Czechoslovak Mathematical Journal

Zdeněk Hustý

Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. III. Äquivalenz

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 16 (1966), No. 2, 161–185

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100722`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *16* (*91*) ПРАГА 18. VI. 1966 г., No 2

ÜBER DIE TRANSFORMATION UND ÄQUIVALENZ HOMOGENER LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VON HÖHERER ALS DER ZWEITEN ORDNUNG

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 24. Januar 1962, im umgearbeiteter Form am 3. Juli 1964)

(*Ende*)

III. TEIL. ÄQUIVALENZ REGULÄRER GLEICHUNGEN MIT STETIGER DIMENSION

VORBEMERKUNGEN

Wir stellen fest, daß

$$(\alpha) \qquad z^{(n)}(\xi) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \alpha_i(\xi)\, z^{(n-i)}(\xi) = 0\,, \quad \xi \in J_1\,,$$

$$(\beta) \qquad z^{[n]}(\tau) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \beta_i(\tau)\, z^{[n-i]}(\tau) = 0\,, \quad \tau \in J_2\,,$$

$$(\mathrm{a}) \qquad y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k(x)\, y^{(n-k)}(x) = 0\,, \quad x \in I_1\,,$$

$$(\mathrm{b}) \qquad z^{[n]}(t) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} b_i(t)\, z^{[n-i]}(t) = 0\,, \quad t \in I_2$$

reguläre Gleichungen mit stetiger Dimension sind, s. [4], I. Teil, Definition 1,4 – kurz [4-I; 1,4]. Wenn wir in der Gleichung (a) die Transformation $y(x) = u(x)\, Z(x)$, $\tau = T(x)$, wobei $\{T(x), u(x)\} \in m(I_{1x})$, $I_{1x} \subset I_1$, s. [4-I; 3,2.7], verwenden, erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$(\bar{\mathrm{a}}) \qquad u(T')^n \left[z^{[n]}(\tau) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} z^{[n-i]}(\tau)\,(T')^{-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k \Phi^{n,i}_{i-k}(\eta, \zeta) \right] = 0\,, \quad \tau \in J_{2\tau}\,,$$

die wir als Bild der Koordinaten $\{T(x), u(x)\}$ von (a) im Intervall I_{1x} bezeichnen, wobei wir $x = T_{-1}(\tau)$, $z(\tau) = Z[T_{-1}(\tau)]$,

$$J_{2\tau} = T(I_{1x}), \tag{0.1}$$

$$\eta = \frac{T''(x)}{T'(x)}, \quad x \in I_{1x}, \tag{0.2}$$

$$\zeta = \frac{u'(x)}{u(x)}, \quad x \in I_{1x} \tag{0.3}$$

setzen, s. [4-I; 3,1.10]. Das Bild (ā) ist in $J_{2\tau}$ eine reguläre Gleichung mit stetiger Dimension, s. [4-I; 3,1.11 Folg.].

Das halbkanonische Bild (Ā) $\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ ist von der Gestalt

$$U(T')^n \left[z^{[n]}(\tau) + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} z^{[n-i]}(\tau)\,(T')^{-i} \sum_{k=0}^{i} A_k \Phi_{i-k}^{n,i}(\eta) \right] = 0 \quad \tau \in J_{2\tau} \tag{Ā}$$

mit

$$U(x) = c|T'(x)|^{(1-n)/2} \,.\, \exp\left\{ -\int_{x_0}^{x} a_1 \,\mathrm{ds} \right\}, \quad 0 \neq c \in E_1, \tag{0.4}$$

wo $x = T_{-1}(\tau)$, $A_0 = 1$, $A_1 = 0$, (0.1), (0.2) gilt und A_k, $k = 2, 3, \ldots, n$ die Hauptkoeffizienten von (a) sind, s. [4-I; 3,2.15].

Das kanonische Bild $(\bar{\alpha})$ $\{T(x)\} \in k_a(I_{1x})$ ist von der Gestalt

$$U(T')^n \left\{ z^{[n]}(\tau) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} z^{[n-i]}(\tau)\,(T')^{-i} \sum_{\nu=0}^{i} \eta^\nu \sum_{\mu=\nu}^{i} \left[\binom{i}{\mu} \Big/ \binom{n-i+\mu}{\mu} \right] . \right.$$
$$\left. . A_{i-\mu} F_{\mu-\nu}^{n,i,i-\mu}(A_2) \right\} = 0\,, \quad \tau \in J_{2\tau} \tag{$\bar{\alpha}$}$$

mit $x = T_{-1}(\tau)$, wo $T(x)$ eine Lösung der Gleichung

$$\{T, x\} = \frac{3}{n+1} A_2, \quad x \in I_{1x} \tag{0.5}$$

ist und (0.1), (0.2), (0.4), gilt, s. [4-I; 3,3.5]. Die Gleichung (0.5) können wir mit Hilfe von (0.2) umformen und finden

$$\eta' = \tfrac{1}{2}\eta^2 + \frac{6}{n+1} A_2, \quad x \in I_{1x}. \tag{0.6}$$

Das kanonische Bild $(\bar{\bar{\alpha}})$ $\{T(\xi)\} \in k_\alpha(J_{1\xi})$, $J_{1\xi} \subset J_1$ ist von der Form

$$(\bar{\bar{\alpha}}) \quad U_1(T')^n \left[z^{[n]}(\tau) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} z^{[n-i]}(\tau)\,(T')^{-i} \sum_{\nu=0}^{i-3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu} \binom{i}{\nu} \binom{i-1}{\nu} \nu!\, \alpha_{i-\nu}\eta^{\nu} \right] = 0\,,$$

$$\tau \in J_{2\tau}$$

mit $\xi = T_{-1}(\tau)$, $U_1(x) = c|T'(\xi)|^{(1-n)/2}$, $0 \neq c \in E_1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, wo $T(\xi)$ eine Lösung der Gleichung

$$(0.7) \qquad \{T, \xi\} = 0\,, \quad \xi \in J_{1\xi}$$

ist und (0.2),

$$(0.8) \qquad J_{2\tau} = T(J_{1\xi})$$

gilt, s. [4-I; 3,3.6].

1. HILFSSÄTZE

Hilfssatz 1.1. *Die Beziehung*

$$(1.1) \qquad (\mathrm{a})\ I_{1x} \sim (\beta)\ J_{2\tau}\{T(x)\}$$

gilt dann und nur dann, wenn

$$(1.2) \qquad \beta_i[T(x)]\,[T'(x)]^i = \sum_{\nu=0}^{i} \eta^{\nu} \sum_{\mu=\nu}^{i} \left[\binom{i}{\mu} \Big/ \binom{n-i+\mu}{\mu} \right] A_{i-\mu} F_{\mu-\nu}^{n,i,i-\mu}(A_2)\,,$$

$$i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad x \in I_{1x}$$

mit (0.2) *in Kraft ist, wobei* $T(x)$ *der Gleichung* (0.5) *genügt.*

Folgt aus [4-II; 2.17]. Es ist zu bemerken, daß in (1.1) $I_{1x} \subset I_1$, $J_{2\tau} \subset J_2$, (0.1) vorausgesetzt wird, s. [4-II; 2.16a)].

Hilfssatz 1.2. *Die Beziehung*

$$(1.3) \qquad (\alpha)\ J_{1\xi} \sim (\beta)\ J_{2\tau}\{T(\xi)\}$$

gilt dann und nur dann, wenn

$$(1.4) \qquad \beta_i[T(\xi)]\,[T'(\xi)]^i = \sum_{\nu=0}^{i-3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu} \binom{i}{\nu} \binom{i-1}{\nu} \nu!\, \alpha_{i-\nu}(\xi)\, \eta^{\nu}\,, \quad \xi \in J_{1\xi}\,,$$

$$i = 3, 4, \ldots, n\,,$$

mit $\eta = T''(\xi)/T'(\xi)$ *in Kraft ist, wobei* $T(\xi)$ *der Gleichung* (0.7) *genügt.*

Folgt aus [4-II; 2.18].

Hilfssatz 1.3. *Es gelte* (1.1). *Dann ist*

$$\beta_i^{[j]}[T(x)]\,[T'(x)]^{i+j} = \sum_{\nu=0}^{i+j} \Psi^{n,i,j}_{i+j-\nu}(A_2, \dots, A_{i-\mu_{\nu,j}})\,\eta^\nu, \quad x \in I_{1x}, \tag{1.5}$$

$$i - 2 \geqq \mu_{\nu,j} = \max\{0, \nu - j\}, \quad i = 3, 4, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, n - i,$$

wo $\Psi^{n,i,j}_{i+j-\nu}$ *für gegebene n, i das j-te Polynom der Elemente* $A_2, A_3, \dots, A_{i-\mu_{\nu,j}}$ *mit Dimension* $i + j - \nu$ *ist, das der Differenzengleichung*

(1.6)

$$\Psi^{n,i,j+1}_{i+j+1-\nu}(A_2, \dots, A_{i-\mu_{\nu,j+1}}) = -\frac{2(i+j)-\nu+1}{2}\,\Psi^{n,i,j}_{i+j+1-\nu}(A_2, \dots, A_{i-\mu_{\nu-1,j}}) +$$

$$+ \frac{6(\nu+1)}{n+1}\,A_2\Psi^{n,i,j}_{i+j-1-\nu}(A_2, \dots, A_{i-\mu_{\nu+1,j}}) + [\Psi^{n,i,j}_{i+j-\nu}(A_2, \dots, A_{i-\mu_{\nu,j}})]',$$

$$x \in I_{1x}, \quad i = 3, 4, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, n - i - 1, \quad \nu = 0, 1, \dots, i + j + 1$$

genügt und

$$\Psi^{n,i,j}_{-r} = \Psi^{n,i,j}_{i+j+r} = \Psi^{n,i,j}_1 = 0, \quad r = 1, 2, \dots, \tag{1.7}$$

$$\mu_{\nu-s,j} = \mu_{\nu,j+s}, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{1.8}$$

$$\Psi^{n,i,0}_{i-\nu}(A_2, \dots, A_{i-\mu_{\nu,0}}) = \sum_{\mu=\nu}^{i} \left[\binom{i}{\mu}\Big/\binom{n-i+\mu}{\mu}\right] A_{i-\mu} F^{n,i,i-\mu}_{\mu-\nu}(A_2) \tag{1.9}$$

$$i = 3, 4, \dots, n, \quad \nu = 0, 1, \dots, i; \quad i - 2 \geqq \mu_{\nu,0} = \nu$$

gilt.

Beweis. Setzen wir $B_i^j = (\beta_i[T(x)])^{[j]}\,[T'(x)]^{i+j}$, $0 \leqq j < n - i$. Dann ist $[B_i^j]' = \beta_i^{[j+1]}(T')^{i+j+1} + (i + j)\,\eta\beta_i^{[j]}(T')^{i+j}$, so daß

$$B_i^{j+1} = -(i + j)\,\eta B_i^j + [B_i^j]', \quad j = 0, 1, \dots, n - i - 1, \quad x \in I_{1x} \tag{1.10}$$

gilt. Wir stellen fest, daß (1.5) in Kraft ist. Dann ist nach (1.10) mit Rücksicht auf (0.6)

$$B_i^{j+1} =$$

$$= -(i+j)\sum_{\nu=0}^{i+j} \Psi^{n,i,j}_{i+j-\nu}(A_2, \dots, A_{i-\mu_{\nu,j}})\,\eta^{\nu+1} + \sum_{\nu=0}^{i+j} \frac{\nu}{2}\,\Psi^{n,i,j}_{i+j-\nu}(A_2, \dots, A_{i-\mu_{\nu,j}})\,\eta^{\nu+1} +$$

$$+ \frac{6A_2}{n+1}\sum_{\nu=0}^{i+j} \nu\Psi^{n,i,j}_{i+j-\nu}(A_2, \dots, A_{i-\mu_{\nu,j}})\,\eta^{\nu-1} + \sum_{\nu=0}^{i+j} [\Psi^{n,i,j}_{i+j-\nu}(A_2, \dots, A_{i-\mu_{\nu,j}})]'\,\eta^\nu.$$

Wenn wir in den beiden ersten Summen $v - 1$ statt v, in der dritten Summe v statt $v - 1$ setzen, so können wir die letzte Gleichung im Hinblick auf (1.7) in der Form

$$(1.11) \quad B_i^{j+1} = \sum_{v=0}^{i+j+1} \left\{ - \frac{2(i+j) - v + 1}{2} \Psi_{i+j+1-v}^{n,i,j}(A_2, \ldots, A_{i-\mu_{v-1,j}}) + \right.$$

$$\left. + \frac{6(v+1)}{n+1} A_2 \Psi_{i+j-v-1}^{n,i,j}(A_2, \ldots, A_{i-\mu_{v+1,j}}) + [\Psi_{i+j-v}^{n,i,j}(A_2, \ldots, A_{i-\mu_{v,j}})]' \right\} \eta^v$$

schreiben, d.h.

$$(1.12) \qquad B_i^{j+1} = \sum_{v=0}^{i+j+1} \Psi_{i+j+1-v}^{n,i,j+1}(A_2, \ldots, A_{i-\mu_{v,j+1}}) \, \eta^v ,$$

$$i - 2 \geqq \mu_{v,j+1} = \max\{0, v - j - 1\}, \quad x \in I_{1x},$$

denn gemäß (1.8) ist $\mu_{v,j+1} = \mu_{v-1,j}$. Laut (1.2), (1.9), (1.5), (1.11), (1.12) schließen wir, daß der Hilfssatz 1.3 mittels Induktion in bezug auf j bewiesen ist.

Bemerkung 1.4. Aus (1.6) folgt

$$(1.13) \qquad \Psi_{i+j+1}^{n,i,j+1}(A_2, \ldots, A_i) = \frac{6}{n+1} A_2 \Psi_{i+j-1}^{n,i,j}(A_2, \ldots, A_{i-\mu_{1,j}}) +$$

$$+ [\Psi_{i+j}^{n,i,j}(A_2, \ldots, A_i)]', \quad x \in I_{1x}.$$

Laut [4-I; 2,3.6], (1.9), (1.13) ist

$$(1.14) \quad \Psi_{i+j}^{n,i,j}(A_2, \ldots, A_i) = A_i^{(j)} - 3 \frac{i-1}{i+1} A_2^{(i+j-2)} + \overline{\Psi}_{i+j}^{n,i,j}(A_2, \ldots, A_{i-1}),$$

wobei $\overline{\Psi}_{i+j}^{n,i,j}$ das Polynom der Elemente $A_2, A_3, \ldots, A_{i-1}$ mit Dimension $i + j$ ist, dessen jedes Glied mindestens den Grad 3 hat und $\overline{\Psi}_{i+j}^{n,i,j}(0, A_3, \ldots, A_{i-1}) = 0$, $i = 3, 4, \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, n - i$ gilt.

Hilfssatz 1.5. *Es gelten die Beziehungen*

$$(1.15) \qquad \Psi_{i+j-v}^{n,i,j}(0, A_3, \ldots, A_{i-\mu_{v,j}}) = \sum_{s=\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} c_{j,s}^{i,i+s-v} A_{i+s-v}^{(j-s)},$$

$$v = 0, 1, \ldots, i + j - 3, \quad x \in I_{1x},$$

$$(1.16) \quad \Psi_{i+j-v}^{n,i,j}(0, A_3, \ldots, A_{i-\mu_{v,j}}) = 0, \quad v = i + j - 2, \quad i + j - 1, \quad i + j,$$

$$i = 3, 4, \ldots, n, \quad j = 0, 1, \ldots, n - i, \quad c_{j,s}^{i,i+s-v} \in E_1, \quad x \in I_{1x},$$

$$(1.17) \qquad \varepsilon_1 = \max\{0, 3 + v - i\}, \quad \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 = \min\{v, j\},$$

$$(1.18)\qquad c_{j+1,s}^{i,i-k} = c_{j,s}^{i,i-k} - \frac{2(i+j)-s-k+1}{2}\, c_{j,s-1}^{i,i-k}\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,;$$

$$k = 0, 1, \ldots, i\,; \quad j = 0, 1, \ldots, n-i-1\,,$$

$$(1.19)\quad c_{0,0}^{i,i-\nu} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}\binom{i}{\nu}\binom{i-1}{\nu}\nu!\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,; \quad \nu = 0, 1, \ldots, i-3\,,$$

$$(1.20)\qquad c_{j-\mu}^{i,i-k} = c_{j,j+\mu}^{i,i-k} = 0\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,; \quad k = 0, 1, \ldots, i\,;$$
$$j = 0, 1, \ldots, n-i\,; \quad \mu = 1, 2, \ldots$$

Beweis. Ist $j = 0$, so ist nach (1.17) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = s = 0$, so daß

$$(1.21)\qquad \Psi_{i-\nu}^{n,i,0}(0, A_3, A_4, \ldots, A_{i-\nu}) = c_{0,0}^{i,i-\nu} A_{i-\nu}\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,,$$
$$\nu = 0, 1, \ldots, i-3$$

gilt. Aus (1.9) folgt

$$\Psi_{i-\nu}^{n,i,0}(0, A_3, A_4, \ldots, A_{i-\nu}) = \left[\binom{i}{\nu}\Big/\binom{n-i+\nu}{\nu}\right] A_{i-\nu}\, F_0^{n,i,i-\nu}(0)\,.$$

Laut [4-I; (2,3.14)] ist

$$(1.22)\qquad \Psi_{i-\nu}^{n,i,0}(0, A_3, A_4, \ldots, A_{i-\nu}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu}\binom{i}{\nu}\binom{i-1}{\nu}\nu!\, A_{i-\nu}\,,$$
$$i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad \nu = 0, 1, \ldots, i-3\,,$$

laut [4-I; (2,3.15)] gilt

$$(1.23)\qquad \Psi_0^{n,i,0}(0) = 0\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,.$$

Da $\Psi_1^{n,i,0}(0) = \Psi_2^{n,i,0}(0) = 0$ ist, gilt (1.15), (1.16), (1.17) für $j = 0$. Gemäß (1.21), (1.22) gelten die Formeln (1.19). Nehmen wir an, daß (1.15)–(1.17) für $j \geqq 0$ in Kraft ist. Nach (1.15), (1.17) gilt (1.20). Aus (1.6) unter Beachtung von (1.15) folgt

$$\Psi_{i+j+1-\nu}^{n,i,j+1}(0, A_3, A_4, \ldots, A_{i-\mu_\nu,j+1}) = -\frac{2(i+j)-\nu+1}{2}\sum_{s=\varepsilon_1'}^{\varepsilon_2'} c_{j,s}^{i,i+s-\nu+1} A_{i+s-\nu+1}^{(j-s)} +$$
$$+ \sum_{s=\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} c_{j,s}^{i,i+s-\nu} A_{i+s-\nu}^{(j-s+1)}\,,$$

wobei (1.17), $\varepsilon_1' = \max\{0, 2+\nu-i\}$, $\varepsilon_1' \leqq \varepsilon_2' = \min\{\nu-1, j\}$ gilt. Wenn wir in der ersten Summe $s-1$ statt s setzen, erhalten wir

$$\Psi_{i+j+1-\nu}^{n,i,j+1}(0, A_3, A_4, \ldots, A_{i-\mu_\nu,j+1}) = -\frac{2(i+j)-\nu+1}{2}\sum_{s=\varepsilon_1''}^{\varepsilon_2''} c_{j,s-1}^{i,i+s-\nu} A_{i+s-\nu}^{(j-s+1)} +$$
$$+ \sum_{s=\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} c_{j,s}^{i,i+s-\nu} A_{i+s-\nu}^{(j-s+1)}$$

mit

$$\varepsilon_1'' = \max\{1, 3 + \nu - i\}\,, \quad \varepsilon_1'' \leqq \varepsilon_2'' = \min\{\nu, j + 1\}\,. \tag{1.24}$$

Laut (1.20) können wir in der ersten [zweiten] Summe $s = 0$ [$s = j + 1$] zulassen, so daß

$$\Psi^{n,i,j+1}_{i+j+1-\nu}(0, A_3, A_4, \ldots, A_{i-\mu_{\nu,j+1}}) = \sum_{s=\bar\varepsilon_1}^{\bar\varepsilon_2} c^{i,i+s-\nu}_{j+1,s} A^{(j-s+1)}_{i+s-\nu} \tag{1.25}$$

mit

$$\bar\varepsilon_1 = \max\{0, 3 + \nu - i\}\,, \quad \bar\varepsilon_1 \leqq \bar\varepsilon_2 = \min\{\nu, j + 1\} \tag{1.26}$$

ist und (1.18) mit $k = \nu - s$ gilt. Ferner folgt aus (1.6) bei Beachtung von (1.23)

$$\Psi^{n,i,j+1}_0(0) = -\frac{i + j}{2}\,\Psi^{n,i,j}_0(0) = 0\,, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{1.27}$$

Da $\Psi^{n,i,j+1}_1(0) = \Psi^{n,i,j+1}_2(0) = 0$, folgt mit Rücksicht auf (1.27)

$$\Psi^{n,i,j+1}_{i+j+1-\nu}(0, A_3, A_4, \ldots, A_{i-\mu_{\nu,j+1}}) = 0\,, \qquad \nu = i + j - 1,\ i + j,\ i + j + 1\,. \tag{1.28}$$

Wenn wir die Formeln (1.15)–(1.17), (1.25), (1.26), (1.28) vergleichen, schließen wir leicht bei Beachtung von (1.22), (1.23), daß der Hilfssatz 1.5 mittels Induktion in bezug auf j bewiesen ist.

Bemerkung 1.6. Aus (1.18), (1.19) folgt

$$c^{i,i}_{j,1} = -\frac{j(2i + j - 1)}{2}\,, \quad c^{i,i-1}_{j,0} = -\tfrac{1}{2}\,i(i - 1)\,, \qquad c^{i,i}_{j,0} = 1\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,; \quad j = 0, 1, \ldots, n - i\,. \tag{1.29}$$

2. KANONISCHE GLEICHUNGEN

Satz 2.1. *Die Beziehung (1.3) gilt dann und nur dann, wenn*

$$\beta_3[T(\xi)]\,[T'(\xi)]^3 - \alpha_3(\xi) = 0\,, \quad \xi \in J_{1\xi}\,, \tag{2.1}$$

$$\beta_i[T(\xi)]\,[T'(\xi)]^i - \alpha_i(\xi) + \sum_{\nu=1}^{i-3} (-1)^\nu \prod_{j=i-\nu}^{i-1} \frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)} \{\beta^{[\nu]}_{i-\nu}[T(\xi)]\,[T'(\xi)]^i - \alpha^{(\nu)}_{i-\nu}(\xi)\} = 0\,, \qquad \xi \in J_{1\xi}\,, \quad i = 4, 5, \ldots, n\,, \tag{2.2}$$

wo $T(\xi)$ eine Lösung von (0.7) ist.

Beweis. I. Es gelte (1.3), so daß (0.8) in Kraft ist. Gemäß des Hilfssatzes 1.2 gilt (1.4) mit $\eta = T''(\xi)/T'(\xi)$, wo $T(\xi)$ eine Lösung von (0.7) ist. Wenn $\eta \equiv 0$ in $J_{1\xi}$, d.h. $T(\xi) = c_1\xi + c_2$, $c_i \in E_1$, $i = 1, 2$, so ist nach (1.4) $\beta_r(c_1\xi + c_2)\, c_1^r = \alpha_r(\xi)$ und gelten die Formeln (2.1), (2.2). Also stellen wir fest, daß $\eta \not\equiv 0$ in $J_{1\xi}$. Ist $\alpha_k \equiv 0$ in $J_{1\xi}$ für alle $k = 3, 4, \ldots, n$, so ist nach [4-II; 2.18 Folg. 1] $\beta_k \equiv 0$, $k = 3, 4, \ldots, n$ und wieder gelten die Formeln (2.1), (2.2). Nach diesen Vorbereitungen und allen Folgerungen des Satzes 2.18, der in [4-II] hergeleitet wird, können wir annehmen, daß $\alpha_3 \not\equiv 0$ in $J_{1\xi}$ ist. Laut (1.4) gelten in $J_{1\xi}$ die Beziehungen

$$\beta_r T'^r = \sum_{\nu=0}^{r-3} \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu \binom{r}{\nu} \binom{r-1}{\nu} \nu!\, \alpha_{r-\nu} \eta^\nu , \qquad (2.3)$$

$$r = 3, 4, \ldots, i\,, \quad 4 \leqq i \leqq n\,,$$

so daß (2.1) in Kraft ist. Wenn wir in (2.3) die erste Gleichung $(i - 3)$-mal, die zweite $(i - 4)$-mal, allgemein die s-te $(i - s - 2)$-mal differenzieren, erhalten wir gemäß (1.5) und des Hilfssatzes 1.5 ein System der $(i - 2)$ Gleichungen mit $(i - 3)$ Unbekannten $\eta, \eta^2, \ldots, \eta^{i-3}$ von der Gestalt

$$\beta_r^{[i-r]} T'^i = \sum_{\nu=0}^{i-3} \eta^\nu \sum_{s=\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} c_{i-r,s}^{r,r+s-\nu} \alpha_{r+s-\nu}^{(i-r-s)}\,, \quad \xi \in J_{1\xi} \qquad (2.4)$$

mit

$$\varepsilon_1 = \max\{0,3 + \nu - r\}\,, \quad \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 = \min\{\nu, i - r\} \qquad (2.5)$$

$$r = 3, 4, \ldots, i\,, \quad 4 \leqq i \leqq n\,,$$

das mindestens eine nichttriviale Lösung hat. Daraus folgt, daß die Matrix, die aus der Koeffizientenmatrix von (2.4) hervorgeht, wenn man als $(i - 2)$-te Spalte $(\beta_r^{[i-r]} T'^i - \alpha_r^{(i-r)})$, $r = 3, 4, \ldots, i$ hinzufügt, singulär ist. Ihre Zeilen sind linear abhängig, so daß in $J_{1\xi}$ die Identitäten

$$\sum_{r=3}^{i} C_r [\beta_r^{[i-r]} T'^i - \alpha_r^{(i-r)}] = 0\,, \qquad (2.6)$$

$$\sum_{r=3}^{i} C_r \sum_{s=\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} c_{i-r,s}^{r,r+s-\nu} \alpha_{r+s-\nu}^{(i-r-s)} = 0\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, i - 3\,; \quad 4 \leqq i \leqq n \qquad (2.7)$$

gelten, wo mindestens eine der Zahlen C_r, $r = 3, 4, \ldots, i$ von Null verschieden ist. Setzen wir in (2.7) $\nu = 1$ ein. Laut (2.5) ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ für $r = 3$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$ für $4 \leqq r \leqq i - 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ für $r = i$. Da $\alpha_2 \equiv 0$ $[c_{1,0}^{i,i} = 0]$ ist, können wir in (2.7) $s = 0$ $[s = 1]$ für $r = 3$ $[r = i]$ zulassen und die Gleichungen (2.7) lassen sich also im Falle $\nu = 1$ in der Gestalt

$$\sum_{r=3}^{1} C_r \sum_{s=0}^{1} c_{i-r,s}^{r,r+s-1} \alpha_{r+s-1}^{(i-r-s)} = 0 \qquad (2.8)$$

scheiben. Setzt man $v = i - s - r + 1$ in (2.8) ein, so folgt

$$(2.9) \qquad \sum_{v=1}^{i-3} \alpha_{i-v}^{(v-1)} (C_{i-v} c_{v,1}^{i-v,i-v} + C_{i-v+1} c_{v-1,0}^{i-v+1,i-v}) = 0 .$$

Wenn die Gleichung (2.9) in $J_{1\xi}$ für beliebige Funktionen $\alpha_k \in C_{n-k}(J_1)$, $k = 3, 4, \ldots, n$ gelten soll, so muß

$$(2.10) \quad C_{i-v} c_{v,1}^{i-v,i-v} + C_{i-v+1} c_{v-1,0}^{i-v+1,i-v} = 0 , \quad v = 1, 2, \ldots, i-3 ; \quad 4 \leqq i \leqq n$$

sein. Die Gleichungen (2.10) bilden das System $(i - 3)$ homogener Gleichungen mit $(i - 2)$ Unbekannten $C_3, C_4, \ldots, C_i$. Wenn wir $C_i = 1$ wählen, so erhalten wir mittels der Cramerschen Formeln

$$(2.11) \qquad C_{i-v} = (-1)^v \prod_{j=i-v}^{i-1} \frac{c_{i-j-1,0}^{j+1,j}}{c_{i-j,1}^{j,j}} , \quad v = 1, 2, \ldots, i-3 ; \quad 4 \leqq i \leqq n .$$

Wenn wir $C_i = 1$ und (2.11) in (2.6) einsetzen, erhalten wir bei Benutzung der Bemerkung 1.6 die Gleichungen (2.2).

II. Es gelten umgekehrt die Formeln (2.1), (2.2), wo $T(\xi)$ eine Lösung von (0.7) ist. Es sei ferner $(\bar{\beta})\ \{T(\xi)\} \in k_\alpha(J_{1\xi})$ und es gelte (0.8). Dann ist $(\alpha)\ J_{1\xi} \sim (\bar{\beta})\ J_{2\tau}\{T(\xi)\}$ und laut I. gelten die Gleichungen

$$(2.12) \qquad \frac{\bar{\beta}_3[T(\xi)]}{\bar{\beta}_0[T(\xi)]} [T'(\xi)]^3 - \alpha_3(\xi) = 0 , \quad \xi \in J_{1\xi} ,$$

$$(2.13) \qquad \frac{\bar{\beta}_i[T(\xi)]}{\bar{\beta}_0[T(\xi)]} [T'(\xi)]^i - \alpha_i(\xi) + \sum_{v=1}^{i-3} (-1)^v \prod_{j=i-v}^{i-1} \frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)} \cdot$$
$$\cdot \left\{ \left(\frac{\bar{\beta}_{i-v}[T(\xi)]}{\bar{\beta}_0[T(\xi)]} \right)^{[v]} [T'(\xi)]^i - \alpha_{i-v}^{(v)}(\xi) \right\} = 0 , \quad \xi \in J_{1\xi} , \quad i = 4, 5, \ldots, n ,$$

wobei $\bar{\beta}_j$, $j = 0, 3, 4, \ldots, n$ die Koeffizienten von $(\bar{\beta})$ sind. Bei Beachtung von (2.1), (2.2), (2.12), (2.13) gilt

$$(2.14) \qquad \beta_i[T(\xi)] = \frac{\bar{\beta}_i[T(\xi)]}{\bar{\beta}_0[T(\xi)]} , \quad i = 3, 4, \ldots, n , \quad \xi \in J_{1\xi} .$$

Wenn wir in (2.14) $\xi = T_{-1}(\tau)$ setzen, erhalten wir

$$(2.15) \qquad \beta_i(\tau) = \frac{\bar{\beta}_i(\tau)}{\bar{\beta}_0(\tau)} , \quad i = 3, 4, \ldots, n ; \quad \tau \in J_{2\tau} .$$

Nach (2.15) schließen wir, daß die Gleichung (β) in $J_{2\tau}$ mit dem Bild $(\bar{\beta})\ \{T(\xi)\} \in k_\alpha(J_{1\xi})$ quasiidentisch ist, so daß gemäß [4-II; 1.5], [4-II; 2.5a] die Beziehung (1.3) in Kraft ist. Der Satz 2.1 ist damit bewiesen.

Bezeichnen wir

$$(2.16)\quad \vartheta_3(\alpha_3) = \alpha_3\,, \quad \vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) = \alpha_i + \sum_{\nu=1}^{i-3} (-1)^\nu \alpha_{i-\nu}^{(\nu)} \prod_{j=i-\nu}^{i-1} \frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)}\,,$$

$$i = 4, 5, \ldots, n\,.$$

Dann können wir statt (2.1), (2.2) die Gleichungen

$$(2.17)\qquad \vartheta_i\{\beta_3[T(\xi)], \ldots, \beta_i[T(\xi)]\}\,[T'(\xi)]^i = \vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i)\,,$$

$$i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad \xi \in J_{1\xi}$$

schreiben. Die Funktion $\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i)$ ist gemäß (2.16) ein Polynom der Elemente $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_i$ mit Dimension i, der Ordnung $i - 3$ und vom ersten Grad.

Bemerkungen 2.2. a) Laut (2.17) und [4-II; 0.3] schließen wir, daß *die Funktion* $\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i)$, $i = 3, 4, \ldots, n$ *die kanonische Invariante von* (α) *der Dimension und des Gewichtes i ist.* Da die Funktion $\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i)$ vom ersten Grad ist, wird sie auch die *lineare Invariante* genannt.

b) $\vartheta_j(\alpha_3, \ldots, \alpha_j) \equiv 0$, $j = 3, 4, \ldots, i \Leftrightarrow \alpha_j \equiv 0$, $j = 3, 4, \ldots,$ i, $\xi \in J_1$, $i = 3, 4, \ldots, n$.

c) $\vartheta_j(\alpha_3, \ldots, \alpha_j) \equiv 0$, $j = 3, 4, \ldots, i - 1$, $\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) \not\equiv 0 \Leftrightarrow \alpha_j \equiv 0$, $j = 3, 4, \ldots, i - 1$, $\alpha_i \not\equiv 0$, $\xi \in J_1$, $i = 3, 4, \ldots, n$.

d) $\alpha_j \equiv 0$, $j = 3, 4, \ldots, i - 1$, $\alpha_i \not\equiv 0 \Rightarrow \alpha_i = \vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i)$.

Die in den Bemerkungen b)–d) angeführten Behauptungen ergeben sich aus den Formeln (2.16).

e) Gemäß der Bemerkung b) schließen wir, daß *alle linearen Invarianten von* (α) *genau dann verschwinden, wenn die Gleichung* (α) *von der Gestalt*

$$(2.18)\qquad z^{(n)}(\xi) = 0$$

ist.

f) Die Gleichung (α) ist von der Gestalt (2.18) dann und nur dann, wenn die Funktionen

$$(2.19)\qquad \xi^{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ein Hauptsystem (von Lösungen) der Gleichung (α) bilden.

g) Gemäß der Bemerkungen e), f) schließen wir, daß *alle linearen Invarianten von* (α) *genau dann verschwinden, wenn die Funktionen* (2.19) *ein Hauptsystem von* (α) *bilden.*

Setzen wir der Einfachheit halber

$$\prod_{j=i-\nu}^{i-1} = \prod_{j=i-\nu}^{i-1} \frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)}, \quad \prod_{j=i}^{i-1} = 1 .$$

Laut (2.16) können wir

$$(2.20) \quad \vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) = \sum_{\nu=0}^{[(i-3)/2]} \prod_{j=i-2\nu}^{i-1} \alpha_{i-2\nu}^{(2\nu)} - \prod_{j=i-2\nu-1}^{i-1} \alpha_{i-2\nu-1}^{(2\nu+1)}, \quad i = 3, 4, \ldots, n$$

mit $\alpha_2 = 0$ schreiben.

Da

$$\prod_{j=i-2\nu-1}^{i-1} = \frac{(i-2\nu)(i-2\nu-1)}{2(2\nu+1)(i-\nu-1)} \prod_{j=i-2\nu}^{i-1},$$

$$(2.21) \qquad \prod_{j=i-2\nu-2}^{i-1} = \frac{(i-2\nu-2)(i-2\nu-1)^2(i-2\nu)}{4(\nu+1)(2\nu+1)(i-\nu-1)(2i-2\nu-3)} \prod_{j=i-2\nu}^{i-1}$$

ist, können wir statt (2.20) die Gleichung

$$(2.22) \quad \vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) = \sum_{\nu=0}^{[(i-3)/2]} A_{i,\nu} \left[\alpha_{i-2\nu}^{(2\nu)} - \frac{(i-2\nu)(i-2\nu-1)}{2(2\nu+1)(i-\nu-1)} \alpha_{i-2\nu-1}^{(2\nu+1)}\right]$$

mit $A_{i,\nu} = \prod_{j=i-2\nu}^{i-1}$, $A_{i,0} = 1$, schreiben so daß laut (2.21)

$$(2.23) \qquad A_{i,\nu+1} = \frac{(i-2\nu-2)(i-2\nu-1)^2(i-2\nu)}{4(\nu+1)(2\nu+1)(i-\nu-1)(2i-2\nu-3)} A_{i,\nu}$$

ist. Die Formeln (2.22), (2.23) sind ohne Beweis in [5; S. 197] (hier ist ein Zeichenfehler) und in [2; S. 235] angeführt.

3. ALLGEMEINE GLEICHUNGEN

Hilfssatz 3.1. *Es seien die Funktionen* $\xi = X(x)$, $\tau = T(x)$ *Elemente der Menge* $\mu(I_{1x})$, s. [4-I; 3,2.7]. *Die Beziehung*

$$(3.1) \qquad (\alpha)\, J_{1\xi} \sim (\beta)\, J_{2\tau}\{T[X_{-1}(\xi)]\}$$

gilt dann und nur dann, wenn

$$(3.2) \qquad \vartheta_i\{\beta_3[T(x)], \ldots, \beta_i[T(x)]\}\,[T'(x)]^i =$$
$$= \vartheta_i\{\alpha_3[X(x)], \ldots, \alpha_i[X(x)]\}\,[X'(x)]^i, \quad i = 3, 4, \ldots, n, \quad x \in I_{1x},$$

$$(3.3) \qquad \{T, x\} = \{X, x\}, \quad x \in I_{1x},$$

$$(3.4) \qquad T(I_{1x}) = J_{2\tau} \subset J_2, \quad X(I_{1x}) = J_{1\xi} \subset J_1 .$$

Beweis. Es gelte (3.2)−(3.4). Wenn wir in (3.2) $x = X_{-1}(\xi)$ einsetzen, erhalten wir

$$(3.5)\qquad \vartheta_i\{\beta_3(T[X_{-1}(\xi)]), \ldots, \beta_i(T[X_{-1}(\xi)])\}\,\{T'[X_{-1}(\xi)]\}^i = \\ = \vartheta_i[\alpha_3(\xi), \ldots, \alpha_i(\xi)], \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad \xi \in J_{1\xi}$$

mit $\{T, \xi\} = 0$. Gemäß des Satzes 2.1 bei Beachtung von (2.17) gilt (3.1). Den Beweis der hinreichenden Bedingung kann man dem Leser überlassen.

Folgerung. *Es sei*

$$(3.6)\qquad (\mathrm{a})\, I_{1x} \sim (\beta)\, J_{2\tau}\{T(x)\}\,.$$

Die Beziehung

$$(3.7)\qquad (\mathrm{a})\, I_{1x} \sim (\alpha)\, J_{1\xi}\{X(x)\}$$

gilt dann und nur dann, wenn (3.2) *in Kraft ist und die Funktion* $X(x)$ *die Gleichung* (0.5) *befriedigt.*

Satz 3.2. *Die Beziehung* (3.6) *gilt dann und nur dann, wenn*

$$(3.8)\qquad \beta_3[T(x)]\,[T'(x)]^3 = A_3 - \tfrac{3}{2}A_2'\,, \quad x \in I_{1x}\,,$$

$$(3.9)\qquad \vartheta_i\{\beta_3[T(x)], \ldots, \beta_i[T(x)]\}\,[T'(x)]^i = \Theta_i(A_2, \ldots, A_i)\,, \\ i = 4, 5, \ldots, n\,, \quad x \in I_{1x}$$

mit

$$(3.10)\qquad \Theta_i(A_2, \ldots, A_i) = \sum_{r=3}^{i} C_r \Psi_i^{n,r,i-r}(A_2, \ldots, A_i)\,, \\ i = 4, 5, \ldots, n\,, \quad x \in I_{1x}$$

in Kraft ist, wobei $T(x)$ *der Gleichung* (0.5) *genügt und* (2.11), (1.6) *gilt.*

Beweis. I. Es gelte (3.6), so daß (0.1) in Kraft ist. Gemäß des Hilfssatzes 1.1 gilt (1.2) mit (0.2), wobei $T(x)$ der Gleichung (0.5) genügt. Wenn wir $i = 3$ in (1.2) einsetzen, erhalten wir laut [4-I; 2,3.4] die Gleichung (3.8). Verwenden wir die im Hilfssatz 1.3 eingeführte Bezeichnung, so ist laut (1.2), (1.9)

$$(3.11)\qquad \beta_r[T(x)]\,[T'(x)]^r = \sum_{\nu=0}^{r} \Psi_{r-\nu}^{n,r,0}(A_2, \ldots, A_{r-\mu_{\nu,0}})\,\eta_T^\nu\,, \\ r = 3, 4, \ldots, i\,; \quad 4 \leqq i \leqq n\,, \quad x \in I_{1x}$$

mit $\eta_T = T''(x)/T'(x)$. Aus (3.11) folgt bei Beachtung von (1.5)

$$\beta_r^{[i-r]}[T(x)]\,[T'(x)]^i = \sum_{\nu=0}^{i} \Psi_{i-\nu}^{n,r,i-r}(A_2, \ldots, A_{r-\mu_\nu, i-r})\, \eta_T^\nu\,, \tag{3.12}$$

$$r = 3, 4, \ldots, i\,; \quad 4 \leqq i \leqq n\,, \quad x \in I_{1x}\,.$$

Es seien C_r, $r = 3, 4, \ldots, i-1$ die durch die Formeln (2.11) eingeführten Konstanten, $C_i = 1$. Multiplizieren wir in (3.12) die erste Gleichung mit C_3, die zweite mit C_4, allgemein die $(r-2)$-te mit C_r, $r = 3, 4, \ldots, i$ und dann addieren wir dieselben. Laut (2.16) erhalten wir

$$\vartheta_i\{\beta_3[T(x)], \ldots, \beta_i[T(x)]\}\,[T'(x)]^i = \sum_{\nu=0}^{i} \Theta_{i,i-\nu}(A_2, \ldots, A_{i-\nu})\, \eta_T^\nu\,, \tag{3.13}$$

$$i = 4, 5, \ldots, n\,, \quad x \in I_{1x}$$

mit

$$\Theta_{i,i-\nu}(A_2, \ldots, A_{i-\nu}) = \sum_{r=3}^{i} C_r \Psi_{i-\nu}^{n,r,i-r}(A_2, \ldots, A_{r-\mu_\nu, i-r})\,, \quad i = 4, 5, \ldots, n\,. \tag{3.14}$$

Es sei ϱ eine beliebige Zahl und es sei $X(x)$ eine Lösung von (0.5), die in einem beliebigen Punkt $x_0 \in I_{1x}$ die Anfangswerte

$$X(x_0) = \xi_0 \in J_{2\tau}\,, \quad X'(x_0) = 1\,, \quad X''(x_0) = \varrho \tag{3.15}$$

erfüllt und die in $I_{1x_0} \subset I_{1x}$ definiert ist.

Setzen wir $X(I_{1x_0}) = J_{1\xi_0}$ und es sei ferner die Gleichung (α) in $J_{1\xi_0}$ die Normalform des kanonischen Bildes $(\bar{\alpha})\,\{X(x)\} \in k_a(I_{1x_0})$, so daß (a) $I_{1x_0} \sim (\alpha)\, J_{1\xi_0}\{X(x)\}$. Gemäß des Hilfssatzes 3.1 gelten im Intervall I_{1x_0} die Gleichungen (3.2) und laut (3.13) ist

$$\vartheta_i\{\alpha_3[X(x)], \ldots, \alpha_i[X(x)]\}\,[X'(x)]^i = \sum_{\nu=0}^{i} \Theta_{i,i-\nu}(A_2, \ldots, A_{i-\nu})\, \eta_X^\nu\,, \tag{3.16}$$

$$i = 4, 5, \ldots, n\,, \quad x \in I_{1x_0}$$

mit

$$\eta_X = \frac{X''(x)}{X'(x)}\,. \tag{3.17}$$

Wenn wir (3.16) und (3.2) vergleichen, erhalten wir

$$\vartheta_i\{\beta_3[T(x)], \ldots, \beta_i[T(x)]\}\,[T'(x)]^i = \sum_{\nu=0}^{i} \Theta_{i,i-\nu}(A_2, \ldots, A_{i-\nu})\, \eta_X^\nu\,, \tag{3.18}$$

$$i = 4, 5, \ldots, n\,; \quad x \in I_{1x_0}\,.$$

Wenn wir in (3.18) $x = x_0$ einsetzen, erhalten wir unter Berücksichtigung von (3.17), (3.15)

$$(3.19) \qquad \vartheta_i\{\beta_3[T(x_0)], \ldots, \beta_i[T(x_0)]\}\,[T'(x_0)]^i = \\ = \sum_{\nu=0}^{i} \Theta_{i,i-\nu}[A_2(x_0), \ldots, A_{i-\nu}(x_0)]\,\varrho^\nu\,, \quad i = 4, 5, \ldots, n\,.$$

Da ϱ eine beliebige Zahl ist, muß im Punkte $x_0 \in I_{1x}$

$$(3.20) \qquad \Theta_{i,i-\nu}(A_2, \ldots, A_{i-\nu}) = 0\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, i\,; \quad i = 4, 5, \ldots, n$$

und (3.9) gelten, wobei wir kurz Θ_i statt $\Theta_{i,i}$ schreiben. Da x_0 ein beliebiger Punkt des Intervalles I_{1x} ist, gelten die Gleichungen (3.20) und (3.9) für alle $x \in I_{1x}$.

II. Es gelte umgekehrt (3.8)–(3.10), wobei $T(x)$ eine Lösung von (0.5) ist. Wählen wir eine beliebige Lösung $X(x)$ von (0.5), so daß (3.3) in Kraft ist und es sei die Gleichung (α) im Intervall $X(I_{1x}) = J_{1\xi}$ die Normalform des kanonischen Bildes ($\bar{\alpha}$) $\{X(x)\} \in k_a(I_{1x})$, so daß (3.7) in Kraft ist. Laut I. gelten die Beziehungen

$$(3.21) \qquad \alpha_3[X(x)]\,[X'(x)]^i = A_3 - \tfrac{3}{2}A_2'\,, \quad \vartheta_i\{\alpha_3[X(x)], \ldots, \alpha_i[X(x)]\}\,[X'(x)]^i = \\ = \Theta_i(A_2, \ldots, A_i)\,, \quad x \in I_{1x}\,, \quad i = 4, 5, \ldots, n\,.$$

Wenn wir $T(I_{1x}) = J_{2\tau}$ setzen, so gilt (3.4) und laut (3.21), (3.8), (3.9) gilt (3.2). Gemäß des Hilfssatzes 3.1 gilt (3.1), so daß laut (3.1), (3.7) die Beziehung (3.6) in Kraft ist. Der Satz 3.2 ist somit bewiesen.

Es seien B_i, $i = 2, 3, \ldots, n$ die Hauptkoeffizienten von (b). Setzen wir ferner $\Theta_3(A_2, A_3) = A_3 - \frac{3}{2}A_2'$.

Satz 3.3. *Die Beziehung*

$$(3.22) \qquad (\mathrm{a})\,I_{1x} \sim (\mathrm{b})\,I_{2t}\{T(x)\}$$

gilt dann und nur dann, wenn

$$(3.23) \qquad \Theta_i\{B_2[T(x)], \ldots, B_i[T(x)]\}\,[T'(x)]^i = \Theta_i(A_2, \ldots, A_i)\,, \\ i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad x \in I_{1x}\,,$$

wobei $T(x)$ *eine Lösung der Gleichung*

$$(3.24) \qquad \{T, x\} + \frac{3}{n+1}\,B_2[T(x)]\,[T'(x)]^2 = \frac{3}{n+1}\,A_2\,, \quad x \in I_{1x}$$

ist.

Beweis. I. Es gelte (3.22), so daß $T(I_{1x}) = I_{2t} \subset I_2$ ist und laut [4-II; (2.14)] mit $i = 2$ die Funktion $T(x)$ in I_{1x} der Gleichung (3.24) entspricht. Es sei ferner die Funktion $\tau = X(t)$ eine Lösung der Gleichung

$$\{X, t\} = \frac{3}{n+1} B_2, \quad t \in I_{2t}, \tag{3.25}$$

so daß die Funktion $X[T(x)]$ der Gleichung (0.5) genügt. Es sei (α) resp. (β) die Normalform des kanonischen Bildes $(\bar{\alpha})\{X[T(x)]\} \in k_a(I_{1x})$ resp. $(\bar{\beta})\{X(t)\} \in k_b(I_{2t})$. Setzen wir $X(I_{2t}) = J_{2\tau}$. Laut [4-II; 2.20] ist (α) $J_{2\tau} \sim$ (β) $J_{2\tau}\{\tau\}$, so daß gemäß des Satzes 2.1 und der Formel (2.17)

$$\vartheta_i[\alpha_3(\tau), \ldots, \alpha_i(\tau)] = \vartheta_i[\beta_3(\tau), \ldots, \beta_i(\tau)], \quad i = 3, 4, \ldots, n, \quad \tau \in J_{2\tau} \tag{3.26}$$

in Kraft ist. Da (a) $I_{1x} \sim$ (α) $J_{2\tau}\{X[T(x)]\}$, (b) $I_{2t} \sim$ (β) $J_{2\tau}\{X(t)\}$ ist, gelten gemäß des Satzes 3.2 die Gleichungen

$$\vartheta_i\{\alpha_3(X[T(x)]), \ldots, \alpha_i(X[T(x)])\}\,(X'[T(x)])^i = \Theta_i[A_2(x), \ldots, A_i(x)], \tag{3.27}$$
$$x \in I_{1x}, \quad i = 3, 4, \ldots, n,$$

$$\vartheta_i\{\beta_3[X(t)], \ldots, \beta_i[X(t)]\}[\dot{X}(t)]^i = \Theta_i[B_2(t), \ldots, B_i(t)], \tag{3.28}$$
$$t \in I_{2t}, \quad i = 3, 4, \ldots, n.$$

Die Gleichungen (3.28) können wir in der Form

$$\vartheta_i\{\beta_3(X[T(x)]), \ldots, \beta_i(X[T(x)])\}\,\{X'[T(x)]\}^i = \tag{3.29}$$
$$= \Theta_i\{B_2[T(x)], \ldots, B_i[T(x)]\}\,[T'(x)]^i, \quad x \in I_{1x}, \quad i = 3, 4, \ldots, n$$

schreiben. Laut (3.29), (3.26), (3.27) schließen wir, daß (3.23) in Kraft ist. II. Es gelte umgekehrt (3.23), wobei $T(x)$ eine Lösung von (3.24) ist. Setzen wir $T(I_{1x}) = I_{2t}$, so daß $I_{2t} \subset I_2$ ist. Wählen wir eine beliebige Lösung $X(t)$ von (3.25), so daß die Funktion $X[T(x)]$ eine Lösung von (0.5) ist. Es sei (α) resp. (β) die Normalform des kanonischen Bildes $(\bar{\alpha})\{X[T(x)]\} \in k_a(I_{1x})$ resp. $(\bar{\beta})\{X(t)\} \in k_b(I_{2t})$. Setzen wir $X(I_{2t}) = J_{2\tau}$. Nach dem Satz 3.2 gilt (3.27), (3.29), so daß mit Rücksicht auf (3.23) die Beziehungen (3.26) in Kraft sind. Gemäß des Satzes 2.1 gilt (α) $J_{2\tau} \sim$ (β) $J_{2\tau}\{\tau\}$ also auch $(\bar{\alpha})$ $J_{2\tau} \sim$ $(\bar{\beta})$ $J_{2\tau}\{\tau\}$, so daß laut [4-II; 2.20] die Beziehung (3.22) in Kraft ist.

Bemerkungen 3.4. a) Laut (3.23) und [4-II; 0.2] schließen wir, daß *die Funktion* $\Theta_i(A_2, A_3, \ldots, A_i)$, $i = 3, 4, \ldots, n$ *die Hauptinvariante von* (a) *der Dimension und des Gewichtes i ist.*

b) Aus (3.10), (1.14) folgt

$$\Theta_i(A_2, \ldots, A_i) = \sum_{r=3}^{i} C_r A_r^{(i-r)} - 3A_2^{(i-2)} \sum_{r=3}^{i} C_r \frac{r-1}{r+1} + \tag{3.30}$$

$$+ \sum_{r=3}^{i} C_r \overline{\Psi}_i^{n,r,i-r}(A_2, A_3, \ldots, A_{r-1}) = \Delta_i(A_2, A_3, \ldots, A_i) + D_i(A_2, \ldots, A_{i-1}),$$

mit

$$\Delta_i(A_2, A_3, \ldots, A_i) = \sum_{r=3}^{i} C_r A_r^{(i-r)} - 3A_2^{(i-2)} \sum_{r=3}^{i} C_r \frac{r-1}{r+1}, \tag{3.31}$$

$$D_i(A_2, A_3, \ldots, A_{i-1}) = \sum_{r=3}^{i} C_r \overline{\Psi}_i^{n,r,i-r}(A_2, A_3, \ldots, A_{r-1}). \tag{3.32}$$

c) Laut (2.11), (2.16) ist

$$\Delta_i(A_2, A_3, \ldots, A_i) = \vartheta_i(A_3, A_4, \ldots, A_i) - 3A_2^{(i-2)} \sum_{r=3}^{i} C_r \frac{r-1}{r+1}. \tag{3.33}$$

d) Gemäß der Bemerkung 1.4 ist $D_i(0, A_3, \ldots, A_{i-1}) = 0$, gemäß der Bemerkungen 3.4b), c) ist $\Theta_i(0, A_3, \ldots, A_i) = \vartheta_i(A_3, A_4, \ldots, A_i)$.

e) Die Funktion $\Delta_i(D_i)$ bezeichnen wir als den linearen (den nichtlinearen) Teil der Invariante Θ_i.

f) Laut (3.30) ist

$$\Theta_i(A_2, \ldots, A_i) = A_i + H_i(A_2, A_3, \ldots, A_{i-1}), \tag{3.34}$$

wobei $H_i(A_2, A_3, \ldots, A_{i-1})$ das Polynom mit Dimension i der Elemente $A_2, A_3, \ldots, \ldots, A_{i-1}$ ist.

h) Nach (3.34), [4-I; (3,2.8)] schließen wir, daß

$$\Theta_i(A_2, \ldots, A_i) = a_i + h_i(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}) \tag{3.35}$$

gilt, wobei $h_i(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1})$ das Polynom mit Dimension i der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ ist.

Hilfssatz 3.5. *Es seien p, q natürliche Zahlen mit $p \geqq q \geqq 1$. Es sei ferner r eine ganze nichtnegative Zahl. Ist*

$$r \leqq p - q, \tag{3.36}$$

so ist

$$\sum_{s=0}^{q} (-1)^s \binom{q}{s} \binom{p+s}{r+s} = (-1)^q \binom{p}{q+r}.$$

Ist

$$r > p - q, \tag{3.37}$$

so ist

$$\sum_{s=0}^{q}(-1)^s\binom{q}{s}\binom{p+s}{r+s}=0\,. \tag{3.38}$$

Der Hilfssatz 3.5 wird mittels Induktion in bezug auf p bewiesen.

Hilfssatz 3.6. *Es gelte*

$$\sum_{r=2}^{i}(-1)^r\frac{r-1}{r+1}\prod_{j=r}^{i-1}\frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)}=0\,,\quad i=3,4,\ldots \tag{3.39}$$

mit

$$\prod_{j=i}^{i-1}\frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)}=1\,.$$

Beweis. Bezeichnen wir

$$\sigma=\sum_{r=2}^{i}(-1)^r\frac{r-1}{r+1}\prod_{j=r}^{i-1}\frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)}\,.$$

Dann ist

$$\frac{\sigma}{2}\,i(i-1)(i-2)\prod_{j=2}^{i-1}\frac{(i-j)(i+j-1)}{j(j+1)}=\sum_{r=2}^{i}(-1)^r\binom{i-2}{r-2}\binom{i+r-2}{r+1}\,. \tag{3.40}$$

Wenn wir

$$s=r-2\,,\quad q=i-2\,,\quad p=q+2\,,\quad r=3$$

setzen, so gelten nach (3.37), (3.38), (3.40) die Formeln (3.39).

Satz 3.7. *Es gelte*

$$A_i(A_2,A_3,\ldots,A_i)=A_i+\sum_{\nu=1}^{i-2}(-1)^\nu A_{i-\nu}^{(\nu)}\prod_{j=i-\nu}^{i-1}\frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)}\,. \tag{3.41}$$

Beweis. Mit Rücksicht auf die Formeln (2.11), (2.16), (3.33) genügt es zu zeigen, daß

$$-3\sum_{r=3}^{i}(-1)^{i-r}\frac{r-1}{r+1}\prod_{j=r}^{i-1}\frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)}= \tag{3.42}$$
$$=(-1)^{i-2}\prod_{j=2}^{i-1}\frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)}$$

in Kraft ist. Wenn wir die Gleichung (3.39) mit $-3(-1)^{i-2r}$ multiplizieren, erhalten wir nach Umformung (3.42).

Die Gültigkeit der Formel (3.42) wurde ohne Beweis in [5; S. 197] und in [2; S. 35] vorausgesetzt.

4. EINIGE EIGENSCHAFTEN REGULÄRER GLEICHUNGEN MIT STETIGER DIMENSION

Es sei

$$\text{(a)} \qquad y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0\,, \quad x \in I_1$$

eine reguläre Gleichung mit stetiger Dimension im Intervall I_1 und es seien A_i, $i = 2, 3, \ldots, n$ die Hauptkoeffizienten von (a). Die Gleichung

$$\{t, x\} = \frac{3}{n+1} A_2\,, \quad x \in I_1 \tag{4.1}$$

bezeichnen wir als die *die Gleichung* (a) *begleitende Gleichung dritter Ordnung* und ihre Lösungen sind erste Koordinaten der kanonischen Bilder von (a). Durch die Transformation

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}s\,, \quad x_0 \in I_1 \tag{4.2}$$

geht (4.1) in eine Gleichung von der Gestalt

$$y'' + \frac{3}{n+1} A_2 y = 0\,, \quad x \in I_1 \tag{4.3}$$

über, die wir als die *die Gleichung* (a) *begleitende Gleichung zweiter Ordnung* bezeichnen. Wenn wir eine Lösung $v(x) \neq 0$ in $I_{1x} \subset I_1$ von (a) wählen und

$$T(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \tag{4.4}$$

setzen, wobei $u(x), v(x)$ unabhängige Lösungen von (4.3) sind, so ist die Funktion (4.4) in I_{1x} eine Lösung von (4.1) und das Bild $(\bar{\alpha}) \in o_a(I_{1x})$ mit den Koordinaten

$$\left\{\frac{u(x)}{v(x)}\,,\ c[v(x)]^{n-1} \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1\,\mathrm{d}s\right)\right\}, \quad 0 \neq c \in E_1\,, \quad x_0 \in I_{1x} \tag{4.5}$$

ist kanonisch.

Hilfssatz 4.1. *Die Funktionen*

$$\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1\,\mathrm{d}s\right\} u^{n-k} v^{k-1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \quad x_0 \in I_1 \tag{4.6}$$

bilden genau dann ein Hauptsystem von (a), *wobei* u, v *unabhängige Lösungen von* (4.3) *sind, wenn alle Hauptinvarianten von* (a) *in* I_1 *identisch verschwinden.*

Beweis. Es sei $I_1 = \langle a, b)$. Dabei darf $b = \infty$ sein. I. Es verschwinden in I_1 alle Hauptinvarianten von (a). Wählen wir ein beliebiges Integral $v(x)$ von (4.3) und es sei $\{x_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$ die Folge der Nullstellen von $v(x)$ in I_1, wobei $x_0 = a$, $x_{s+1} = b$ ist (bei $b = \infty$ kann auch $s = \infty$ sein; dann setzen wir nur $x_0 = a$). Bezeichnen wir $j_\nu = (x_\nu, x_{\nu+1})$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$ und es seien $u(x), v(x)$ unabhängige Lösungen von (4.3). Die Funktion $T(x) = u(x)/v(x) \in \mu_{A_2}(j_\nu)$, s. [4-I; 3,3.2], $\nu = 0, 1, \ldots, s$ und es sei $T(j_\nu) = i_\nu$. Es sei ferner $(\bar{\alpha}) \in k_a(j_\nu)$ mit den Koordinaten (4.5), wobei $x_0 = a$. Da $(a)\, j_\nu \sim (\bar{\alpha})\, i_\nu\{u(x)/v(x)\}$, verschwinden gemäß der Voraussetzung und des Satzes 3.2 in i_ν alle Hauptinvarianten von $(\bar{\alpha})$. Nach der Bemerkung 2.2g) schließen wir, daß die Funktionen

$$(4.7) \qquad z_k = t^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

ein Hauptsystem von $(\bar{\alpha})$ im Intervall i_ν bilden. Laut (4.5) und [4-I; 3,1.15a), g)] sind die Funktionen (4.6) unabhängige Integrale von (a) in jedem Intervall j_ν und daher auch in $\bigcup_{\nu=0}^{s} j_\nu$. Da die Funktionen (4.6) von der Klasse $C_n(I_1)$ sind, bilden sie ein Hauptsystem von (a) im ganzen Intervall I_1. II. Es bilden in I_1 die Funktionen (4.6) ein Hauptsystem von (a), wobei u, v unabhängige Lösungen von (4.3) sind. Betrachten wir die Gleichung

$$(4.8) \qquad y^{(n)} + \binom{n}{1} a_1 y^{(n-1)} + \binom{n}{2} a_2 y^{(n-2)} + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \bar{h}_i(a_1, a_2)\, y^{(n-i)} = 0\,,$$

mit

$$\bar{h}_3(a_1, a_2) = -h_3(a_1, a_2)\,, \quad \bar{h}_i(a_1, a_2) = -h_i[a_1, a_2, \bar{h}_3(a_1, a_2), \ldots, \bar{h}_{i-1}(a_1, a_2)],$$
$$i = 4, 5, \ldots, n\,,$$

wobei die Funktionen h_i durch die Formeln (3.35) bestimmt sind. Laut (3.35) verschwinden alle Hauptinvarianten von (4.8), so daß nach I. die Funktionen (4.6) ein Hauptsystem von (4.8) bilden. Die Gleichungen (a), (4.8) sind I_1 quasiidentisch und daher äquivalent. Gemäß des Satzes 3.3 verschwinden in I_1 alle Hauptinvarianten von (a).

Bemerkung 4.2. Aus dem Hilfssatz 4.1 ergibt sich die folgende Behauptung: *Wenn die sämtlichen Hauptinvarianten einer halbkanonischen Gleichung* (A) $y^{(n)} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} A_i y^{(n-i)} = 0$ *verschwinden, so ist das allgemeine Integral von* (A) *eine binäre Form des* $(n-1)$*-ten Grades mit konstanten Koeffizienten aus den Elementen* u, v *eines Hauptsystems der Gleichung zweiter Ordnung* $y'' + [3(n+1)/A_2]y = 0$.

Dieser Satz wird ohne Beweis in [5; S. 204–205] und in [2; S. 237] angeführt.

Hilfssatz 4.3. *Die Gleichung* (a) *ist genau dann in* I_1 *iteriert, wenn die Funktionen* (4.6) *in* I_1 *ein Hauptsystem von* (a) *bilden.*

Der Beweis wird in [3; 8,1] angeführt.

Satz 4.4. *Die Gleichung* (a) *ist genau dann in* I_1 *iteriert, wenn in* I_1 *alle Hauptinvarianten von* (a) *verschwinden.*

Folgt aus den Hilfssätzen 4.1 und 4.3.

Folgerung. *Es gelte* (3.22). *Die Gleichung* (b) *ist im Intervall* I_{2t} *iteriert dann und nur dann, wenn die Gleichung* (a) *im Intervall* I_{1x} *iteriert ist.*

Bemerkungen 4.5. a) Die Gleichung (a) ist im Intervall I_1 iteriert dann und nur dann wenn sie in I_1 mit einer regulärer Gleichung mit stetiger Dimension quasiidentisch ist, die wir in I_1 durch $(n - 1)$-fache Iteration der Gleichung

$$u^2 y' + [a_1 u^2 - (n - 1)\, uu']\, y = 0 \tag{u}$$

erhalten, wobei u eine beliebige Lösung von (4.3) ist. Siehe [3; 7,1].

b) Es gelte (3.22) und es sei

$$\ddot{z}(t) + \frac{3}{n + 1} B_2(t)\, z(t) = 0\,, \quad t \in I_2 \tag{4.9}$$

die die Gleichung (b) begleitende Gleichung zweiter Ordnung. Wenn die Gleichung (a) in I_{1x} mit einer regulären Gleichung mit stetiger Dimension quasiidentisch ist, die wir durch die $(n - 1)$-fache Iteration der Gleichung (u) erhalten, so ist die Gleichung (b) in I_{2t} quasiidentisch mit einer regulären Gleichung mit stetiger Dimension, die wir durch die $(n - 1)$-fache Iteration der Gleichung

$$w^2 \dot{z} + [b_1 w^2 - (n - 1)\, w\dot{w}]\, z = 0 \tag{w}$$

erhalten, wobei $w(t)$ eine beliebige Lösung von (4.9) ist, und es gilt

$$(4.3)\; I_{1x} \sim (4.9)\; I_{2t}\{T(x),\, c_1 |T'(x)|^{-\frac{1}{2}}\}\,, \quad 0 \neq c_1 \in E_1\,,$$

$$(\mathrm{u})\; I_{1x} \sim (\mathrm{w})\; I_{2t} \left\{ T(x),\, c_2 \left(\frac{u(x)}{w[T(x)]} \right)^{n-1} . \exp\left[\int_{x_0}^{x} \left(b_1[T(s)]\, T'(s) - a_1(s) \right) \mathrm{d}s \right] \right\},$$

$$0 \neq c_2 \in E_1\,.$$

Literatur

[1] *O. Borůvka:* Sur la transformation des integrales des équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre. Ann. di Mat. p. ed app. *41* (1956), 325—342.

[2] *F. Brioschi:* Les invariants des équations différentielles linéaires. Acta mathematica *14* (1890—91), 233—248.

[3] *Z. Hustý:* Die Iteration homogener linearer Differentialgleichungen. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno. No. 449, (1964), 23—56.

[4] *Z. Hustý:* Über Transformation und Äquivalenz homogener lineaerer Differentialgleichungen von höheren als der zweiten Ordnung. Czechoslovak Math. J. I. Teil T. *15* (*90*) 1965, 479—502; II. Teil T. *16* (*91*) 1966, 1—13.

[5] *L. Schlesinger:* Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Band II/1. Leipzig 1897.

[6] *V. Šeda:* Über die Transformation der linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Čas. pěst. mat. *90* (1965), 385—412.

[7] *O. Borůvka:* Transformationstheorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (im Druck).

Anschrift des Verfassers: Brno, Zemědělská 5, ČSSR (Vysoká škola zemědělská).

Резюме

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА ВЫШЕ ВТОРОГО

ЗДЕНЕК ГУСТЫ (Zdeněk Hustý), Брно

1-АЯ ЧАСТЬ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Сначала выведены свойства полиномов с размерностью φ, χ, Φ, см. абз. 2, при помощи которых описана формула, которая выражает отношение между производными функций $u(x)\,Z(x)$ и $z(t) = Z[T_{-1}(t)]$, где $x = T_{-1}(t)$ является обратной функцией к функции $t = T(x)$, см. 2,3.1. Формула (2,3.1) имеет существенное значение при преобразовании однородных линейных дифференциальных уравнений — короче уравнений. Пусть $I_{1x} \neq \emptyset$ является интервалом. Символом $M(I_{1x})$ обозначаем множество, определенное следующим образом: $T(x), u(x) \in C_n(I_{1x})$, $T'(x).\,u(x) \neq 0 \Rightarrow \{T(x), u(x)\} \in M(I_{1x})$. Пусть дано уравнение

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k(x)\, y^{(n-k)}(x) = 0\,, \quad a_k/a_0 \in C_0(I_1)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

и пусть $I_{1x} \subset I_1$. Возьмем элемент $\{T(x), u(x)\} \in M(I_{1x})$. *Если применить к уравнению* (a) *преобразование* $y(x) = u(x)\,Z(x)$, $t = T(x)$, *получим уравнение*

$$(\bar{\text{a}}) \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \bar{a}_i(t)\, z^{[n-i]}(t) = 0\,, \quad t \in I_{2t} \subset T(I_{1x})\,,$$

где $x = T_{-1}(t)$, $\bar{a}_i(t) = u(T')^{n-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k \Phi^{n,i}_{i-k}(\eta, \zeta)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $x = T_{-1}(t)$ $\eta = T''/T'$, $\zeta = u'/u$.

Уравнение ($\bar{a}$) называется *образом* уравнения (a) в интервале I_{1x} с координатами $T(x)$, $u(x)$, и вводим обозначение ($\bar{a}$) $\{T(x), u(x)\}$. Символом $O_a(I_{1x})$ обозначаем множество всех образов уравнения (a) в интервале I_{1x}, координаты которых являются элементами множества $M(I_{1x})$. Если $a_1/a_0 \in C_{n-1}(I_1)$, то полуканонические образы уравнения (a) в интервале I_{1x} должны иметь первую координату $T(x)$ со свойством $T(x) \in C_{n+1}(I_{1x})$. Символом $o_a(I_{1x})$ $[p_a(I_{1x})]$ $\{k_a(I_{1x})\}$ обозначаем множество всех образов [полуканонических образов] {канонических образов}, которые принадлежат к $O_a(I_{1x})$ и первые координаты которых являются функциями класса $C_{n+1}(I_{1x})$. Образ ($\bar{a}$) $\{T(x), U(x)\} \in o_a(I_{1x})$ является полуканоническим тогда и только тогда, если

$$(1) \qquad U(x) = c|T'|^{(1-n)/2} \exp\left\{-\int_{x_0}^{x}(a_1/a_0)\mathrm{d}s\right\}, \quad 0 \neq c \in E_1, \quad x \in T_{1x}.$$

Из (1) следует, что полуканонический образ определен первой координатой и поэтому вводим вместо ($\bar{a}$) $\{T(x), U(x)\} \in p_a(I_{1x})$ более короткое обозначение ($\bar{a}$) $\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$, которое предполагает, что справедливо (1). Полуканонический образ (A) $\{x\} \in p_a(I_1)$ называется *фундаментальным*, и можно его записать в виде

$$(\mathrm{A}) \qquad c\exp\left(-\int_{x_0}^{x}(a_1/a_0)\,\mathrm{d}s\right)\left[A_0(x)\,Z^{(n)}(x) + \sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}A_i(x)\,Z^{(n-i)}(x)\right] = 0\,, \quad x \in I_1\,,$$

где

$$(2) \qquad A_i(x) = \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}a_k(x)\,\chi_{i-k}(-a_1/a_0)\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,, \quad x \in I_1\,.$$

Функции $\mathfrak{A}_i = A_i/A_0$, $i = 2, 3, \ldots, n$ называются *фундаментальными коэффициентами* уравнения (a).

Полуканонический образ ($\bar{\mathrm{A}}$) $\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ *имеет вид*

$$(\bar{\mathrm{A}}) \qquad U\left[\bar{A}_0(t)\,z^{[n]}(t) + \sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}\bar{A}_i(t)\,\dot{z}^{[n-i]}(t)\right] = 0\,, \quad t \in I_{2t} = T(I_{1x})\,,$$

где $z(t) = Z[T_{-1}(t)]$, $\bar{A}_i(t) = (T')^{n-i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}A_k\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta)$, $i = 2, 3, \ldots, n$, $x = T_{-1}(t)$, $\eta = T''/T'$ *и справедливо* (1), (2). Легко проверить, что ($\bar{\mathrm{A}}$) является фундаментальным каноническим образом уравнения ($\bar{a}$). *Если* $a_i/a_0 \in C_{n-i}(I_1)$, $i = 1, 2$, *то полуканонический образ* ($\bar{\alpha}$)$\{T(x)\} \in p_a(I_{1x})$ *является каноническим тогда и только тогда, если первая координата* $T(x)$ *удовлетворяет уравнению* (выражение $\{T, x\} = \frac{1}{2}(T'''/T') - \frac{3}{4}(T''/T')^2$ называется производной Шварца)

$$(3) \qquad \{T, x\} = [3/(n+1)]\,\mathfrak{A}_2\,, \quad x \in I_{1x}\,,$$

и можно его записать в виде

$$(\bar{\alpha}) \qquad U\left[\bar{\alpha}_0(t)\, z^{[n]}(t) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \bar{\alpha}_i(t)\, z^{[n-i]}(t)\right] = 0\,, \quad t \in I_{2t}\,,$$

где $z(t) = Z[T_{-1}(t)]$, $\bar{\alpha}_0(t) = (T')^n\, a_0(x)$,

$$(4) \qquad \bar{\alpha}_i(t) = (T')^{n-i} \sum_{\nu=0}^{i} \eta^\nu \sum_{\mu=\nu}^{i} \left[\binom{i}{\mu} \Big/ \binom{n-i+\mu}{\mu}\right] A_{i-\mu} F^{n,i,i-\mu}_{\mu-\nu}(\mathfrak{A}_2)\,,$$

$$i = 3, 4, \ldots, n\,,$$

$x = T_{-1}(t)$, $\eta = T''/T'$ *и справедливо* (1), (2). Если уравнение (a) каноническое, имеем $a_1 \equiv a_2 \equiv 0 \Rightarrow \mathfrak{A}_2 \equiv 0$ и потом вместо (4) получим формулы

$$(5) \qquad \bar{\alpha}_i(t) = (T')^{n-i} \sum_{\nu=0}^{i-3} \eta^\nu \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu \binom{i}{\nu} \binom{i-1}{\nu} \nu!\, a_{i-\nu}\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,.$$

II-АЯ ЧАСТЬ.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗМЕРНОСТЬЮ

Пусть кроме (a) дано уравнение

$$(\mathrm{b}) \qquad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b_i(t)\, z^{[n-i]}(t) = 0\,, \quad b_i/b_0 \in C_0(I_2)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

и пусть выражения $O_b(I_{2t})$, $o_b(I_{2t})$, $p_b(I_{2t})$, $k_b(I_{2t})$, B_i, $\mathfrak{B}_i$ имеют то же самое значение, как аналогические выражения, определенные для уравнения (a). Уравнения (a), (b) являются *квазидентическими,* если имеют ту же самую фундаментальную систему решений, обозначение (a) $\doteq$ (b). Множества $O_a(I_{1x})$, $O_b(I_{2t})$ являются *квазидентическими,* обозначение $O_a(I_{1x}) \doteq O_b(I_{2t})$, если существуют элементы $(\bar{\mathrm{a}}) \in O_a(I_{1x})$, $(\bar{\mathrm{b}}) \in O_b(I_{2t})$ такие, что $(\bar{\mathrm{a}}) \doteq (\bar{\mathrm{b}})$. Уравнения (a), (b) *эквивалентны* в интервалах I_{1x}, I_{2t}, если $O_a(I_{1x}) \doteq O_b(I_{2t})$. Если $O_a(I_{1x}) \doteq O_b(I_{2t})$, то для эквивалентности уравнений (a), (b) со свойствами $a_i/a_0 \in C_{n-i}(I_1)$, $b_i/b_0 \in C_{n-i}(I_2)$, $i = 1, 2$ вводим обозначение

$$(6) \qquad (\mathrm{a})\, I_{1x} \sim (\mathrm{b})\, I_{2t}\{T(x)\}$$

которое предполагает, что справедливы следующие отношения: $I_{1x} \subset I_1$, $I_{2t} \subset I_2$, $T(I_{1x}) = I_{2t}$, (b) $\doteq$ $(\bar{\mathrm{a}})$ $\{T(x), u(x)\}$,

$$u(x) = c\,|T'|^{(1-n)/2} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} [(b_1[T(s)]/b_0[T(s)])\, T'(s) - a_1(s)/a_0(s)]\, \mathrm{d}s\right\},$$

$$0 \neq c \in E_1\,.$$

Об эквивалентности уравнений (a), (b) справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Отношение* (6) *справедливо тогда и только тогда, если*

$$\mathfrak{B}_i[T(x)] = [T'(x)]^{-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \mathfrak{A}_k(x)\, \Phi^{n,i}_{i-k}[\eta(x)]\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n,\ x \in I_{1x}\,,$$

где функция $t = T(x)$ *есть решение уравнения*

$$\{t, x\} + \frac{3}{n+1}\, \mathfrak{B}_2(t)\, t'^2 = \frac{3}{n+1}\, \mathfrak{A}_2(x)\,, \quad x \in I_{1x}\,. \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть уравнение* (b) *каноническое* (это значит $b_i \equiv 0$, $i = 1, 2$). *Отношение* (6) *справедливо тогда и только тогда, если*

$$\mathfrak{B}_i[T(x)] = [T'(x)]^{-i} \sum_{\nu=0}^{i} \eta^\nu \sum_{\mu=\nu}^{i} \left[\binom{i}{\mu} \Big/ \binom{n-i+\mu}{\mu}\right] \mathfrak{A}_{i-\mu} F^{n,i,i-\mu}_{\mu-\nu}(\mathfrak{A}_2)\,,$$

$$i = 3, 4, \ldots, n,\ x \in I_{1x}\,,$$

где функция $t = T(x)$ — *решение уравнения* (3).

Теорема 3. *Пусть уравнения* (a), (b) *канонические. Отношение* (6) *справедливо тогда и только тогда, если*

$$\mathfrak{B}_i[T(x)] = [T'(x)]^{-i} \sum_{\nu=0}^{i-3} \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu \binom{i}{\nu} \binom{i-1}{\nu} \nu!\, \mathfrak{A}_{i-\nu} \eta^\nu\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad x \in I_{1x}\,,$$

где функция $t = T(x)$ *есть решение уравнения* $\{T, x\} = 0$.

III-ЬЯ ЧАСТЬ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РЕГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ

Пусть даны уравнения

$$z^{(n)}(\xi) + \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \alpha_i(\xi)\, z^{(n-i)}(\xi) = 0\,, \quad \alpha_i \in C_{n-i}(J_1)\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \tag{α}$$

$$z^{[n]}(\tau) = \sum_{i=3}^{n} \binom{n}{i} \beta_i(\tau)\, z^{[n-i]}(\tau) = 0\,, \quad \beta_i \in C_{n-i}(J_2)\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \tag{β}$$

$$y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k(x)\, y^{(n-k)}(x)\,, \quad a_k \in C_{n-k}(I_1)\,, \quad k = 3, 4, \ldots, n\,, \tag{a}$$

$$z^{[n]}(t) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} b_i(t)\, z^{[n-i]}(t) = 0\,, \quad b_i \in C_{n-i}(I_2)\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,. \tag{b}$$

Теорема 4. (α) $J_{1\xi} \sim$ (β) $J_{2\tau}\{T(\xi)\} \Leftrightarrow$

$$(7) \qquad \beta_3[T(\xi)]\,[T'(\xi)]^3 - \alpha_3(\xi) = 0\,, \quad \xi \in J_{1\xi}\,,$$

$$(8) \qquad \beta_i[T(\xi)]\,[T'(\xi)]^i - \alpha_i(\xi) + \sum_{\nu=1}^{i-3}(-1)^\nu \prod_{j=i-\nu}^{i-1} \frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)}\,.$$

$$.\{\beta_{i-\nu}^{[\nu]}[T(\xi)]\,[T'(\xi)]^i - \alpha_{i-\nu}^{(\nu)}(\xi)\} = 0\,, \quad i = 4, 5, \ldots, n\,, \quad \xi \in J_{1\xi}\,,$$

где $T(\xi)$ – решение уравнения $\{T, \xi\} = 0$. Если мы положим $\vartheta_3(\alpha_3) = \alpha_3$,

$$\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i) = \alpha_i + \sum_{\nu=1}^{i-3}(-1)^\nu \alpha_{i-\nu}^{(\nu)} \prod_{j=i-\nu}^{i-1} \frac{j(j+1)}{(i-j)(i+j-1)}\,, \quad i = 4, 5, \ldots, n\,,$$

то вместо (7), (8) возможно написать

$$\vartheta_i\{\beta_3[T(\xi)], \ldots, \beta_i[T(\xi)]\}\,[T'(\xi)]^i = \vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i)\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \quad \xi \in J_{1\xi}\,.$$

Функция $\vartheta_i(\alpha_3, \ldots, \alpha_i)$ называется *каноническим инвариантом* уравнения (α) размерности и веса i.

Теорема 5. *Отношение* (6) *справедливо тогда и только тогда, если*

$$\Theta_i\{B_2[T(x)], \ldots, B_i[T(x)]\}\,[T'(x)]^i = \Theta_i(A_2, \ldots, A_i)\,, \quad i = 3, 4, \ldots, n\,, \ x \in I_{1x}\,,$$

где $A_i[B_i]$, $i = 2, 3, \ldots, n$ *являются фундаментальными коэффициентами уравнения* (a), [(b)] *и функция* $t = T(x)$ *– решением уравнения* (7), *где положено* $B_2 = \mathfrak{B}_2$, $A_2 = \mathfrak{A}_2$. Функция $\Theta(A_2, \ldots, A_i)$ называется *фундаментальным инвариантом* уравнения (a) размерности и веса i.

Теорема 6. *Уравнение* (a) *имеет все фундаментальные инварианты равными нулю тогда и только тогда, если функции*

$$\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1\,\mathrm{d}s\right\} u^{n-k} v^{k-1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

образуют фундаментальную систему уравнений (a), *где* u, v *являются независимыми решениями уравнения*

$$(9) \qquad y'' + \frac{3}{n+1} A_2 y = 0\,.$$

В этом случае уравнение (a) является квазиидентическим с уравнением, которое возникло $(n-1)$-краткой итерацией уравнения $u^2 y' + [a_1 u^2 - (n-1)\,uu']\,y = 0$, где u – любое решение уравнения (9).