \beta_2\omega_{42}\omega_1 - \alpha_1\omega_{31}\omega_2] + \\ & + [13]\,[d(\omega_{11} + \omega_{33}) + (\omega_{11} + \omega_{33})^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\,\omega_1\omega_2] + \\ & + [24]\,2\alpha_1\beta_2\omega_1\omega_2 + \\ & + [14]\,[d(\beta_2\omega_1) + \beta_2\gamma_2\omega_1\omega_2 + \beta_2(2\omega_{11} + \omega_{33} + \omega_{44})\,\omega_1] + \\ & + [23]\,[d(\alpha_1\omega_2) - \beta_2\gamma_2\omega_1^2 + \alpha_1(\omega_{11} + \omega_{22} + 2\omega_{33})\,\omega_2] + \\ & + [34]\,(\beta_2\omega_1^2 - \alpha_1\omega_2^2) \end{aligned}$$

et à $d^2[1'3']$ une expression analogue. On trouve ensuite

$$(7.4)\quad \begin{aligned} H_1\,d^2[13] = {} & \sigma_1^2\{d^2[1'3'] + 2\vartheta_1\,d[1'3'] + (.)\,[1'3'] + \\ & + x_{12}[1'2'] + x_{24}[2'4'] + x_{14}[1'4'] + x_{23}[2'3'] + x_{34}[3'4']\}\,, \end{aligned}$$

où

$$(7.5)\quad \begin{aligned} x_{12} = {} & \varrho_1^2\,\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\,d(\beta_2\gamma_2\omega_1) - d(\beta_2'\gamma_2'\omega_1) + \left(\gamma_2'\,\frac{\beta_2'}{\beta_2} - \varrho_1^2\gamma_2\,\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\right) d(\beta_2\omega_1) - \\ & - 2\varrho_1\beta_2\beta_2'\gamma_2'(\gamma_2 a_{23} + a_{43})\,\omega_1^2 + \\ & + \left[\gamma_2\gamma_2'\beta_2' - \varrho_1^2\gamma_2^2\beta_2\,\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} - 2\varrho_1\beta_2\alpha_1'(\gamma_2 a_{21} + a_{41})\right]\omega_1\omega_2 + \\ & + \left(\varrho_1^2\beta_2\,\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\,\omega_{42} - \beta_2'\omega_{42}'\right)\omega_1 - (\varrho_1^2\alpha_1'\omega_{31} - \alpha_1'\omega_{31}')\,\omega_2 + \\ & + \beta_2'\gamma_2'(\omega_{33}' - \omega_{22}' - \omega_{33} + \omega_{44})\,\omega_1 + \varrho_1^2\beta_2\gamma_2\,\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\,(\omega_{22} - \omega_{44})\,\omega_1\,, \end{aligned}$$

$$x_{24} = 0$$

$$\begin{aligned} x_{14} = {} & \frac{\beta_2'}{\beta_2}\,d(\beta_2\omega_1) - d(\beta_2'\omega_1) + \beta_2'(\gamma_2 - \gamma_2')\,\omega_1\omega_2 + \\ & + (\tau_{33} - \tau_{44})\,\beta_2'\omega_1 - 2\varrho_1\beta_2\beta_2'(\gamma_2 a_{23} + a_{43})\,\omega_1^2\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{23} = {} & \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}\,d(\alpha_1\omega_2) - d(\alpha_1'\omega_2) - 2\varrho_1^{-1}\gamma_2'\alpha_1\beta_2'a_{23}\omega_1\omega_2 + \beta_2'\gamma_2'(1 - \varrho_1^2)\,\omega_1^2 + \\ & + \left(\varrho_1^{-2}\alpha_1\gamma_2'\,\frac{\beta_2'}{\beta_2} - \gamma_2\alpha_1' - 2\varrho_1^{-1}\alpha_1\alpha_1'a_{21}\right)\omega_2^2 + \alpha_1'(\tau_{11} - \tau_{22})\,\omega_2\,, \end{aligned}$$

$$x_{34} = 2\varrho_1^{-1}\alpha_1\beta_2 a_{23}\omega_1\omega_2 + \beta_2'(\varrho_1^2 - 1)\,\omega_1^2 + \left(\alpha_1' - \varrho_1^{-2}\alpha_1\,\frac{\beta_2'}{\beta_2}\right)\omega_2^2\,.$$

Pour que $H_1$ réalise un contact analytique du 2[e] ordre des congruences $L_1$ et $L_1'$ il est nécessaire et il suffit que

$$(7.6)\qquad x_{12} = x_{24} = x_{14} = x_{23} = x_{34} = 0$$

soit vrai pour $\omega_1$ et $\omega_2$ arbitraires. Par un calcul facile on obtient pour $H_1$ les conditions

$$(7.7)\qquad \begin{aligned} &a_{23} = 0\,, \quad \varrho_1^2 = 1\,, \\ &a_{21} = \frac{2(\gamma_2' - \gamma_2) - \gamma_5' + \gamma_5}{2\varrho_1^{-1}\alpha_1}\,, \quad a_{43} = \frac{\gamma_1' - \gamma_1 - \gamma_4' + \gamma_4}{2\varrho_1\beta_2}\,, \\ &a_{41} = \frac{-2\gamma_2(\gamma_2' - \gamma_2) + \gamma_2(\gamma_5' - \gamma_5) + 2(\alpha_1'\varepsilon_1' - \alpha_1\varepsilon_1)}{2\varrho_1\alpha_1} \end{aligned}$$

et en même temps les conditions pour les congruences considérées

$$(7.8)\qquad \alpha_1'\beta_2 = \alpha_1\beta_1'\,, \quad \varepsilon_2' = \varepsilon_2\,, \quad \varepsilon_6' = \varepsilon_6\,.$$

Des équations différentielles des courbes asymptotiques (1.18) et (4.11) des nappes focales $(A_1)$ et $(A_3)$ et des équations différentielles des courbes asymptotiques sur les nappes focales $(A_1')$ et $(A_3')$ de la congruence $L_1'$ on voit que *les relations* (7.8) *expriment que $L_1$ et $L_1'$ sont dans la déformation asymptotique $(A_1) \to (A_1')$ et $(A_3) \to \to (A_3')$; si $T_1$ est une déformation projective, alors $L$ et $L'$ sont en même temps dans une déformation asymptotique de $1^{\text{ère}}$ espèce.*

Les relations (7.8) qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que la transformation développable $T_1$ (déterminée par les relations (2.1)) soit une déformation projective des congruences $L_1$ et $L_1'$ ont une forme différente de celles qui expriment que (2.1) est une déformation projective des congruences $L$ et $L'$. C'est une conséquence de la particularisation du repère (1.1) réalisée au chapitre 4. Pour que ces conditions aient une forme analogue, il suffit de choisir outre les fonctions arbitraires $\varepsilon_2$ et $\varepsilon_6$ (et de façon analogue dans le cas de la transformation développable $T_{-1}$ outre les fonctions $\varepsilon_3$ et $\varepsilon_5$) les fonctions $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$, $\bar{\varepsilon}_5$, $\bar{\varepsilon}_6$ de la manière suivante:

$$(7.9)\qquad \varepsilon_2 = \beta_2\bar{\varepsilon}_2\,, \quad \varepsilon_3 = \beta_1\bar{\varepsilon}_3\,, \quad \varepsilon_5 = \alpha_2\bar{\varepsilon}_5\,, \quad \varepsilon_6 = \alpha_1\bar{\varepsilon}_6\,.$$

Alors les conditions $(7.8)_{2,3}$ prennent la forme

$$(7.10)\qquad \beta_2\bar{\varepsilon}_2 = \beta_2'\bar{\varepsilon}_2'\,, \quad \alpha_1\bar{\varepsilon}_6 = \alpha_1'\bar{\varepsilon}_6'$$

et vu (6.2)′ on a

$$(7.8)'\qquad \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} = \frac{\beta_2'}{\beta_2} = \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\bar{\varepsilon}_2'} = \frac{\bar{\varepsilon}_6}{\bar{\varepsilon}_6'} = \sigma_1^{-2}\,,$$

qui est ce que sont des relations de la même forme que par ex. (5.2); les deux premières relations (7.8)′ sont vraies aussi dans le cas de la particularisation initiale.

En substituant dans (6.2) $\varrho_1 = 1$ et $a_{23} = 0$ d'après $(7.7)_{1,2}$ on obtient *l'homographie osculatrice ${}^0H_1$ de la déformation projective $T_1$* dans la forme

$$(7.11)\qquad \begin{aligned} {}^0H_1A_1 &= \sigma_1A_1'\,, \\ {}^0H_1A_2 &= \sigma_1a_{21}A_1' + \sigma_1^{-1}A_2'\,, \\ {}^0H_1A_3 &= \sigma_1A_3'\,, \\ {}^0H_1A_4 &= \sigma_1a_{41}A_1' + \sigma_1^{-1}(\gamma_2' - \gamma_2)A_2' + \sigma_1a_{43}A_3' + \sigma_1^{-1}A_4'\,, \end{aligned}$$

où $a_{21}$, $a_{41}$ et $a_{43}$ sont univoquement déterminés par les relations $(7.7)_{1-5}$ et $\sigma_1$ par la relation $(7.8)'$.

On obtient soit par un calcul analogue soit en se servant du changement d'orientation des congruences $L$ et $L'$ des résultats analogues pour la transformation développable $T_{-1}(L_{-1} \to L'_{-1})$: *La transformation développable $T_{-1}$ des congruences $L_{-1}$ et $L'_{-1}$ est une déformation projective si et seulement si pour les congruences données*

$$(7.12) \qquad \alpha'_2\beta_1 = \beta'_1\alpha_2\,, \quad \varepsilon'_3 = \varepsilon_3\,, \quad \varepsilon'_5 = \varepsilon_5$$

*est vrai ou sous la supposition $(7.9)_{2,3}$ si et seulement si*

$$(7.12)' \qquad \frac{\alpha'_2}{\alpha_2} = \frac{\beta'_1}{\beta_1} = \frac{\bar{\varepsilon}_3}{\bar{\varepsilon}'_3} = \frac{\bar{\varepsilon}_5}{\bar{\varepsilon}'_5} = \sigma_{-1}^{-2}$$

*est vrai.* L'homographie osculatrice ${}^0H_{-1}$ est déterminée par les relations

$$(7.13) \qquad \begin{aligned} {}^0H_{-1}A_1 &= \sigma_{-1}^{-1}A'_1 + \sigma_{-1}a_{12}A'_2\,,\\ {}^0H_{-1}A_2 &= \sigma_{-1}\,A'_2\,,\\ {}^0H_{-1}A_3 &= \sigma_{-1}^{-1}(\gamma'_1-\gamma_1)\,A'_1 + \sigma_{-1}a_{32}A'_2 + \sigma_{-1}^{-1}A'_3 + \sigma_{-1}a_{34}A'_4\,,\\ {}^0H_{-1}A_4 &= \sigma_{-1}\,A'_4\,, \end{aligned}$$

où

$$(7.14) \qquad \begin{aligned} a_{12} &= \frac{2(\gamma'_1-\gamma_1)-\gamma'_6+\gamma_6}{2\varrho_{-1}^{-1}\alpha_2}\,, \quad a_{34} = \frac{\gamma'_2-\gamma_2-\gamma'_3+\gamma_3}{2\varrho_{-1}\beta_1}\,,\\ a_{32} &= \frac{-2\gamma_1(\gamma'_1-\gamma_1)+\gamma_1(\gamma'_6-\gamma_6)+2(\alpha'_2\varepsilon'_4-\alpha_2\varepsilon_4)}{2\varrho_{-1}\alpha_2}\,, \quad \varrho_{-1}^2 = 1\,. \end{aligned}$$

On a alors: *La transformation développable $T_1(L_1 \to L'_1)$ et la transformation développable $T_{-1}(L_{-1} \to L'_{-1})$ des transformées de Laplace peuvent être chacune indépendamment aux autres une déformation projective. Si $T_1$ $(T_{-1})$ est une déformation projective, alors $T$ est une déformation asymptotique de 1ère (2e) espèce des congruences $L$ et $L'$.*

Il résulte, vu (5.2), que *les transformations $T$, $T_1$ et $T_{-1}$ sont en même temps des déformations projectives si et seulement si outre $(7.8)'$ et $(7.12)'$ les relations*

$$(7.14) \qquad \sigma_1^{-2} = \sigma_{-1}^2 = \varrho^{-2}$$

*sont encore vraies.*

Les homographies osculatrices qui réalisent les déformations projectives citées sont en général différentes. Si l'on exige qu'une homographie réalise en même temps une déformation projective des deux transformées de Laplace des congruences $L$ et $L'$, cette homographie réalise aussi une déformation projective des congruences $L$ et $L'$ et finalement on obtient que $L$ et $L'$ sont projectivement équivalentes. La démonstration découle d'une comparaison des relations (7.11) et (7.13), d'où l'on obtient

$$\gamma_1' - \gamma_1 = \gamma_2' - \gamma_2 = a_{21} = a_{41} = a_{43} = a_{12} = a_{34} = a_{32} = 0$$

et des relations (4.5) et (4.6).

*Les conditions pour l'existence d'une homographie osculatrice qui réalise en même temps la déformation projective de $L$ et $L'$ et d'une des paires des transformées de Laplace $L_1 \to L_1'$ ou $L_{-1} \to L_{-1}'$* (en se bornant au cas de $L \to L'$ et $L_1 \to L_1'$) *sont*:

$$\gamma_1' - \gamma_1 = \gamma_2' - \gamma_2 = \gamma_5' - \gamma_5 = \gamma_4' - \gamma_4 = 0\,, \tag{7.16}$$

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} = \frac{\beta_2'}{\beta_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_2'} = \frac{\beta_1}{\beta_1'} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1'} = \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\bar{\varepsilon}_2'} = \frac{\bar{\varepsilon}_6}{\bar{\varepsilon}_6'} = \sigma_1^{-2} = \varrho^{-2}\,,$$

*c.-à.-d. $T$ et nécessairement aussi $T_1$ sont des déformations projectives singulières et alors $L$ et $L'$ et leurs transformées de Laplace considérées sont des congruences $R$.* En vertu des relations (4.6) et des relations analogues valables pour la congruence $L'$, des relations (7.16), (7.9) et (5.10) on obtient encore pour ces congruences les conséquences suivantes

$$\varepsilon_2' - \varepsilon_2 = \varepsilon_3' - \varepsilon_3 = \varepsilon_5' - \varepsilon_5 = \varepsilon_6' - \varepsilon_6 = \varepsilon_8' - \varepsilon_8 = \varepsilon_9' - \varepsilon_9 = 0\,, \tag{7.16$'$}$$

$$\varepsilon_4' = \varrho^{-2}\varepsilon_4\,, \quad \tau_{31} = 0\,, \quad \tau_{42} = 0\,.$$

Pour les fonctions $\gamma_3'$, $\gamma_3$, $\gamma_6'$, $\gamma_6$, $\varepsilon_7'$, $\varepsilon_7$, $\varepsilon_{10}'$, $\varepsilon_{10}$ on ne déduit pas de relations.

**8.** La congruence $L$ et leurs transformées de Laplace $L_1$ et $L_{-1}$ sont des transformées développables l'une de l'autre. On peut alors, dans les considérations précédentes, remplacer la paire des congruences $L$ et $L'$ arbitraires par deux congruences arbitraires de la succession de Laplace. Les résultats relatifs à ces cas particuliers seront communiqués dans un Mémoire spécial.

*Littérature*


[1] *E. Čech:* Transformations développables des congruences de droites, Чехосл. мат. журнал, *6* (*81*), 1956, 260—286.

[2] *V. Horák:* Contribution à la théorie des déformations projectives des congruences *W*, Чехосл. мат. журнал, *12* (*87*), 1962, 251—273.



*Adresse de l'auteur:* Jungmannova 40, Brno, ČSSR.