Czechoslovak Mathematical Journal

Milan Sekanina

Системы топологий на данном множестве

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 1, 9–29

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100649

Чехословацкий математический журнал, т. 15 (90) 1965, Прага

СИСТЕМЫ ТОПОЛОГИЙ НА ДАННОМ МНОЖЕСТВЕ

МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

(Поступило в редакцию 12/I 1963 г.)

В работе исследуются свойства систем топологий касающиеся их обычного упорядочения.

ВВЕДЕНИЕ

В более новой математической литературе часто исследуется понятие и свойства операции *замыкания* (Hüllenoperator) на данном множестве P. При этом на операцию замыкания накладываются различные условия. Чаще всего это условие инцидентности, аддитивности, монотонности и другие условия алгебраического или топологическото характера. В результате этого возникают различные типы алгебраических или топологических пространств. Целью настоящей работы является вывод некоторых свойств систем таких пространств, причем мы будем в первую очередь следить за упорядочением этих систем, которое в литературе обычно определено. И в случае самых общих пространств мы будем пользоваться обычно принятой в топологии терминологией.

Обозначения и некоторые определения. Множества мы обозначаем большими латинскими или готическими буквами, элементы и отображения малыми латинскими буквами. Символы $\wedge, \bigwedge$ означают инфимум (точную нижнюю грань), $\vee, \bigvee$ супремум (точную верхнюю грань) в упорядоченных множествах, $\cap, \bigcap, \cup, \bigcup$ множественные операции, $\approx$ изоморфизм упорядоченного множества, $\sim$ эквивалентность множенств, card M означает мощность множества M. Вполне упорядоченное множество называем цепью, множество, в котором два любых различных элемента несравнимы, антицепью. Символ **2** означает цепь, состоящую из двух элементов, символ 2 антицепь из двух элементов, $x \parallel y$ означает, что „x и y несравнимы“. Кардинальные и порядковые операции между упорядоченными множествами мы обозначаем так же, как Г. Биркгофф в [3]. Об абстрактном множестве M мы будем предполагать, если не будет каким-нибудь образом определено его упорядочение, что оно является антицепью.

Перестановкой f множества M мы разумеем простое отображение M на M. Пусть $X \subset M$. Тогда мы скажем, что X и $f(X)$ – подобные множества, и запишем $X \sim f(X)$. Символ $\sim$ представляет отношение эквивалентности в системе всех подмножеств в M (см. [14]).

I

В этой главе мы будем заниматься маиболее общим случаем – системой всех отображений 2^P в 2^P, где P – данное множество.

1.1. Пусть P – данное непустое нножество ($\operatorname{card} P$ мы обозначим через p). Пусть u – отображение 2^P в 2^P (следовательно, $u \in (2^P)^{2^P}$). Тогда мы назовем u топологией на P, пару (P, u) – топологическим пространством, uX (иногда мы будем писать также $u(X)$) замыканием X в (P, u).

Обозначения и терминология переняты из работы [11]. В [1] говорится о топологическом соответствии (topologische Zuordnung) и об общих топологических пространствах (стр. 25).

Систему всех топологий на P мы обозначим $\mathscr{P}$ (значит, $\mathscr{P} = (2^P)^{2^P}$).

1.2. В $\mathscr{P}$ мы определим отношение $\leqq$ таким образом:

$$u, v \in \mathscr{P}, \ u \leqq v \equiv \{X \subset P \Rightarrow uX \subset vX\}.$$

Отношение $\leqq$ представляет собой упорядочение (т. е. частичное упорядочение) множества $\mathscr{P}$.

1.3. *Множество* $(\mathscr{P}, \leqq)$ *изоморфно системе всех подмножеств множества мощности* $2^p p$, *упорядоченному множественным включением.*

Доказательство. В [11] было доказано, что $(\mathscr{P}, \leqq)$ является полной структурой, в которой для $u = \bigvee_{i\in I} v_i$, $v = \bigwedge_{i\in I} v_i$ выполнено $X \subset P \Rightarrow u(X) = \bigcup_{i\in I} v_i(X)$, $v(X) = \bigcap_{i\in I} v_i(X)$. Символы v^* и u^* будут означать наименьший, соотв. наибольший из элементов $\mathscr{P}$, т.е. $X \subset P \Rightarrow v^*(X) = \emptyset$, $u^*(X) = P$.

Пусть $u \in \mathscr{P}$ и пусть $vX = P - uX$ для v и для $X \subset P$. Тогда $u \wedge v = v^*$, $u \vee v = u^*$, следовательно v является дополнением к u. Покажем, что $(\mathscr{P}, \leqq)$ является вполне дистрибутивной структурой. Пусть C – множество индексов. Пусть для $c \in C$ будет A_c также множеством индексов. Пусть W – система всех функций w таких, что $w(c) \in A_c$. Тогда, в силу тождества Тарского ([13], стр. 66 или [20], стр. 195) справедливо: $X \subset P \Rightarrow [\bigwedge_{c\in C}(\bigvee_{a\in A_c} u_{(c,a)})](X) = \bigcap_{c\in C}(\bigcup_{a\in A_c} u_{(c,a)}(X)) = \bigcup_{W}(\bigcap_{c\in C} u_{(c,W(c))}(X)) = [\bigvee_{W}(\bigwedge_{c\in C} u_{(c,W(c))})](X)$. Следовательно, $\bigwedge_{c\in C}(\bigvee_{a\in A_c} u_{(c,a)}) = \bigvee_{W}(\bigwedge_{c\in C} u_{(c,W(c))})$, что значит, что $(\mathscr{P}, \leqq)$ является вполне дистрибутивной структурой и, следовательно, и вполне дистрибутивной булевой алгеброй. Согласно [3], гл. X, § 10, теорема 13 $(\mathcal{P}, \leqq)$ изоморфно системе подмножеств множества мощности m, где m – мощность системы всех атомов в $(\mathcal{P}, \leqq)$. Но $v \in \mathcal{P}$ является атомом именно тогда, когда существует $A \subset P$ и точка $a \in P$ так, что $vA = a$, $vX = \emptyset$ для $X \neq A$. Следовательно, $(\mathcal{P}, \leqq)$ имеет $2^p \, . \, p$ атомов. Этим теорема доказана.

Теперь мы дадим еще одно доказательство, опирающееся на положения кардинальной арифметики: P мы будем считать антицепью. Из 1.2 вытекает, что топология u является изотонным отображением 2^P в $\mathbf{2}^P$. Значит, $\mathcal{P} = (\mathbf{2}^P)^{2^P}$, т. е. $\mathbf{2}^{P \cdot 2^P}$. $P \, . \, 2^P$ является антиценпью мощности $p \, . \, 2^p$. Этим теорема доказана.

Множество всех атомов в $(\mathcal{P}, \leqq)$ обозначим в дальнейших рассуждениях через $\mathcal{P}^a$.

1.4. Пусть f – перестановка множества P. Пусть для двух топологий u и v будет

$$X \subset P \Rightarrow v(f(X)) = f(u(X)) \, .$$

В таком случае мы назовем топологию v гомеоморфной с u и запишем $v \sim u$, более подробно также $v = f \circ u$. Итак, посредством операции, обозначенной знаком$\circ$, каждой $u \in \mathcal{P}$ поставлена в соответствие топология $f \circ u \in \mathcal{P}$. Легко можно убедиться в том, что это автоморфизм в $(\mathcal{P}, \leqq)$. Выполнено, то есть, $vX = fuf^{-1}(X)$. Следовательно, $f^{-1} \circ v = u$, $f \circ (f^{-1} \circ u) = u$. Отсюда следует, что отображение $f \circ u$ является простым отображением $\mathcal{P}$ на $\mathcal{P}$. Далее, имеют место равенства $f \circ u_1(X) \cup f \circ u_2(X) = fu_1f^{-1}(X) \cup fu_2f^{-1}(X) = f(u_1f^{-1}(X) \cup \cup u_2f^{-1}(X)) = f(u_1 \vee u_2) f^{-1}(X) = [f \circ (u_1 \vee u_2)] (X)$. Аналогично для знака $\wedge$. Из 1.3 вытекает, что описанная конструкция в общем случае не выражает все автоморфизмы $\mathcal{P}$.

Легко можно видеть, что $\sim$ является отношением эквивалентности на $\mathcal{P}$. Разбиение на $\mathcal{P}$, определенное этой эквивалетностью, обозначим символом R.

В работе [14] доказано, что классы разбиения R в случае, когда P – бесконечное множество, или состоят из одного элемента, или имеют мощность, равную по меньшей мере p. Согласно теореме 3 из [14] какой-то класс из R состоит только из одного элемента u точно тогда, когда для u выполнено следующее:

1) $X \subset P \Rightarrow uX = P$ или X, или $P - X$, или $\emptyset$.
2) $X \sim Y \Rightarrow \{uX = P \Rightarrow uY = P, \quad uX = X \Rightarrow uY = Y, \quad uX = P - X \Rightarrow uY = P - Y, \; uX = \emptyset \Rightarrow uY = \emptyset\}$.

Эти топологии мы будем называть топологиями типа (1).

Подмножества M из R мы будем называть реализацией топологических свойств на P. Мы скажем, что $u \in \mathcal{P}$ обладает топологическим свойством M, если существует $U \in M$ такое, что $u \in U$. Пусть $\sum(M) = \bigcup\limits_{S \in M} S$, где $M \in R$. Множества вида $\sum(M)$ мы назовем топологическими системами. Имеет место соотношение $\sum(M) \subset \mathscr{P}$ и очевидно, что это есть множество всех топологий на P, „выполняющее некоторые топологические аксиомы". Топологическая система $\sum(M)$ является всегда, как подмножество в $\mathscr{P}$, упорядоченным множеством.

Теперь мы займемся порядоковыми типами множеств $\sum(M)$, главным образом в том случае, когда P – бесконечное множество. Почти тривиальна следующая теорема:

1.5. *Пусть A – произвольное упорядоченное множество. Тогда существует такое множество P и такая топологическая система $\sum(M)$ в $\mathscr{P}$, что $\sum(M)$ изоморфна A.*

Доказательство. Пусть множество A изоморфно некоторому подмножеству множества 2^{P_1} (такое множество P_1, наверное, существует, потому что A можно представить системой множеств). Выберем теперь P так, чтобы для $\operatorname{card} P$ было $\operatorname{card}\{m : m$ – кардинальное число, $m < \operatorname{card} P\} \geqq \operatorname{card} P_1$. Затем для $m < \operatorname{card} P$ определим u_m следующим образом: $X \subset P$, $\operatorname{card} X = m \Rightarrow u_m X = P$, $X \subset P$, $\operatorname{card} X \neq m \Rightarrow u_m X = \emptyset$.

Пусть $U = \{u_m : m < \operatorname{card} P\}$. Согласно цитированной теореме из [14] является топологической системой и, очевидно, $m \neq n \Rightarrow u_m \wedge u_n = v^*$ следовательно, U является антицепью. Если U_1 – подструктура в $\mathscr{P}$, порожденная множеством U, то U_1 изоморфна 2^U (u_m атомы). Так как $\bigvee_{m \in M'} u_m$, $M' \subset \{m : m < \operatorname{card} P\}$ является, очевидно, опять-таки топологией типа (1), то U_1 будет топологической системой, даже любое подмножество U_1 будет топологической системой. По предположению $\operatorname{card} U \geqq \operatorname{card} P_1$, и поэтому можно 2^{P_1} и, следовательно, также A погрузить в U_1.

Пусть P бесконечна. Тогда $\mathscr{P}$ изоморфна $\mathbf{2}^{2^P}$. Возникает вопрос, если каждый порядковый тип, который можно погрузить в $\mathbf{2}^{2^P}$, имеет реализацию в виде топологической системы из $\mathscr{P}$. Покажем, что это не так. Справедлива теорема:

1.6. *Ни одно множество $\sum(M) \subset \mathscr{P}$ не является цепью мощности большей 2^P.*

Теорему докажем при помощи двух лемм, котороые сами по себе интересны.

Пусть $X \sim Y$. В общем случае не существует перестановка g множества P такая, что $g(X) = Y$, $g(Y) = X$ (если она существует, то будем писать $X \dot{\sim} Y$). Однако, мы покажем, что верно

1.6a. *Пусть $X \sim Y$. Тогда существует $Z \subset P$ и инволюторные перестановки f и g множества P (т. е. $x \in P \Rightarrow f^2(x) = g^2(x) = x$) такие, что $f(X) = Z, f(Z) = X$, $g(Y) = Z$, $g(Z) = Y$ т. е. $X \dot{\sim} Z$, $Z \dot{\sim} Y$.*

Доказательство. 1. Пусть $\operatorname{card} X < p$. Тогда тоже $\operatorname{card} Y < p$, $\operatorname{card}(P - X \cup Y) = p$ и, следовательно, существует $Z \subset P$, $Z \cap (X \cup Y) = \emptyset$, $\operatorname{card} Z = \operatorname{card} X$. Пусть f_1 – простое отображение X на Z, g_1 – простое отображение Y на Z. Теперь определим перестановку f следующим образом: $x \operatorname{non} \in X \cup Z \Rightarrow f(x) = x$, $x \in X \Rightarrow f(x) = f_1(x)$, $x \in Z \Rightarrow f(x) = f_1^{-1}(x)$. Совершенно аналогично определим перестановку g. Очевидно, что для Z, f и g утверждение леммы справедливо.

2. Пусть $\operatorname{card} X = p$, $\operatorname{card}(P - X) = p$. Если $X - Y$ и $Y - X$ эквивалентные множества, то отобразим просто $X - Y$ на $Y - X$ при помощи f_1 и определим f следующим образом: $x \operatorname{non} \in (X - Y) \cup (Y - X) \Rightarrow f(x) = x$, $x \in X - Y \Rightarrow f(x) = f_1(x)$, $x \in Y - X \Rightarrow f(x) = f_1^{-1}(x)$. Достаточно тогда положить $Z = Y$, и g равно тождественному отображению.

Пусть $X - Y$ и $Y - X$ не являются эквивалентными множествами. Пусть, например, $\operatorname{card}(X - Y) < \operatorname{card}(Y - X)$. Следовательно, $\operatorname{card}(X - Y) < p$ и значит, $\operatorname{card}(P - X \cup Y) = p$. Достаточно положить $Z = P - X \cup Y$ и затем поступать, как в случае 1).

3. Пусть $\operatorname{card} X = p$, $\operatorname{card}(P - X) < p$. Так как $P - X \sim P - Y$, то согласно 1) существует Z_1, f и g так, что $f(P - X) = Z_1$, $f(Z_1) = P - X$, $g(P - Y) = Z_1$, $g(Z_1) = P - Y$. Тогда $f(X) = P - Z_1$, $f(P - Z_1) = X$, $g(Y) = P - Z_1$, $g(P - Z_1) = Y$. Следовательно, достаточно положить $Z = P - Z_1$. Этим лемма доказана.

При помощи только что доказанного утверждения можно вывести следующую вспомогательную теорему:

1.6b. *Пусть u — топология, которая не является топологией типа (1). Тогда существует $v \sim u$ так, что $u \parallel v$.*

Доказательство. a) Если P содержит подмножество X такое, что $uX \neq P$, $uX \neq X$, $uX \neq P - X$ и $uX \neq \emptyset$, то наступает один из следующих случаев:

1) $\emptyset \neq uX \cap X$, $X - uX \neq \emptyset$.

2) $P \neq uX \supsetneqq X$.

3) $uX \cap X = \emptyset$, $uX \cup X \neq P$.

Определим a и b следующим образом:

В случае 1) пусть $a \in X - uX$, $b \in uX \cap X$, в 2: $a \in P - uX$, $b \in uX - X$, в 3: $a \in P - (uX \cup X)$, $b \in uX$. Всегда $b \in uX$, $a \operatorname{non} \in uX$. Далее, или $\{a, b\} \cap X = \emptyset$ или $\{a, b\} \subset X$. Пусть f определено таким образом: $f(a) = b$, $f(b) = a$ $f(x) = x$ в остальных случаях. Тогда $f(X) = X$ и $f(uX) \parallel uX$. Следовательно, для $v = f \circ u$ будет $vX \parallel uX$, потому что $v(X) = f \circ u(X) = f . u . f^{-1}(X) = fuX$.

b) Пусть случай a) не имеет места. Если $uX = P$, то мы назовем X множеством типа (P). Аналогично: $uX = X \Rightarrow X$ типа (I), $uX = P - X \Rightarrow X$ типа (D), $uX = \emptyset \Rightarrow X$ типа (O). Предположим, что все топологии, гомеоморфные u, сравнимы с u. Легко можно, путем анализа всех случаев, доказать, что $X \overset{*}{\sim} Y \Rightarrow X$ и Y одного и того же типа. Пусть $X \sim Y$. Тогда по 1.6. a) существует Z так, что $X \overset{*}{\sim} Z$, $Z \overset{*}{\sim} Y$. Следовательно, X и Z, Y и Z, а значит и X и Y — множества одного и того же типа. Но это значит, что u принадлежит к типу (1), что противоречит предположению.

Доказательство утверждения 1.6. Пусть $\sum(M)$ — цепь в $\mathscr{P}$. Тогда $u \in$

$\in \sum(M) \Rightarrow u$ топология типа (1) (согласно 1.6.b). Но топологией типа (1) является 2^m, где $m = \text{card}\{r : r \leqq \text{card } P\}$, что максимально равно 2^p. Итак, цепь $\sum(M)$ имеет мощность самое больше 2^p.

Покажем, что в $\mathbf{2}^{2^p}$ существует цепь мощности большей 2^p, когда p бесконечно. (Доказательство провел акад. Й. НОВАК.)

Пусть в общем случае m – бесконечная мощность, $m = \aleph_\sigma$. Пусть ν – наименьшее порядковое число, для которого $\aleph_\sigma < 2^{\aleph_\nu}$. Выполнено неравенство $\aleph_\nu \leqq \aleph_\sigma$. Пусть $\mathscr{S}$ – множество всех последовательностей типа ω_ν, состоящих из нулей и единиц и неоконченных одними единицами, которое упорядочено лексикографически. Пусть $\mathscr{T}$ – множество всех последовательностей типа ω_ν, состоящих из нулей и единиц и законченных одними нулями. Справедливы соотношения $\text{card } \mathscr{S} = 2^{\aleph_\nu}$, $\text{card } \mathscr{T} = \sum\limits_{\alpha < \omega_\nu} 2^{\text{card } W(\alpha)} \leqq \aleph_\sigma \,.\, \aleph_\nu = \aleph_\sigma(W(\alpha)$ множество всех порядковых чисел, меньших α при обыкновенном упорядочении). Тогда множество $\mathscr{T} \oplus W(\omega_\sigma)$ плотно в $\mathscr{S} \oplus W(\omega_\sigma)$ и $\text{card } \mathscr{T} \oplus W(\omega_\sigma) = \aleph_\sigma = m$. $\text{Card } \mathscr{S} \oplus W(\omega_\sigma) = 2^{\aleph_\nu} > m$. Следовательно, в $\mathscr{T} \oplus W(\omega_\sigma)$ существует цепь подмножеств, упорядоченная соотношением включения (например, нижние классы сечений), мощностью самое меньше $2^{\aleph_\nu}$, т. е. больше m. Итак, в множестве мощности m существует цепь подмножеств мощности большей m. Теперь достаточно положить $m = 2^p$, и доказательство утверждения закончено.

1.7. Кажется, что задача описать типы топологических систем $\sum(M)$ в $\mathscr{P}$ значительно затруднительна. Мы опишем теперь те топологические системы, которые изоморфны степеням $\mathbf{2}^K$ (для подходящего множества K), являются подструктурами в $(\mathscr{P}, \leqq)$ и содержат v^* и u^*.

Итак, пусть $\sum(M)$ – подструктура, обладающая перечисленными свойствами. Тогда, согласно [4], стр. 466, существует разбиение T на $\mathscr{P}^a$ такое, что топологии вида $u = \bigvee\limits_{v \in U \in T} v$ образуют систему всех атомов в $\sum(M)$. Пусть f – перестановка в P. Мы знаем, что отображение $u \to f \circ u$ является автоморфизмом в $(\mathscr{P}, \leqq)$ и, следовательно, также в $\sum(M)$. Поэтому, когда u является атомом в $\sum(M)$, то и $f \circ u$ является атомом в $\sum(M)$. Потому что

$$u = \bigvee_{v \in U \in T} v \Rightarrow f \circ u = \bigvee_{v \in U \in T} f \circ v\,,$$

множество $f \circ U = \{w = f \circ v : v \in U\} \in T$. Если же, наоборот, $U \in T \Rightarrow f \circ U \in T$, то структура, порожденная топологиями $u = \bigvee\limits_{v \in U \in T} v$, является топологической системой типа $\mathbf{2}^K$ и содержит v^* и u^*.

Следовало бы описать более подробно соотношения между этими разбиениями T на множестве $\mathscr{P}^a$ и разбиением на $\mathscr{P}^a$, индуцированным разбиением R.

1.8. Теперь мы построим для бесконечного множества P такую топологию u, что для $T \in R$, $u \in T$ будет справедливым утверждение, что наименьшей полной подструктурой над T является $\mathscr{P}$.

Итак, пусть p – бесконечное кардинальное число. Каждому кардинальному числу m, $0 < m < p$ поставим в соответствие множества A_m, B_m, C_m, D_m и одноточечные множества $\{a_m\}$, $\{b_m\}$, $\{c_m\}$, $\{d_m\}$ такие, что $a_m \in A_m$, $d_m \in D_m$, $\operatorname{card} A_m = \operatorname{card} B_m = \operatorname{card} C_m = \operatorname{card} D_m = m$ причем все множества A_m, B_m, C_m, D_m, $\{b_m\}$, $\{c_m\}$ (для всех m вместе) не будут взаимно пересекаться. Пусть, кроме этого, A_p, B_p, $\{b_p\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ множества, дизъюнктные взаимно и со всеми предыдущими множествами, $\operatorname{card} A_p = \operatorname{card} B_p = p$, и пусть $\{a_p\}$ одноточечное множество, для которого $a_p \in A_p$. Положим $P = \bigcup\limits_{m \leqq p} A_m \cup \bigcup\limits_{m \leqq p} B_m \cup \bigcup\limits_{m < p} C_m \cup \bigcup\limits_{m < p} D_m \cup \bigcup\limits_{m \leqq p} \{b_m\} \cup \bigcup\limits_{m \leqq p} \{c_m\} \cup \{a\} \cup \{b\}$. Будет $\operatorname{card} P = p$.

Множества $\emptyset$, P, A_m, B_m, $P - C_m$, $P - D_m$ мы назовем значительными, точки a_m, b_m, c_m, d_m, a, b замыкающими точками. Систему значительных множеств обозначим через $\mathfrak{V}$.

1.9. Теперь определим топологию u следующим образом:

$$uA_m = \{a_m\},\ uB_m = \{b_m\} \text{ для } 0 < m \leqq p,\ u\,\emptyset = \{a\},\ uP = \{b\},\ u(P - C_m) = \{c_m\},$$
$$u(P - D_m) = \{d_m\} \quad \text{для} \quad 0 < m < p, \quad \text{иначе} \quad uX = \emptyset\,.$$

Об этой топологии мы в дальнейшем докажем, что она обладает требуемым свойством. Справедливы для нее следующие простые утверждения:

1.10a. Пусть $X \subset P$, $\emptyset \neq X \neq P$. Тогда существует одно и только одно $Y \in \mathfrak{V}$ такое, что $X \sim Y$ и $uY \subset Y$, и точко одно $Z \in \mathfrak{V}$ такое, что $X \sim Z$ и uZ non $\in Z$.

Доказательство вытекает непосредственно из определения u. Аналогично и доказательства следующих утверждений.

1.10b. Пусть $X, Y \in \mathfrak{V}$, $X \neq \emptyset \neq Y$, $X \neq P \neq Y$.

α) $X \subset Y \Rightarrow \operatorname{card}(Y - X) = p$.

β) $X \cap Y \neq \emptyset$, $X \not\subset Y$, $Y \not\subset X \Rightarrow \operatorname{card} X \cap Y = p$, далее,

$$P - X = C_m \quad \text{или} \quad D_m, \text{ аналогично}$$
$$P - Y = C_{m'} \quad \text{или} \quad D_{m'} \text{ для некоторых } m \text{ и } m'.$$

1.10c. $\{a\}$ non $\in \mathfrak{V}$, $P - \{a\}$ non $\in \mathfrak{V}$, $\{b\}$ non $\in \mathfrak{V}$, $P - \{b\}$ non $\in \mathfrak{V}$.

1.10d. $X, Y \in \mathfrak{V}$, $X \neq \emptyset \neq Y$, $X \cap Y = \emptyset \Rightarrow \operatorname{card}(P - X \cup Y) \geqq \aleph_0$.

1.10e. Каждая замыкающая точка является замыканием в топологии u одного множества из $\mathfrak{V}$.

1.11. Пусть $X, Y \in \mathfrak{V}$, $X \neq Y$. Тогда существует перестановка f множества P такая, что $x \in P \Rightarrow f(f(x)) = x$, $f(X) = X$, $f(uX) = uX$ и одновременно $f(Y) \neq Y$ (мы скажем, что наступает α) или $f(u(Y)) \neq uY$ (скажем, что наступает β).

Доказательство. Мы докажем даже, что существует искомая перестановка f, в которой все точки, за исключением двух точек x и y, инвариантны. Такую перестановку мы запишем вкратце $x \leftrightarrow y$.

a) Пусть $X = \emptyset$. Пусть $uY = \{y\}$ $(\neq \{a\})$. Пусть $z \in P$, $z \neq y$, $z \neq a$. Пусть $f = z \leftrightarrow y$. Наступит случай β.

b) $X \neq \emptyset$.

b_1) $X \cap Y = \emptyset$.

b_{11}) $Y = \emptyset$.

b_{111}) $X = P$. Выберем $z \neq b$, $z \neq a$ и положим $f = z \leftrightarrow a$. Наступит β.

b_{112}) $X \neq P$.

b_{1121}) $P - X$ является одноточечным множеством. Выберем $z \in X$, $uX \neq \{z\} \neq \{a\}$ (a лежит в X). Пусть $f = z \leftrightarrow a$. Наступит β.

b_{1122}) $P - X$ не является одноточеным множеством.

b_{11221}) Пусть $a \in X$. Тогда существует $z \in X$, $a \neq z$ и $\{z\} \neq uX$ (X не совпадает с A_2). Пусть $f = a \leftrightarrow z$. Наступит β.

b_{11222}) Пусть $a \in P - X$. Существует $z \in P - X$, $\{z\} \neq uX$, $z \neq a$ ($P - X$ не совпадает ни с C_2, ни с D_2). Пусть $f = a \leftrightarrow z$. Наступит β.

b_{12}) $Y \neq \emptyset$.

Согласно 1.10d существует $y \in P - X \cup Y$, $y \operatorname{non} \in uX$, и пусть $z \in Y$. Пусть $f = y \leftrightarrow z$. Наступит α.

b_2) $X \subset Y$.

b_{21}) $Y = P$.

b_{211}) Пусть $b \in X$. Существует $z \in X$, $z \neq b$, $\{z\} \neq uX$(X не совпадает ни с A_m, ни с B_m). Пусть $f = z \leftrightarrow b$ Наступит β.

b_{212}) Пусть $b \in P - X$. Существует $z \in P - X$, $\{z\} \neq uX$ ($P - X$ не равно D_m). Пусть $f = z \leftrightarrow b$. Наступит β.

b_{22}) $Y \neq P$.
Тогда $\operatorname{card}(Y - X) = p$ (1.10bα). Выберем $z \in Y - X$, $\{z\} \neq uX$, $y \in P - X$. Пусть $f = z \leftrightarrow y$. Наступит α.

b_3) $Y \subset X$.

b_{31}) $X = P$.

b_{311}) $Y = \emptyset$. Доказательство как в случае b_{111}.

b_{312}) $Y \neq \emptyset$. Выберем $z \in Y$, $z \neq b$ ($\{b\} \notin \mathfrak{B}$) и $y \in P - Y$, $y \neq b$ ($P - \{b\} \notin \mathfrak{B}$). Пусть $f = z \leftrightarrow y$. Наступит α.

b_{32}) $X \neq P$.

b_{321}) $Y = \emptyset$. Доказательство как в случае b_{112}.

b_{322}) $Y \neq \emptyset$.

Пусть $y \in Y$, $\{y\} \neq uX$, $z \in X - Y$, $\{z\} \neq uX$ $(\operatorname{card}(X - Y) = p)$. Положим $f = z \leftrightarrow y$. Наступит α.

$\mathrm{b}_4)$ $X \not\subset Y$, $Y \not\subset X$, $X \cap Y \neq \emptyset$.

Тогда выполнено 1.10b β. Также $uY \in X$. Выберем $\{x\} \neq uX$, $\{x\} \neq uY$, $x \in X \cap \cap Y$. Пусть $f = x \leftrightarrow uY$. Наступит β.

1.12. Пусть u — топология из 1.9, $X, Y \in \mathfrak{B}$, $X \neq Y$ и пусть f — перестановка из 1.11. Тогда

a) $uX = f \circ uX$.

b) $uY \neq f \circ uY$.

Доказательство. Случай a) очевиден.

b) Пусть для f и Y наступит α. Обозначим $Y_1 = f^{-1}Y$. Так как наступил случай α, то $Y_1 \neq Y$. Мы покажем, что $f(uY_1) \neq u\ Y$. Это очевидно в случае, когда Y_1 non $\in \mathfrak{B}$. Тогда, то есть, по определению u $uY_1 = \emptyset$, следовательно, $f(uY_1) = \emptyset$, но $uY \neq \emptyset$. Пусть будет $Y_1 \in \mathfrak{B}$. Пусть f означает перестановку $x \leftrightarrow y$; очевидно, что необходимо $x \in Y - Y_1$, $y \in Y_1 - Y$ или $y \in Y - Y_1$, $x \in Y_1 - Y$. Достаточно исследовать первый случай. Так как $Y, Y_1 \in \mathfrak{B}$, $Y \neq Y_1$, вытекает из определения топологии u, что $uY_1 \neq uY$, причем uY_1, uY — одноточечные множества. Если бы $f(uY_1) = uY$, то необходимо было бы или $uY_1 = \{x\}$, $uY = \{y\}$ или $uY_1 = \{y\}$, $uY = \{x\}$. Оба случая противоречат 1.10a. Итак, в общем

$$f \circ uY = fuf^{-1}Y = fuY_1 \neq uY.$$

Пусть для f и Y наступит β. Ввиду предыдущего, можем ограничиться случаем, когда $f(Y) = Y$. Тогда

$$f \circ uY = fuf^{-1}Y = fuY \neq uY.$$

1.13. Пусть u_1 — атом в $\mathscr{P}$, т. е. существует множество $M \subset P$ и точка $m \in P$ так, что $u_1M = \{m\}$, иначе $u_1X = \emptyset$. Пусть $T \in R$, $u \in T(u$ из 1.10). Пусть T_1 полная подструктура в $\mathscr{P}$, порожденная T. Тогда $u_1 \in T_1$.

Доказательство. По построению значительных множеств существует точно одно $N \in \mathfrak{B}$ и подходящая перестановка g множества P так, что $g(M) = N$, $g(u_1M) = uN$. Положим $u_2 = g \circ u_1$. Тогда $u_2N = gu_1g^{-1}N = uN$. Теперь в теореме 1.12 положим $N = X$ и предположим, что Y пробегает $\mathfrak{B}$, причем $X \neq Y$. Пусть для каждого Y символ f_Y означает перестановку P из теоремы 1.12. Тогда $\left(\bigwedge_{Y \in \mathfrak{B},\, Y \neq N} f_Y \circ u\right) \wedge u = u_2$, ибо для $Y \neq X$ или $uY = \emptyset$, или для f_Y справедливо, что $f_Y \circ uY \neq uY$ но тогда $uY \wedge f_Y \circ uY = \emptyset$ (uY и $f_Y \circ uY$ являются, то есть, самое больше одноточечными множествами). Из только что доказанной формулы, если применить утверждение, что отображение $u \to g^{-1} \circ u$ является изоморфизмом, вытекает,

$$u_1 = g^{-1} \circ u_2 = \Big(\bigwedge_{Y \in \mathfrak{B},\, Y \neq N} g^{-1} \circ (f_Y \circ u)\Big) \wedge g^{-1} \circ u =$$
$$= \Big(\bigwedge_{Y \in \mathfrak{B},\, Y \neq N} (g^{-1} f) \circ u\Big) \wedge g^{-1} \circ u\,,$$

чем наша теорема доказана.

1.14. $T_1 = \mathscr{P}$.

Доказательство вытекает сразу же из 1.13 и из того обстоятельства, что каждый элемент в $\mathscr{P}\, v \neq v^*$ является супремумом некоторого множества атомов, v^* равно инфимуму $\mathscr{P}^a$.

Для конечных P аналогичная теорема в общем случае несправедлива, что видно уже на случае, что card $P = 1$.

II

2.1. Теперь мы будем заниматься топологиями u, для которых выполнено следующее:

1. $u\emptyset = \emptyset$. 2. $X \subset P \Rightarrow X \subset uX$. 3. $X \subset Y \subset P \Rightarrow uX \subset uY$.

Этими топологиями занимался Э. Чех в [6]. Множество всех этих топологий на данном множестве обозначим буквой $\mathscr{C}$.

Основные понятия и утверждения найдет читатель в [6] или в [9]. Напомним, что O является окрестностью x в (P, u) точно тогда, когда x non $\in u(P - O)$. Систему всех окрестностей точки x в (P, u) обозначим через $\mathfrak{O}_u(x)$. В [9] было доказано, что $\mathscr{C}$ образует полную подструктуру в $\mathscr{P}$. Если $v = \bigwedge_{i \in I} v_i$, $u = \bigvee_{i \in I} u_i$, то $\mathfrak{O}_v(X) = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{O}_{v_i}(x)$, $\mathfrak{O}_u(x) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{O}_{v_i}(x)$. Наименьшая топология в $\mathscr{C}$ v^{**} определена следующим образом: $v^{**}(X) = X$ для $X \subset P$. Наибольшим элементом в $\mathscr{C}$ является топология u^{**}, для которой справедливо: $u^{**}\emptyset = \emptyset$, $X \neq \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow uX = P$.

Теперь мы будем заниматься алгебраическим строением структуры $\mathscr{C}$.

2.2. Если S – структура и если для данного x $x = \bigvee_{i \in I} x_i \Rightarrow x_{i_1} = x$ при определенном i_1, то x назовем тотально неприводимым элементом. При этом всегда предполагаем $I \neq \emptyset$. Если $x \leqq \bigvee_{i \in I} x_i \Rightarrow x \leqq x_{i_1}$ для некоторого i_1, то x называем тотально примитивным элементом. Если S вполне дистрибутивная полная структура, эти два понятия совпадают (терминология перенята из [15], стр 11). Множество всех тотально неприводимых элементов обозначим через S^*. Ради полноты приведем доказательство теоремы, которая непосредственно вытекает из рассуждений в [17] (теорема 2, стр. 680) или [15] (утверждение 5.11, стр. 21).

Пусть S – вполне дистрибутивная полная структура, каждый элемент которой является супремумом тотально неприводимых элементов, т.е. S изоморфна т. наз. полному множественному кольцу – см. [17]. Тогда S определена, вплоть до изоморфизмов, подмножеством S^*.

Доказательство. Пусть $a \in S$. Пусть $L(a)$ – множество всех x из S^*, меньших или равных a. $L(a)$ является в S^* полуидеалом, т.е. $b \in L(a) \Rightarrow L(b) \subset L(a)$. Наоборот, пусть M – полуидеал в S^*. Пусть $m = \bigvee M$. Имеем $M \subset L(m)$. Допустим, что существует $n \in L(m) - M$. Тогда $n \leqq \bigvee M$. Следовательно, в M существует m' так, что $n \leqq m'$ значит $n \in M$, что представляет противоречие. Итак, $M = L(m)$. Рени (Raney) (в [17], стр. 680) доказал, что соответствие $a \Rightarrow L(a)$ является изоморфизмом S на систему всех $L(a)$, т. е. систему всех полуидеалов в S^*. Но эта система инвариантна по отношению к изоморфизму. Следовательно, если две структуры S и S', обладающие свойствами, описанными в теореме, имеют изморфные системы тотально неприводимых элементов, то они изоморфны.

2.3. Пусть $u \in \mathscr{C}$.

u является тотально неприводимой, когда выполнено следующее утверждение (T): существует $X_0 \subset P$, $X_0 \neq \emptyset$ и $a \in P$ так, что $uX = X \cup \{a\}$ для $X \supset X_0$, $uX = X$ в остальных случаях.

Доказательство. Отметим вначале, что из 1.3. вытекает, что $\mathscr{C}$ вполне дистрибутивная полная структура.

Пусть u – тотально неприводимый элемент в $\mathscr{C}$. Тогда $X, Y \subset P$, $a \in uX - X$, $b \in uY - Y \Rightarrow a = b$.

Для доказательства допустим, что существуют множества X_1 и Y_1 точки a и b, имеющие перечисленные свойства, причем $a \neq b$. Определим топологии u_a и u_b следующим образом:

$$u_a X = uX \quad \text{для} \quad X \text{ non} \subset X_1, \quad u_a X = uX - \{a\} \quad \text{для} \quad X \subset X_1 .$$

u_b определяется аналогично. Так как $a \text{ non} \in X_1$, $b \text{ non} \in Y_1$, то $u_a, u_b \in \mathscr{C}$. Далее, $u_a < u$, $u_b < u$ и $u = u_a \vee u_b$, следовательно u не является тотально неприводимой.

Далее покажем, что или $u = v^{**}$, или что существует такое множество X_0 и $a \in P$, $a \text{ non} \in X_0$, что

$$uX_0 = X_0 \cup \{a\}, \quad X \subsetneqq X_0 \Rightarrow uX = X .$$

Допустим, что приведенное утверждение не имеет места. Тогда для каждого множества X_1, для которого $a \in uX_1 - X_1$, существует Z такое, что $Z \subsetneqq X_1$, $a \in uZ - Z$. Выберем одно такое Z. Затем определим u_{X_1} таким образом:

$u_{X_1} = X$ для $X \subset Z$, иначе $u_{X_1} = uX$. Будет $u_{X_1} \in \mathscr{C}$ и $\bigvee_{X_1} u_{X_1} = u$. При этом $u_{X_1} < u$ для всех рассматриваемых X_1, в чем опять заключается противоречие с тотальной неприводимостью топологии u. Значит, существует такое множество X_0, что $a \in uX_0 - X_0$, $X \subsetneqq X_0 \Rightarrow uX = X$. Итак, пусть $u \neq v^{**}$. Покажем, что для Y, для которого $a \in uY_0 - Y$, будет $Y \supset X_0$. Допустим, что это не верно. Пусть для Y_0 будет $a \in uY_0 - Y_0$ и Y_0 non $\supset X_0$. Определим топологии u_{Y_0} и u_{X_0} следующим образом: $u_{Y_0}X = X$ для $X \subset Y_0$, $u_{Y_0}X = uX$ в остальных случаях. Аналогично определяется u_{X_0}. Пусть $v = u_{X_0} \vee u_{Y_0}$. Тогда $v \leqq u$. Допустим, что $v < u$, т. е. что существует $X \subset P$ такое, что $vX \subsetneqq uX$, т. е. $uX = vX \cup \{a\}$, a non $\in X = vX$. Должно быть $X \subset X_0 \cap Y_0$. Из минимальности X_0 вытекает $X = X_0$, следовательно, $X_0 \subset Y_0$, что противоречит предположению. Итак, $v = u$, что значит, что u не является тотально неприводимой, так как $u_{X_0} < u$, $u_{Y_0} < u$. Мы доказали, что для u выполнено (T). Пусть, наоборот, для u будет справедливым (T). Допустим, что $u = \bigvee u_i$, $u_i < u$. Тогда существует для каждого i множество $X_i \subset P$ такое, что $uX_i \neq u_iX_i$, значит, $X_i \supset X_0$ и $u_iX_i = X_i$. Поэтому также $u_iX_0 = X_0$ для всех i, откуда $uX_0 = (\bigvee(u_i))\, X_0 = \bigcup u_iX_0 = X_0$, что представляет противоречие. Итак, u является тотально неприводимым элементом в $\mathscr{C}$.

2.4. Каждый элемент из $\mathscr{C}$ служит супремумом подходящей системы тотально неприводимых элементов.

Доказательство вытекает непосредственно из 2.3.

2.5. *$\mathscr{C}$ изоморфна полному множественному кольцу.*

Доказательство вытекает сразу же из теоремы 2. в [17].

2.6. *Пусть K — упорядоченное множество, антиизоморфное системе всех непустых подмножеств множества мощности $p - 1$. Тогда*

$$\text{(A)} \qquad \mathscr{C}^* \approx 1 \oplus \Big(\sum_{i \in I} K_i\Big)$$

где card $I = p$, $K_i \approx K$, $\sum_{i \in I}$ — *лексикографическая сумма по антицепи I.*

Доказательство. Пусть P — множество, card $P = p$. Пусть $K(a)$ — система всех топологий u из $\mathscr{C}^*$, для которых существует $X_0 \subset P$ такая, что a non $\in X_0$ $uX = X \cup \{a\}$ для $X \supset X_0$, иначе $uX = X$. Множество $K(a)$, очевидно, изоморфно K. Пусть, далее, $b \in P$, $a \neq b$ и $u \in K(a)$, $v \in K(b)$. Тогда $u \parallel v$. Для некоторого $Y_0 \subset P$ будет, то есть, $vX = X \cup \{b\}$ при $X \supset Y_0$, $vX = X$ в остальных случаях. Если, X_0 и Y_0 несравнимы, то $uX_0 \supsetneqq vX_0$, $vY_0 \supsetneqq uY_0$, следовательно $u \parallel v$. Если, например, $X_0 \subset Y_0$, то $uY_0 = Y_0 \cup \{a\}$, $vY_0 = Y_0 \cup \{b\}$. Если a non $\in Y_0$, то $uY_0 \parallel vY_0$ и $u \parallel v$. Если $a \in Y_0$, то $uY_0 \subsetneqq v\,Y_0$ и $X_0 \neq Y_0$. Поэтому $uX_0 = X_0 \cup \{a\}$, $vX_0 = X_0$. Значит, $uX_0 \supsetneqq vX_0$. Итак, опять $u \parallel v$. Объединение всех $K(a)$ равно лексикограцоичецкой сумме $\sum_{a \in P} K(a)$. v^{**} предшествует всем топологиям из $\mathscr{C}^*$. Этим теорема доказана.

Вследствие 2.1. имеем следующую алгебраическую характеризацию структуры $\mathscr{C}$.

2.7. Полное множественное кольцо O изоморфно системе $\mathscr{C}$ на некотором множестве P с кардинальным числом p точно тогда, когда система O^* всех тотально неприводимых элементов кольца O имеет вид (A).

Чтобы установить card $(\mathscr{P} - \mathscr{C})$, приведем следующее простое утверждение.

2.8. Пусть (N, u) и (M, v), $N \cap M = \emptyset$ – два топологических пространства и пусть f – наследственное топологическое свойство. Пусть v не является f-топологией (т.е. не имеет свойства f). Пусть $P = N \cup M$, и определим

$$X \subset P \Rightarrow wX = u(X \cap N) \cup v(X \cap M)$$

(значит, (P, w) представляет топологическую сумму пространств (N, u) и (M, v)). Тогда w не является f-топологией.

Доказательство вытекает непосредственно из того обстоятельства, что (M, v) – пространство, погруженное в (P, w).

,,Быть топологией из системы $\mathscr{C}$" – это наследственное топологическое свойство.

Пусть P – бесконечное множество. Пусть M и N образуют разбиение на P, card M = card $N = p$. Пусть v топология на M, не удовлетворяющая аксиомам Э. Чеха; топологию на N можем выбрать произвольно. Топологией u на N является 2^{2^p} (см. [16] или 1.3.). Итак, из 2.8. вытекает

2.9. Пусть P – бесконечное множество. Тогда card $(\mathscr{P} - \mathscr{C}) = 2^{2^p}$.

III

3.1. Теперь мы будем заниматься такими топологиями u из $\mathscr{C}$ для которых

1) $X, Y \subset P \Rightarrow uX \cup uY = u(X \cup Y)$ (т. наз. A-аксиома).

2) $X \subset P \Rightarrow u(uX) = uX$ (т. наз. U-аксиома). Топологии $u \in \mathscr{P}$, которые удовлетворяют 1), называем A-топологиями, топологии, удовлетворяющие 2) U-топологиями.

Теория описанных топологических пространств разработана в ряде монографий, (например, [5] или [8]). В терминологии мы будем, главным образом, руководствоваться работой [5] Н. Бурбаки. Систему топологий, о которой теперь будет речь, на данном множестве P будем обозначать символом $\mathscr{B}$.

Очень хорошо известно, как топологии из $\mathscr{B}$ описаны при помощи отркытых множеств, или, при помощи окрестностей точек из P .

3.2. Если $u \in \mathscr{B}$ и если, как обыкновенно, $\mathfrak{O}_u(x)$ означает систему всех окрестностей точки x в (P, u), то $\mathfrak{O}_u(x)$ есть фильтр. Понятие фильтр мы будем употреблять в смысле книги [12]. Теорию фильтров разработал в последнее время целый ряд авторов (см. [18], [19], [2], [12]). Хорошо известно, что система всех фильтров на данном множестве (упорядоченная отношением, обратным к множественному включению) является атомической дистрибутивной полной структурой. Атомы – это ультрафильтры. Справедлива следующая теорема (см. [18], стр. 374 или [5], гл. 1, упр. 8).

3.2a. Пусть F – фильтр на P. Пусть $\mathfrak{M}$ – система всех ультрафильтров H, для которых $F \subset H$. Тогда

$$F = \bigcap_{H \in \mathfrak{M}} H .$$

3.3. $\mathscr{B}$ является полной структурой (при упорядочении 1.2). В [12], стр. 61 сказано, что под каждым элементом ($\neq v^{**}$) существует атом. v^{**}, u^* – это наименьший, или же наибольший элемент в $\mathscr{B}$. В [12] также отмечено, что $\mathscr{B}$ не является дистрибутивной структурой. Мы будем теперь более подробно заниматься взаимными отношениями между структурными операциями в $\mathscr{B}$ (будем обозначать их символами $\underset{\mathscr{B}}{\vee}$, $\underset{\mathscr{B}}{\bigvee}$, $\underset{\mathscr{B}}{\wedge}$, $\underset{\mathscr{B}}{\bigwedge}$) и структурными операциями в $\mathscr{C}$, затем будем изучать атомы и антиатомы в $\mathscr{B}$.

3.4. Пусть S – непустое множество в $\mathscr{B}$. Пусть для $u \in \mathscr{B}$, $\mathfrak{M}(u)$ означает систему всех отркытых множеств в (P, u). Тогда

$$\mathfrak{M}(\underset{\mathscr{B}}{\bigvee} S) = \bigcap_{u \in S} \mathfrak{M}(u) .$$

$\mathfrak{M}(\underset{\mathscr{B}}{\bigwedge} S)$ построим следующим образом: построим все возможные пересечения конечных систем множеств из $\bigcup_{u \in S} \mathfrak{M}(u)$ и затем построим все возможные соединения полученных таким образом множеств.

Доказательство, например, в [5], стр. 36, 37 (1. §2, 2.3). В случае замкнутых множеств производится двойственное построение.

3.4a. Пусть card $P \geqq 3$. Тогда $\mathscr{B}$ не является подструктурой в $\mathscr{P}$.

Доказательство. Пусть a_1, a_2, a_3 – различные точки из P. Пусть системы $\{a_1, a_2\}, \{a_3\}$, $P - \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{a_1\}, \{a_2, a_3\}$, $P - \{a_1, a_2, a_3\}$ являются базисами замкнутых множеств топологий u и v. Справедливы равенства $u(\{a_1, a_3\}) = \{a_1, a_2, a_3\}$, $v(\{a_1, a_3\}) = \{a_1, a_2, a_3\}$. Следовательно, $u \wedge v(\{a_1, a_3\}) = \{a_1, a_2, a_3\}$. При этом $u \underset{\mathscr{B}}{\bigwedge} v (= w)$ имеет в качестве базиса замкнутых множеств систему $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}$, $P - \{a_1, a_2, a_3\}$, следовательно, $w\{a_1, a_3\} = \{a_1, a_3\}$. Итак, $w \neq u \vee v$ значит, $\mathscr{B}$ не является подструктурой в $\mathscr{P}$.

В случае card $P = 1$ или 2 $\mathscr{C} = \mathscr{B}$.

3.5. Отношения между $\bigvee_{\mathscr{B}}$ и $\bigvee$ и между $\bigwedge_{\mathscr{B}}$ и $\bigwedge$ можно сравнительно наглядно описать при помощи модификаций. Пусть f — какое-нибудь топологическое свойство. Пусть $u \in \mathscr{P}$. Если в системе всех f-топологий $v \in \mathscr{P}$, для которых $u \leqq v$ ($u \geqq v$) существует самая слабая (самая сильная), обозначим ее через $u^f(u_f)$ и назовем верхней (нижней) f-модификацией топологии u (см. [9]).

3.6. Пусть S — система топологий из $\mathscr{B}$. Тогда

$$\bigvee_{\mathscr{B}}\{u : u \in S\} = [\bigvee\{u : u \in S\}]^U, \quad \bigwedge_{\mathscr{B}}\{u : u \in S\} = [\bigwedge\{u : u \in S\}]_A .$$

Доказательство. Докажем, например, первую формулу. Положим $v = \bigvee\{u : u \in S\}$, $w = \bigvee_{\mathscr{B}}\{u : u \in S\}$. Очевидно, $v \leqq w$. Сначала покажем, что v является A-топологией. Пусть $X \cup Y = Z$. Тогда для $u \in S$ будет $uX \cup uY = uZ$. Следовательно, $vZ = \bigcup_{u\in S}[uX \cup uY] = \bigcup_{u\in S} uX \cup \bigcup_{u\in S} uY = vX \cup vY$. Согласно [10] тогда справедливо утверждение, что v^U — A-топология. Значит, $v^U \in \mathscr{B}$. Кроме того, w есть U-топология, следовательно, $v^U \leqq w$. Но w является супремумом в $\mathscr{B}$ системы S. Значит, также $v^U \geqq w$, откуда $v^U = w$, что представляет первое соотношение.

3.7. Для многих встречающихся в литературе систем $S \subset \mathscr{B}$ имеет место соотношение $\bigvee_{\mathscr{B}} S = \bigvee S$ или же $\bigwedge_{\mathscr{B}} S = \bigwedge S$.

Докажем, что справедливо утверждение:

Пусть $S \subset \mathscr{B}$ обладает следующим свойством: $u, v \in S \Rightarrow$ существует $w \in S$, $w \leqq u$, $w \leqq v$. Тогда $\bigwedge_{\mathscr{B}} S = \bigwedge S$.

Доказательство. Положим $\bigwedge S = u_1$. Очевидно, $X, Y \subset P \Rightarrow u_1(X \cup Y) \supset u_1 X \cup u_1 Y$. Пусть $x \in \bigcap_S (uX \cup uY)$. Если $u \in S \Rightarrow x \in uX$, то $x \in \bigcap_S uX$ и, следовательно, $x \in u_1 X$. Пусть, наоборот, существует $u_2 \in S$ так, что x non $\in u_2 X$. Тогда $x \in u_2 Y$. Пусть $u \in S$ и $w \in S$ такие, что $w \leqq u$, $w \leqq u_2$. Допустим, что x non $\in wY$. Тогда $x \in wX$ и, следовательно, $x \in u_2 X$, что представляет противоречие. Итак, $x \in wX$ и также $x \in uY$, значит $x \in \bigcap_S uY$, откуда $x \in (\bigcap_S uX) \cup (\bigcap_S uY)$.

Имеем $u_1(X \cup Y) = u_1 X \cup u_1 Y$, откуда следует, что u_1 — A-топология. Следовательно, по 3.6. будет

$$u_1 = \bigwedge_{\mathscr{B}} S .$$

3.7a. Частным случаем нашей теоремы является следующая хорошо известная теорема: Пусть S – система псевдометризуемых пространств, обладающих свойством, приведенным в 3.7. Тогда $\bigwedge S \in \mathscr{B}$, и необходимым и достаточным условием для того, чтобы топология Хаусдорфа u была представима в этом виде, является требование, чтобы (P, u) было вполне регулярным пространством.

Доказательство см., например, в [7], стр. 219, теорема 15.6.

Теперь опишем атомы в $\mathscr{B}$.

3.8. Пусть $x \in P$. Пусть S – ультрафильтр в $P - \{x\}$. Определим топологию $u_{x,S}$ так: $x \neq y \Rightarrow \mathfrak{D}_{u_{x,S}}(y) = \{X : X \subset P, \ \ y \in X\}$, $\mathfrak{D}_{u_{x,S}}(x) = \{Y : Y = X \cup \{x\}, X \in S\}$. Тогда $u_{x,S}$ является атомом в $\mathscr{B}$. Для каждого атома v из $\mathscr{B}$ существует $x \in P$ и ультрафильтр S в $P - \{x\}$ так, что $v = u_{x,S}$ ($u_{x,S}$ называется в [5] топологией, присоединенной к фильтру S).

Доказательство. Легко видно, что $u_{x,S}$ всегда представляет топологию из $\mathscr{B}$ (выполнены, напр., условия $V_{\mathrm{I}} - V_{\mathrm{IV}}$ из [5] для $\mathfrak{D}_{u_{x,S}}(x)$). Что $u_{x,S}$ является атомом, вытекает из того, что S ультрафильтр в $P - \{x\}$.

Пусть, наоборот, $u \neq v^{**}$, $u \in \mathscr{B}$. Пусть для $a \in P$ выполнено $\mathfrak{D}_u(a) \neq \{X : a \in X\}$. Тогда $S_1 = \{Y : X - \{a\}, X \in \mathfrak{D}_u(a)\}$ является фильтром в $P - \{a\}$ и $\emptyset \operatorname{non} \in S_1$. Значит, существует ультрафильтр в $P - \{a\}$ S такой, что $S \supset S_1$. Тогда $u_{a,S} \leqq u$.

3.9. Пусть $u \in \mathscr{B}$ и $\mathscr{S}$ – система атомов $v, v \leqq u$. Тогда $u = \bigvee\{v : v \in \mathscr{S}\}$ ($\bigvee$ из $\mathscr{C}$).

Доказательство. Пусть для $x \in P$ будет $T(x)$ системой ультрафильтров $S \supset \mathfrak{D}_u(x)$. Согласно 3.2a. $\mathfrak{D}_u(x) = \bigcap\limits_{S \in T(x)} S$. По формуле, приведенной в 2.1.

$$\bigvee_{x \in P,\, S \in T(x)} u_{x,S'} = u, \quad \text{где} \quad S' = \{X : X = Y - \{x\}, Y \in S\}.$$

3.10. (Замечание). $u_{x,S}$ является хаусдорфовой топологией тогда и только тогда, когда S – свободный фильтр. Если S – свободный ультрафильтр, то $u_{x,S}$ есть паракомпактная топология, не выполняющая в точке x первую аксиому счетности (S не имеет счетного базиса, см. [7], стр. 61, 4G).

3.11. Исследуем теперь антиатомы в $\mathscr{B}$, т. е. такие топологии u, что $u \leqq v < u^{**} \Rightarrow u = v$.

Пусть u – антиатом в $\mathscr{B}$. Пусть для $X \subset P$ $uX \neq X$, $uX \neq P$. Тогда, очевидно, должно быть $Y \operatorname{non} \subset uX \Rightarrow uY = P$, $Y \subset uX \Rightarrow uY = uX$. Тогда единственными замкнутыми множествами в пространстве (P, u) являются множества $\emptyset$, uX и P. Наоборот, каждая такая топология является антиатомом в $\mathscr{B}$. Из этого далее следует:

Каждая топология в $\mathscr{B}$, отличная от самой сильной топологии, является инфимумом определенного множества антиатомов.

3.12. В заключение этого отдела займемся топологиями $u \in \mathscr{B}$, для которых $x \in P \Rightarrow u(x) = x$, т. е. топологиями Куратовского. Множество всех топологий Куратовского обозначим через $\mathscr{K}$. $\mathscr{K}$ является полной подструктурой в $\mathscr{B}$. Максимальный элемент u^{***} определен следующим образом: $u^{***}(X) = X$ для конечного X, иначе $u^{***}X = P$. Минимальной топологией является v^{**}. v представляет собой атом в $\mathscr{K}$ точно тогда, когда это хаусдорфов атом в $\mathscr{B}$.

3.13. Легко можно видеть, что u является антиатомом в $\mathscr{K}$ именно тогда, когда существует точка a так, что замкнутыми множествами в u являются конечные множества, пустое множество, P и $P - \{a\}$. Пусть P бесконечно и пусть M — бесконечное подмножество в P с бесконечным дополнением. Пусть v — топология, в которой являются замкнутыми следующие множества: пустое множество, конечные множества, P, M и множества вида $M \cup K$, где K — конечное множество. Очевидно, что над v нет никакого антиатома из $\mathscr{K}$.

IV

4.1. В этом отделе мы будем заниматься наименьшей полной подструктурой $\mathscr{B}_1$ в $\mathscr{C}$ над $\mathscr{B}$. Мы покажем, что $\mathscr{B}_1 = \mathscr{C}$.

Доказательство. Пусть u — топология из $\mathscr{C}$. Пусть $\emptyset \neq M \subset P$ и пусть X такое множество, что $uM \supset X$, $X \text{ non} \supset M$ (такое множество X всегда существует, например, $\emptyset$). Определим топологию $u_{M,X}$ следующим образом (положим для краткости $u_{M,X}Y = \overline{Y}$): $Z \subset uM$, $Z \subset X \Rightarrow \overline{Z} = Z$; $Z \subset uM$, $Z \text{ non} \subset X \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{Z} = uM$; иначе $\overline{Z} = (Z - uM) \cup \overline{Z \cap uM}$ (эта формула, очевидно, справедлива для всех $Z \subset P$). Сразу же видно, что $\overline{\emptyset} = \emptyset, Z \subset \overline{Z}, Z_1 \subset Z_2 \Rightarrow \overline{Z}_1 \subset \overline{Z}_2$. Покажем, что $\overline{\overline{Z}} = \overline{Z}$. Если $Z \subset X$, то это очевидно, если $Z \subset uM$, $Z \text{ non} \subset X \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{Z} = uM$ и $\overline{uM} = uM$. Из этого тогда следует $\overline{\overline{Z}} = \overline{Z}$ и для оставшегося случая.

Теперь мы покажем, что $\overline{Z \cup U} = \overline{Z} \cup \overline{U}$. Если $Z \cup U \subset uM$, то или $Z \cup$ $\cup\, U \subset X$ и тогда $\overline{Z \cup U} = Z \cup U = \overline{Z} \cup \overline{U}$, или выполняется по крайней мере одно из соотношений $Z \text{ non} \subset X$, $U \text{ non} \subset X$ и тогда $uM = \overline{Z \cup U} = \overline{Z} \cup \overline{U}$, так как или $\overline{Z} = uM$, или $\overline{U} = uM$. Из этого в общем случае вытекает $\overline{Z \cup U} =$ $= (Z \cup U - uM) \cup \overline{((Z \cup U) \cap uM)} = (Z - uM) \cup (U - uM) \cup \overline{(Z \cap uM) \cup}$ $\overline{\cup\, (U \cap uM)} = (Z - uM) \cup (U - uM) \cup \overline{(Z \cap uM)} \cup \overline{(U \cap uM)} = \overline{Z} \cup \overline{U}$. Следовательно, $u_{M,X} \in \mathscr{B}$.

Положим $u_M = \bigwedge u_{M,X}$ (пересечение берется по всем описанным X). Для u_M справедливо: в случае $X \subset uM$, $X \text{ non} \supset M \Rightarrow u_M X = X \subset uX$. Для $M \subset X \subset$ $\subset uM \Rightarrow u_M X = uM \subset uX$. Для $X = (X - uM) \cup (X \cap uM)$ в случае $X \cap$

$\cap uM \supset M$ будет $u_M X = (X - uM) \cup uM \subset uX$ или в случае $X \cap uM$ non $\supset M$ $u_M X = X \subset uX$. Значит, $u_M \leqq u$, и при этом $u_M M = uM$. Следовательно, $\bigvee\limits_{M \subset P} u_M = u$. Этим теорема доказана.

4.2. Теперь будем заниматься подструктурой, порожденной всеми псевдометризуемыми топологиями.

4.2a. (Определение). Пусть для u будет $x \in P \Rightarrow \{y \in u(x) \Rightarrow x \in u(y)\}$. Тогда мы назовем u B^*-топологией ([9], стр. 48). Положим $\mathscr{C}_1 = \{u : u \in \mathscr{C}$ и u — B^*-топология$\}$.

4.3. $\mathscr{C}_1$ является полной подструктурой в $\mathscr{C}$.

Доказательство вытекает сразу же из 2.4. и 2.5. в [9].

4.4. Пусть $\mathfrak{M}$ — система всех псевдометризуемых топологий на P. Тогда $\mathfrak{M} \subset \mathscr{C}_1$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathfrak{M}$, пусть μ — псевдометрика, образующая топологию u. Тогда

$$x \in u(y) \Rightarrow \mu(x, y) = 0 \Rightarrow y \in u(x)\,.$$

Итак, u является B^*-топологией.

4.5. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — полная подструктура в $\mathscr{C}$, порожденная $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}_1 = \mathscr{C}_1$.

Доказательство. Согласно 4.3. $\mathscr{C}_1$ есть подструктура в $\mathscr{P}$ и $\mathfrak{M} \subset \mathscr{C}_1$ (по 4.4). Следовательно, достаточно доказать, что $\mathfrak{M}_1 \supset \mathscr{C}_1$.

Пусть сначала $u \in \mathscr{C}^* \cap \mathscr{C}_1$, т. е. пусть u тотально неприводима в $\mathscr{C}$ и пусть это B^*-топология. Если $u = v^{**}$, то μ — метризуемая топология и поэтому $u \in \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$.

Пусть $u \neq v^{**}$. Согласно утверждению (T) на стр. 19 существует множество $X_0 \neq \emptyset$ и точка a так, что $uX = X \cup \{a\}$ для $X \supset X_0$, $uX = X$ в остальных случаях.

Покажем, что X не является одноточечным множеством. Если бы это было так и, следовательно, $X = \{b\}$, то было бы $u(b) = \{a, b\}$, $u(a) = a$. При этом $u \neq v^{**} \Rightarrow a \operatorname{non} \in X \Rightarrow a \neq b$. Это противоречит условию, что u — B^*-топология.

Наоборот, ясно, что в каждой неприводимой топологии u, для которой X_0 из условия (T) не является одноточечным, одноточечные множества замкнуты и, следовательно, u есть B^*-топология.

Определим теперь к тотально неприводимой топологии u, отличной от v^{**}, следующую систему топологий u_b (X_0 и a взяты из (T) для u).

Пусть $b \in X_0$. Тогда u_b будет определена таким образом:

$$X \subset P,\ X \cap \{a, b\} \neq \emptyset \Rightarrow u_b X = X \cup \{a, b\}\,;$$
$$X \subset P,\ X \cap \{a, b\} = \emptyset \Rightarrow u_b X = X\,.$$

Топология u_b псевдометризуема. Достаточно положить $\mu(a, b) = \mu(b, a) = 0$, иначе $\mu(x, y) = 1$ и $\mu(x, x) = 0$ для $x \in P$, $y \in P$, $x \neq y$.

Пусть $u' = \bigwedge\limits_{b \in X_0} u_b$. Покажем, что $u' = u$. Пусть $X \subset P$. Тогда $u'X = \bigcap\limits_{b \in X_0} u_b X$. Пусть $X \supset X_0$. Тогда $u_b X = X \cup \{a\}$ для всех $b \in X_0$. Следовательно, $u'X = X \cup \{a\}$. Пусть $X_0 \operatorname{non} \subset X$. Тогда пусть $c \in X_0 - X$, $d \in X_0$, $d \neq c$ (d существует, так как X_0 не является одноточечным множеством).

Пусть $a \in X$. Тогда $u_c X = X \cup \{c\}$, $u_d X = X \cup \{d\}$, следовательно, $u_c X \cap u_d X = X$.

Пусть $a \operatorname{non} \in X$. Тогда $\{a, c\} \cap X = \emptyset$, и поэтому $u_c X = X$.

Итак, во всех случаях, когда $X_0 \operatorname{non} \subset X$, имеем $u'X = X$. Значит, в итоге $u' = u$, откуда $u \in \mathfrak{M}_1$.

Пусть теперь u — произвольная топология из $\mathscr{C}_1$, отличная от v^{**}. Пусть M — произвольное непустое подмножество в P и $m \in uM$. Определим топологии $u_{M,m}$ следующим образом:

1. Пусть M не является одноточечным множеством. Тогда $u_{M,m}$ определена так:

$$X \supset M \Rightarrow u_{M,m} X = X \cup \{m\}\,, \quad \text{иначе} \quad u_{M,m} X = X\,.$$

Значит, $u_{M,m}$ или совпадает с v^{**}, или принадлежит $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}^*$, т. е. согласно предыдущему принадлежит $\mathfrak{M}_1$.

2. Пусть M — одноточечное множество, значит, $M = \{m_1\}$. Топологию $u_{M,m}$ определим теперь следующим образом:

$$X \subset P,\ X \cap \{m, m_1\} \neq \emptyset \Rightarrow u_{M,m} X = X \cup \{m, m_1\}\,;$$
$$X \subset P,\ X \cap \{m, m_1\} = \emptyset \Rightarrow u_{M,m} X = X\,.$$

Сразу же видно, что $u_{M,m} \in \mathfrak{M}$. Покажем, что $u_{M,m} \leqq u$. Пусть $X \subset P$, $X \cap \{m, m_1\} \neq \emptyset$. Если $m_1 \in X$, то $m \in u(m_1)$ и, следовательно, $\{m_1, m\} \subset uX$. Пусть $m \in X$. Так как $m \in u(m_1)$ и u является B^*-топологичей. то также $m_1 \in u(m)$ и, следовательно, $m_1 \in uX$, откуда $\{m_1, m\} \subset uX$. Итак, всегда $u_{M,m} X \subset uX$, откуда $u_{M,m} \leqq u$.

Пусть $u_M = \bigvee\limits_{m \in uM} u_{M,m}$. Имеем $u_M \in \mathfrak{M}_1$. Пусть $m_1 \in uM$. Тогда $m_1 \in u_{M,m_1} M$. Значит, $u_M M = uM$. Отсюда $\bigvee\limits_{M \subset P, M \neq \emptyset} u_M = u$ и, следовательно, $u \in \mathfrak{M}_1$. Ввиду того, что u была произвольной топологией из $\mathscr{C}_1$, отличной от v^{**} и $v^{**} \in \mathfrak{M}_1$, будет $\mathfrak{M}_1 \supset \mathscr{C}_1$, ч. т. д.

4.6. Теперь мы построим такую топологию u, для которой справедливо утверждение, что класс гомеоморфных с u топологий порождает в структуре $\mathscr{P}$ систему $\mathscr{C}$. С этой целью вернемся к рассуждениям из 3.8. и дальше.

Пусть $x \in P$. Пусть S – главный ультрафильтр в $P - \{x\}$ пусть $\{b\} = \bigcap_{X \in S} X$ и $u_{x,S}$ – топология, описанная в 3.8. Мы покажем, что именно эта топология обладает требуемым свойством.

Пусть $M \subset P$, $\{x\} \subsetneqq M \subset P$. Определим топологию $u^{(M,x)}$ так: $\mathfrak{D}_{u(M,x)}(x) = \{X : M \subset X \subset P\}$, $\mathfrak{D}_{u(M,x)}(y) = \{X : X \subset P, y \in X\}$ для $y \neq x$.

Пусть F система всех таких перестановок f множества P, для которых $f(x) = x$, $f(b) \in M$. Тогда

$$\bigvee_{f \in F} f \circ u_{x,S} = u^{(M,x)} .$$

Далее справедливо

4.7. Пусть u_{x,S_1} – топология, определенная в 3.8., причем S_1 – ультрафильтр в $P - \{x\}$. Пусть топологии $u^{(M,x)}$ представляют топологии, определенные в 4.6. (для фильтра S, там выбранного). Тогда

$$u_{x,S_1} = \bigwedge u^{(M,x)} .$$

где пересечение относится ко всем $M \in \mathfrak{D}_{u_{x,S_1}}(x)$. Отсюда и далее из теорем 3.8 и 4.1. вытекает

4.8. Пусть $T \in R$, причем $u_{x,S} \in T$. Пусть T_1 – полная подструктура, порожденная T в $\mathscr{P}$. Тогда $T_1 = \mathscr{C}$.

Литература

[1] *P. Alexandroff — H. Hopf:* Topologie. Berlin 1935.
[2] *B. Banaschewski:* Über den Ultrafilterraum. Math. Nach. *13* (1955), 273—282.
[3] *G. Birkhoff:* Lattice Theory. Москва 1952 (русский перевод).
[4] *G. Birkhoff*: Rings of sets. Duke Math. Journal *3* (1937), 443—454.
[5] *N. Bourbaki:* Topologie générale, p. 1. II. vyd. (Paris (1951).
[6] *E. Čech:* Topologické prostory. Čas. pro pěst. mat. *67* (1938), D. 225—264.
[7] *L. Gillman - M. Jerison:* Rings of continuous functions. Princeton 1960.
[8] *J. Kelley:* General Topology. New York 1955.
[9] *K. Koutský - M. Sekanina:* On the R-Modification and Several other Modifications of a Topology. Publ. Fac. Sci. Univ. Brno, No 410, 45—64.
[10] *K. Koutský - V. Polák - M. Sekanina:* On the Commutativity of the Modifying. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno No. 454,275—292 (1964).
[11] *K. Koutský:* Určenost topologických prostorů pomocí úplných systémů okolí bodů. Spisy přír. fak. MU, č. *374* (1956), 1—11.
[12] *H. J. Kowalski:* Topologische Räume, Basel und Stuttgart 1960.
[13] *K. Kuratowski - A. Mostowski:* Teoria mnogosci. Warszawa 1952.

[14] *F. Neuman - M. Sekanina:* Equivalent Systems of sets. Чех. мат. журнал, печатается.
[15] *M. Novotný:* Über isotone Funktionale geordneter Mengen. Zeitschrift für mat. Logik und Grundlagen der Math., *5* (1959), 9—28.
[16] *B. Pospíšil:* Sur le nombre des topologies d'une ensemble donné. Čas. pro pěst. mat. *67* (1938), 100—102.
[17] *G. N. Raney:* Completely Distributive Complete Lattices. Proc. Am. Math. Soc. *3* (1952), 677—680.
[18] *J. Schmidt:* Beiträge zur Filtertheorie I. Math. Nachrichten *7* (1952), 259—378.
[19] *J. Schmidt:* Beiträge zur Filtertheorie II. Math. Nachrichten *10* (1953), 197—232.
[20] *A. Tarski:* Zur Grundlegung der Booleschen Algebra. Fundamenta Mat. *24* (1935), 177—198.

Summary

SYSTEMS OF TOPOLOGIES ON A GIVEN SET

MILAN SEKANINA, Brno

In present paper there are studied the systems of topologies on a set P with regard to usual ordering of these systems. There is given an algebraic characterisation of system of topologies u satisfying following axioms $u\emptyset = \emptyset$, $X \subset uX$, $X \subset Y \Rightarrow \Rightarrow uX \subset uY$. Some results deal with the smallest understructures generated by a class of homeomorphic topologies.