Czechoslovak Mathematical Journal

Vladimír Horák

Contribution à la déformation projective des congruences de droites

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 2, 179–204

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100661`

Чехословацкий математический журнал, т. 15 (90) 1965, Прага

CONTRIBUTION À LA DÉFORMATION PROJECTIVE DES CONGRUENCES DE DROITES

VLADIMÍR HORÁK, Brno

(Reçu le 30 mars 1961)

Dans ce travail, l'auteur étudie les propriétés des transformations de l'espace de Klein (K-transformations) qui correspondent aux homographies tangentes et osculatrices des transformations développables des congruences de droites avec les surfaces focales non dégénérées. A l'aide des correspondances ponctuelles réalisées par les K-transformations mentionnées entre les variétés des images secondaires de Klein des complexes tangents aux congruences envisagées, on décrit des types remarquables de déformations du 1^{er} et du 2^d ordre concernant les congruences de droites de l'espace à trois dimensions.

1. Soit L une congruence non parabolique dans l'espace projectif P_3 à trois dimensions. En suivant l'idée de M. E. ČECH (voir [1]) nous faisons usage, en étudiant la congruence L, du repère

$$A_1, A_2, A_3, A_4 , \tag{1.1}$$

assujetti à la condition analytique

$$[A_1A_2A_3A_4] = 1 . \tag{1.2}$$

Les transformations infinitésimales du repère (1.1) sont déterminées par le système des équations différentielles

$$\mathrm{d}A_i = \omega_{i1}A_1 + \omega_{i2}A_2 + \omega_{i3}A_3 + \omega_{i4}A_4 , \quad i = 1, 2, 3, 4 , \tag{1.3}$$

où

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0 . \tag{1.4}$$

Soit $A_1(A_2)$ le premier (second) foyer et le plan $[A_1A_2A_4]$, $[A_1A_2A_3]$ le premier et le second plan focal, les droites $[A_1A_3]$, $[A_2A_4]$ les transformées de Laplace de la droite $[A_1A_2]$ de la congruence L. Alors la congruence L est déterminée par le système des équations différentielles

$$(1.5)\qquad \begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3\,, \\ dA_2 &= \alpha_2\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4\,, \\ dA_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1A_4\,, \\ dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4\,; \end{aligned}$$

en comparant les équations (1.3) et (1.5) on obtient le système des équations de Pfaff

$$(1.6)\quad \omega_{14} = \omega_{23} = 0\,,\quad \omega_{12} = \alpha_1\omega_2\,,\quad \omega_{21} = \alpha_2\omega_1\,,\quad \omega_{34} = \beta_2\omega_1\,,\quad \omega_{43} = \beta_1\omega_2$$

dont les conditions d'intégrabilité sont

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} &[\omega_{32}\omega_1] + [d\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}), \omega_2] = 0\,, \\ &[d\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}), \omega_1] + [\omega_{41}\omega_2] = 0\,, \\ &[\omega_{41}\omega_1] - [d\beta_1 + \beta_1(\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44}), \omega_2] = 0\,, \\ &[d\beta_2 + \beta_2(\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33}), \omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] = 0\,. \end{aligned}$$

Dorénavant, nous voulons supposer que les nappes focales ne sont ni développables ni ne dégénèrent d'une autre manière c.-à-d. on a

$$(1.8)\qquad \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0\,.$$

Les formes

$$(1.9)\quad \varphi = \alpha_1\alpha_2\omega_1\omega_2\,,\quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2\,,\quad F_1 = \alpha_1\beta_1\frac{\omega_2^3}{\omega_1}\,,\quad F_2 = \alpha_2\beta_2\frac{\omega_1^3}{\omega_2}\,,$$

liées par la relation

$$(1.10)\qquad \varphi\varphi^* = F_1F_2$$

et les relations

$$(1.11)\qquad \beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0\,,\quad \alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2 = 0$$

forment *l'élément linéaire projectif* de la congruence L ([1], p. 263). On appelle φ la forme ponctuelle, φ^* — la forme planaire, F_1 et F_2 la première et la seconde forme focale; les équations (1.11) sont les équations différentielles des asymptotiques de la première ou de la seconde surface focale (A_1) ou (A_2) de la congruence L.

D'après [4], *le complexe tangent* le long de la droite $[A_1A_2]$ de la congruence L est donné par la relation

$$(1.12)\qquad \Omega = a_1[A_1A_2] + a_2[A_1A_3] + a_3[A_2A_4]\,,$$

où a_1, a_2, a_3 sont des paramètres arbitraires qui ne sont pas en même temps nuls. Chaque complexe tangent contient le voisinage du second ordre de deux surfaces réglées de la congruence L; l'équation différentielle de ces surfaces est

$$(1.13) \qquad 2a_1\omega_1\omega_2 - a_2(\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2) - a_3(\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2) = 0.$$

Les images secondaires des complexes tangents pour lesquels les surfaces mentionnées sont confondues remplissent dans le plan de l'espace de Klein

$$(1.14) \qquad \bar{P}_2 \equiv \{[A_1A_2], [A_1A_3], [A_2A_4]\}$$

la conique

$$(1.15) \qquad F \equiv a_1^2 + \alpha_1\beta_2a_2^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\,a_2a_3 + \beta_1\alpha_2a_3^2 = 0\,.$$

On a

(1.16)

$$\mathrm{d}\Omega = m_1[A_1A_2] + m_2[A_1A_3] + m_3[A_2A_4] + m_4[A_1A_4] + m_5[A_2A_3]\,,$$

(1.17)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\Omega = {} & (\mathrm{d}m_1 + m_1(\omega_{11} + \omega_{22}) + m_2\omega_{32} - m_3\omega_{41} + m_4\omega_{42} - m_5\omega_{31})\,[A_1A_2] + \\ & + (\mathrm{d}m_2 + m_2(\omega_{44} + \omega_{33}) + m_4\beta_1\omega_2 + m_5\alpha_2\omega_1)\,[A_1A_3] + \\ & + (\mathrm{d}m_3 + m_3(\omega_{22} + \omega_{44}) + m_4\alpha_1\omega_2 + m_5\beta_2\omega_1)\,[A_2A_4] + \\ & + (\mathrm{d}m_4 + m_1\omega_2 + m_2\beta_2\omega_1 + m_3\alpha_2\omega_1 + m_4(\omega_{11} + \omega_{44}))\,[A_1A_4] + \\ & + (\mathrm{d}m_5 - m_1\omega_1 + m_2\alpha_1\omega_2 + m_3\beta_1\omega_2 + m_5(\omega_{22} + \omega_{33}))\,[A_2A_3] + \\ & + (m_4\omega_1 - m_5\omega_2)\,[A_3A_4]\,,\end{aligned}$$

où

$$(1.18) \qquad \begin{aligned} m_1 &= \mathrm{d}a_1 + a_1(\omega_{11} + \omega_{22}) + a_2\omega_{32} - a_3\omega_{41}\,, \\ m_2 &= \mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{11} + \omega_{33})\,, \\ m_3 &= \mathrm{d}a_3 + a_3(\omega_{22} + \omega_{44})\,, \\ m_4 &= a_1\omega_2 + (a_2\beta_2 + a_3\alpha_2)\,\omega_1\,, \\ m_5 &= -\,a_1\omega_1 + (a_2\alpha_1 + a_3\beta_1)\,\omega_2\,. \end{aligned}$$

2. Soit L' une autre congruence avec les surfaces focales non développables dans l'espace P'_3 pour laquelle nous voulons supposer des notations analogues à celles employées pour L en indiquant par des accents toutes les expressions relatives à L. Le repère de la congruence L' soit normalisé d'une manière analogue au repère de la congruence L.

Soit T une *transformation développable* des congruences L et L' déterminée par les équations

$$(2.1) \qquad \omega_1 = \omega'_1\,, \quad \omega_2 = \omega'_2\,,$$

dont *l'homographie tangente* est donnée en coordonnées des droites par les relations (voir [1], p. 268)

$$
\begin{aligned}
(2.2) \qquad H[A_1A_2] &= [A'_1A'_2]\,,\\
H[A_1A_3] &= \varrho^2[A'_1A'_3] + \varrho\mu_1[A'_1A'_2]\,,\\
H[A_2A_4] &= \varrho^{-2}[A'_2A'_4] - \varrho^{-1}\mu_2[A'_1A'_2]\,,\\
H[A_1A_4] &= [A'_1A'_4] + \lambda_2[A'_1A'_2]\,,\\
H[A_2A_3] &= [A'_2A'_3] - \lambda_1[A'_1A'_2]\,,\\
H[A_3A_4] &= [A'_3A'_4] + (\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2)[A'_1A'_2] + \lambda_1[A'_1A'_4] -\\
&\quad - \lambda_2[A'_2A'_3] - \varrho\mu_2[A'_1A'_3] + \varrho^{-1}\mu_1[A'_2A'_4]\,.
\end{aligned}
$$

Dans ce chapitre nous voulons étudier les propriétés des homographies tangentes aux transformations développables (2.1) des congruences L et L'.

Simultanément avec l'espace P_3 ou P'_3 nous voulons considérer l'espace de Klein $\bar{P}_5$ et $\bar{P}'_5$, dans lequel sont représentées les droites de l'espace P_3 ou P'_3 sur la hyperquadrique correspondante de Klein (K-quadrique). La transformation (2.2) est alors une certaine transformation projective (K-transformation) entre les points des espaces $\bar{P}_5$ et $\bar{P}'_5$. On voit sans peine que cette K-transformation transforme chaque espace linéaire qui passe (ne passe pas) par le K-point $[A_1A_2]$ dans l'espace linéaire qui passe (ne passe pas) par le K-point $[A'_1A'_2]$; notamment les espaces $\bar{P}_4$ et $\bar{P}'_4$ tangents aux K-points $[A_1A_2]$ ou $[A'_1A'_2]$ aux K-quadriques relatives se transforment l'un dans l'autre.

Le complexe tangent arithmétique (1.12) est transformé par la K-transformation (2.2) dans le complexe tangent arithmétique

$$
\begin{aligned}
(2.3) \quad H\Omega &= (a_1 + a_2\varrho\mu_1 - a_3\varrho^{-1}\mu_2)[A'_1A'_2] + a_2\varrho^2[A'_1A'_3] + a_3\varrho^{-2}[A'_2A'_4] =\\
&= \lambda(a'_1[A'_1A'_2] + a'_2[A'_1A'_3] + a'_3[A'_2A'_4])
\end{aligned}
$$

et alors le plan (1.14) de l'espace $\bar{P}_5$ dans le plan correspondant $\bar{P}'_2 \equiv \{[A'_1A'_2], [A'_1A'_3], [A'_2A'_4]\}$ de l'espace $\bar{P}'_5$. La K-transformation (2.2) entraîne entre les coordonnés locales des points dans les plans $\bar{P}_2$ et $\bar{P}'_2$ les transformations

$$(2.4)_{1-3} \qquad \lambda a'_1 = a_1 + a_2\varrho\mu_1 - a_3\varrho^{-1}\mu_2\,, \quad \lambda a'_2 = a_2\varrho^2\,, \quad \lambda a'_3 = a_3\varrho^{-2}\,,$$

resp.

$$(2.4)'_{1-3} \qquad a_1 = \lambda(a'_1 - \varrho^{-1}\mu_1 a'_2 + \varrho\mu_2 a'_3)\,, \quad a_2 = \lambda\varrho^{-2}a'_2\,, \quad a_3 = \lambda\varrho^2 a'_3\,,$$

où $\lambda(\neq 0)$ est pour le moment un facteur non précisé.

Dans la K-transformation (2.2) les valeurs $\varrho, \mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$ sont arbitraires; nous voulons étudier ces problèmes: De quelle manière la K-transformation (2.2) transforme-t-elle l'ensemble des complexes tangents Ω le long de la droite $[A_1A_2]$ de la congruence L et l'ensemble des complexes tangents Ω' le long de la droite $[A'_1A'_2]$ de la congruence L'? Est-ce qu'il y a des K-transformations (2.2) qui transforment deux complexes tangents arbitraires Ω et Ω' l'un dans l'autre? Peut-on choisir les valuers ϱ, μ_1, μ_2 d'une telle manière que pour deux complexes Ω et Ω' arbitrairement donnés les relations (2.4), resp. (2.4)$'$ soient vraies pour λ arbitraire?

Avant tout, on voit que dans la transformation des ensembles des complexes tangents, le rôle essentiel n'est joué que par les facteurs ϱ, μ_1 et μ_2. Ces facteurs étant donnés, à chaque complexe tangent à la droite $[A_1A_2]$ de la congruence L l'homographie tangente associe univoquement un complexe tangent à la droite $[A'_1A'_2]$ de la congruence L'.

Soit $\Omega(a_1, a_2, a_3)$, resp. $\Omega'(a'_1, a'_2, a'_3)$ un complexe arithmétique arbitraire tangent à la congruence L, resp. L' c.-à-d. les a_i, resp. a'_i $(i = 1, 2, 3)$ sont donnés. Soit tout d'abord $a_2a_3a'_2a'_3 \neq 0$. En premier lieu, des relations $(2.4)_{2,3}$ il résulte (en éliminant ϱ)

$$(2.5) \qquad \lambda^2 = \frac{a_2a_3}{a'_2a'_3},$$

de sorte que le facteur λ est univoquement déterminé, excepté son signe. Pour ϱ, μ_1, μ_2 on obtient des relations (2.4)

$$(2.6) \qquad \varrho^4 = \frac{a'_2a_3}{a_2a'_3}, \quad \lambda a'_1 - a_1 = a_2\mu_1\varrho + a_3\mu_2\varrho^{-1}.$$

On a alors le théorème: *Soient $\Omega(a_1 : a_2 : a_3)$ et $\Omega'(a'_1 : a'_2 : a'_3)$ deux complexes tangents géométriques arbitraires $(a_2a_3a'_2a'_3 \neq 0)$ aux droites qui se correspondent dans la transformation développable* (2.1) *des congruences L et L'.*[1]) *Pour chaque complexe arithmétique arbitraire $\Omega(a_1, a_2, a_3)$ qui appartient au complexe géométrique $\Omega(a_1 : a_2 : a_3)$ il existe ∞^3 des homographies tangentes* (2.2) *dont chacune transforme le complexe arithmétique $\Omega(a_1, a_2, a_3)$ dans un certaine complexe arithmétique $\Omega'(a'_1, a'_2, a'_3)$ qui appartient au complexe géométrique $\Omega'(a'_1 : a'_2 : a'_3)$. Ces transformations dépendent de λ_1, λ_2 et d'une arbitraire des fonctions μ_1 et μ_2. Le complexe arithmétique $\Omega(ka_1, ka_2, ka_3)$ est transformé par l'homographie mentionnée dans le complexe arithmétique $\Omega'(ka'_1, ka'_2, ka'_3)$ et alors cette homographie détermine univoquement une correspondance entre des complexes arithmétiques appartenant aux complexes géométriques donnés.*

On voit aussi sans peine des relations (2.4) que *les complexes Ω pour lesquels on a $a_2 \neq 0 = a_3$, resp. $a_2 = 0 \neq a_3$* (c.-à-d. les complexes tangents spéciaux) *se transforment par l'homographie* (2.2) *justement dans les complexes tangents pour lesquels on a $a'_2 \neq 0 = a'_3$, resp. $a'_2 = 0 \neq a'_3$; on peut transformer un complexe arithmétique arbitraire $\Omega(a_1, 0, a_3)$, resp. $\Omega(a_1, a_2, 0)$ dans un complexe arithmétique arbitraire $\Omega(a'_1, 0, a'_3)$, resp. $\Omega'(a'_1, a'_2, 0)$ par les ∞^3 homographies.*

---

[1]) Le symbole $\Omega(a_1 : a_2 : a_3)$, resp. $\Omega(a_1, a_2, a_3)$ signifie le complexe géométrique, ou arithmétique dont les coordonnés locales sont $a_1 : a_2 : a_3$, ou a_1, a_2, a_3.

Il y a ∞^4 homographies (2.2) *qui transforment le complexe arithmétique $\Omega(a_1, 0, 0)$ $(a_1 \neq 0$, arb. fixe) dans le complexe arithmétique $\Omega'(a'_1, 0, 0)$ $(a'_1 \neq 0$, arb. fixe).*

Si l'on choisit deux complexes tangents arbitraires Ω et Ω' (non spéciaux) dont les homographies tangentes (2.2) transforment les complexes arithmétiques convenables l'un dans l'autre, alors d'après la relation $(2.6)_1$, pour ces homographies (2.2), ϱ^4 est déterminé univoquement. D'après M. E. Čech (voir [1]. chap. 4) étant donné ϱ^2, l'homographie tangente détermine une projectivité qui porte la ponctuelle $[A_1 A_2]$ dans la ponctuelle $[A'_1 A'_2]$ et en même temps une autre projectivité qui porte le faisceau de plans à l'axe $[A_1 A_2]$ dans le faisceau de plans à l'axe $[A'_1 A'_2]$. On obtient ainsi d'une part une *extension ponctuelle* $T(\varrho^2)$ et d'autre part une *extension planaire* $T^*(\varrho^2)$ de la transformation développable T. M. E. Čech a décrit le caractère géométrique des homographies tangentes qui possèdent ϱ^2 fixe (voir [1], ch. 6). Nous voulons donner une autre caractéristique de ces homographies.

Soit dans la relation (2.2) $\varrho \neq 0$, arbitraire fixe. Alors on voit de la relation $(2.6)_1$ que chaque complexe arithmétique $\Omega(a_1, a_2, a_3)$ $(a_2 a_3 \neq 0)$ dont l'image secondaire est située sur la droite

$$n_2 a_2 = n_3 a_3 , \tag{2.7}$$

$(n_2, n_3$ sont fixes, pas en même temps nuls) peut être transformé dans un certain complexe arithmétique qui correspond à un complexe géométrique arbitrairement choisi (excepté $\Omega(a_1 : 0 : 0)$) dont l'image secondaire est située sur la droite

$$n'_2 a'_2 = n'_3 a'_3 , \tag{2.8}$$

où n'_2 et n'_3 sont données par la relation

$$n_2 : n_3 = \varrho^4 n'_2 : n'_3 . \tag{2.9}$$

Chaque $\varrho \neq 0$ détermine une projectivité des faisceaux de droites

$$k_2 a_2 = k_3 a_3 \quad \text{et} \quad k'_2 a'_2 = k'_3 a'_3 \tag{2.10}$$

$(k_2, k_3$, resp. k'_2, k'_3 sont les paramètres variables) qui sont situés dans le plan $\bar{P}_2$ ou $\bar{P}'_2$ et on a pour les droites correspondantes $k_2 : k_3 = k'_2 : \varrho^{-4} k'_3$. A chaque droite dans $\bar{P}_5$ du faisceau $(2.10)_1$ il correspond dans l'espace P_3 un faisceau linéaire des complexes tangents dont la base est une certaine congruence linéaire parabolique à l'axe $[A_1 A_2]$. Inversement, à chaque couple des droites (2.7) *et* (2.8), *où $n_2 n_3 n'_2 n'_3 \neq 0$, la relation* (2.9) *détermine ϱ^4 univoquement. Dans toutes les projectivités possibles, outre les droites* (2.10) *des faisceaux (c.-à-d. si ϱ varie) correspondent les droites $a_2 = 0$, $a'_2 = 0$ et $a_3 = 0$, $a'_3 = 0$ réciproquement. Si l'on a choisi ϱ, alors à chaque point arithmétique de la droite* (2.8) *correspondent les ∞^1 points arithmétiques de la droite* (2.9).

Chaque droite arbitraire dans le plan (1.14) est l'image secondaire d'un faisceau linéaire de complexes tangents (de l'espace P_3) dont chacun contient le voisinage du 2^e ordre d'un couple de surfaces réglées de la congruence L passant par la droite $[A_1A_2]$. Si L n'est pas une congruence W, alors les ensembles de ces ∞^1 couples de surfaces diffèrent pour les droites différentes. Si L est une congruence W, alors ces ensembles de couples de surfaces réglées sont les mêmes pour toutes les droites du plan (1.14) qui ne passent pas par le point singulier de la conique F (voir [3], p. 176–7). Pour les congruences W la décomposition mentionnée en couples des surfaces réglées est alors déterminée à priori univoquement.

Soit

$$n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 = 0\,, \quad \text{resp.} \quad n'_1a'_1 + n'_2a'_2 + n'_3a'_3 = 0 \tag{2.11}$$

une droite arbitraire du plan (1.14), *ou du plan* $\{[A'_1A'_2], [A'_1A'_3], [A'_2A'_4]\}$ *respectivement qui est l'image secondaire d'un faisceau linéaire des complexes tangents à la droite* $[A_1A_2]$ *ou* $[A'_1A'_2]$. *Il y a* ∞^3 *homographies tangentes qui portent ces faisceau l'un à l'autre* ($n_1n'_1 \neq 0$); on obtient pour les valeurs ϱ, μ_1, μ_2 (en substituant dans la relation (2.11) à a_1, a_2, a_3 d'après (2.4) et en comparant avec $(2.11)_2$) les relations

$$\lambda^{-1}n'_1 = n_1,\ \lambda^{-1}n'_2 = n_2\varrho^{-2} - n_1\mu_1\varrho^{-1},\ \lambda^{-1}n'_3 = n_3\varrho^2 + n_1\mu_2\varrho,\ \lambda \neq 0; \tag{2.12}$$

les valeurs λ_1 et λ_2 sont arbitraires. *Si l'on a* $n_1 = n'_1 = 0$, *alors il y a* ∞^4 *homographies envisagées.*

Les images secondaires des complexes tangents qui contiennent le voisinage du 2^e ordre des surfaces développables

$$\omega_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \omega'_1 = 0 \tag{2.13}$$

de L, resp. L' sont situées sur les droites

$$\alpha_1a_2 + \beta_1a_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha'_1a'_2 + \beta'_1a'_3 = 0\,. \tag{2.14}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ces droites se transforment l'une dans l'autre est qu'on ait d'après (2.12)

$$\varrho^4 = \frac{\alpha_1\beta'_1}{\alpha'_1\beta_1} \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha'_1\beta'_1}\,. \tag{2.15}$$

La transformation (2.1) est une déformation focale de première espèce si et seulement si on a $\lambda^2 = 1$. Alors le théorème suivant est vrai:

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable (2.1) *soit une déformation focale de première, ou de seconde espèce est: il existe une homographie tangente qui transforme le complexe arithmétique* ${}^1\Omega(a_1, \beta_1, -\alpha_1)$ *dans le complexe arithmétique* ${}^1\Omega'(a'_1, \beta'_1, -\alpha'_1)$, *resp. le complexe arithmétique* ${}^2\Omega(a_1, \alpha_2, -\beta_2)$ *dans le complexe arithmétique* ${}^2\Omega'(a_1, \alpha'_2, -\beta'_2)$.

Notons encore que toutes les homographies envisagées qui réalisent les transformations des complexes arithmétiques ne réalisent pas aussi les déformations focales, mais seulement celles pour lesquelles on a $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et qui transforment réciproquement les complexes pour lesquels on a $a_1 = a'_1$.

S'il y a des homographies qui réalisent en même temps les deux transformations ${}^1\Omega \leftrightarrow {}^1\Omega'$ et ${}^2\Omega \leftrightarrow {}^2\Omega'$, *alors la transformation développable* (2.1) *est une déformation projective*, comme on voit des relations (2.4).

A l'aide des complexes arithmétiques qui correspondent aux complexes tangents géométriques particuliers on peut alors décider si une transformation T est ou n'est pas une déformation focale. Pour la déformation ponctuelle et planaire un théorème analogue est vrai: *La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable* (2.1) *soit une déformation ponctuelle, resp. planaire est: il existe une homographie tangente qui porte le complexe arithmétique* ${}^3\Omega(a_1, \alpha_1, \alpha_2)$ *resp.* ${}^4\Omega(a_1, \beta_2, \beta_1)$ *dans le complexe arithmétique* ${}^3\Omega'(a'_1, \alpha'_1, \alpha'_2)$, *resp.* ${}^4\Omega'(a'_1, \beta'_2, \beta'_1)$.

Nous n'avons pas réussi à déterminer la signification géométrique des complexes ${}^3\Omega$ et ${}^4\Omega$ ni à obtenir d'autres complexes tangents géométriquement essentiels à l'aide desquels on pourrait caractériser la déformation ponctuelle ou planaire.

3. Chaque complexe tangent Ω contient le voisinage du 2^e ordre de deux surfaces réglées de la congruence L; les complexes qui contiennent le voisinage du 2^e ordre de la même surface réglée fixe forment dans l'espace P_3 un faisceau linéaire des complexes dont l'image dans le plan (1.14) est une droite tangente à la conique F (voir [4], p. 172).

Par l'homographie tangente les complexes Ω qui renferment le voisinage du 2^e ordre d'une surface réglée fixe de la congruence L ne se transforment pas, en général, dans les complexes tangents Ω' de la congruence L' qui possèdent une propriété analogue. Si l'on choisit arbitrairement une surface de la congruence L et une surface de L', il existe toujours une homographie tangente qui transforme les complexes des ensembles de complexes tangents – qui contiennent le voisinage du 2^e ordre de ces surfaces – l'un dans l'autre. Si la situation décrite doit se produire pour toutes les surfaces des congruences L et L', il est nécessaire et il suffit que l'homographie tangente transforme la conique F dans la conique F'.

Le point $[A_1A_2]$ est le pôle de la droite $\overline{[A_1A_3]\,[A_2A_4]}$ (c.-à-d. $a_1 = 0$) par rapport à la conique F et l'homographie (2.2) transforme le point $[A_1A_2]$ dans le point $[A'_1A'_2]$; pour que la conique F se transforme dans la conique F' il est nécessaire que la droite $a_1 = 0$ se porte dans la droite $a'_1 = 0$ et alors d'après $(2.4)_1$ qu'on ait

$$\mu_1 = \mu_2 = 0\,. \tag{3.1}$$

L'équation de la conique F transformée par l'homographie (2.2) avec $\mu_1 = \mu_2 = 0$ est

$$a_1'^2 + \alpha_1\beta_2\varrho^{-4}a_2'^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\,a'_2a'_3 + \beta_1\alpha_2\varrho^4a_3'^2 = 0\,. \tag{3.2}$$

Si cette conique doit être confondue avec la conique F', il est nécessaire et il suffit que les relations suivantes soient vraies

$$(3.3) \qquad \alpha_1\beta_2\varrho^{-4} = \alpha'_1\beta'_2\,, \quad \beta_1\alpha_2\varrho^4 = \beta'_1\alpha'_2\,, \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = \alpha'_1\alpha'_2 + \beta'_1\beta'_2\,.$$

En éliminant ϱ des équations $(3.3)_{1,2}$ on obtient

$$(3.4) \qquad \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 = \alpha'_1\alpha'_2\beta'_1\beta'_2\,.$$

Par un calcul aisé on obtient de la relation précédente et de la relation $(3.3)_3$ soit

$$(3.5) \qquad \alpha'_1\alpha'_2 = \alpha_1\alpha_2,\ \beta'_1\beta'_2 = \beta_1\beta_2\,, \quad \text{c.-à-d.} \quad \varphi = \varphi',\ \varphi^* = \varphi^{*\prime}\,,$$

soit

$$(3.5)' \qquad \alpha'_1\alpha'_2 = \beta_1\beta_2,\ \beta'_1\beta'_2 = \alpha_1\alpha_2\,, \quad \text{c.-à-d.} \quad \varphi^* = \varphi',\ \varphi'^* = \varphi\,.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable T des congruences L et L' soit ou une déformation ponctuelle et en même temps une déformation planaire des congruences L et L' [2]) *ou une déformation ponctuelle et en même temps une déformation planaire d'une de ces congruences et de la dualisation de l'autre, est: il existe une homographie tangente qui transforme la conique F dans la conique F'; si L est une congruence W ou V* [3]), *alors nécessairement L' est aussi une congruence W ou V. Si L et L' sont les congruences W alors les relations* (3.5) *et* (3.5)' *sont simultanément vraies.*

Les homographies tangentes qui réalisent la déformation ponctuelle diffèrent des homographies qui réalisent la déformation planaire; or ces homographies qui réalisent les déformations envisagées ne transforment pas la conique F dans la conique F'. P. ex. l'homographie qui réalise la déformation ponctuelle est déterminée par les relations $\varrho^2 = \alpha_1/\alpha'_1 = \alpha'_2/\alpha_2$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, λ_1, λ_2 arb. On voit sans peine que pour cette homographie on a $HF \neq F'$.

La condition nécessaire pour que la transformation T soit une déformation projective des congruences L et L' est: il existe une homographie tangente qui transforme la conique F dans la conique F', car une déformation projective est en même temps une déformation ponctuelle et planaire.

D'après (3.3) et (3.5), resp. (3.5)' on obtient

$$(3.6)_{1,2} \qquad \varrho^4 = \frac{\beta'_1\alpha'_2}{\beta_1\alpha_2} = \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha'_1\beta'_2} = \frac{\alpha_1\beta'_1}{\alpha'_1\beta_1} = \frac{\alpha'_2\beta_2}{\alpha_2\beta'_2}\,, \quad \text{resp.}$$

$$\varrho^4 = \frac{\beta'_1\alpha'_2}{\beta_1\alpha_2} = \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha'_1\beta'_2} = \frac{\beta'_1\beta_2}{\alpha_2\alpha'_1} = \frac{\alpha'_2\alpha_1}{\beta_1\beta'_2}\,.$$

---

[2]) M. E. Čech a démontré que la classe des congruences qui sont en même temps des déformations ponctuelles et planaires dépend de six fonctions arbitraires d'une variable (voir [1], chap. 5, p. 276).

[3]) Ce sont les congruences pour lesquelles aux courbes asymptotiques de chaque surface focale correspondent les courbes conjuguées sur l'autre surface focale ([2], p. 358).

Alors la condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable T qui est simultanément une déformation ponctuelle et planaire, soit une déformation projective des congruences L et L' est: une des homographies tangentes pour laquelle on a

$$(3.7)\qquad \varrho_1^2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1'}\,, \quad ou \quad \varrho_2^2 = \frac{\beta_1'}{\beta_1}\,, \quad \varrho_3^2 = \frac{\alpha_2'}{\alpha_2}\,, \quad \varrho_4^2 = \frac{\beta_2}{\beta_2'} \quad \textit{respectivement, et}$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 0$$

transforme les coniques F et F' l'une dans l'autre. Ensuite on a nécessairement d'après (3.6) $\varrho_1^2 = \varrho_2^2 = \varrho_3^2 = \varrho_4^2$; comme les valeurs λ_1 et λ_2 doivent être arbitraires, il existent ∞^2 de telles homographies, mais elles ne réalisent pas toutes la déformation projective.

4. Les images secondaires des complexes tangents aux droites de la congruence L forment dans l'espace de Klein une *congruence Λ de plans* dont chaque plan est l'ensemble des images secondaires des complexes tangents à une même droite de la congruence L. Les points de la conique F sont des *foyers* du plan de la congruence Λ et les *directions focales* sont déterminées par la relation (voir [4], chap. 5)

$$(4.1)\qquad (a_2\beta_2 + a_3\alpha_2)\,\omega_1 + a_1\omega_2 = 0\,, \quad \text{resp.} \quad a_1\omega_1 - (a_2\alpha_1 + a_3\beta_1)\,\omega_2 = 0\,,$$

où a_1, a_2, a_3 satisfont à la relation (1.15).

La transformation (2.4)' transforme la direction focale $(4.1)_1$, resp. $(4.1)_2$ (en supposant $\mu_1 = \mu_2 = 0$) dans la direction

$$(4.2)\qquad (a_2'\varrho^{-2}\beta_2 + a_3'\varrho^2\alpha_2)\,\omega_1 + a_1'\omega_2 = 0\,,$$

resp.

$$a_1'\omega_1 - (a_2'\varrho^{-2}\alpha_1 + a_3'\varrho^2\beta_1)\,\omega_2 = 0\,.$$

On a alors le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable T, donnée par la relation (2.1), *soit une déformation projective des congruences L et L' est: il existe une K-transformation* (2.2) *qui transforme la conique F dans la co-conique F' et les directions focales relatives aux points correspondants des coniques F et F' les unes dans les autres.*

La K-transformation (2.2) détermine pour les plans des congruences Λ et Λ' les relations suivantes ($\tau_{ik} = \omega'_{ik} - \omega_{ik}$):

$$(4.3)\qquad H([A_1A_2], [A_1A_3], [A_2A_4]) = ([A_1'A_2'], [A_1'A_3'], [A_2'A_4'])\,,$$

$$\begin{aligned}(4.4)\qquad H\,\mathrm{d}([A_1A_2], [A_1A_3], [A_2A_4]) &= \mathrm{d}([A_1'A_2'], [A_1'A_3'], [A_2'A_4']) +\\ &+ (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 - \tau_{11} - \tau_{22})([A_1'A_2'], [A_1'A_3'], [A_2'A_4']) +\\ &+ ((\alpha_1\varrho^{-2} - \alpha_1')\,\omega_2 - \varrho^{-1}\mu_1\omega_1)([A_1'A_2'], [A_2'A_3'], [A_2'A_4']) -\\ &- ((\beta_1\varrho^2 - \beta_1')\,\omega_2 + \varrho\mu_2\omega_1)([A_1'A_2'], [A_2'A_3'], [A_1'A_3']) -\\ &- ((\alpha_2\varrho^2 - \alpha_2')\,\omega_1 + \varrho\mu_2\omega_2)([A_1'A_2'], [A_1'A_4'], [A_1'A_3']) +\\ &+ ((\beta_2\varrho^{-2} - \beta_2')\,\omega_1 - \varrho^{-1}\mu_1\omega_2)([A_1'A_2'], [A_1'A_4'], [A_2'A_4'])\,.\end{aligned}$$

La K-transformation relative à l'homographie tangente à la transformation développable (2.1) *des congruences L et L' ne réalise pas, en général, le contact analytique du* 1^er^ *ordre des congruences de plans* Λ *et* Λ' *ni celui d'une couche à un paramètre de plans des congruences* Λ *et* Λ'.

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable (2.1) *soit une déformation focale de la première, resp. seconde espèce des congruences L et L' est: il existe une K-transformation qui réalise un contact analytique du* 1^er^ *ordre des couches de plans à un paramètre déterminées dans les congruences* Λ *et* Λ' *par la relation* $\omega_1 = 0$, *resp.* $\omega_2 = 0$, *c.-à-d. des couches correspondant à la première, resp. seconde couche des surfaces développables des congruences L et L'.*

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable (2.1) *soit une déformation projective des congruences L et L' est: il existe une K-transformation* (2.2) *qui réalise un contact analytique du* 1^er^ *ordre des congruences de plans* Λ *et* Λ'; *s'il existe une K-transformation possédant la propriété énoncée, alors il en existe* ∞^2 (*elles dépendent de* λ_1 *et* λ_2) *et elles ne correspondent pas toutes aux homographies osculatrices de la transformation développable T.*

S'il existe une quantité ϱ *telle que au moins une des K-transformations* (2.2) *réalise un contact analytique du* 1^er^ *ordre des congruences de plans* Λ *et* Λ' — *qui sont des images dans l'espace de Klein des congruences L et L' dans une transformation développable — alors T est une déformation projective.*

Ce théorème décrit d'une manière géométrique l'énoncé de M. E. Čech ([1], p. 269) à savoir que T est une déformation projective si et seulement s'il existe la quantité ϱ satisfaisant aux relations (3.7), où on a posé $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = \varrho$.

Les plans $([A'_1A'_2], [A'_2A'_3], [A'_2A'_4])$, $([A'_1A'_2], [A'_2A'_3], [A'_1A'_3])$, $([A'_1A'_2], [A'_1A'_4], [A'_1A'_3])$ et $([A'_1A'_2], [A'_1A'_4], [A'_2A'_4])$ qui se trouvent dans la relation (4.4) sont situés sur l'hyperquadrique de Klein et leurs points sont des images de Klein des droites d'un faisceau à deux paramètres avec le sommet dans le point A_2, resp. des droites du plan tangent à la surface focale (A_1), (c.-à-d. du second plan focal), resp. des droites du faisceau à deux paramètres avec le sommet A_1, resp. des droites du plan tangent à la surface focale (A_2) — du premier plan focal.

5. Supposons que la transformation développable (2.1) des congruences L et L' soit une déformation projective. Ensuite on peut particulariser les repères des deux congruences de la manière qu'on ait

$$\alpha'_1 = \alpha_1\,, \quad \alpha'_2 = \alpha_2\,, \quad \beta'_1 = \beta_1\,, \quad \beta'_2 = \beta_2\,; \tag{5.1}$$

l'homographie osculatrice H_0 de la transformation T est exprimée par les relations

$$H_0A_1 = A'_1\,, \quad H_0A_2 = A'_2\,, \quad H_0A'_3 = A'_3\,, \quad H_0A_4 = A'_4 \tag{5.2}$$

et alors $\varrho^2 = 1$. La transformation (2.4) prend la forme ($\lambda^2 = 1$)

$$a'_1 = a_1\,, \quad a'_2 = a_2\,, \quad a'_3 = a_3\,. \tag{5.3}$$

La particularisation présupposée entraîne les relations suivantes ($\tau_{ik} = \omega'_{ik} - \omega_{ik}$, voir [1], *p.* 279):

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{34} = \tau_{43} = 0\,, \tag{5.4}$$

$$-2\tau_{11} = 2\tau_{22} = -\,2\tau_{33} = 2\tau_{44} = c_1\omega_1 - c_2\omega_2\,, \tag{5.5}$$

$$[\tau_{31}\omega_1] = 0\,, \quad [\tau_{42}\omega_2] = 0\,, \tag{5.6}$$

$$\tau_{32} = \beta_2 c_2\omega_1 + \alpha_1 c_1\omega_2\,, \quad \tau_{41} = \alpha_2 c_2\omega_1 + \beta_1 c_1\omega_2\,. \tag{5.7}$$

Dorénavant nous allons étudier l'homographie H tangente à la transformation développable (2.1) qui transforme la conique F dans la conique F', c.-à-d. l'homographie qui a en coordonnées ponctuelles ou planaires ou coordonnées de droites la forme

$$HA_1 = A'_1,\ HA_2 = A'_2,\ HA_3 = A'_3 + \lambda_1 A'_1,\ HA_4 = A'_4 + \lambda_2 A'_2\,, \tag{5.8}$$

$$HE_1 = E'_1 - \lambda_1 E'_3,\ HE_2 = E'_2 - \lambda_2 E'_4,\ HE_3 = E'_3,\ HE_4 = E'_4\,, \tag{5.8$'$}$$

$$\begin{gathered} H[A_1A_2] = [A'_1A'_2],\ H[A_1A_3] = [A'_1A'_3],\ H[A_2A_4] = [A'_2A'_4]\,, \\ H[A_1A_4] = [A'_1A'_4] + \lambda_2[A'_1A'_2],\ H[A_2A_3] = [A'_2A'_3] - \lambda_1[A'_1A'_2]\,, \\ H[A_3A_4] = [A'_3A'_4] + \lambda_1[A'_1A'_4] - \lambda_2[A'_2A'_3] + \lambda_1\lambda_2[A'_1A'_2] \end{gathered} \tag{5.8$''$}$$

respectivement.

Cette homographie tangente est dite *homographie* K_0, *resp.* K_0^* *ponctuellement*, resp. *planairement associée* si l'on a (voir [1], p. 277, 279)

$$\lambda_1 = -\,c_1,\ \lambda_2 = -\,c_2, \quad \text{resp.} \quad \lambda_1 = c_1,\ \lambda_2 = c_2 \tag{5.9$_{1,2}$}$$

où c_1 et c_2 sont déterminés par la relation (5.5).

La transformation développable est nommée déformation projective singulière, resp. demisingulière de première (seconde) espèce si $c_1 = c_2 = 0$, resp. $c_1 \neq 0 = c_2$ ($c_1 = 0 \neq c_2$) est vrai.

Pour l'homographie tangente (5.8) il résulte

$$H\,\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}A'_1 + (\lambda_1\omega_1 - \tau_{11})\,A'_1\,, \tag{5.10}$$

$$H\,\mathrm{d}^2A_1 = \mathrm{d}^2A'_1 + 2(\lambda_1\omega_1 - \tau_{11})\,\mathrm{d}A'_1 + (.)\,A'_1 + p_1A'_2 - q_1A'_3\,, \tag{5.11}$$

et

$$H\,\mathrm{d}A_2 = \mathrm{d}A'_2 + (\lambda_2\omega_2 - \tau_{22})\,A'_2\,, \tag{5.12}$$

$$H\,\mathrm{d}^2A_2 = \mathrm{d}^2A'_2 + 2(\lambda_2\omega_2 - \tau_{22})\,\mathrm{d}A'_2 + (.)\,A'_2 + p_2A'_1 - q_2A'_4\,; \tag{5.13}$$

d'une manière analogue pour la première et seconde surface focale (E_3) et (E_4) de la dualisation des congruences L et L' on obtient

$$(5.14)\qquad H\,\mathrm{d}E_3 = \mathrm{d}E'_3 + (\lambda_1\omega_1 + \tau_{33})\,E'_3\,,$$

$$(5.15)\qquad H\,\mathrm{d}^2E_3 = \mathrm{d}^2E'_3 + 2(\lambda_1\omega_1 + \tau_{33})\,\mathrm{d}E'_3 + (.)\,E'_3 - p_1^*E'_4 + q_1E'_1\,,$$

$$(5.16)\qquad H\,\mathrm{d}E_4 = \mathrm{d}E'_4 + (\lambda_2\omega_2 + \tau_{44})\,E'_4\,,$$

$$(5.17)\qquad H\,\mathrm{d}^2E_4 = \mathrm{d}^2E'_4 + 2(\lambda_2\omega_2 + \tau_{44})\,\mathrm{d}E'_4 + (.)\,E'_4 - p_2^*E'_3 + q_2E'_2\,,$$

où

$$(5.18)\qquad \begin{aligned} p_1 &= (\lambda_2 - c_2)\,\beta_2\omega_1^2 - 2(\lambda_1 + c_1)\,\alpha_1\omega_1\omega_2 + (\lambda_2 + c_2)\,\alpha_1\omega_2^2\,,\\ p_2 &= (\lambda_1 + c_1)\,\alpha_2\omega_1^2 - 2(\lambda_2 + c_2)\,\alpha_2\omega_1\omega_2 + (\lambda_1 - c_1)\,\beta_1\omega_2^2\,,\\ p_1^* &= (\lambda_2 + c_2)\,\alpha_2\omega_1^2 - 2(\lambda_1 - c_1)\,\beta_1\omega_1\omega_2 + (\lambda_2 - c_2)\,\beta_1\omega_2^2\,,\\ p_2^* &= (\lambda_1 - c_1)\,\beta_2\omega_1^2 - 2(\lambda_2 - c_2)\,\beta_2\omega_1\omega_2 + (\lambda_1 + c_1)\,\alpha_1\omega_2^2\,,\\ &q_1 = 2\lambda_1\omega_1^2\,,\quad q_2 = 2\lambda_2\omega_2^2\,. \end{aligned}$$

Des relations précédentes on voit que *l'homographie tangente* (5.8), *resp.* (5.8)′ *pour laquelle on a* $\lambda_2 = 0$ *réalise le contact analytique du* 2ᵉ *ordre des courbes*

$$(5.19)\qquad (\lambda_1 + c_1)\,\alpha_2\omega_1^2 - 2c_2\alpha_2\omega_1\omega_2 + (\lambda_1 - c_1)\,\beta_1\omega_2^2 = 0\,,$$

resp.

$$(5.20)\qquad (\lambda_1 - c_1)\,\beta_2\omega_1^2 + 2c_2\beta_2\omega_1\omega_2 + (\lambda_1 + c_1)\,\alpha_1\omega_2^2 = 0\,,$$

des secondes surfaces focales (A_2) *et* (A'_2), *resp. des secondes surfaces focales* (E_4) *et* (E'_4) *des dualisations des congruences* L *et* L'. On obtient le résultat analogue pour les homographies tangentes (5.8) et (5.8)′ en supposant $\lambda_1 = 0$. Spécialement, si l'homographie (5.8) est une homographie osculatrice $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$ les relations (5.19) ou (5.20) déterminent les *directions caractéristiques de la surface* (A_2) *ou* (E_4) *relativement à la déformation projective* T (voir [1], p. 280).

Si la transformation développable T *est une déformation projective nonsingulière des congruences* L *et* L', *alors l'homographie ponctuellement (planairement) associée* $K_0(K_0^*)$ *réalise un contact analytique du second ordre des courbes* $\omega_1^2 = 0$ *des surfaces* (A_1) *et* $(A'_1)((E_3)$ *et* $(E'_3))$, *et en même temps des courbes* $\omega_2^2 = 0$ *des surfaces* (A_2) *et* (A'_2) $((E_4)$ *et* $(E'_4))$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la transformation développable T *soit une déformation demisingulière de première, ou de seconde espèce est: l'homographie ponctuellement (planairement) associée réalise un contact analytique du second ordre des courbes* $\omega_1 = 0$ *des surfaces* (E_3) *et* (E'_3) $((A_1)$ *et* $(A'_1))$, *ou des courbes* $\omega_2 = 0$ *des surfaces* (E_4) *et* (E'_4) $((A_2)$ *et* $(A'_2))$.

On obtient sans peine les résultats précédents des relations (5.11), (5.13), (5.15) et (5.17) en y substituant dans le cas de l'homographie ponctuellement, resp. planairement associée $\lambda_1 + c_1 = \lambda_2 + c_2 = 0$, resp. $\lambda_1 - c_1 = \lambda_2 - c_2 = 0$; si la transformation T est une déformation projective demisingulière de la première ou seconde espèce on a $\lambda_2 = c_2 = 0$ ou $\lambda_1 = c_1 = 0$. Ce dernier théorème caractérise d'une manière nouvelle les déformations projectives demisingulières (cf. [1], p. 281–283).

Les K-transformations relatives aux homographies tangentes $(5.8)''$ déterminent pour les congruences Λ et Λ' dans l'espace de Klein les relations

$$H([A_1A_2], [A_1A_3], [A_2A_4]) = ([A'_1A'_2], [A'_1A'_3], [A'_2A'_4]), \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} H\,\mathrm{d}([A_1A_2], [A_1A_3], [A_2A_4]) = \mathrm{d}([A'_1A'_2], [A'_1A'_3], [A'_2A'_4]) &+ \\ + (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2)([A'_1A'_2], [A'_1A'_3], [A'_2A'_4]) &, \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} H\,\mathrm{d}^2([A_1A_2], [A_1A_3], [A_2A_4]) &= \mathrm{d}^2([A'_1A'_2], [A'_1A'_3], [A'_2A'_4]) + \\ &+ 2(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2)\,\mathrm{d}([A'_1A'_2], [A'_1A'_3], [A'_2A'_4]) + \\ &+ (.)([A'_1A'_2], [A'_1A'_3], [A'_2A'_4]) + p_1([A'_1A'_2], [A'_2A'_3], [A'_2A'_4]) + \\ &+ p_2([A'_1A'_2], [A'_1A'_3], [A'_1A'_4]) + p_1^*([A'_1A'_2], [A'_1A'_4], [A'_2A'_4]) + \\ &+ p_2^*([A'_1A'_2], [A'_1A'_3], [A'_2A'_3]) + q_1([A'_2A'_3], [A'_1A'_3], [A'_2A'_4]) - \\ &- q_2([A'_1A'_4], [A'_1A'_3], [A'_2A'_4]), \end{aligned} \tag{5.23}$$

où les valuers $p_1, p_2, p_1^*, p_2^*, q_1, q_2$ sont données par les relations (5.18). On a alors les théorèmes suivants:

La K-transformation relative aux homographies tangentes ($\varrho^2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, λ_1, λ_2 *arbitraires*) *et alors aussi l'homographie osculatrice* ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) *réalise un contact analytique du premier ordre des congruences Λ et Λ' qui représentent dans l'espace de Klein les congruences L et L' dans une déformation projective.*

La condition nécessaire et suffisante pour que la K-transformation relative à l'homographie osculatrice réalise un contact analytique du second ordre des congruences de plans Λ et Λ' dans l'espace de Klein est: la déformation projective des congruences L et L' est singulière et alors L et L' sont des congruences R (cf. [2], ch. 4, p. 410 et [5], p. 262).

En faisant usage de la représentation des plans de l'espace de Klein dans l'espace P_{19} on pourrait caractériser l'homographie ponctuellement et planairement associée relative à la transformation T à l'aide des droites linéarisantes. Nous voulons signaler seulement que si T est une déformation projective nonsingulière ou demisingulière de première espèce, alors les coefficients $p_1, p_2, p_1^*, p_2^*, q_1$ et q_2 relatifs à l'homographie ponctuellement associée possèdent la forme $p_1 = (.)\,\omega_1^2$, $p_2 = (.)\omega_2^2$, $p_1^* = (.)\omega_2$, $p_2^* = (.)\omega_1$, $q_1 = (.)\omega_1^2$, $q_2 = (.)\omega_2^2$ ou $p_1 = 0$, $p_2 = (.)\omega_2^2$, $p_1^* = (.)\omega_1\omega_2$, $p_2^* = (.)\omega_1^2$, $q_1 = (.)\omega_1^2$, $q_2 = 0$.

6. Sur la variété (Ω) à 4 dimensions qui est l'ensemble des images secondaires de tous les complexes tangents aux droites de la congruence L, on peut choisir une courbe de la manière suivante: si les a_1, a_2, a_3 dans la relation (1.12) sont des fonctions des paramètres principaux de la congruence L, alors dans chaque plan de la congruence Λ

est univoquement déterminé un point Ω; ces points remplissent sur la variété (Ω) une surface sur laquelle l'équation différentielle $a\omega_1 + b\omega_2 = 0$ détermine une couche de courbes.

Chaque K-transformation relative à une homographie tangente de la transformation développable T réalise entre les points des variétés (Ω) et (Ω') une correspondance ponctuelle. Nous allons étudier la correspondance ponctuelle réalisée par la K-transformation (5.8), c.-à-d. la correspondance (5.3) des variétés (Ω) et (Ω') qui correspondent aux congruences L et L' dans la déformation projective.

A partir des relations (1.12), (1.16), (1.18) et (5.3) on obtient pour les transformations des complexes Ω et Ω' des congruences L et L' en déformation projective par l'homographie tangente (5.8)$''$:

$$H\Omega = \Omega' , \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} H\,\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\Omega' &+ [(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2)\, a_1 + \\ &+ ((\lambda_2 - c_2)\,\beta_2\omega_1 - (\lambda_1 + c_1)\,\alpha_1\omega_2)\, a_2 + \\ &+ ((\lambda_2 + c_2)\,\alpha_2\omega_1 - (\lambda_1 - c_1)\,\beta_1\omega_2)\, a_3]\,[A'_1A'_2] + \\ &+ (c_1\omega_1 - c_2\omega_2)\,(a_2[A'_1A'_3] - a_3[A'_2A'_4])\,. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Si l'on exclue le cas où $\omega_1 = \omega_2 = 0$, c.-à-d. les points Ω et Ω' sont situés dans les plans fixes des congruences Λ et Λ', alors ni la K-transformation relative à l'homographie tangente ni celle qui est relative à l'homographie osculatrice ne réalisent en général un contact analytique du premier ordre des courbes des variétés (Ω) et (Ω'), car les rapports $a_2 : a_3$ des coefficients de $[A'_1A'_3]$ et $[A'_2A'_3]$ dans les relations (1.12) et (6.2) ne peuvent pas être, en général, égaux.

Soit tout d'abord

$$a_2a_3 \neq 0\,. \tag{6.3}$$

On voit de la relation (6.2) que si sous la condition (6.3) sur les variétés (Ω) et (Ω') il existe des courbes pour lesquelles une des K-transformations relatives aux homographies tangentes (5.8) réalise le contact analytique du premier ordre, ce sont alors nécessairement les courbes

$$c_1\omega_1 - c_2\omega_2 = 0\,, \tag{6.4}$$

où nous voulons suppposer que c_1 et c_2 ne sont pas en même temps nuls. Comme pour les courbes (6.4) les coefficients de $[A'_1A'_3]$, et $[A'_2A'_4]$ dans la relation (6.2) sont nuls la condition nécessaire et suffisante pour que le contact des courbes (6.4) sur les variétés (Ω) et (Ω') soit un contact analytique du premier ordre est: le coefficient de $[A'_1A'_2]$ est nul, c.-à-d. en substituant d'après (6.4) $\omega_1 = \sigma c_2$ et $\omega_2 = \sigma c_1 (\sigma \neq 0)$ on a

$$\begin{aligned} (\lambda_1c_2 + \lambda_2c_1)\, a_1 &+ [(\lambda_2 - c_2)\,\beta_2c_2 - (\lambda_1 + c_1)\,\alpha_1c_1]\, a_2 + \\ &+ [(\lambda_2 + c_2)\,\alpha_2c_2 - (\lambda_1 - c_1)\,\beta_1c_1]\, a_3 = 0\,. \end{aligned} \tag{6.5}$$

On a alors le théorème:

Il y a ∞^1 *homographies tangentes* $(5.8)''$ (*pour lesquelles* λ_1 *et* λ_2 *sont liées par la relation linéaire* (6.5)) *dont les K-transformations relatives réalisent un contact analytique du premier ordre des courbes* (6.4) *et seulement de ces courbes qui sont situées sur les surfaces arbitrairement données* $(a_1, a_2, a_3 \neq 0)$ *des variétés* (Ω) *et* (Ω') *dans la correspondance* (5.3). *Les courbes* (6.4) *correspondent à la décomposition canonique des congruences* L *et* L' *dans la déformation projective* T (voir [1], ch. 7. p. 281).

Chaque homographie tangente $(5.8)''$ *détermine dans les plans des congruences* Λ *et* Λ' *un faisceau linéaire de complexes dont l'équation est* (6.5); *les images secondaires de ces complexes décrivent sur chacune des variétés* (Ω) *et* (Ω') *une couche de surfaces; pour leurs courbes déterminées par l'équation différentielle* (6.4) *la K-transformation relative à l'homographie donnée réalise un contact analytique du premier ordre. Si l'on a* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, *alors il résulte de* (6.5)

$$(6.5)' \qquad a_2(\beta_2 c_2^2 + \alpha_1 c_1^2) - a_3(\alpha_2 c_2^2 + \beta_1 c_1^2) = 0\,,$$

de sorte que la K-transformation relative à l'homographie osculatrice $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$ *réalise un contact analytique du* 1^er^ *ordre des courbes* (6.4) *situées sur les surfaces décrites par les points* $\Omega(a_1, a_2, a_3)$ *et* $\Omega'(a_1, a_2, a_3)$ *où* a_2 *et* a_3 *satisfont à la relation* $(6.5)'$.

Pourque la relation (6.5) soit vraie pour λ_1 et λ_2 arbitraires, il est nécessaire et il suffit qu'on ait

$$(6.6) \quad c_1^2 : c_2^2 = -\beta_2 : \alpha_1 = -a_3 : \beta_1 \quad \text{et} \quad a_1 = 0\,, \quad a_2 : a_3 = -\beta_1 : \alpha_1 = -\alpha_2 : \beta_2\,,$$

ce qu'on obtient en posant nuls les coefficients de λ_1 et λ_2 et le terme absolu de la relation (6.5). Les congruences L et L' sont alors nécessairement les congruences W et les points Ω et Ω' sont les images secondaires de leurs complexes osculateurs. La décomposition canonique de ces congruences est confondue avec la décomposition le long d'une des couches de courbes asymptotiques des surfaces focales.

La relation (6.5) détermine pour les couples différents des surfaces correspondantes (c.-à-d. pour a_1, a_2, a_3 différement données) les K-transformations différentes $H(\lambda_1, \lambda_2)$ qui réalisent un contact analytique du premier ordre des courbes (6.4) de ces surfaces. La condition nécessaire et suffisante pour que toutes ces K-transformations soient les mêmes pour tous les couples de surfaces correspondantes arbitraires est: la relation (6.5) est vraie pour a_1, a_2, a_3 arbitraires. En posant nuls les coefficients de a_1, a_2, a_3 dans (6.5) on obtient le système de 3 équations linéaires en λ_1 et λ_2 dont les solutions possibles sont ($\sigma \neq 0$, arb.):

$$\left.\begin{array}{lll} (6.7)' & \lambda_1 = -c_1, & \lambda_2 = c_2 \\ (6.7)'' & \lambda_1 = c_1, & \lambda_2 = -c_2 \\ (6.7)''' & \lambda_1 = -\sigma c_1, & \lambda_2 = \sigma c_2 \end{array}\right\} \text{ en supposant}$$

$$\begin{cases} c_2^2\alpha_2 + c_1^2\beta_1 = 0 \neq c_2^2\beta_2 + c_1^2\alpha_1, & c_1 c_2 \neq 0\,, \\ c_2^2\alpha_2 + c_1^2\beta_1 \neq 0 = c_2^2\beta_2 + c_1^2\alpha_1, & c_1 c_2 \neq 0\,, \\ c_2^2\alpha_2 + c_1^2\beta_1 = 0 = c_2^2\beta_2 + c_1^2\alpha_1, & c_1 c_2 \neq 0\,. \end{cases}$$

On voit des suppositions dans la relation (6.7)′, resp. (6.7)″ et d'après (1.11) et (6.4) que *les surfaces de la décomposition canonique des déformations projectives examinées sont tangentes le long d'une des couches de courbes asymptotiques de la* 2^e *ou* $1^{ère}$ *surface focale.*

Dans le cas (6.7)‴, L et L' sont des congruences W et la décomposition canonique est confondue avec la décomposition des congruences le long d'une des couches de courbes asymptotiques des surfaces focales. Dans ce cas et seulement dans ce cas la K-transformation relative à l'homographie osculatrice réalise aussi un contact analytique du premier ordre des courbes (6.4).

On peut démontrer sans peine que la déformation projective des congruences L et L' ne peut pas être une déformation demisingulière c.-à-d. que l'on a $c_1 c_2 \neq 0$.

La question de l'existence de ces couples de déformations projectives est examinée dans le chap. 7.

Si l'on a $a_2 = 0$, ou $a_3 = 0$, alors sur les variétés (Ω) et (Ω') il y a encore, outre les courbes (6.4), d'autres courbes pour lesquelles la K-transformation correspondante à l'homographie tangente réalise un contact analytique du premier ordre. Soit alors $c_1\omega_1 - c_2\omega_2 \neq 0$; la condition nécessaire et suffisante pour que le contact des courbes déterminées par l'équation différentielle

$$(6.8) \qquad a\omega_1 - b\omega_2 = 0\,, \quad a : b \neq c_1 : c_2\,, \quad (a, b \text{ arb.})\,,$$

sur les variétés (Ω) et (Ω') soit un contact analytique du premier ordre est qu'il soit vrai (en nous bornant au cas $a_3 = 0$)

$$[(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2)\, a_1 + ((\lambda_2 - c_2)\,\beta_2\omega_1 - (\lambda_1 + c_1)\,\alpha_1\omega_2)\, a_2] : (c_1\omega_1 - c_2\omega_2)\, a_2 = \\ = a_1 : a_2\,,$$

c.-à-d.

$$(6.9) \quad [(\lambda_1 - c_1)\, b + (\lambda_2 + c_2)\, a]\, a_1 + [(\lambda_2 - c_2)\,\beta_2 b - (\lambda_1 + c_1)\,\alpha_1 a]\, a_2 = 0\,.$$

Pour les courbes déterminées par l'équation différentielle (6.8) (a, b *arb.*) *situées sur les surfaces décrites sur les variétés* (Ω) *et* (Ω') *par les points dont les coordonnées satisfont aux relations* $a_3 = 0$ *et qui se correspondent dans la correspondance* (5.3), *il existe* ∞^1 *homographies qui réalisent un contact analytique du premier ordre de ces surfaces. Parmi ces homographies il existe juste une qui réalise pour chaque couple de surfaces correspondantes le contact analytique du* 1^{er} *ordre de ces surfaces sur les variétés* (Ω) *et* (Ω') *dans les points* Ω *et* Ω' *correspondants; autant qu'il est vrai* $a_1^2 + \alpha_1\beta_2\alpha_2^2 \neq 0$, *alors l'homographie mentionnée est déterminée par les relations* (*pour* λ_1 *et* λ_2)

$$(6.9)' \qquad \begin{aligned} (\lambda_1 - c_1)\, a_1 + (\lambda_2 - c_2)\,\beta_2 a_2 &= 0\,, \\ (\lambda_2 + c_2)\, a_1 - (\lambda_1 + c_1)\,\alpha_1 a_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

qui résultent de (6.9) par annulation des coefficients de a et b.

La condition nécessaire et suffisante pour que le contact analytique du 1[er] ordre de deux surfaces arbitraires, décrites par les points correspondants $\Omega(a_1, a_2, 0)$ et $\Omega'(a_1, a_2, 0)$ soit réalisé par la même homographie est: les coefficients de a_1 et a_2 dans les relations $(6.9)'$ sont nuls, c.-à-d. $\lambda_1 = \lambda_2 = c_1 = c_2 = 0$, mais c'est en contradiction avec la supposition que c_1 et c_2 ne doivent pas être en même temps nuls.

Les homographies qui réalisent le contact analytique du 1[er] ordre des courbes (6.4) sur les surfaces correspondantes des variétés (Ω) et (Ω') ne sont pas déterminées univoquement. Est ce qu'il y a des homographies qui réalisent un contact analytique du 2[e] ordre?

Si $\bar{\mathrm{d}}$ signifie la différentiation le long des courbes (6.4) sur deux surfaces correspondantes des variétés (Ω) et (Ω') et $\bar{H}$ est l'homographie qui réalise un contact analytique du 1[er] ordre de ces courbes, alors on obtient de (6.1), (6.2), (1.17) et (1.18), en substituant d'après (6.4) $\omega_1 = \sigma c_2$, $\omega_2 = \sigma c_1$, $\sigma \neq 0$:

$$\bar{H}\Omega = \Omega' , \quad \bar{H}\,\bar{\mathrm{d}}\Omega = \bar{\mathrm{d}}\Omega' , \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}\,\bar{\mathrm{d}}^2\Omega = \bar{\mathrm{d}}^2\Omega' &+ \bar{\varphi}_1[A'_1A'_2] + \bar{\varphi}_2[A'_1A'_3] + \bar{\varphi}_3[A'_2A'_4] + \\ &+ \bar{\varphi}_4[A'_1A'_4] + \bar{\varphi}_5[A'_2A'_3] , \end{aligned} \tag{6.11}$$

où $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3, \bar{\varphi}_4, \bar{\varphi}_5$ sont les valeurs des formes

$$\begin{aligned} \varphi_1 = {} & \mathrm{d}(m_1 - m'_1) + (m_1 - m'_1)(\omega_{11} + \omega_{22}) - m_2\tau_{32} + m_3\tau_{41} - m_4\tau_{42} + \\ & + m_5\tau_{31} + (.)(c_1\omega_1 - c_2\omega_2) + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2(m_4\omega_1 - m_5\omega_2) - \\ & - \bar{\lambda}_1(\mathrm{d}m_5 - m_1\omega_1 + m_2\alpha_1\omega_2 + m_3\beta_1\omega_2 + m_5(\omega_{22} + \omega_{33})) + \\ & + \bar{\lambda}_2(\mathrm{d}m_4 + m_1\omega_2 + m_2\beta_2\omega_1 + m_3\alpha_2\omega_1 + m_4(\omega_{11} + \omega_{44})) , \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \mathrm{d}(m_2 - m'_2) + (.)(c_1\omega_1 - c_2\omega_2) , \\ \varphi_3 &= \mathrm{d}(m_3 - m'_3) + (.)(c_1\omega_1 - c_2\omega_2) , \end{aligned} \tag{6.13$_{1,2}$}$$

$$\begin{aligned} \varphi_4 &= + (m_1 - m'_1)\,\omega_2 + \bar{\lambda}_1(m_4\omega_1 - m_5\omega_2) + (.)(c_1\omega_1 - c_2\omega_2) , \\ \varphi_5 &= - (m_1 - m'_1)\,\omega_1 - \bar{\lambda}_2(m_4\omega_1 - m_5\omega_2) + (.)(c_1\omega_1 - c_2\omega_2) , \end{aligned} \tag{6.14$_{1,2}$}$$

pour $\mathrm{d} = \bar{\mathrm{d}}$, $\omega_1 = \sigma c_2$, $\omega_2 = \sigma c_1(\sigma \neq 0)$ et $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ qui sont des solutions de l'équation (6.5).

La condition nécessaire pour que $\bar{H}$ réalise un contact analytique du 2[e] ordre des courbes (6.4) des surfaces sur les variétés (Ω) et (Ω') est $\bar{\varphi}_4 = \bar{\varphi}_5 = 0$, c.-à-d.

$$\begin{aligned} & \bar{\lambda}_1[2a_1c_1c_2 + (a_2\beta_2 + a_3\alpha_2)\,c_2^2 - (a_2\alpha_1 + a_3\beta_1)\,c_1^2] - \\ & \quad - c_1[a_2(\beta_2c_2^2 + \alpha_1c_1^2) - a_3(\alpha_2c_2^2 + \beta_1c_1^2)] = 0 , \\ & \bar{\lambda}_2[2a_1c_1c_2 + (a_2\beta_2 + a_3\alpha_2)\,c_2^2 - (a_2\alpha_1 + a_3\beta_1)\,c_1^2] - \\ & \quad - c_2[a_2(\beta_2c_2^2 + \alpha_1c_1^2) - a_3(\alpha_2c_2^2 + \beta_1c_1^2)] = 0 . \end{aligned} \tag{6.15}$$

Les solutions $\bar{\lambda}_1$ et $\bar{\lambda}_2$ de ces équations (autant qu'elles existent) satisfont aux relations (6.5) comme on voit sans peine en faisant usage de la substitution.

De la relation (5.6), on obtient d'après le lemme de Cartan

$$\tau_{31} = c_3\omega_1\,, \quad \tau_{42} = c_4\omega_2\,; \tag{6.16}$$

il en résulte en général

$$\bar{\varphi}_1 \not\equiv 0\,, \quad \bar{\varphi}_2 = a_2\,\bar{\mathrm{d}}(c_1\omega_1 - c_2\omega_2) \not\equiv 0\,, \quad \bar{\varphi}_3 = -\,a_3\,\bar{\mathrm{d}}(c_1\omega_1 - c_2\omega_2) \not\equiv 0\,; \tag{6.17}$$

alors, *en général, les homographies qui réalisent un contact analytique du* 2$^{\mathrm{e}}$ *ordre des courbes* (6.4) *dans les points correspondants des surfaces des variétés* (Ω) *et* (Ω') *n'existent pas.*

En prenant la notation $[A_i'A_j'] = a_{ij}'$, la droite $\bar{H}$-linéarisante de la droite

$$[\Omega; \bar{\mathrm{d}}\Omega] \tag{6.18}$$

est la droite

$$[\Omega'; \bar{\varphi}_1 a_{12}' + \bar{\varphi}_2 a_{13}' + \bar{\varphi}_3 a_{24}' + \bar{\varphi}_4 a_{14}' + \bar{\varphi}_5 a_{23}']\,. \tag{6.19}$$

Si $\tilde{H}$ signifie l'homographie (5.8) où $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$ et $\lambda_2 = \bar{\lambda}_2$ sont solutions des équations (6.15) et aussi de (6.5), alors la droite $\tilde{H}$-linéarisante de la droite (6.18) est

$$[\Omega'; \tilde{\bar{\varphi}}_1 a_{12}' + \bar{\varphi}_2 a_{13}' + \bar{\varphi}_3 a_{24}']\,, \tag{6.20}$$

où $\tilde{\bar{\varphi}}_1$ a le sens évident. La droite $\tilde{H}$-linéarisante est donc située dans le plan correspondant de la congruence de plans Λ'.

Passons enfin au cas de la déformation projective singulière, c.-à-d. $c_1 = c_2 = 0$ et alors L et L' sont des congruences R; en autre il est vrai

$$\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = 0 \tag{6.21}$$

(voir [2], chap. 4).

Supposons que a_1, a_2, a_3 soient données. De la relation (6.2) on voit que l'homographie (5.8)″ réalise un contact analytique du 1$^{\mathrm{er}}$ ordre des courbes sur les surfaces des variétés (Ω) et (Ω') si et seulement si l'on a

$$(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2)\,a_1 + (\lambda_2\beta_2\omega_1 - \lambda_1\alpha_1\omega_2)\,a_2 + (\lambda_2\alpha_2\omega_1 - \lambda_1\beta_1\omega_2)\,a_3 = 0 \tag{6.22}$$

ce qui est une relation entre les rapports $\lambda_1 : \lambda_2$, $\omega_1 : \omega_2$ et $a_1 : a_2 : a_3$.

Il y a ∞^1 *homographies tangentes (déterminées par les relations* (6.22) *pour* λ_1 *et* λ_2*) qui réalisent un contact analytique du* 1$^{\mathrm{er}}$ *ordre des courbes* $a\omega_1 - b\omega_2 = 0$ *(*a, b *sont arbitraires, pas en même temps nuls) sur les surfaces des variétés* (Ω) *et* (Ω') *qui correspondent aux congruences dans la déformation projective singulière.*

La condition nécessaire et suffisante pour que les homographies mentionnées soient les mêmes pour toutes les courbes des surfaces considérées (donc pour que le contact de ces surfaces soit un contact analytique du 1$^{\mathrm{er}}$ *ordre) est: les surfaces* *sont situées sur les variétés singulières* (F) *et* (F') *formées par les coniques* F *et* F' *des variétés* (Ω) *et* (Ω') (voir [4], p. 180) comme on voit des relations obtenus par annulation des coefficients de ω_1 et ω_2 dans (6.22). Pour λ_1 et λ_2 on obtient $\lambda_1 a_1 + \lambda_2(a_2\beta_2 + \alpha_2 a_3) = 0$.

L'homographie osculatrice $H_0(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$ *réalise un contact analytique du* 1^er^ *ordre des variétés* (Ω) *et* (Ω') *qui correspondent aux congruences dans la déformation projective singulière*, car la relation (6.22) est remplie identiquement pour $a_1 : a_2 : a_3$ et $\omega_1 : \omega_2$ arbitraires.

Pour un couple arbitraire de points correspondants Ω et Ω' ($\tilde{\mathrm{d}}$ signifie la différentiation sous la condition (6.22)) il est vrai $(c_1 = c_2 = 0)$:

$$H\Omega = \Omega' , \quad H\,\tilde{\mathrm{d}}\Omega = \tilde{\mathrm{d}}\Omega' , \tag{6.23}$$

$$H\,\tilde{\mathrm{d}}^2\Omega = \tilde{\mathrm{d}}^2\Omega' + \tilde{\varphi}_1[A'_1A'_2] + \tilde{\varphi}_4[A'_1A'_4] + \tilde{\varphi}_5[A'_2A'_3] , \tag{6.24}$$

où $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_4, \tilde{\varphi}_5$ sont les valeurs des formes $\varphi_1, \varphi_4, \varphi_5$ données par les relations (6.12) et (6.14) dans lesquelles on a substitué

$$m_1 - m'_1 = \tau_{32} = \tau_{41} = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{44} = 0 \tag{6.25}$$

et d'après (6.16) et (6.22).

La condition nécessaire pour que le contact considéré soit du 2^e^ ordre est $\tilde{\varphi}_4 = \tilde{\varphi}_5 = 0$, c.-à-d.

$$\begin{aligned} &\lambda_1[2a_1\omega_1\omega_2 - a_2(\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2) - a_3(\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2)] = 0 , \\ &\lambda_2[2a_1\omega_1\omega_2 - a_2(\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2) - a_3(\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2)] = 0 . \end{aligned} \tag{6.26}$$

Les relations précédentes sont vraies si la relation

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \tag{6.27}$$

ou la relation (1.13) ou simultanément les relations (6.27) et (1.13) sont valables.

Passons à l'étude des cas particuliers. *La K-transformation correspondant à l'homographie osculatrice* H_0 $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0)$ *réalise un contact analytique du* 2^e^ *ordre des courbes*

$$[a_1\omega_2 + (a_2\beta_2 + a_3\alpha_2)\,\omega_1]\,c_4\omega_2 + [a_1\omega_1 - (a_2\alpha_1 + a_3\beta_1)\,\omega_2]\,c_3\omega_1 = 0 ; \tag{6.28}$$

sur deux surfaces correspondantes arbitraires des variétés (Ω) *et* (Ω') *il y a deux couches de courbes d'une telle propriété.* On obtient la relation (6.28) de la relation $\varphi_1 = 0$ en substituant d'après les relations (6.27), (6.25), (1.18) et (6.16).

D'après (6.21) on a $\beta_2 = \sigma\alpha_1$, $\alpha_2 = \sigma\beta_1$ $(\sigma \neq 0)$; la relation (6.28) est remplie identiquement pour $\omega_1 : \omega_2$ arbitraire si et seulement si on a

$$a_1 = 0 , \quad (\sigma c_4 - c_3)(a_2\alpha_1 + a_3\beta_1) = 0 , \tag{6.29}$$

où le facteur $\sigma c_4 - c_3$ n'est pas nul. *La K-transformation relative à l'homographie* *osculatrice réalise le contact analytique du* 2^e^ *ordre des variétés* (Ω) *et* (Ω') *dans les points*

$$\Omega(0 : \beta_1 : -\alpha_1) \quad \text{et} \quad \Omega'(0 : \beta_1 : -\alpha_1)\,, \tag{6.30}$$

ceux-ci sont les images secondaires de Klein des complexes osculateurs des droites de L *et* L' *qui sont des congruences* R *et inversement*. Cet énoncé-là signifie l'extension du théorème dans [5], chap. 4: La condition nécessaire et suffisante pour que L et L' soient deux congruences en déformation projective singulière est: la K-transformation relative à l'homographie osculatrice réalise un contact analytique du 2^e ordre des surfaces engendrées dans l'espace de Klein par les images secondaires des complexes osculateurs (cf. aussi le théorème dans le chap. 5 de ce Mémoire.).

Soient maintenant les relations (1.13) et $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ valables. La condition nécessaire et suffisante pour que, sous la supposition citée, le contact des courbes des variétés (Ω) et (Ω') soit un contact analytique du 2^e ordre est: outre (1.13) les relations (6.22) et $\tilde{\varphi}_1 = 0$ $(\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$ sont vraies; on voit sans peine que ces relations ne doivent pas être valables pour $a_1 : a_2 : a_3$ arbitraire et alors en général le contact n'est pas un contact du 2^e ordre.

La condition nécessaire et suffisante pour que sous la supposition $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et (1.13) le contact des courbes de deux surfaces correspondantes soit un contact analytique du 2^e ordre est: les relations (1.13) et (6.28) (linéaires par rapport à $a_1 : : a_2 : a_3$ et quadratiques par rapport à $\omega_1 : \omega_2$) sont en même temps vraies. En général, ces relations-là ne doivent pas être vraies simultanément; or p. ex. pour les points (6.30) elles sont remplies identiquement.

7. Nous allons étudier *l'existence et la généralité* des couples des congruences L et L' en déformation projective nonsingulière dont les surfaces de la décomposition canonique sont tangentes le long d'une des couches de lignes asymptotiques de l'une où d'autre surface focale (dans le cas des congruences W le long des couches de lignes asymptotiques correspondantes). Nous avons décrit les propriétés géométriques de ces congruences dans le chap. 6, p. 194–195.

Supposons que L et L' ne sont pas des congruences W. Alors on obtient les paires de congruences considérées en intégrant le système de Pfaff composé des équations

$$\omega_{14} = \omega_{23} = 0\,, \tag{7.1}$$

$$\omega_{12} = \alpha_1\omega_2\,, \quad \omega_{21} = \alpha_2\omega_1\,, \quad \omega_{34} = \beta_2\omega_1\,, \quad \omega_{43} = \beta_1\omega_2\,, \tag*{(7.2)$_{1-4}$}$$

$$\tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{14} = 0\,, \tag{7.3}$$

$$\tau_{21} = \tau_{23} = \tau_{24} = 0\,, \tag{7.4}$$

$$\tau_{34} = \tau_{43} = 0\,, \tag{7.5}$$

$$-2\tau_{11} = 2\tau_{22} = -2\tau_{33} = 2\tau_{44} = c_1\omega_1 - c_2\omega_2\,, \tag{7.6}$$

$$\tau_{32} = \beta_2c_2\omega_1 + \alpha_1c_1\omega_2\,, \tag{7.7}$$

$$\tau_{41} = \alpha_2c_2\omega_1 + \beta_1c_1\omega_2\,, \tag{7.8}$$

sous la condition

$$c_1^2\alpha_1 + c_2^2\beta_2 = 0 \quad \text{ou} \quad c_1^2\beta_1 + c_2^2\alpha_2 = 0 \tag{7.9}$$

qui signifie que les surfaces de la décomposition canonique $c_1\omega_1 - c_2\omega_2 = 0$ sont tangentes à la première ou à la seconde surface focale le long d'une des couches de courbes asymptotiques $(1.11)_1$ ou $(1.11)_2$. Nous nous bornons seulement au cas $(7.9)_1$.

La différentiation extérieure des relations (7.1)–(7.9) donne

$$\begin{aligned} &[\omega_{32}\omega_1] + [\Delta\alpha_1\omega_2] = 0\,, \quad [\omega_{41}\omega_1] - [\Delta\beta_1\omega_2] = 0\,, \\ &[\Delta\alpha_2\omega_1] + [\omega_{41}\omega_2] = 0\,, \quad [\Delta\beta_2\omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] = 0\,, \end{aligned} \tag{7.4)*}$$

$$[\tau_{31}\omega_1] = 0\,, \quad [\tau_{42}\omega_2] = 0\,, \tag{7.5)*}$$

$$[\Delta c_1\omega_1] - [\Delta c_2\omega_2] = 0\,, \tag{7.6)*}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1[\tau_{31}\omega_2] - \beta_2[\tau_{42}\omega_1] + [\omega_{32};\, c_1\omega_1 - c_2\omega_2] - \\ &- c_2[\Delta\beta_2\omega_1] - c_1[\Delta\alpha_1\omega_2] - \beta_2[\Delta c_2\omega_1] - \alpha_1[\Delta c_1\omega_2] = 0\,, \end{aligned} \tag{7.7)*}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_2[\tau_{42}\omega_1] - \beta_1[\tau_{31}\omega_2] - [\omega_{41};\, c_1\omega_1 - c_2\omega_2] - c_2[\Delta\alpha_2\omega_1] - \\ &- c_1[\Delta\beta_1\omega_2] - \alpha_2[\Delta c_2\omega_1] - \beta_1[\Delta c_1\omega_2] + (\alpha_2c_2^2 + \beta_1c_1^2)\,[\omega_1\omega_2] = 0 \end{aligned} \tag{7.8)*}$$

et par différentiation de $(7.9)_1$ on obtient

$$2c_1\alpha_1\Delta c_1 + 2c_2\beta_2\Delta c_2 + c_1^2\Delta\alpha_1 + c_2^2\Delta\beta_2 = 0\,; \tag{7.9)*}$$

les relations précédentes forment la fermeture du système discuté. Les relations (7.1), (7.3) et (7.4) n'etraînent aucune relation extérieure. Nous avons posé dans la fermeture

$$\Delta\alpha_1 = \mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44})\,, \tag{7.10}$$

$$\Delta\alpha_2 = \mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33})\,, \tag{7.11}$$

$$\Delta\beta_1 = \mathrm{d}\beta_1 + \beta_1(\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44})\,, \tag{7.12}$$

$$\Delta\beta_2 = \mathrm{d}\beta_2 + \beta_2(\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33})\,, \tag{7.13}$$

$$\Delta c_1 = \mathrm{d}c_1 + c_1(\omega_{11} - \omega_{33})\,, \tag{7.14}$$

$$\Delta c_2 = \mathrm{d}c_2 + c_2(\omega_{22} - \omega_{44})\,, \tag{7.15}$$

et fait usage des relations

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(\alpha_1c_1) + \alpha_1c_1(2\omega_{22} - \omega_{33} - \omega_{44}) = c_1\Delta\alpha_1 + \alpha_1\Delta c_1\,, \\ &\mathrm{d}(\alpha_2c_2) + \alpha_2c_2(2\omega_{11} - \omega_{33} - \omega_{44}) = c_2\Delta\alpha_2 + \alpha_2\Delta c_2\,, \\ &\mathrm{d}(\beta_1c_1) + \beta_1c_1(\omega_{11} + \omega_{22} - 2\omega_{44}) = c_1\Delta\beta_1 + \beta_1\Delta c_1\,, \\ &\mathrm{d}(\beta_2c_2) + \beta_2c_2(\omega_{11} + \omega_{22} - 2\omega_{33}) = c_2\Delta\beta_2 + \beta_2\Delta c_2\,. \end{aligned} \tag{7.16)$_{1-4}$}$$

Le système discuté des équations de Pfaff (7.1)–(7.8) est en involution et nous arrivons au résultat suivant: *la classe des paires de congruences L et L' dans la déformation projective nonsingulière (L et L' ne sont pas W) dont les surfaces de la décomposition canonique sont tangentes le long d'une des couches de lignes asymptotiques à l'une ou à l'autre surface focale existe et dépend de neuf fonctions arbitraires d'une variable.*

Soient L et L' des congruences W. En faisant usage de la particularisation du repère de façon que

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_1' = \beta_1' = -\alpha_2 = -\beta_2 = -\alpha_2' = -\beta_2' = 1\,, \tag{7.17}$$

(voir [2], chap. 2, ou [5], chap. 4) alors la classe des paires de congruences W envisagées est déterminée par le système des équations de Pfaff

$$\omega_{14} = \omega_{23} = 0\,, \tag{7.18}$$

$$\omega_{13} = -\omega_{21} = -\omega_{34} = \omega_1\,, \tag{7.19}$$

$$\omega_{12} = \omega_{24} = \omega_{43} = \omega_2\,, \tag{7.20}$$

$$2\omega_{11} = -2\omega_{44} = (t_1 + z_1)\,\omega_1 + (t_2 + z_2)\,\omega_2\,, \tag{7.21}$$

$$2\omega_{33} = -2\omega_{22} = (t_1 - z_1)\,\omega_1 + (t_2 - z_2)\,\omega_2\,, \tag{7.22}$$

$$\omega_{32} = (z_2 - t_2)\,\omega_1 + (z_1 - t_1)\,\omega_2\,, \tag{7.23}$$

$$\omega_{41} = -(z_2 + t_2)\,\omega_1 - (z_1 + t_1)\,\omega_2\,, \tag{7.24}$$

$$\tau_{14} = \tau_{23} = 0\,, \tag{7.25}$$

$$\tau_{13} = \tau_{21} = \tau_{31} = 0\,, \quad \tau_{12} = \tau_{24} = \tau_{43} = 0\,, \tag{7.26}$$

$$2\tau_{11} = -2\tau_{22} = 2\tau_{33} = -2\tau_{44} = \mp\,\tau_{32} = \mp\,\tau_{42} = (t_1' - t_1)(\omega_1 \pm \omega_2) \tag{7.27}$$

sous la condition que

$$t_1' - t_1 = \pm\,(t_2' - t_2) \neq 0 \tag{7.28}$$

et

$$z_1 = z_1'\,, \quad z_2 = z_2'\,. \tag{7.29}$$

La relation (7.28) résulte de la comparaison de l'équation différentielle de la décomposition canonique $(t_1' - t_1)\,\omega_1 + (t_2' - t_2)\,\omega_2 = 0$ avec l'équation différentielle des courbes asymptotiques $\omega_1 \pm \omega_2 = 0$. Si dans la relation (7.28) le signe supérieur (+) ou le signe inférieur (−) est valable, les surfaces de la décomposition canonique sont tangentes aux surfaces focales le long des courbes asymptotiques $\omega_1 + \omega_2 = 0$, ou $\omega_1 - \omega_2 = 0$ respectivement.

Par la différentiation extérieure de la relation (7.27) on obtient $([d\omega_1] = - z_2[\omega_1\omega_2],\ [d\omega_2] = z_1[\omega_1\omega_2])$

$$-2[\tau_{31}\omega_1] = -2[\tau_{42}\omega_2] = 2[\tau_{31}\omega_1] = 2[\tau_{42}\omega_2] = A\,,$$
$$\mp [\tau_{31}\omega_2] \mp [\tau_{42}\omega_1] \mp$$
$$\mp (t_2'^2 - t_2^2 - t_1'^2 + t_1^2 + 2(t_1' - t_1)(z_1 \mp z_2))[\omega_1\omega_2] = A\,,$$
$$\pm [\tau_{42}\omega_1] \pm [\tau_{31}\omega_2] \pm$$
$$\pm (t_2'^2 - t_2^2 - t_1'^2 + t_1^2 - 2(t_1' - t_1)(z_1 \mp z_2))[\omega_1\omega_2] = A$$

où

$$A = [d(t_1' - t_1); \omega_1 \pm \omega_2] + (t_1' - t_1)(\pm z_1 - z_2)[\omega_1\omega_2]\,.$$

Des relations précédentes il résulte en premier lieu $A = 0$, et ensuite $(t_1' - t_1) . (z_1 \mp z_2)[\omega_1\omega_2] = 0$, de sorte qu' on ait $((t_1' - t_1)[\omega_1\omega_2] \neq 0)$

$$z_1 = \pm z_2\,. \tag{7.30}$$

En faisant usage de (7.30) on obtient par différentiation extérieure du système (7.18)–(7.27) les relations

(7.21)$_1^*$ $\quad [\omega_{31}\omega_1] - [\omega_{42}\omega_2] - 2[\omega_1\omega_2] = 0\,,$

(7.21)$_2^*$ $\quad [\omega_{31}\omega_1] + [\omega_{42}\omega_2] + [dz_1; \omega_1 \pm \omega_2] = 0\,,$

(7.22)* $\quad [dt_1\omega_1] + [dt_2\omega_2] \mp z_1(t_1 \mp t_2)[\omega_1\omega_2] = 0\,,$

(7.23)* $\quad [dt_2\omega_1] + [dt_1\omega_2] + 3z_1(t_1 \mp t_2)[\omega_1\omega_2] = 0\,,$

(7.24)* $\quad [\omega_{42}\omega_1] + [\omega_{31}\omega_2] \mp [dz_1; \omega_1 \pm \omega_2] - (t_1^2 - t_2^2)[\omega_1\omega_2] = 0\,,$

(7.27)$_1^*$ $\quad [\tau_{31}\omega_1] = 0\,,$

(7.27)$_2^*$ $\quad [\tau_{42}\omega_2] = 0\,,$

(7.27)$_3^*$ $\quad [d(t_1' - t_1); \omega_1 \pm \omega_2] = 0\,,$

(7.27)$_4^*$ $\quad [\tau_{42}\omega_1] + [\tau_{31}\omega_2] - (t_1'^2 - t_1^2 - t_2'^2 + t_2^2)[\omega_1\omega_2] = 0\,,$

et de (7.28) la relation

$$dt_1' - dt_1 = \pm (dt_2' - dt_2)\,. \tag{7.28*}$$

La différentiation extérieure des relations (7.18)–(7.20) et (7.25)–(7.26) n'entraîne aucune relation extérieure.

Le système discuté n'est pas en involution. Quoique, par des prolongements successifs, le nombre des relations extérieures dans les fermetures et le nombre des formes de Pfaff inconnues diminuent successivement (le nombre des formes de Pfaff reste toujours d'une unité plus grand que le nombre des relations extérieures) on est amené, en essayant de mettre le système envisagé en involution, à effectuer des calculs très longs et compliqués parce que quelques unes des relations entre les fonctions sont quadratiques.

Littérature

[1] *E. Čech:* Transformations développables des congruences de droites, Чехосл. мат. журнал, *6* (81), (1956), 260—286.

[2] *E. Čech:* Déformation projective des congruences *W*, Чехосл. мат. журнал, *6* (*81*), (1956), 401—414.

[3] *С. П. Фиников:* Теория конгруэнций, Москва, 1950.

[4] *V. Horák:* Les complexes linéaires tangents des congruences de droites, Чехосл. мат. журнал, *13* (*88*), (1963), 166—188.

[5] *V. Horák:* Contribution à la théorie des déformations projectives de congruences *W*, Чехосл. мат. журнал, *12* (*87*), (1962), 251—273.

Резюме

К ПРОЕКТИВНОМУ ИЗГИБАНИЮ ЛИНЕЙЧАТЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

ВЛАДИМИР ГОРАК (Vladimír Horák), Брно

Второстепенные образы касательных комплексов Ω произвольной прямой конгруэнции L пространства P_3 (с невырожденными фокальными поверхностями) образуют в пространстве Клейна $\bar{P}_5$ плоскость $\bar{P}_2$; эти плоскости определяют в пространстве $\bar{P}_5$ конгруэнцию плоскостей Λ, которая является 4-мерным точечным многообразием, которое мы обозначим символом (Ω).

Пусть L и L' — две конгруэнции указанного типа, которые находятся в развертывающемся преобразовании T. Преобразование T осуществляет между плоскостями конгруэнций Λ и Λ' соответствие, причем соответствуют друг другу плоскости $\bar{P}_2$ и $\bar{P}'_2$, точки которых являются второстепенными образами касательных комплексов прямых, соответствующих одна другой в развертывающемся преобразовании T. Каждое преобразование пространства Клейна (K-преобразование), соответствующее произвольно выбранной касательной коллинеации преобразования T, определяет точечное соответствие, которое представляет собой даже коллинеацию между плоскостями $\bar{P}_2$ и $\bar{P}'_2$ и, следовательно, также точечное соответствие между многообразиями (Ω) и (Ω').

Автор изучает свойства описанных коллинеаций между точками плоскостей $\bar{P}_2$ и $\bar{P}'_2$, т. е., иначе говоря, между множествами касательных комплексов прямых, соответствующих друг другу в преобразовании T, и приводит необходимые и достаточные условия для того, чтобы T было фокальным изгибанием, точечным или плоским изгибанием, проективным изгибаниен и др.

K-преобразования, соответствующие касательным коллинеациям не осуществляют, в общем случае, аналитическое касание 1-ого порядка конгруэнций Λ и Λ'. Если же существует K-преобразование, осуществляющее касание 1-ого порядка упомянутых конгруэнций, то T является проективным изгибанием; при этом касательная коллинеация, соответствующая этому K-преобразованию не является, в общем случае, соприкасающейся коллинеацией. Аналогичным образом характеризует автор преобразования T, которые являются фокальными изгибаниями.

Мы различаем проективные изгибания особые, полуособые и неособые (см. [1], отд. 7). На основании геометрических свойств точечно и плоскостно ассоцированных коллинеаций, введенных Э. ЧЕХОМ, описывает автор предыдущие типы проективных изгибаний и показывает, что касание конгруэнций Λ и Λ', осуществляемое K-преобразованием, соответствующим соприкасающейся коллинеации, является аналитическим второго порядка тогда и только тогда, когда T — особое изгибание, и, следовательно, L и L' представляют собой конгруэнции R. (Ср. аналогичный результат автора в [5], отд. 4.)

В заключение изучается множество ∞^2 K-преобразований, соответствующих определенным касательным коллинеациям, осуществляющим аналитическое касание первого порядка конгруэнций Λ и Λ' (значит, T есть проективное изгибание) и определяющим одно и то же однозначное точечное соответствие многообразий (Ω) и (Ω'). Среди этих K-преобразований имеются такие, которые осуществляют аналитическое касание 1-ого порядка многообразий (Ω) и (Ω') в общей точке тогда и только тогда, когда T является особым проективным изгибанием. При этих условиях через каждые две соответственные точки Ω и Ω' произвольно заданных соответствующих друг другу поверхностей многообразий (Ω) и (Ω') проходят две кривые, между которыми K-преобразование, соответствующее соприкасающейся коллинеации, осуществляет аналитическое касание 2-ого порядка; то же K-преобразование осуществляет аналитическое касание 2-ого порядка многообразий (Ω) и (Ω') в точках, которые служат второстепенными образами соприкасающихся комплексов рассматриваемых конгруэнций.

Если же T не является особым изгибанием, то (если ограничиться только касательными комплексами, которые не являются специальными) существуют K-преобразования, осуществляющие аналитическое касание 1-ого порядка, но только тех кривых многообразий (Ω) и (Ω'), которые соответствуют каноническому разложению конгруэнций L и L' относительно рассматриваемого проективного изгибания T.