Ladislav Skula

Systeme von stetigen Abbildungen

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 17 (1967), No. 1, 45–52

Czechoslovak Mathematical Journal, 17 (92) 1967, Praha

# SYSTEME VON STETIGEN ABBILDUNGEN

LADISLAV SKULA, Brno

(Eingegangen am 29. Oktober 1965)

**1. Einleitung.** Unter einer Topologie, die in dieser Arbeit behandelt wird, ist die Čechsche Topologie zu verstehen, das heisst: Wenn wir die Topologie mit Hilfe der vollständigen Umgebungssysteme definieren, dann erfüllt das vollständige Umgebungssystem $\Omega(a)$ jedes Punktes $a$ des zuständigen topologischen Raumes nur diese zwei Axiome: (I°) $\Omega(a) \neq \emptyset$, (II°) $O \in \Omega(a) \Rightarrow a \in O$ ([1], 4.1). Die speziellen Topologien bezeichnen wir wie in der Arbeit [1].

In dieser Arbeit wird mit $G, H$ ein Paar von Mengen bezeichnet, für welche $\operatorname{card} G > 1$, $\operatorname{card} H > 1$ gilt. Auf der Menge $G$ sind die Topologien $u_1, u_2$ auf der Menge $H$ die Topologien $v_1, v_2$ gegeben. Für $i = 1, 2$ bezeichnen wir mit $\mathscr{S}_i$ das System aller stetigen Abbildungen des topologischen Raumes $(G, u_i)$ in den topologischen Raum $(H, v_i)$. Ferner setzen wir $\mathscr{S}_i^2 = \{f \mid f \in \mathscr{S}_i, \operatorname{card} f^1(G) = 2\}$.

Wir geben notwendige und hinreichende Bedingungen an, unter welchen $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$ gilt. Nach bestimmten Voraussetzungen für die Topologien $u_i$, $v_i$ sind auch notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, unter welchen $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$ gilt. Ferner wird hier die Anwendung dieser Theorie an die Beziehungen zweischen dem System aller isotonen Abbildungen der teilweise geordneten Menge $G$ in die teilweise geordnete Menge $H$ und dem System aller stetigen Abbildungen des topologischen Raumes $(G, u)$ in den topologischen Raum $(H, v)$ angegeben.

Es sei $(P, u)$ ein topologischer Raum, $a \in P$, $b \in P$. Die Punkte $a, b$ heissen *K-abgetrennt*, wenn eine Umgebung $U_a$ des Punktes $a$ oder eine Umgebung $U_b$ des Punktes $b$ so existiert, dass $b \notin U_a$ oder $a \notin U_b$. Wenn eine Umgebung $U_a$ des Punktes $a$ und eine Umgebung $U_b$ des Punktes $b$ existiert, so dass $a \notin U_b$ und $b \notin U_a$ gilt, dann heissen die Punkte $a, b$ *B-abgetrennt*.[1]) Offenbar gilt: *B-abgetrennte Punkte sind K-abgetrennt.*

Für $i = 1, 2$ bezeichnen wir mit $b_i$ die Menge aller Paare von $B$-abgetrennten Punkten des Raumes $(H, v_i)$; mit $k_i$ die Menge aller Paare von $K$-abgetrennten Punkten des Raumes $(H, v_i)$, welche in diesem Raum nicht $B$-abgetrennt sind; $c_i$ die

[1]) Čech nennt solche Punkte, in der Arbeit [1], (8.1), *abgetrennt*.

Menge aller Paare von verschiedenen Punkten des Raumes $(H, v_i)$, welche hier nicht $K$-abgetrennt sind. Ferner setzen wir $w_{bb} = b_1 \cap b_2$, $w_{bk} = b_1 \cap k_2$, $w_{bc} = b_1 \cap c_2$, $w_{kb} = k_1 \cap b_2$, $w_{kk} = k_1 \cap k_2$, $w_{kc} = k_1 \cap c_2$, $w_{cb} = c_1 \cap b_2$, $w_{ck} = c_1 \cap k_2$, $w_{cc} = c_1 \cap c_2$ und bezeichnen mit $\mathfrak{G}_i$, bzw. $\mathfrak{F}_i$, bzw. $\mathfrak{D}_i$ die Systeme aller offenen, bzw. abgeschlossenen, bzw. *ao*-Mengen[2]) des Raumes $(G, u_i)$ und mit $s_i(y)$ den Durchschnitt aller $v_i$-Umgebungen des Punktes $y \in (H, v_i)$. [3])

**2. Beziehung $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$.** In diesem Absatz werden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, unter welchen $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$ gilt.

**2.1. Hilfssatz.** *Es sei $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$. Dann gilt:*

$$\left.\begin{array}{l} w_{bb} \neq \emptyset \Rightarrow \\ w_{bk} \neq \emptyset \Rightarrow \end{array}\right\} \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2 ,$$

$$w_{kb} \neq \emptyset \Rightarrow \quad \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{D}_2 ,$$

$$\left.\begin{array}{l} w_{cb} \neq \emptyset \Rightarrow \\ w_{ck} \neq \emptyset \Rightarrow \end{array}\right\} u_2 \text{ ist die diskrete Topologie.}$$

Beweis. Da $\operatorname{card} H > 1$ ist, so gibt es verschiedene Punkte $y \in H$, $z \in H$. Es sei $\emptyset \neq X \subsetneqq G$. Wir setzen

$$f(t) = \begin{cases} y \text{ für jedes } t \in X , \\ z \text{ für jedes } t \in G - X , \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} z \text{ für jedes } t \in X , \\ y \text{ für jedes } t \in G - X . \end{cases}$$

Offenbar ist $\operatorname{card} f^1(G) = \operatorname{card} g^1(G) = 2$.

a) Falls $w_{bb} \neq \emptyset$ oder $w_{bk} \neq \emptyset$ ist, dann können wir annehmen, dass $y \notin s_2(z)$ gilt. Wenn $X \in \mathfrak{D}_1$ ist, dann gilt $f \in \mathscr{S}_1^2$, $g \in \mathscr{S}_1^2$ also $f \in \mathscr{S}_2^2$, $g \in \mathscr{S}_2^2$. Dann ist $G - X = f^{-1}(z) \in \mathfrak{G}_2$ und $X = g^{-1}(z) \in \mathfrak{G}_2$. Daher ist $X \in \mathfrak{D}_2$.

b) Falls $w_{kb} \neq \emptyset$ ist, so können wir voraussetzen, dass $y \notin s_2(z)$, $z \notin s_2(y)$ und $y \in s_1(z)$ gilt. Wenn $X \in \mathfrak{G}_1$ ist, dann gilt $f \in \mathscr{S}_1^2$, also $f \in \mathscr{S}_2^2$. Daraus ergibt sich, dass $X = f^{-1}(y) \in \mathfrak{G}_2$ und $G - X = f^{-1}(z) \in \mathfrak{G}_2$ ist, also gilt $X \in \mathfrak{D}_2$.

c) Falls $w_{ck} \neq \emptyset$ oder $w_{ck} \neq \emptyset$ ist, dann können wir annehmen, dass $y \in s_1(z)$, $z \in s_1(y)$ und $y \notin s_2(z)$ ist. Dann gilt $f \in \mathscr{S}_1^2$, also $f \in \mathscr{S}_2^2$. Weil $y \notin s_2(z)$ ist, so gilt $G - X = f^{-1}(z) \in \mathfrak{G}_2$, also $X \in \mathfrak{F}_2$, das heisst, dass $u_2$ die diskrete Topologie ist.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir bezeichnen mit $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ diese Aussagen:

$(\alpha_1)$ für jedes $y \in H$ gilt $s_1(y) \subset s_2(y)$, $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_1 \not\subset \mathfrak{D}_2$,
$(\alpha_2)$ für jedes $y \in H$ gilt $s_1(y) \subset v_2(y)$, $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{G}_1 \not\subset \mathfrak{D}_2$,
$(\alpha_3)$ $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{D}_2$.

---

[2]) Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heisst *ao-Menge*, wenn sie abgeschlossen und offen ist.

[3]) In [1], (3.3) Čech nennt diese Menge die *Sterngruppe des Punktes y*.

Die logische Vereinigung dieser Aussagen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bezeichnen wir mit $\alpha$.

**2.2. Hilfssatz.** *Es gelte $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$, $\mathfrak{G}_1 \not\subset \mathfrak{D}_2$ und es sei $y_1 \in H$, $y_2 \in H$, $y_2 \in s_1(y_1)$ und $y_1 \notin s_2(y_2)$ [resp. $y_2 \notin s_2(y_1)$].*

*Dann gilt die Aussage $\alpha_1$ [resp. $\alpha_2$].*

Beweis. I. Es sei $X \in \mathfrak{G}_1$, $\emptyset \neq X \subsetneqq G$. Wir setzen

$$f(t) = \begin{cases} y_2 & \text{für jedes } t \in X\,, \\ y_1 & \text{für jedes } t \in G - X\,. \end{cases}$$

Dann ist $f \in \mathscr{S}_1^2$, also $f \in \mathscr{S}_2^2$. Weil $y_1 \notin s_2(y_2)$ [resp. $y_2 \notin s_2(y_1)$], in Kraft ist, so gilt $X = f^{-1}(y_2) \in \mathfrak{G}_2$ [resp. $G - X = f^{-1}(y_1) \in \mathfrak{G}_2$, also $X \in \mathfrak{F}_2$]. (Hier wurde noch nicht die Voraussetzung $\mathfrak{G}_1 \not\subset \mathfrak{D}$ benützt.)

II. Wir nehmen an, dass es einen solchen Punkt $y \in H$ gibt, dass $s_1(y) \not\subset s_2(y)$ [resp. $s_1(y) \not\subset v_2(y)$] gilt. Dann gibt es einen Punkt $y' \in s_1(y) - s_2(y)$ [resp. $y' \in s_1(y) - v_2(y)$]. Da $\mathfrak{G}_1 \not\subset \mathfrak{D}_2$ gilt, so gibt es solche Menge $M \subset G$, dass $M \in \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{D}_2$ ist. Wir setzen

$$g(t) = \begin{cases} y & \text{für jedes } t \in G - M\,, \\ y' & \text{für jedes } t \in M\,. \end{cases}$$

Es ist $g \in \mathscr{S}_1^2$, also $g \in \mathscr{S}_2^2$. Weil $y' \notin s_2(y)$ [resp. $y' \notin v_2(y)$, das heisst, dass $y \notin s_2(y')$ gilt] ist, so gilt $G - M = g^{-1}(y) \in \mathfrak{G}_2$ [resp. $M = g^{-1}(y') \in \mathfrak{G}_2$]. Nach I ist $M \in \mathfrak{G}_2$ [resp. $M \in \mathfrak{F}_2$], also $M \in \mathfrak{D}_2$, was ein Widerspruch ist.

Also ist 2.2 in Kraft.

**2.3. Hilfssatz.** *Es sei $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$ und $w_{kk} \neq \emptyset$. Dann gilt die Aussage $\alpha$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass die Aussage $\alpha$ nicht in Kraft ist. Dann gilt nicht die Aussage $\alpha_3$, also $\mathfrak{G}_1 \not\subset \mathfrak{D}_2$. Da $w_{kk} \neq \emptyset$ ist, so gibt es solche Punkte $y_1 \in H$, $y_2 \in H$, dass $y_2 \in s_1(y_1)$, $y_1 \notin s_1(y_2)$ ist und es gilt entweder (a) $y_2 \in s_2(y_1)$, $y_1 \notin s_2(y_2)$ oder (b) $y_1 \in s_2(y_2)$, $y_2 \notin s_2(y_1)$.

Gilt (a) oder (b), so folgt nach 2.2, dass die Aussage $\alpha_1$ oder $\alpha_2$ gilt, was ein Widerspruch ist.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Für $\lambda, \mu = b, k, c$ bezeichnen wir mit $\varepsilon_{\lambda\mu}$ die Aussage $w_{\lambda\mu} \neq \emptyset$ und ordnen jeder Aussage $\varepsilon_{\lambda\mu}$ eine Aussage $\varphi(\varepsilon_{\lambda\mu})$ wie folgt zu: $\varphi(\varepsilon_{bb}) \equiv \varphi(\varepsilon_{bk}) \equiv \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$; $\varphi(\varepsilon_{bc}) \equiv \varphi(\varepsilon_{kc}) \equiv \varphi(\varepsilon_{cc}) \equiv \beta$, wo $\beta$ eine Aussage bezeichnet, welche stets wahr ist; $\varphi(\varepsilon_{kb}) \equiv \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{D}_2$; $\varphi(\varepsilon_{kk}) \equiv \alpha$; $\varphi(\varepsilon_{cb}) \equiv \varphi(\varepsilon_{ck}) \equiv u_2$ ist die diskrete Topologie.

**2.4. Satz.** *Sei $\Sigma$ die Menge von solchen Aussagen $\varphi(\varepsilon_{\lambda\mu})$ $(\lambda, \mu = b, k, c)$, dass die Aussage $\varepsilon_{\lambda\mu}$ gilt.*

*Dann ist die Aussage $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$ mit der logischen Konjunktion $\xi$ der Aussagen von der Menge $\Sigma$ äquivalent.*

Der besseren Übersicht wegen führe ich diese Tafel an.

| *die Aussage* $\varepsilon_{\lambda\mu}$ | | $\varepsilon_{bb}$ | $\varepsilon_{bk}$ | $\varepsilon_{bc}$ | $\varepsilon_{kb}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $w_{\lambda\mu} \neq \emptyset$ | | $b_1 \cap b_2 \neq \emptyset$ | $b_1 \cap k_2 \neq \emptyset$ | $b_1 \cap c_2 \neq \emptyset$ | $k_1 \cap b_2 \neq \emptyset$ |
| *die Aussage* $\varphi(\varepsilon_{\lambda\mu})$ | | $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$ | | $\beta$ | $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{D}_2$ |
| *die Aussage* $\varepsilon_{\lambda\mu}$ | $\varepsilon_{kk}$ | $\varepsilon_{kc}$ | $\varepsilon_{cb}$ | $\varepsilon_{ck}$ | $\varepsilon_{cc}$ |
| $w_{\lambda\mu} \neq \emptyset$ | $k_1 \cap k_2 \neq \emptyset$ | $k_1 \cap c_2 \neq \emptyset$ | $c_1 \cap b_2 \neq \emptyset$ | $c_1 \cap k_2 \neq \emptyset$ | $c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$ |
| *die Aussage* $\varphi(\varepsilon_{\lambda\mu})$ | $\alpha$ | $\beta$ | $u_2$ *ist die diskrete Topologie* | | $\beta$ |

Beweis. Ist $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$, so folgt aus 2.1 und 2.3 die Gültigkeit der Aussage $\xi$. Es gelte also die Aussage $\xi$ und es sei $f \in \mathscr{S}_1^2$. Dann ist $f^1(G) = \{y_1, y_2\}$, wo $y_1 \in H$, $y_2 \in H$, $y_1 \neq y_2$ gilt. Es gibt $\lambda$, $\mu(\lambda, \mu = b, k, c)$, so dass $(y_1, y_2) \in w_{\lambda\mu}$. Dann gilt die Aussage $\varepsilon_{\lambda\mu}$ und darum gilt auch die Aussage $\varphi(\varepsilon_{\lambda\mu})$. Ist $\lambda = c$ oder $\mu = c$, so ist $f \in \mathscr{S}_2^2$. Ist $\lambda = b$, so gilt $f^{-1}(y_1) \in \mathfrak{D}_1$, $f^{-1}(y_2) \in \mathfrak{D}_1$. Für $\mu = b$ oder $\mu = k$ folgt aus der Aussage $\varphi(\varepsilon_{b\mu}) \equiv \mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$ die Aussage $f \in \mathscr{S}_2^2$. Für $\lambda = b$, $\mu = b$ bekommt man leicht $f \in \mathscr{S}_2^2$ aus der Aussage $\varphi(\varepsilon_{kb})$.

Es sei $\lambda = k$, $\mu = k$. Wir können annehmen, dass $y_2 \in s_1(y_1)$ und $y_1 \notin s_1(y_2)$ gilt. Dann ist $f^{-1}(y_2) \in \mathfrak{G}_1$. Gilt die Aussage $\alpha_3$, so ist $f \in \mathscr{S}_2^2$. Gilt die Aussage $\alpha_1$, so ist $y_2 \in s_2(y_1)$, $f^{-1}(y_2) \in \mathfrak{G}_2$, also $f \in \mathscr{S}_2^2$. Gilt die Aussage $\alpha_2$, so ist $y_2 \in v_2(y_1)$, das heisst, dass $y_1 \in s_2(y_2)$ ist. Ferner gilt $f^{-1}(y_2) \in \mathfrak{F}_2$, das heisst, dass $f^{-1}(y_1) = G - - f^{-1}(y_2) \in \mathfrak{G}_2$ ist. Also ist $f \in \mathscr{S}_2^2$.

Damit ist der Satz bewiesen.

**3. Beziehung** $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$. In diesem Absatz werden gewisse Voraussetzungen für die Topologien $u_i$ und $v_i$ angegeben, unter welchen die Behauptungen $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$ und $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$ äquivalent sind.

**3.1. Hilfssatz.** *$u_1$ sei eine KU-Topologie, $u_2$ keine B-Topologie*[4]*. Dann gilt* $\mathfrak{G}_1 \not\subset \mathfrak{D}_2$.

Beweis. Weil $u_2$ keine $B$-Topologie ist, gibt es Punkte $x \in G$, $x' \in G$, $x \neq x'$, so dass sich $x'$ in jeder $u_2$-Umgebung des Punktes $x$ befindet. Da $u_1$ eine $KU$-Topologie

---

[4]) Nach [1] ist eine $K$-Topologie eine solche Topologie bei welcher alle Punkte $K$-abgetrennt sind; in einer $B$-Topologie sind alle Punkte $B$-abgetrennt und eine $U$-Topologie erfüllt das Axiom $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$.

ist, gibt es eine $u_1$ — offene Menge $X$, so dass entweder $x \in X$, $x' \notin X$ oder $x' \in X$, $x \notin X$ gilt. Wenn $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{D}_2$ gelten würde, dann wären $X$ und $G - X$ $u_2$ — offene Mengen, also wären die Punkte $x$, $x'$ $B$-abgetrennt, was ein Widerspruch wäre.

**3.2. Hilfssatz.** *Es seien $v_1, v_2$ K-Topologien, $v_1$ keine B-Topologie, $u_1$ eine KU-Topologie, $u_2$ keine B-Topologie.*

*Dann ist die Aussage $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$ mit der logischen Vereinigung $\gamma$ folgender zwei Aussagen äquivalent:*

($\gamma_1$) *für jeden Punkt $y \in H$ gilt $s_1(y) \subset s_2(y)$ und $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2$,*
($\gamma_2$) *für jeden Punkt $y \in H$ gilt $s_1(y) \subset v_2(y)$ und $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{F}_2$.*

Beweis. Nach 3.1 ist $\mathfrak{G}_1 \not\subset \mathfrak{D}_2$. Da $v_1, v_2$ $K$-Topologien sind, gilt $c_1 = c_2 = \emptyset$, also $w_{bc} = w_{kc} = w_{cb} = w_{ck} = w_{cc} = \emptyset$.

Gilt die Aussage $\gamma$, so ist $w_{kb} \neq \emptyset$. Weil $v_1$ keine $B$-Topologie ist, so gilt $w_{kk} \neq \emptyset$. Aus der Aussage $\gamma$ folgt $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$ und die Aussage $\alpha$, aus 2.4 ergibt sich dann $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$.

Ist $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$ so folgt $w_{kb} = \emptyset$ aus 2.4. Weil $v_1$ keine $B$-Topologie ist, gilt $w_{bk} \neq \emptyset$ und aus 2.4 folgt, dass die Aussage $\gamma$ gilt.

**3.3. Hilfssatz.** *Gilt die Aussage $\gamma_2$ und ist $u_1$ eine U-Topologie, so ist $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$.*

Beweis. Es sei $f \in \mathscr{S}_1$, $x_0 \in G$, $y_0 = f(x_0) \in H$. Da $u_1$ eine $U$-Topologie ist, gilt $G - u_1 x_0 \in \mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ also $u_1 x_0 \in \mathfrak{G}_2$. Ferner gilt $s_1(y) \subset v_2(y)$ für jeden Punkt $y \in H$, woraus sich $v_1(y_0) \subset s_2(y_0)$ ergibt. Es ist $f(u_1 x_0) \subset v_1(f(x_0)) = v_1(y_0) \subset \subset s_2(y_0)$. Also gilt $f \in \mathscr{S}_2$.

**3.4. Satz.** *Es gelten die in 3.2 angeführten Voraussetzungen. Ausserdem seien $v_1$ oder $u_2$ Topologien, bei welchen jeder Punkt des entsprechenden Raumes die kleinste Umgebung hat.*[5]

*Dann sind folgende Behauptungen äquivalent:*

($A$) $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$.
($B$) $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$.
($C$) *Die Aussage $\gamma$ ist richtig.*

Beweis. Aus (A) folgt offenbar (B). Wenn (B) gilt, so gilt (C) nach 3.2.

Es sei (C) in Kraft. Gilt die Aussage $\gamma_2$, so ist nach 3.3 $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$. Wir nehmen an, dass die Aussage $\gamma_1$ gilt.

Es sei $f \in \mathscr{S}_1$, $x \in G$, $y = f(x) \in H$, $V_2$ eine $v_2$-Umgebung des Punktes $y$.

I. Wir nehmen an, dass $y$ die kleinste $v_1$-Umgebung $V_1$ hat. Dann gilt $V_1 = s_1(y) \subset \subset s_2(y) \subset V_2$. Es gibt eine $u_1$-offene Umgebung $U_1$ des Punktes $x$, so dass $f^1(U_1) \subset \subset V_1$. Es ist $U_1 \in \mathfrak{G}_2$, $f^1(U_1) \subset V_2$. Also gilt $f \in \mathscr{S}_2$.

II. Wir nehmen an, dass $U_2$ die kleinste $u_2$-Umgebung des Punktes $x$ ist. Es sei $V_1$

[5]) Der Charakter jedes Punktes des entsprechenden Raumes ist gleich 1.

eine beliebige $v_1$-Umgebung des Punktes $y$. Dann gibt es eine $u_1$-offene Umgebung $U_1$ des Punktes $x$, so dass $f^1(U_1) \subset V_1$ gilt. Es ist $U_1 \in \mathfrak{G}_2$, also $U_2 \subset U_1$; daraus folgt, dass $f^1(U_2) \subset s_1(y)$ ist. Weil die Aussage $\gamma_1$ gilt, so ist $f^1(U_2) \subset s_2(y) \subset V_2$. Also ist $f \in \mathscr{S}_2$ in Kraft.

Damit ist der Satz bewiesen.

**4. Systeme von isotonen und stetigen Abbildungen.** In diesem Teil der Arbeit werden die Sätze, die ähnlich den Behauptungen in dem Absatz 2 der Arbeit [2] angeführt sind. Unter einer geordneten Menge wird hier eine halbgeordnete Menge verstanden.

Es sei $M$ eine geordnete Menge, $A \subset M$ eine Teilmenge von $M$. Wenn aus $t_1 \in A$, $t_2 \in M$, $t_2 < t_1$ stets $t_2 \in A$ folgt, dann heisst die Menge $A$ *Anfang der Menge* $M$. Insbesondere heisst die Menge $A(t_0) = \{t \mid t \in M,\ t \leqq t_0\}$ *durch* $t_0 \in M$ *erzeugter Hauptanfang*. Dual werden das *Ende* und das *durch* $t_0 \in M$ *erzeugte Hauptende* $E(t_0) = \{t \mid t \in M,\ t \geqq t_0\}$ erklärt.[6])

Eine Topologie $\tau$ auf der geordneten Menge $M$ heisst *allgemeine linke Topologie* [*allgemeine rechte Topologie*], wenn

$$\bigcap_{U \in U(t_0)} U = A(t_0) \quad \Big[\bigcap_{U \in U(t_0)} U = E(t_0)\Big]$$

bei jedem $t_0 \in M$ richtig ist, wo $U(t_0)$ das System aller $\tau$-Umgebungen des Elementes $t_0$ ist. Ist $\tau$ eine allgemeine linke Topologie [allgemeine rechte Topologie], bei welcher die Menge $A(t_0)$ $[E(t_0)]$ eine Umgebung des Elementes $t_0$ für jedes $t_0 \in M$ ist, heisst $\tau$ *linke Topologie* [*rechte Topologie*] *auf* $M$. [7])

In diesem Absatz wird mit $G, H$ ein Paar von geordneten Mengen bezeichnet, welche keine Gegenketten[8]) sind. (Daraus folgt, dass $\operatorname{card} G > 1$, $\operatorname{card} H > 1$ ist.) Auf der Menge $G$ ist eine $KU$-Topologie $u$ und auf der Menge $H$ eine $K$-Topologie $v$ gegeben. Wir nehmen an, dass $u, v$ keine $B$-Topologien sind. Wir bezeichnen mit $\mathscr{I}$ das System aller isotonen Abbildungen der geordneten Menge $G$ in die geordnete Menge $H$, $\mathscr{S}$ das System aller stetigen Abbildungen des topologischen Raumes $(G, u)$ in den topologischen Raum $(H, v)$ und wir setzen $\mathscr{I}^2 = \{f \mid f \in \mathscr{I}, \operatorname{card} f^1(G) = 2\}$, $\mathscr{S}^2 = \{f \mid f \in \mathscr{S}, \operatorname{card} f^1(G) = 2\}$. Für $y \in H$ bezeichnen wir mit $s(y)$ den Durchschnitt aller $v$-Umgebungen des Punktes $y$.

**4.1. Satz.** *Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

(A) $\mathscr{I} \subset \mathscr{S}$.

(B) $\mathscr{I}^2 \subset \mathscr{S}^2$.

---

6) Diese Definitionen sind in [2] angeführt.

7) Diese Definitionen sind in [2] angeführt, hier bezeichnet allerdings $\tau$ eine Čechsche Topologie.

8) Eine *Gegenkette* ist eine geordnete Menge, in der je zwei verschiedene Elemente unvergleichbar sind.

$(C)$ (a) *Für jedes* $y \in H$ *gilt* $A(y) \subset s(y)$ *und für jedes* $x \in G$ *gibt es eine Umgebung* $U$ *dieses Punktes, so dass* $U \subset A(x)$, *oder* (b) *Für jedes* $y \in H$ *gibt* $E(y) \subset s(y)$ *und für jedes* $x \in G$ *gibt es eine Umgebung* $U$ *dieses Punktes, so dass* $U \subset E(x)$. [9])

Beweis. Wir bezeichnen mit $u_1(v_1)$ die linke Topologie auf der Menge $G(H)$, welche durch die gegebene Ordnung erzeugt wird. Diese Topologien sind $KU$-Topologien, aber sie sind keine $B$-Topologien. Ferner setzen wir $u_2 = u$, $v_2 = v$. Dann gilt $\mathscr{I} = \mathscr{S}_1$, $\mathscr{S} = \mathscr{S}_2$, $\mathscr{I}^2 = \mathscr{S}_1^2$, $\mathscr{S}^2 = \mathscr{S}_2^2$; $A(y) = s_1(y)$, $s(y) = s_2(y)$, $E(y) = v_1(y)$ für $y \in H$ und $\mathfrak{G}_1$ ist das System von allen Anfängen der Menge $G$.

Die Voraussetzungen des Satzes 3.4 sind erfüllt und die Behauptung $s_1(y) \subset v_2(y)$ für jedes $y \in H$ ist mit der Behauptung $v_1(y) \subset s_2(y)$ für jedes $y \in H$ äquivalent. Die Aussage $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2$ ist mit der Aussage äquivalent: für jedes $x \in G$ gibt es eine Umgebung $U$ dieses Punktes, so dass $U \subset A(x)$ gilt; die Aussage $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ ist mit der Aussage äquivalent: für jedes $x \in G$ gibt es eine Umgebung $U$ dieses Punktes, so dass $U \subset E(x)$ in Kraft ist.

Aus 3.4 ergibt sich jetzt dieser Satz.

**4.2. Satz.** *Die folgenden Behauptungen sind äquivalent*:

$(A)$ $\mathscr{S} \subset \mathscr{I}$.

$(B)$ $\mathscr{S}^2 \subset \mathscr{I}^2$.

$(C)$ (a) *Für jedes* $y \in H$ *gilt* $s(y) \subset A(y)$ *und für jede Umgebung* $U$ *eines beliebigen Punktes* $x \in G$ *gilt* $U \supset A(x)$ *oder* (b) *Für jedes* $y \in H$ *gilt* $s(y) \subset E(y)$ *und für jede Umgebung* $U$ *eines beliebigen* $x \in G$ *gilt* $U \supset E(x)$. [9])

Beweis. Wir setzen $u_1 = u$, $v_1 = v$, wo $u_2(v_2)$ die linke Topologie auf der Menge $G(H)$ ist, welche durch die gegebene Ordnung erzeugt wird. Die Voraussetzungen des Satzes 3.4 sind erfüllt. Es gilt $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1$, $\mathscr{I} = \mathscr{S}_2$, $\mathscr{S}^2 = \mathscr{S}_1^2$, $\mathscr{I}^2 = \mathscr{S}_2^2$; ferner ist $s(y) = s_1(y)$, $A(y) = s_2(y)$, $E(y) = v_2(y)$ für jedes $y \in H$ und $\mathfrak{G}_2$ ist das System von allen Anfängen der Menge $G$.

Die Aussage $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2$ ist mit der Aussage äquivalent: für jede Umgebung $U$ eines beliebigen Punktes $x \in G$ gilt $U \supset A(x)$. Die Aussage $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{F}_2$ ist mit der Aussage äquivalent: für jede Umgebung $U$ eines beliebigen Punktes $x \in G$ gilt $U \supset E(x)$.

Nach 3.4 gilt dieser Satz.

**4.3. Satz.** *Die folgenden Behauptungen sind äquivalent*:

$(A)$ $\mathscr{I} = \mathscr{S}$.

$(B)$ $\mathscr{I}^2 = \mathscr{S}^2$.

$(C)$ *$u$ ist die linke und $v$ ist eine allgemeine linke Topologie oder*
*$u$ ist die rechte und $v$ ist eine allgemeine rechte Topologie.* [9])

Beweis. Gilt (A), so gilt offenbar (B). Aus (C) folgt (A) nach 4.1 und 4.2.
Es sei (B) in Kraft. Dann gibt es nach 4.1 und 4.2 zwei Möglichkeiten:

---

[9]) Beide Behauptungen sind mit Rücksicht auf gegebene Ordnung auf den Mengen $G$, $H$ dual.

I. $s(y) \supset A(y)$ und $A(y) \supset s(y)$ oder $E(y) \supset s(y)$ für jeden Punkt $y \in H$. Wenn $A(y) \supset s(y)$ ist, dann gilt $s(y) = A(y)$ und $v$ ist eine allgemeine linke Topologie; nach 4.1 und 4.2 folgt, dass $u$ die linke Topologie ist.

Wenn $E(y) \supset s(y)$ für jeden Punkt $y \in H$ gilt, dann gilt $E(y) = A(y)$, also ist $H$ eine Gegenkette. Das ist aber ein Widerspruch.

II. $s(y) \supset E(y)$ und $s(y) \subset E(y)$ oder $s(y) \subset A(y)$. Ähnlich wie in I beweist man in diesem Fall, dass $v$ eine allgemeine rechte und $u$ eine rechte Topologie ist.

*Literaturverzeichnis*

[1] *E. Čech:* Topologické prostory, Čas. pěst. mat. a fys. *66* (1937), S. D 225—264.

[2] *M. Novotný* und *L. Skula:* Über gewisse Topologien auf geordneten Mengen, Fundam. Math. *56* (1965), S. 313—324.

*Anschrift des Verfassers:* Brno, Janáčkovo nám. 2a, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UJEP).

## Резюме

## СЫСТЕМЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

ЛАДИСЛАВ СКУЛА (Ladislav Skula), Брно

В этой статье приведены необходимые и достаточные условия, при которых $\mathscr{S}_1^2 \subset \mathscr{S}_2^2$, где $\mathscr{S}_i^2 = \{f \mid f \in \mathscr{S}_i, \operatorname{card} f^1(G) = 2\}$ и $\mathscr{S}_i$ обозначает систему всех непрерывных отображений топологического пространства $(G, u_i)$ в топологическое пространство $(H, v_i)$ $(i = 1, 2)$.

При некоторых предположениях для топологий $u_i$, $v_i$, указаны в этой работе тоже необходимые и достаточные условия, при которых $\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2$.

Этой теорией пользуются к изучению отношений между системой всех изотонных отображений частично упорядоченного множества $G$ в частично упорядоченное множества $H$ и системой всех непрерывных отображений топологического пространства $(G, u)$ в топологическое пространства $(H, v)$.

Топологическим пространством разумеется здесь топологическое пространство Чеха, это значит пространство, в котором выполнены следующие аксиомы: $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $M \subset N \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{N}$, $M \subset \overline{M}$.