Bohumil Cenkl
Sur la transformation linéarisante

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 4, 509–526

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100637

Чехословацкий математический журнал, т. 14 (89) 1964, Прага

SUR LA TRANSFORMATION LINÉARISANTE

Bohumil Cenkl, Praha

(Reçu le 15 juin 1962)

Dans le présent travail on généralise les transformations linéarisantes de Čech aux espaces fibrés à connexion et à des variétés générales.

La théorie des correspondances entre deux espaces projectifs de même dimension était développée, dans le dernier temps, surtout par Čech, Villa, Vaona, Murachini, Vrănceanu et d'autres. On étudiait les correspondances existant entre des espaces projectifs, affines, euclidiens; certains résultats ont été transportés à ce qu'on appelle variétés de König à connexion projective (voir [6]). Dans le présent travail, nous étudions les correspondances existant entre deux expaces fibrés $E(B, F, G, P)$, $E'(B', F', G', P')$ à connexion, associés aux espaces fibrés principaux $P(B, G)$, $P'(B', G')$, où les bases B, B' sont des variétés différentiables de même dimension, F est une variété différentiable, G un groupe de Lie opérant transitivement sur F, G' un sous-groupe de G laissant invariante une sous-variété F' de F. La correspondance qui existe entre E et E' se réduit à une application différentiable de F dans F. C'est pourquoi nous introduisons dans la première partie de notre travail une généralisation des transformations linéarisantes au cas de correspondances existant entre deux variétés différentiables de même dimension, sur lesquelles opère transitivement un groupe de Lie. Nous discutons ensuite les rapports, mentionnés ci-dessus, de ces transformations à la correspondence existant entre E et E'. Enfin, nous montrons que pour une certaine spécialisation nous obtenons de ceci la théorie déjà bien connue des correspondances entre deux espaces affines de même dimension.

1. Soient données deux variétés différentiables à n dimensions, X_n et $'X_n$, et une correspondance C (c'est-à-dire un homéomorphisme différentiable) entre $'X_n$ et X_n. Soit ensuite donné un certain ensemble Σ d'applications bi-univoques et différentiables de la variété X_n sur $'X_n$. Dans cette partie de notre travail, nous allons montres comment et sous quelles hypothèses il est possible de définir une transformation Σ-linéarisante généralisée, de la correspondance C. (A propos de toutes les fonctions considérées dans ce travail nous supposerons qu'elles sont de classe C^r, $r > 1$.) Au voisinage U, ou $'U$ resp., d'un point x_0, ou $'x_0$, sur la variété X_n, ou resp. $'X_n$, ayons les coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$, ou encore $('x^1, \ldots, 'x^n)$ telles que $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n$, et $'x_0 = ('x_0^1, \ldots, 'x_0^n)$. La correspondance C soit donnée, en coordonnées locales, par les formules

$$(1) \qquad 'x^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n)\,, \quad x^i = \psi^i('x^1, \ldots, 'x^n)\,,$$

où l'on a

$$(2) \qquad 'x_0^i = \varphi^i(x_0^1, \ldots, x_0^n)\,, \quad x_0^i = \psi^i('x_0^1, \ldots, 'x_0^n)\,.$$

Nous écrirons tout bref $'x = \varphi(x)$, $x = \psi('x)$ et nous appliquerons une notation analogue dans ce qui suit aussi. En coordonnées locales, une application $k \in \Sigma$ sera notée comme

$$(3) \qquad 'x^i = k^i(x^1, \ldots, x^n)\,, \quad x^i = h^i('x^1, \ldots, 'x^n)\,,$$

k sera toujours choisie dans Σ de façon à ce que l'on ait

$$(4) \qquad 'x_0^i = k^i(x_0^1, \ldots, x_n^0)\,, \quad x_0^i = h^i('x_0^1, \ldots, 'x_0^n)\,.$$

Evidemment, $\{(\partial/\partial' x^1), \ldots, (\partial/\partial' x^n)\}$ est une base du F-module de champs vectoriels sur $'X_n$, d'une manière analogue $\{(\partial/\partial x^1), \ldots, (\partial/\partial x^n)\}$ est une base du F-module de champs vectoriels sur X_n. (F est l'ensemble des fonctions réelles sur la variété en question.) Supposons que nous ayons, sur la va variété $'X_n$, un champ vectoriel $'V$:

$$(5) \qquad 'V('x) = v^i('x)\,\frac{\partial}{\partial' x^i}\,.$$

La correspondance C nous détermine alors sur X_n le champ vectoriel $V = (\mathrm{d}C)\,'V$ correspondant au champ vectoriel $'V$ de la variété $'X_n$ par la transformation $\mathrm{d}C$ (différentielle de la transformation C). Nous avons donc

$$(6) \qquad \{(dC)\,'V\}_x = v^i(\varphi(x))\left(\frac{\partial\psi^j}{\partial' x^i}\right)_{'x=\varphi(x)} \frac{\partial}{\partial x^j} = V(x)\,.$$

L'image du champ vectoriel V de la variété X_n par une transformation $k \in \Sigma$ de la variété X_n sur $'X_n$ est un champ vectoriel $''V('x)$ sur la variété $'X_n$; $''V('x) = (\mathrm{d}k)\,V(x)$.

$$(7) \qquad ''V('x) = v^i(\varphi^i(h('x)))\left(\frac{\partial\psi^j}{\partial' x^i}\right)_{\varphi(h('x))} \left(\frac{\partial k^l}{\partial x^j}\right)_{h('x)} \frac{\partial}{\partial' x^l}\,.$$

Ecrivons sommairement

$$(8) \qquad A_i^k('x) = \left(\frac{\partial\psi^j}{\partial' x^i}\right)_{\varphi(h('x))} \left(\frac{\partial k^k}{\partial x^j}\right)_{h('x)}\,.$$

---

[1]) Les indices i, j, k prennent les valeurs $1, 2, \ldots, n$.

On voit que l'on a

$$(9)\qquad ['V, ''V]('x) = v^i('x)\, v^j(\varphi(h('x))) \left(\frac{\partial A_j^k}{\partial' x^i}\right)_{'x} \frac{\partial}{\partial' x^k} +$$

$$+ v^i('x) \left(\frac{\partial v^j}{\partial' x^i}\right)_{\varphi(h('x))} A_j^k('x) \frac{\partial}{\partial' x^k} - v^i(\varphi(h('x))) \left(\frac{\partial v^j}{\partial' x^k}\right)_{'x} A_i^k('x) \frac{\partial}{\partial' x^j} \,.$$

Soit $'x_t : 'x_t^i = 'x^i(t)$, $-1 \leqq t \leqq 1$, $'x_0^i = 'x^i(0)$, une courbe dans $'U$ sur $'X_n$ passant par le point $'x_0$. La correspondance C associe à la courbe $'x_t$ la courbe $x_t = C'x_t$: : $x_t^i = x^i(t)$, $-1 \leqq t \leqq 1$, $x_0^i = x^i(0)$ dans U sur X_n passant par le point x_0. Par la transformation $k \in \Sigma$ nous obtenons de la courbe x_t sur X_n une courbe $'y_t = kx_t$ sur $'X_n$.

Définition. Nous disons d'une transformation $k \in \Sigma$ qu'elle est *transformation tangente a la correspondance* C au point $'x_0$, lorsque les courbes $'x_t$ et $'y_t = kC'x_t$ ont au point commun $'x_0$ un contact de premier ordre pour n'importe quel choix de la courbe $'x_t$ dans $'U$ sur $'X_n$, passant par le point $'x_0$.

Supposons ensuite que l'ensemble Σ d'applications biunivoques différentiables soit tel qu'il n' existe pas de $k_0 \in \Sigma$ pour laquelle les courbes $'x_t$ et $'y_t = k_0C'x_t$ aient un contact du deuxième ordre en $'x_0$ pour toutes les courbes $'x_t$ passant par le point $'x_0$.

Dans notre cas, nous avons

$$(10)\qquad \begin{aligned} x_t^i &= \psi^i('x_t^1, \ldots, 'x_t^n)\,, & x_0 &= \psi('x_0)\,,\\ 'y_t^i &= k^i(\psi^j('x_t^1, \ldots, 'x_t^n))\,, & 'y_0 &= 'x_0 = k(\psi(x_0))\,. \end{aligned}$$

Nous voyons donc que la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes $'x_t$, $'y_t$ aient un contact du premier ordre en x_0 est que l'on ait

$$(11)\qquad \left(\frac{\partial k^j}{\partial x^j}\right)_{x_0} \left(\frac{\partial \psi^i}{\partial' x^k}\right)_{'x_0} = \delta_k^j \,.$$

Si donc une transformation $k_\Sigma \in \Sigma$ est tangente à la correspondance C au point x_0, nous avons manifestement, en vertu de (9) et (11)

$$(12)\qquad L('x_0) = L_{V'}('x_0) = ['V, ''V]('x_0) = v^i('x_0)\, v^j('x_0) \left(\frac{\partial A_j^k}{\partial' x^i}\right)_{'x_0} \left(\frac{\partial}{\partial' x^k}\right).$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Soit $'V$ un champ vectoriel sur la variété $'X_n$. Alors la correspondance C existant entre $'X_n$ et X_n et la Σ-transformation k_Σ tangente en x_0 à la correspondance C associent au vecteur $'V('x_0)$ le vecteur $L('x_0)$ (cf. (12)). Cette application est une transformation quadratique définie sur l'ensemble des vecteurs $T('x_0)$ tangents à la variété $'X_n$ en $'x_0$, et qui ne dépend pas du champ vectoriel $'V$ sur $'X_n$ mains seulement du vecteur $'V('x_0)$.*

Définition. La transformation $\mathscr{L}$: $'V('x_0) \to L('x_0)$ sera appelée *transformation k_Σ-linéarisante* de la correspondance C.

Remarque. Sur l'ensemble des vecteurs $T('x_0)$ tangents à la variété $'X_n$ en $'x_0$, nous définissons le produit de deux vecteurs $'A$, $'B$ par la formule

$$ 'A \square 'B = \tfrac{1}{2}['A''B] + \tfrac{1}{2}['B''A] . \tag{13} $$

De cette façon, $T('x_0)$ devient une algèbre commutative, appelée k_Σ-algèbre de Čech associée à la correspondance C. Si $A = B$, nous avons évidemment $A \square A = L_A$. Il est clair que le théorème donné, en liaison avec l'algèbre de Čech, nous donne une généralisation de la notion de transformation linéarisante, introduite et étudiée en détail dans les travaux [2], [3], [7].

2. Tant que nous considérons des variétés différentiables à n dimensions X_n, $'X_n$, sur lesquelles opère transitivement à gauche un groupe de Lie G, nous pouvons définir l'algèbre de Čech d'une façon un peu différente. Supposons donc que nous ayons deux variétés différentiables à n dimensions X_n et $'X_n$, sur lesquelles opère transitivement à gauche un groupe de Lie G. Soit H un sousgroupe fermé de G qui laisse invariant un certain point fixe $x_0 \in X_n$ et $'x_n \in 'X_n$. Supposons ensuite, que la variété homogène G/H soit réductible, c'est-à-dire qu'il existe un sousespace M de l'algèbre de Lie G du groupe de Lie G, tel que $G = H + M$ avec $\operatorname{adj}(H)\, M \subset M$. (Ici H est l'algèbre de Lie du groupe H.) Soit ω la 1-forme d'une connexion linéaire cannonique G-invariante sur G/H (voir [5]). Soit C un homéomorphisme différentiable de $'X_n$ sur X_n tel que $x_0 = C'x_0$. Au voisinage U du point x_0 sur X_n et au voisinage $'U$ du point $'x_0$ sur $'X_n$ ayons les coordonnées locales $(x^1, \ldots, x^n)$, $('x^1, \ldots, 'x^n)$, – cf. la partie 1 de notre travail. L'homéomorphisme C est donné, en coordonnées locales, par les équations (1.1), (1.2). Ecrivons la transformation de la variété X_n, donnée par un élément a du groupe G, en coordonnées locales:

$$ y^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n; \lambda_1, \ldots, \lambda_r) , \tag{1} $$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les paramètres du groupe G. Soit g la transformation donnée par l'équation

$$ 'x^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n; \lambda_1, \ldots, \lambda_r) . \tag{2} $$

g est une application de X_n sur $'X_n$ telle que $y^i = \varphi^i(x, \lambda)$ est une application de la variété X_n sur elle-même donnée par un élément du groupe G. Supposons qu'il existe des constantes $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_r^0$ telles que $'x_0^i = \varphi^i(x_0^1, \ldots, x_0^n; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_r^0)$. Au lieu d'écrire la transformation g_0 sous la forme

$$ 'x^i = \varphi^i(x^1, \ldots, x^n; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_r^0) \tag{3} $$

nous notons les transformations g_0 et g_0^{-1} par

$$ 'x^i = p^i(x^1, \ldots, x^n) , \quad x^i = q^i('x^1, \ldots, 'x^n) . \tag{4} $$

Sur la variété $'X_n$ ayons un champ vectoriel $'V$(1.5). La correspondance C détermine alors sur X_n le champ vectoriel V (1.6). La transformation g_0 de X_n sur $'X_n$ nous donne pour l'image du champ vectoriel V sur X_n le champ vectoriel

$$(5) \qquad ''V('x) = v^i(\varphi(q('x))) \left(\frac{\partial\psi^j}{\partial' x^i}\right)_{\varphi(q('x))} \left(\frac{\partial p^k}{\partial x^j}\right)_{h('x)} \frac{\partial}{\partial' x^k}\,.$$

Lorsque nous nous bornons à deux voisinages suffisamment petits U, $'U$ des points x_0, $'x_0$ respectivement, donnés sur les variétés X_n, ou $'X_n$, et que nous prenons un point $'x_1 \neq 'x_0$ dans $'U$, alors il existe $\lambda = \lambda('x_1) \in M$ tel que l'on a ceci: Soit $g_0(s)$ le sous-groupe à un paramètre du groupe G donné par l'élément λ, alors $'x(s) = g(s)\,'x_2$, $'x_2 = p(\psi('x_1))$ est une géodésique sur $'X_n$; s est un paramètre affine sur cette courbe et il existe $s('x_1) = s_0$ tel que $'x(s_0) = 'x_1$. Le transport parallèle le long de $'x(s)$ est équivalent à l'opération correspondant à l'élément $g(s)$ du sous-groupe à un paramètre du groupe G [5]. Le transport parallèle du vecteur $''V('x_1)$ le long de la géodésique $'x(s)$ au point $'x_1$ nous donne le vecteur $K_{'V}('x_1) = K('x_1)$,

$$(6) \qquad K('x_1) = v^i(x_1) \left(\frac{\partial\psi^k}{\partial' x^i}\right)_{'x_1} \left(\frac{\partial p^l}{\partial x^k}\right)_{q(\kappa^{-1}(x_1))} \left(\frac{\partial\kappa^j}{\partial' x^l}\right)_{'x_1} \frac{\partial}{\partial' x^j}\,,$$

où la transformation de la variété $'X_n$ correspondant à l'élément $g(s) \in G$ est écrite en coordonnées locales comme

$$(7) \qquad 'y^i = \kappa^i('x^1, \ldots, 'x^n;\ 'x_1;\ s)$$

avec $'x_1^i = \kappa^i('x_2^1, \ldots, 'x_2^n;\ 'x_1;\ s_0)$. La transformation $g(s_0)$ sur $'X_n$ est donc donnée par les équations

$$(8) \qquad 'y^i = \kappa^i('x^1, \ldots, 'x^n;\ 'x_1;\ s_0) = \kappa_0^i('x^1, \ldots, 'x^n)\,.$$

Nous avons maintenant sur $'X_n$ deux champs vectoriels: $'V$ et $K_{'V}$. Si nous écrivon pour simplifier

$$(9) \qquad \left(\frac{\partial\psi^k}{\partial' x^i}\right)_{'x_1} \left(\frac{\partial p^l}{\partial x^k}\right)_{x(\kappa^{-1}(x_1))} \left(\frac{\partial\kappa^j}{\partial' x^l}\right)_{'x_1} = B_i^j('x_1)\,,$$

il sera aisé de faire voir que nous avons

$$(10) \qquad ['VK_{'V}]('x) = v^i('x)\, v^k('x) \frac{\partial B_k^j}{\partial' x^i} \frac{\partial}{\partial' x^j} + \left(B_k^j \frac{\partial v^k}{\partial' x^i} - B_i^k \frac{\partial v^j}{\partial' x^k}\right) v^i('x) \frac{\partial}{\partial' x^j}\,.$$

Soit $\lambda_0 = \lim\limits_{x_1 \to 'x_0} \lambda('x_1)$ et soit $a(s) \in G$ le sous-groupe à un paramètre du groupe G correspondant au point $\lambda_0 \in M$. Soit $a(r_0)$ la transformation du sous-groupe à un paramètre précité telle que $'x_0 = a(r_0)\,'x_0$. On a évidemment $a(r_0) = s('x_0) = e$ (e étant l'élément unité du groupe G). Nous arrivons donc immédiatement à l'énoncé suivant: Soit $g(s)$ le sous-groupe à un paramètre du groupe G correspondant à un élément $\lambda('x_1) \in M$ et soit $\lambda_0 = \lim_{'x_1 \to 'x_0} \lambda('x_1)$, alors $a(r_0) = \lim_{'x_1 \to 'x_0} g(s_0)$ où $a(s)$ est le sous-groupe à un paramètre correspondant à l'élément $\lambda_0 \in M$. Ecrivons maintenant $g(s_0)$ au lieu de (8) sous la forme de

$$(11) \qquad 'y^i = 'x_1^i + ('x^i - 'x_2^i)\left(\frac{\partial \kappa^i}{\partial' x^j}\right)_{'x_2 = p(\psi('x_1)))} + \dots .$$

La transformation correspondant à l'élément $a(r_0)$ peut donc être écrite sous la forme suivante

$$(12) \qquad 'y^i = 'x^i \left(\frac{\partial \kappa^i}{\partial' x^j}\right)_{'x_0} + 'x^i - 'x_0^j \left(\frac{\partial \kappa^i}{\partial' x^j}\right)_{'x_0} + \dots .$$

Nous voyons donc que l'on a

$$(13) \qquad \left(\frac{\partial \kappa^i}{\partial' x^j}\right)_{'x_0} = \delta_j^i, \quad \left(\frac{\partial^2 \kappa^i}{\partial' x^k \partial' x^j}\right)_{'x_0} = 0, \dots .$$

Supposons ensuite que la transformation g_0 de la variété X_n sur $'X_n$ soit une transformation tangente à la correspondance C au point $'x_0$. Pour cela, il faut évidemment et il suffit, que l'on ait

$$(14) \qquad \left(\frac{\partial p^i}{\partial x^k} \frac{\partial \psi^k}{\partial' x^j}\right)_{'x_0} = \delta_j^i .$$

Nous avons donc et vertu de (13), (14)

$$(15) \qquad ['V, K_{'V}]('x_0) = v^i('x_0)\, v^k('x_0) \left\{\frac{\partial}{\partial' x^i}\left(\frac{\partial \psi^l}{\partial' x^k} \frac{\partial p^j}{\partial x^l}\right)\right\}_{'x_0} \frac{\partial}{\partial' x^j} .$$

Le théorème de la première partie de notre travail est ainsi démontré une fois de plus, cette fois-ci pour des variétés sur lesquelles opère un groupe de Lie G, la transformation $k_\Sigma \in \Sigma$ étant un élément du groupe de Lie. De plus, on a manifestement:

Théorème. *Le champ vectoriel $''V$ sur $'X_n$ peut, dans le cas de variétés réductibles homogènes, être remplacé par le champ vectoriel $K_{'V}$ sur $'X_n$, sans que cela change l'algèbre de Čech en question.*

3. Dans cette partie de notre travail nous allons étudier une généralisation de la théorie des correspondances au cas des variétés fibrées à connexion. Etant donnée une application différentiable C (une correspondance) de $E(B, F, G, P)$ sur $E'(B', F', G', P')$ (F' est une sous-variété de F et G' un sous-groupe du groupe de Lie G), il est possible de lui associer un homéomorphisme C' de la variété fibrée principale P sur P'. A l'aide de développement d'une courbe de la base sur le fibre type, il est possible de remplacer la transformation C de la variété E sur E' par une transformation C'' du fibre type sur lui-même. Comme un groupe de Lie opère sur le fibre type, il est possible de définir, d'une manière analogue à celle des paragraphes précédents, une algèbre de Čech sur le fibre type. Cette algèbre sera alors appelée algèbre de Čech associée à la correspondance C entre les deux espaces fibrés E et E'.

Soit $P(B, G)$ une variété fibrée principale. La variété différentiable à n dimensions B est la base de la variété P, le groupe de Lie G est son groupe structurel. L'application différentiable $\pi\colon P \to B$ soit une projection canonique. Soit ensuite $E(P, B, F, G, p)$ une variété fibrée, associée à la variété fibrée principale $P(B, G)$. Nous parlons alors d'une variété fibrée associée E, de base B, de fibre type F, et de groupe structurel G. Soit F une variété différentiable sur laquelle le groupe G opère à gauche. Sur la variété $P \times F$, le groupe G opère à droite suivant la régle: $(x, \xi) \in P \times F \to \to (x, \xi)\, a = (xa, a^{-1}\xi)$. Nous considérons donc maintenant E comme la variété $(P \times F)/G$. Notons (x, ξ) la classe des points G-équivalents de $P \times F$ à laquelle le point (x, ξ) appartient. Nous pouvons alors définir une projection canonique par l'équation $p(x, \xi) = \pi(x)$. Le fibre $p^{-1}(u) = Fu$, $u \in B$ est l'ensemble des éléments (x, ξ) de E, avec $x \in P$, $\pi(x) = u$, ξ étant un point arbitraire de la variété F.

Sur la variété E définissons une opération P_a:

$$P_a(x, \xi) = (x, \xi)\, a = (x, a\xi) = (xa^{-1}, \xi)\,; \quad a \in G\,.$$

Nous dirons que G opère sur E à l'aide de l'opération P_a.

Supposons maintenant que nous ayons deux variétés différentiables à n dimensions, B et B', et soient $P(B, G)$, $P'(B', G')$ deux variétés fibrées principales de bases B, B', et de groupe structurel G (G' est un sous-groupe de G), soient π, π' les deux projections canoniques correspondantes. Soient $E(P, B, F, G, p)$, $E'(P', B', F', G', p')$ deux variétés fibrées associées à P, P' resp. Supposons que G opère transitivement à gauche sur la variété différentiable F. F' est la sousvariété de la variété F qui reste invariante par les transformations d'un sous-groupe G' du groupe de Lie G. Soit f une application différentiable de E sur E' telle que

$$f(P_a w) = P_{a'} f(w) \tag{1}$$

où $w = (x, \xi)$, $a \in G$, $a' = \varrho(a)$, ϱ étant un homomorphisme $\varrho : G \to G'$. Soit φ l'homéomorphisme différentiable de B sur B' induit par l'application f et par les applications p et p' de façon à avoir $\varphi \circ p = p' \circ f$. Soit U un voisinage d'un point $\mu_0 \in B$ de coordonnées $(u^1, \ldots, u^n)$; d'une manière analogue, dans le voisinage $V = \varphi(U)$ du point $v_0 = \varphi(u_0)$ sur B' ayons les coordonnées $(v^1, \ldots, v^n)$.

Définition. *Deux coupures* $r(u)$, $s(u)$ sur U de la variété $P(B, G)$ *seront dites équivalentes* s'il existe $a \in G$ tel que $r(u)\, a = s(u)$.

Soit z_1 une coupure de la variété P sur U. A ce voisinage U nous associons un point $\xi \in F'$ choisi arbitrairement; alors $(z_1(u), \xi) = w_1(u)$ est une coupure de la variété E. Soit $w_2(v)$ l'image de la coupure $w_1(u)$ par la transformation $f\colon E \to E'$. Il existe alors évidemment une coupure z_2 de la variété P sur V, telle que l'on ait

$w_2(v) = (z_2(v), \xi)$. Nous avons ainsi défini une application différentiable ψ de l'ensemble P des coupures sur U de la variété P sur l'ensemble P' des coupures sur V de la variété P'. Nous avons évidemment

$$(2) \qquad \psi(z(u)\, a) = \psi(z(u))\, a\,, \quad a \in G\,.$$

Il résulte immédiatement des considérations précédentes que le théorème suivant a lieu:

Théorème. *L'application ψ ne dépend pas du choix du point $\xi \in F'$.*

En effet prenons un autre point $\eta \in F'$, $\eta \neq \xi$, il existe alors $c \in G$ tel que $\eta = c\xi$ de sorte que $w_0(u) = (z_1(u), c\xi) = w_1(u)\, c$. Comme l'on a (1), on a $f(w_0(u)) = P_c(f(w_1(u))) = (z_2(v), c\xi)$.

Soit ω la forme de la connexion sur $P(B, G)$ et soit Θ la forme de la connexion sur $P'(B', G')$. Soit u_t, $-1 \leqq t \leqq 1$, une courbe sur B dans le voisinage U, soit $v_t = \varphi(u_t)$ la courbe correspondante sur B dans V. Choisissons maintenant une coupure $y(u)$ sur U de la variété P, soit y_t une courbe de la coupure $y(u)$ telle que $\pi(y_t) = u_t$. Supposons la courbe y_t non-horizontale. Soit $z_t = y_t\,.\,a_t$ la courbe horizontale sur u_t, où $a_t \in G$, $a_0 = e$; on a donc $a_1^{-1} a_0 = -\,\omega(y_0')$ (a_t' est le vecteur tangent à la courbe $a_t \in G$ dans le point qui correspond à la valeur t du paramètre; y_t' a une signification analogue.) La courbe a_t, $-1 \leqq t \leqq 1$ sera appelée développement de la courbe y_t de la coupure $y(u)$ sur le groupe G [4].

Définition. Si nous fixons un point $\xi \in F' \subset F$, nous appelons la courbe $a_t^{-1}\xi$ *de la variété F développement de la courbe u_t sur la variété F par le point ξ, la coupure $y(u)$ de P étant donnée.*

Si nous remplaçons la coupure $y(u)$ par une coupure équivalente $y(u)\, a$ (a étant un point fixe de G), le développement de u_t sur F par le point ξ pour la coupure $y(u)\, a$ sera la courbe $a^{-1} a_t^{-1} a\xi$, a_t étant le développement de y_t sur G. Lorsque au lieu de la coupure $y(u)$ nous prenons la coupure $y(u)\, \tau(u)$, $\tau(u) \in G$, $\tau(u_0) = e$, le développement de la courbe u_t par le point ξ sur F, pour cette coupure $y(u)\, \tau(u)$, sera la courbe $a_t^{-1}\tau_t\xi$. L'image de la courbe y_t de la coupure $y(u)$ par la transformation ψ sera une courbe x_t d'une coupure $x(v)$ sur V de la variété P'. Nous avons donc $b_t \in G$, $b_0 = e$, lorsque $b_0' b_0^{-1} = -\,\Theta(x_0')$ est le développement de la courbe x_t sur G. Dans ce cas-ci, nous comprenons par cela le développement sur $G' \subset G$. Associons maintenant à la courbe $a_t^{-1}\xi$ (développement de u_t sur F par le point ξ pour la coupure $y(u)$) la courbe $b_t^{-1}\xi$ qui est le développement de v_t sur F (proprement dit sur F') par le point ξ pour la coupure $x(u)$. Désignons par λ l'application $\lambda(a_t^{-1}\xi) = b_t^{-1}\xi$ de la variété F sur F' (au voisinage du point ξ) définie sur l'ensemble des développements de toutes les courbes, passant par le point u_0 sur B, sur la variété F par le point ξ et pour toutes les coupures sur U de la variété P. On a donc manifestement

Théorème. *Pour toute courbe u_t, $-1 \leqq t \leqq 1$, sur B passant par le point u_0 et pour n'importe quel point ξ sur F', l'application λ jouit des propriétés suivantes*:

$$(3) \qquad \text{a) } \lambda(c^{-1}a_t^{-1}c\xi) = c^{-1}b_t^{-1}c\xi \text{ pour tout point fixe } c \in G.$$

$$\text{b) } \lambda(a_t^{-1}\tau_t\xi) = b_t^{-1}\tau_t\xi, \; \tau_t \in G, \; -1 \leqq t \leqq 1, \; \tau_0 = e.$$

Démonstration. Soit $a_t^{-1}\xi$ le développement de la courbe $u_t \in B$ sur F par le point ξ pour la coupure $y(u)$. Si nous remplaçons la coupure $y(u)$ par la coupure $y(u)\,c$, $c \in G$, le développement correspondant à cette nouvelle coupure sera la courbe $c^{-1}a_t^{-1}c\xi$. En se rendant compte de (2), on voit que le développement de v_t sur F par le point ξ pour la coupure $x(v)\,c = \psi(y(u))\,c = \psi(y(u)\,c)$, c'est la courbe $c^{-1}b_t^{-1}c\xi$. D'une manière analogue on démontre que b) a lieu également.

Soit maintenant m la dimension de la variété F et soient $(\xi^1, \ldots, \xi^m)$ les coordonnées au voisinage d'un point $\xi_0 = (\xi_0^1, \ldots, \xi_0^m)$ sur F. Une courbe ξ_t est donc donnée par ses coordonnées locales $(\xi_t^1, \ldots, \xi_t^m)$, $-1 \leqq t \leqq 1$. A présent, nous pouvons définir le contact de deux courbes dans leur point commun sur la variété différentiable F comme suit:

Définition. Deux courbes ξ_t, η_t sur F ont dans leur point commun $\xi_0 = \eta_0$ un contact d'ordre s précisément, lorsqu'on a

$$(4) \qquad \left(\frac{\mathrm{d}^k\xi_t^i}{\mathrm{d}t^k}\right)_{t=0} = \left(\frac{\mathrm{d}^k\eta_t^i}{\mathrm{d}t^k}\right)_{t=0} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\; k = 0, 1, \ldots, s),$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^{s+1}\xi_t^i}{\mathrm{d}t^{s+1}}\right)_{t=0} \neq \left(\frac{\mathrm{d}^{s+1}\eta_t^i}{\mathrm{d}t^{s+1}}\right)_{t=0}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant concernant les propriétés du contact des développements des courbes de la base sur F:

Théorème. *Si les courbes $\xi_t = a_t\xi$, $\eta_t = b_t\xi$, $-1 \leqq t \leqq 1$, ont en $\xi_0 = \eta_0$ un contact d'odre précisement s, alors les courbes $\xi_t^{(2)} = a_t\tau_t\xi$, $\eta_t^{(2)} = b_t\tau_t\xi$, $\tau_t \in G$, $\tau_0 = e$, $-1 \leqq t \leqq 1$, et les courbes $\xi_t^{(1)} = c^{-1}a_tc\xi$, $\eta_t^{(1)} = c^{-1}b_tc\xi$, $c \in G$, $-1 \leqq t \leqq 1$, ont dans leur point commun un contact d'ordre s également.*

Démonstration. Une transformation du groupe G opérant transitivement sur F peut être écrite en coordonnées locales comme

$$(5) \qquad \xi'^i = \varphi^i(\xi^1, \ldots, \xi^m;\; \lambda^1, \ldots, \lambda^r) \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

où $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$ sont les paramètres du groupe G. La courbe a_t sur G passant par le point $e \in G$ sera donc écrite paramétriquement $\lambda^\kappa = a^\kappa(t)$, $\lambda_0^\kappa = a^\kappa(0)$, $(\kappa = 1, 2, \ldots, \ldots, r)$. D'une manière analogue $b_t : \lambda^\kappa = b^\kappa(t)$, $\lambda_0^\kappa = b^\kappa(0)$, $\tau_t : \lambda^\kappa = \tau^\kappa(t)$, $\lambda_0^\kappa = \tau^\kappa(0)$, où, bien entendu, $\xi^i = \Phi^i(\xi^j;\; \lambda_0^1, \ldots, \lambda_0^r)$ est l'application identique du voisinage du point $\xi_0 \in F$ sur lui-même. Le point $c \in G$ soit donné par $\lambda^\kappa = c^\kappa$. Les courbes ξ_t, η_t sur F passant par le point ξ_0 sur F peuvent maintenant s'écrire sous la forme

$$(6) \qquad \xi_t^i = \varphi^i(\xi_0^1, \ldots, \xi_0^m;\ a_t^1, \ldots, a_t^r)\ ; \quad \eta_t^i = \varphi^i(\xi_0^1, \ldots, \xi_0^m;\ b_t^1, \ldots, b_t^r)\,.$$

La condition nécessaire et suffisante pourque ξ_t et η_t aient en ξ_0 un contact d'ordre précisément s est, comme nous le savons bien, la vérification des équations (4). Il faut nous rendre compte ensuite que la transformation de F donnée par le point $c \in G$ peut être écrite en coordonnées locales comme

$$(7) \qquad \xi'^i = \varphi^i(\xi^1, \ldots, \xi^m;\ c^1, \ldots, c^r)$$

celle donnée par le point c^{-1} sera alors

$$(8) \qquad \xi'^i = \psi^i(\xi^1, \ldots, \xi^m;\ c^1, \ldots, c^r)\,.$$

Les courbes $\xi_t^{(1)}$, $\eta_t^{(2)}$ sur F, passant par le point ξ_0, sont données paramétriquement par

$$(9) \qquad \begin{aligned} \xi_t^{(1)i} &= \psi^i\{\varphi^j(\varphi^k(\xi_0, c);\ a_t);\ c\}\,, \\ \eta_t^{(1)i} &= \psi^i\{\varphi^j(\varphi^k(\xi_0, c);\ b_t);\ c\}\,. \end{aligned}$$

Nous écrivons donc, en coordonnées locales, les équations paramétriques des courbes $\xi_t^{(2)}$, $\eta_t^{(2)}$ comme

$$(10) \qquad \begin{aligned} \xi_t^{(2)i} &= \varphi^i\{\varphi^j(\xi_0, \tau_t),\ a_t\}\,, \\ \eta_t^{(2)i} &= \varphi^i\{\varphi^j(\xi_0, \tau_t),\ b_t\}\,. \end{aligned}$$

A partir des équations (4), (6), (9), (10) il est déjà aisé de déduire que dans le cas où les courbes ξ_t, η_t, ont en ξ_0 un contact d'ordre s précisement, les courbes $\xi_t^{(1)}$, $\eta_t^{(1)}$ et les courbes $\xi_t^{(2)}$, $\eta_t^{(2)}$ ont aussi en ξ_0 un contact d'ordre précisément s. Il est évident, que le contact des courbes ξ_t, η_t ne dépend pas du choix du point ξ_0 de la variété F.

Les considérations précédentes ont la conséquence que voici: Lorsque ξ_t est le dévéloppement d'une courbe u_t du voisinage U de la variété B sur la variété F par le point $\xi_0 \in F' \subset F$ pour n'importe quelle coupure sur U de la variété P, l'ordre du contact des courbes ξ_t et $\eta_t = \lambda(\xi_t)$ ne dépend ni du choix de la coupure de P sur U ni du choix du point $\xi_0 \in F' \subset F$. Si nous remplaçons, dans les considérations de la première partie du travail, l'homéomorphisme C de la variété $'X_n$ sur X_n par l'application λ, définie sur l'ensemble des développements de toutes les courbes u_t, $-1 \leqq t \leqq 1$, passant par le point u_0 de la variété B, sur la variété F par le point ξ_0 et que nous identifions le système Σ avec le groupe G opérant transitivement à gauche sur F, nous aurons (sous l'hypothèse qu'il existe un élément $g_0 \in G$ tel que la transformation correspondant au point g_0 du voisinage du point ξ_0 de la variété F sur lui-même soit une transformation tangente à l'application λ) au point ξ_0 de la variété F une algèbre de Čech et donc aussi une transformation g_0-linéarisante sur l'ensemble des vecteurs tangents $T(\xi_0)$ à F dans le point ξ_0. L'application λ n'est pas biunivoque, tandis que C dans la première partie est un homéomorphisme. Cependant, cette restriction n'a aucun inconvenient, comme il est aisé de le voir. En effet, si nous supposons seulement que C est une application différentiable de la variété X_n sur X_n', C fait correspondre au champ vectoriel V sur X_n un champ vectoriel V' sur X_n' et la transformation $k \in \Sigma$ tangente à C (voir la définition dans la première partie) y associe un autre champ vectoriel V'' sur X_n'. L'algèbre en question est alors définie d'une manière évidente pour ce cas-là.

Jusqu'à présent nous avons supposé que l'on s'est donné deux variétés fibrées E, E' et une application f de la variété E sur E'. L'application f induit une application φ de la variété B sur B'. A présent, nous nous posons la question de savoir si, étant donnée une application φ de la variété B sur B', B' étant la base de E', il existe une application f et une variété E telles que l'on ait (1). La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant, dont la démonstration se déduit facilement de [1].

Théorème. *Supposons que nous ayons deux variétés différentiables B, B' à n dimensions, soit φ un homéomorphisme de B sur B'. Soit E' une variété fibrée $E'(B', F, G, p')$ où G est un groupe de Lie donné, F une variété différentiable sur laquelle G opère transitivement à gauche et soit p' une projection canonique $p' : E' \to B'$. Alors il existe une variété fibrée E, une application $f : E \to E'$ différentiable telle que $f(wa) = f(w)\,a$ $(w \in E,\ a \in G)$, et une application différentiable p de E sur B telle que $\varphi p = p'f$.*

Remarque. Lorsque nous parlons de variétés fibrées E, ou E', nous comprenons par cela des variétés fibrées sur lesquelles l'opération P_a est définie.

Démonstration. Notons $w' \in E'$ les points de la variété E', nous définissons alors E comme l'ensemble des points (b, w') de l'espace $B \times E'$ tels que $\varphi(b) = p'(w')$. Comme l'opération P_a est définie sur E', nous définissons sur E l'opération P_a comme suit: $P_a(b, w') = (b, P_a w')$. Nous définissons l'application $f : f(b, w') = w'$. Nous avons donc évidemment $f(P_a(b, w')) = f(b, P_a w') = P_a w' = P_a(f(b, w'))$. Quant à la projection canonique, nous la définissons par $p(b, w') = b$. Voici donc une des constructions possibles de E, f, p, satisfaisant aux conditions données.

4. Nous allons montrer ensuite, que les transformations linéarisantes introduites au paragraphe précédent pour des variétés fibrées, représentent une généralisation de cette notion connue pour les variétés de König (voir [4]), ce qui signifie que nous pouvons obtenir, par une nouvelle spécialisation les transformations linéarisantes des correspondances entre deux espaces affines [2], [7].

Soient donc données deux variétés différentiables à r dimensions B, B'. Soit $GA(u, R)$ un groupe affine opérant sur un espace affine A_n à n dimensions. Supposons que nous ayons une variété fibrée $E'(B', A_n, GA(u, R), p', P')$ associée à la variété fibrée principale $P'(B', GA(u, R))$. Soit φ un homéomorphisme différentiable de la variété B sur B'. Soient U, $V = \varphi(U)$ deux voisinages de deux points u_0, $v_0 = \varphi(u_0)$

sur B, B' resp., soient $(u^1, \ldots, u^n)$, $(v^1, \ldots, v^n)$ les coordonnées dans U, V. Dans ce qui suit, nous nous bornons aux voisinages U, V au lieu de considérer les bases B, B'. Nous pouvons donc écrire $z' \in P'$, $z' = (v, g)$, $g \in G = GA(u, R)$, et $w' \in E'$, $w' = (v, g, \xi)$, $\xi \in A_n$. Nous définissons ainsi E comme l'ensemble des points $w = (u = \varphi^{-1}(v), g, \xi)$, $v \in V$, $g \in G$, $\xi \in A_n$. On a évidemment $\varphi(u) = v = p'(v, g, \xi)$. Soit $f(u, g, \xi) = (\varphi(u) = v, g, \xi)$; $p(u, g, \xi) = u$. D'après la définition de $E(B, A_n, GA(u, R), p, P)$, E est alors associée à la variété fibrée principale $P(B, G)$. Il est d'ailleurs clair comment on peut étendre la définition à partir des voisinages $V \subset B'$ à la base B' entière.

A présent, nous allons d'abord envisager de plus près la variété fibrée principale $P(B, GA(u, R))$ où $GA(u, R)$ est le groupe affine de matrices régulières $a = (a_{ij})$, $a_{0i} = \delta_{0i}$, $a_{\kappa 0} = a_\kappa$.[2] La multiplication dans G est définie de la manière usuelle: $c = (c_{ij}) = ab$ avec $a_{ik}b_{kj} = c_{ij}$. Notons $\tilde{a}_{ij}$ les éléments de la matrice a^{-1} inverse de a. L'élément unité du groupe G est $e = (\delta_{ij})$. La base du F-module de champs vectoriels sur G est formée par les vecteurs $\partial/\partial x_{\kappa j}$ (x_{ij} étant les coordonnées sur G): Soit $e_{\kappa j} = (\partial/\partial x_{\kappa j})_e$ la base de l'algèbre de Lie G du groupe G. Les champs vectoriels invariants à gauche soient données par l'expressions: $(R_{\kappa j})_a = a_{\tau\kappa}(\partial/\partial x_{\tau j})_a$. Nous avons alors manifestement $(R_{\kappa j})_e = e_{\kappa j}$, $[R_{\kappa j} R_{\tau i}] = \partial_{\tau j} R_{\kappa i} - \delta_{\kappa i} R_{\tau j}$. Par l'automorphisme intérieur du groupe G, engendré par un élément $a \in G$, nous comprenons l'application $\varphi(x) = axa^{-1}$. Nous avons donc $\operatorname{adj}(a)(e_{\kappa i}) = a_{\tau\kappa}\, \tilde{a}_{ij}(\partial/\partial x_{\tau j})$. Désignons par $P(B, GA(u, R))$ la variété fibrée principale. G opère sur P à droite par l'opération $R_a : za = R_a z$, $a \in G$, $z \in P$. La base du module de champs vectoriels sur P est formée par les vecteurs $\{\partial/\partial u^\alpha, \partial/\partial x_{\kappa i}\}$. La base des champs vectoriels verticaux est $\{\partial/\partial x_{\kappa i}\}$. Soit $h_n^a(u, x) = ax$ l'homéomorphisme du fibre G_n sur G, correspondant à l'élément $a \in G$, u étant un point du voisinage U sur B. La différentielle $\mathrm{d}h_n^a$, c'est l'isomorphisme, induit par l'homéomorphisme h_n^a, de l'espace vectoriel tangent $T(G_n)$ sur $T(G)$, en des points correspondants. Soit $z \in P$ et soit $ax \in G$. Soit τ un vecteur du champ vectoriel invariant à gauche sur G au point ax. Il existe alors un et un seul vecteur τ^* tangent à P en z et tel que $\mathrm{d}h_n^a(\tau^*) = \tau$. L'ensemble de tous les vecteurs τ^* que nous obtenons ainsi en appliquant tous les homéomorphismes $\psi : \pi^{-1}(u) \to U \times G$ d'un champs vectoriel invariant à gauche sur G s'appelle champ vectoriel fondamental sur P. Il est évident que l'ensemble des champs vectoriels fondamentaux sur P est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe G. Prenons en particulier l'homéomorphisme $h_n^{a^{-1}}$ associant à $z_0 = (u, a)$ l'élément $e \in G$. Alors $L_{\kappa i} = a_{\tau\kappa}(\partial/\partial x_{\tau i})_{z_0}$ sont les vecteurs du champ vectoriel fondamental au point z_0. On trouve aisément que l'on a:

$$(\mathrm{d}R_g)\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_{z_0} = \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right)_{z_0 g}, \quad (\mathrm{d}R_g)\left(\frac{\partial}{\partial x_{\kappa i}}\right)_{z_0} = g_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\kappa j}}\right)_{z_0 g}.$$

[2]) Dans cette dernière partie de notre travail, les indices prennent les valeurs suivantes: $i, j, k = 0, 1, \ldots, n$; $\kappa, \tau, \zeta, \eta, \xi = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha = 1, 2, \ldots, r$

$\{du^\alpha, dx^{\kappa i}\}$ est la base de l'espace $T_z^*(P)$, dual de $T_z(P)$. Soient $\gamma_{\alpha\kappa i}(z)$ des fonctions de F telles que l'on ait

$$(1) \qquad \gamma_{\alpha\tau i}(R_g z) = \gamma_{\alpha\kappa j}(z)\, \tilde{g}_{\tau\kappa} g_{ji} \,.$$

Définissons des 1-formes sur P

$$(2) \qquad \alpha^{\kappa i} = \gamma_{\alpha\kappa i}(z)\, du^\alpha + \tilde{x}_{\kappa\tau}\delta_{ki}\, dx^{\tau k} \,.$$

Ensuite, considérons des 1-formes à valeurs dans l'algèbre de Lie G du groupe G

$$(3) \qquad \omega = \alpha^{\kappa i} \otimes e_{\kappa i} \,.$$

ω est la forme de la connexion sur P.

Maintenant, supposons que nous ayons sur U une coupure de la variété $Pz_1(u) = (u, x(u))$. Nous avons donc la forme locale par rapport à la coupure $z_1 : \omega_1(\partial/\partial u^\alpha)_u = \Gamma_{\alpha\tau i}(z_1)\, e_{\tau i}$, où $\Gamma_{\alpha\tau i}(z_1) = \gamma_{\alpha\tau i}(z_1) + \tilde{x}_{\tau\kappa}(\partial x_{\kappa i}/\partial u^\alpha)$. Si nous remplaçons la coupure z_1 par la coupure $z_2(u) = z_1(u)\, a(u)$, $a(u) \in G$, nous avons $\omega_2(\partial/\partial u^\alpha)_u = \Gamma_{\alpha\tau i}(z_2)\, e_{\tau i}$, avec

$$\Gamma_{\alpha\tau i}(z_2) = \Gamma_{\alpha\kappa j}(z_1)\, \tilde{a}_{\tau\kappa} a_{ji} + \tilde{a}_{\tau\zeta} \frac{\partial a_{\zeta i}}{\partial u^\alpha} \,.$$

Si nous désignons par Ω une 2-forme tensorielle du type adj à valeurs dans G, nous avons

$$(4) \qquad \Omega\left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta}\right)_z = R_{\alpha\beta\kappa i}(z)\, e_{\kappa i}$$

pour la coupure z sur U de la variété P. $R_{\alpha\beta\kappa i}$ sont les composantes du tenseur de courbure-torsion.

Revenons maintenant aux considérations du commencement de ce paragraphe-ci concernant la correspondance existant entre deux espaces fibrés E et E'. Soit ω la forme de la connexion sur P, soit Θ la même forme sur P'. Choisissons une coupure $z(u) = (u, e)$ sur un voisinage U de la variété P, soit $y_t(u_t, e)$ la courbe de la coupure z correspondant à une courbe u_t, $-1 \leqq t \leqq 1$ de la base B. En parlant d'une courbe $a_t = a_{\kappa i}(t)$, nous entendrons par cela plus exactement $a_t = (a_{ij}(t))$, $-1 \leqq t \leqq 1$, $a_{0i} = \delta_{0i}$. A l'aide de son développement y_t sur le groupe $GA(u, R)$, la courbe $a_t = (a_{\kappa i}(t))$ est déterminée par le système d'équations différentielles

$$(5) \qquad \frac{da_{\kappa i}}{dt} = -\gamma_{\alpha\tau i}(z_t)\, a_{\kappa\tau} \frac{du^\alpha}{dt}, \quad a_{\kappa i}(0) = \delta_{\kappa i}$$

où $z_t = y_t a_t$ est une courbe horizontale sur u_t passant par le point $y_0 = (u_0, e)$. L'application f de la variété E sur E' nous donne une application ψ de la variété P sur P' (voir le procédé décrit dans la partie 3). L'application ψ fait donc évidemment correspondre à la coupure z sur U de la variété P la coupure $w(v) = (v = \varphi(u), e)$ de la variété P' sur le voisinage V. A la courbe y_t correspond donc une courbe x_t de la coupure w sur V. Si nous désignons par $w_t = x_t b_t$ la courbe horizontale sur $v_t = \varphi(u_t)$, le développement de la courbe x_t sur $GA(u, R)$ sera donné par le système

$$\frac{\mathrm{d}b_{\kappa i}}{\mathrm{d}t} = -\lambda_{\alpha\tau i}(w_t)\, b_{\kappa\tau} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}, \quad b_{\kappa i}(0) = \delta_{\kappa i}, \tag{6}$$

où les fonctions $\lambda_{\alpha\tau i}$, définies sur P', ont pour la connexion Θ sur P' la même signification que les courbes $\gamma_{\alpha\tau i}$ ont pour la connexion ω sur P. On voit aisément que les équations différentielles des courbes a_t^{-1}, b_t^{-1} sont

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{a}_{\kappa i}}{\mathrm{d}t} = \gamma_{\alpha\tau i}(y_t)\, \tilde{a}_{\kappa\tau} \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}, \quad \tilde{a}_{\kappa i}(0) = \delta_{\kappa i}, \tag{5'}$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{b}_{\kappa i}}{\mathrm{d}t} = \lambda_{\alpha\tau i}(x_t)\, \tilde{b}_{\kappa\tau} \frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}, \quad \tilde{b}_{\kappa i}(0) = \delta_{\kappa i}, \tag{6'}$$

si l'on se rend compte que dans ce cas-ci (1) prend la forme

$$\gamma_{\alpha\tau i}(z_t) = \gamma_{\alpha\kappa j}(y_t)\, \tilde{a}_{\tau\kappa} a_{ji}, \tag{7}$$

et d'une façon analogue les fonctions $\lambda_{\alpha\tau i}$ vérifient

$$\lambda_{\alpha\tau i}(w_t) = \lambda_{\alpha\kappa j}(x_t)\, \tilde{b}_{\tau\kappa} b_{ji}. \tag{8}$$

Supposons maintenant que nous ayons dans l'espace A_n le repère

$$A, I_1, \ldots, I_n. \tag{9}$$

Notons ξ le point de l'espace A_n qui a par rapport au repère (9) les coordonnées $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Par le développement de la courbe u_t par rapport à la coupure z dans P choisie, sur l'espace A_n par le point ξ, nous comprenons, d'après la définition du paragraphe précédent, la courbe $a_t^{-1}\xi$. Il est aisé de voir que la courbe $a_t^{-1}\xi$ est identique à la courbe décrite par le point B du système à un paramètre de repères

$$B, J_1, \ldots, J_n \tag{10}$$

définis par les équations

$$B = A + (\tilde{a}_{\tau\kappa}\xi^\kappa + \tilde{a}_{\tau 0})\, I_\tau, \quad J_\kappa = \tilde{a}_{\tau\kappa} I_\tau. \tag{11}$$

Or comme les $\tilde{a}_{\kappa i}$ sont les fonctions du paramètre réel t, données par les équations différentielles (5), nous pouvons déterminer les repères (10) par des équations différentielles, en prenant spécialement $\xi = A$, à savoir

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \gamma_{\alpha\tau 0}(J_t)\,\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}\,J_\tau\,, \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}J_\kappa}{\mathrm{d}t} = \gamma_{\alpha\zeta\kappa}(J_t)\,\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}t}\,J_\zeta\,,$$

avec les conditions initiales

$$B(0) = A\,, \quad J_\kappa(0) = J_\kappa\,. \tag{13}$$

D'une manière analogue, si nous considérons la solution des équations différentielles

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = \lambda_{\alpha\tau 0}(x_t)\,\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}\,K_\tau\,, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}K_\kappa}{\mathrm{d}t} = \lambda_{\alpha\zeta\kappa}(x_t)\,\frac{\mathrm{d}v^\alpha}{\mathrm{d}t}\,K_\zeta\,,$$

$$C(0) = A\,, \quad K_\kappa(0) = I_\kappa\,,$$

le point C décrit une courbe qui est le développement de la courbe v_t pour une coupure z choisie sur P et pour l'application φ de B sur B' donnée, développement sur la variété A_n par le point A.

Dans la notation introduite ci-desus nous avons

$$\Gamma_{\alpha\tau i}(u_t) = \gamma_{\alpha\tau i}(y_t)\,. \tag{15}$$

Ecrivons ensuite

$$\Pi_{\alpha\tau i}(v_t) = \lambda_{\alpha\tau i}(x_t)\,. \tag{16}$$

Si nous écrivons dans la suite $\omega_{\xi i} = \Gamma_{\alpha\xi i}(u)\,\mathrm{d}u^\alpha$, $\Theta_{\zeta i} = \prod_{\alpha\zeta i}(v)\,\mathrm{d}v^\alpha$ nous pourrons transformer les équations différentielles (12), (13) en une forme que nous connaissons déjà bien (cf. [6]), savoir

$$\mathrm{d}B = \omega_\tau J_\tau\,, \quad \mathrm{d}C = \Theta_\tau K_\tau\,, \tag{17}$$

$$\mathrm{d}J_\kappa = \omega_{\tau\kappa} J_\tau\,, \quad \mathrm{d}K_\kappa = \Theta_{\tau\kappa} K_\tau\,.$$

Supposons maintenant que la matrice $\Gamma = (\Gamma_{\alpha\zeta})$, $\Gamma_{\alpha\zeta} = \Gamma_{\alpha\zeta 0}$, soit de rang $m \leqq \min(r, n)$ au voisinage d'un point $u \in U$. Il existe alors manifestement des fonctions $a_{\varrho\lambda}$ [3]) du piont u telles que $\Gamma_{\alpha\varrho} = c_{\varrho\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}$, c'est-à-dire que $\omega_\varrho = c_{\varrho\lambda}\omega_\lambda$. En procédant à une transformation régulière de la base

[3]) A présent nous avons $\lambda = 1, 2, \ldots, m$; $\varrho = m + 1, \ldots, n$; $\sigma = m + 1, \ldots, r$.

(18) $$J'_\lambda = J_\lambda + c_{\varrho\lambda} J_\varrho\,, \quad J'_\varrho = J_\varrho$$

et en écrivant dans la suite J au lieu de J' dans la base transformée, nous pouvons écrire (17_1) sous la forme suivante

(19) $$\mathrm{d}B = \omega_\lambda J_\lambda\,.$$

Par une transformation régulière des paramètres u dans U vérifiant les équations

(20) $$\mathrm{d}u^{\lambda'} = \Gamma_{\alpha\lambda}(u)\,\mathrm{d}u^\alpha\,, \quad \mathrm{d}u^{\varrho'} = \mathrm{d}u^\varrho\,,$$

nous obtenons à partir de (19) l'équation

(21) $$\mathrm{d}B = \mathrm{d}u^\lambda J_\lambda$$

nous écrivons à nouveau u^α au lieu de $u^{\alpha'}$). Supposons donc à présent que nous ayons au lieu de (17) les équations

(22) $$\mathrm{d}B = \mathrm{d}u^\lambda J_\lambda\,, \quad \mathrm{d}C = \Theta_\tau K_\tau\,,$$
$$\mathrm{d}J_\kappa = \omega_{\tau\kappa} J_\tau\,, \quad \mathrm{d}K_\kappa = \Theta_{\tau\kappa} K_\tau\,.$$

Il faut cependant se rendre compte que les $\omega_{\tau\kappa}$ dans les équations (22) ne sont pas les mêmes que dans les équations (17), car nous avons procédé à une transformation de la base et des paramètres dans U sur B.

Supposons ensuite qu'un homéomorphisme différentiable φ de la variété B sur B' (comme nous nous bornons aux voisinages U, V sur B et B' resp., nous pouvons parler d'un homéomorphisme différentiable de U sur V) soit donné, en coordonnées locales, par l'égalité en des points correspondants. Autrement dit, appliquons à V une transformation de coordonnées $v = \varphi(u)$. L'homéomorphisme φ fera alors correspondre au point $u \in U$ le point $u \in V$. Dans ce cas, écrivons les équations (22) de la même façon, en nous rendant toutefois compte que $\Theta_{\tau i} = \Pi_{\alpha\tau i}(u)\,\mathrm{d}u^\alpha$. (Nous gardons ici la même notation Π bien que nous ayons transformé les coordonnées par $v = \varphi(u)$.)

Soit $\{B, J_\kappa\}_0$ un repère du système de repères $\{B, J_\kappa\}$ dépendant de u, correspondant à la valeur u_0 de u. D'une manière analogue soit $\{C, K_\kappa\}$ un autre repère. Nous pouvons donc écrire l'affinité $\mathbf{A}$ de l'espace A_n sur lui-même, qui laisse invariant le point $A = B(u_0) = C(u_0)$, comme suit

(23) $$\mathbf{A}B = C\,, \quad \mathbf{A}J_\kappa = a_{\kappa\tau} K_\tau\,, \quad a = \mathrm{Det}\,|a_{\kappa\tau}| \neq 0\,.$$

Pour que (23) soit l'affinité tangente à l'homéomorphisme φ il faut et il suffit que l'on ait (au point A de l'espace A_n)

(24) $$\mathbf{A}\,\mathrm{d}B = \mathrm{d}C\,.$$

Il est aisé de voir que l'équation (24) est équivalente à la relation

$$(25) \qquad (\Pi_{\lambda\tau} - a_{\lambda\tau})\, \mathrm{d}u^\lambda + \Pi_{\sigma\tau}\, \mathrm{d}u^\sigma = 0\,.$$

Il en résulte immédiatement:

Théorème. *Pour qu'il existe une affinité tangente à l'homéomorphisme φ pour une application donnée f de la variété E sur E' et pour une coupure donnée $z(u) = (u, e)$ sur U de la variété P, il faut et il suffit que l'on ait ceci:*

1) *La dimension de l'espace tangent au développement sur l'espace A_n de toutes les courbes sur B passant par le point $u_0 \in B$, par rapport à la coupure z donnée est égale à la dimension de l'espace tangent au développement sur l'espace A_n de toutes les courbes sur B' passant par le point u_0.*

2) *on a*

$$(26) \qquad \Pi_{\sigma\tau} = 0\,, \quad (\sigma = m+1, \ldots, r;\ \tau = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Si nous continuons nos calculs, nous obtenons en vertu des formules (23), (24), (25) l'expression

$$(27) \qquad \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}^2 B = \mathrm{d}^2 C + l_\tau K_\tau\,,$$

$$l_\tau = a_{\tau\lambda}\, \mathrm{d}^2 u^\lambda + a_{\tau\kappa}\omega_{\kappa\lambda}\, \mathrm{d}u^\lambda - \mathrm{d}\Theta_\tau - \Theta_\kappa \Theta_{\tau\kappa}\,.$$

Une droite dans A_n passant par le point A et ayant la direction $l_\tau K_\tau$ s'appelle droite $\boldsymbol{A}$-linéarisante de l'homéomorphisme φ.

Nous allons nous borner maintenant au cas où $n = 3$, $r = m = 2$. Appliquons sur B et sur B' dans les voisinages U et V de telles transformations de paramètres que (17) devienne

$$(28) \qquad \mathrm{d}B = \mathrm{d}u^\alpha J_\alpha\,, \quad \mathrm{d}C = \mathrm{d}v^\alpha K_\alpha\,,$$

$$\mathrm{d}J_a = \omega_{ca} J_c\,, \quad \mathrm{d}K_a = \Theta_{ca} K_c\,,$$

$$\alpha = 1, 2\,; \quad a, c = 1, 2, 3\,,$$

où

$$(29) \qquad \omega_{ca} = \Gamma_{\alpha ca}(u)\, \mathrm{d}u^\alpha\,, \quad \Theta_{ca} = \Pi_{\alpha ca}(v)\, \mathrm{d}v^\alpha\,.$$

L'homéomorphisme différentiable de B sur B' soit donné par l'égalité des coordonnées $u^\alpha = v^\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$. Nous avons alors évidemment les équations fondamentales d'une correspondance entre deux variétés de König généralisées A^3_{02} (voir [6]). Nous voyons donc que la transformation linéarisante introduite ci-dessus représente bien une généralisation de cette notion connue pour l'espace affine.

Littérature

[1] *H. Cartan:* Généralités sur les espaces fibrés I. Séminaire Henri Cartan, E. N. S. 1949/50, no *6*, 1–13.

[2] *E. Čech:* Géometrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces I. Časopis pro pěst. mat. a fys., *74* (1949), 32–48.

[3] *E. Čech:* Zur projektiven Differentialgeometrie. Schriftenreihe des Inst. für Math. bei der Deutschen Akademie der Wissensch., Berlin, (1957), Heft 1, 138–142.

[4] *A. Lichnerowicz:* Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. Dunod, Paris, 1955.

[5] *A. Lichnerowicz:* Géométrie des groupes de transformations. Paris 1958.

[6] *A. Švec:* L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle. Czechoslovak Math. Journal *10* (1960), 523–550.

[7] *A. Švec:* K definici Čechových linearisujících transformací. Časopis pro pěst. mat. *88* (1963), 430–432.

Резюме

К ЛИНЕАРИЗИРУЮЩЕЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

БОГУМИЛ ЦЕНКЛ (Bohumil Cenkl), Прага

Линеаризирующая трансформация Э. Чеха обобщается для соответствий между двумя дифференцируемыми многообразиями одинаковой размерности. Роль коллинеаций, аффинных преобразований, ... играет фиксированное множество трансформаций. Как специальный случай детально изучается обобщение линеаризирующих трансформаций для соответствий между однородными пространствами и расслоенными пространствами со связностью. Наконец, показана связь с классическим случаем соответствий между аффинными пространствами одинаковой размерности.