Czechoslovak Mathematical Journal

Věra Trnková

О замыкании классов пространств по ω-отображениям

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 3, 327–340

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100625`

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Математический институт Чехословацкой Академии наук

Т. *14* (*89*) ПРАГА 10. IX. 1964 г., No 3

О ЗАМЫКАНИИ КЛАССОВ ПРОСТРАНСТВ ПО ω-ОТОБРАЖЕНИЯМ

ВЕРА ТРНКОВА (Věra Trnková), Прага

(Поступило в редакцию 12/X 1962 г.)

Рассматриваются классы, состоящие из всех топологических пространств, которые при любом отркытом покрытии ω допускают ω-отображение в пространство некоторого заданного класса. В частности, в этих терминах дается характеристика некоторых важных классов пространств.

1

Топологическим пространством мы будем называть T_1-пространство (т.е. топологическое пространство, в котором всякое конечное множество замкнуто). Слово „класс" будет всегда обозначать класс топологических пространств, содержащий со всяким P каждое гомеоморфное с ним пространство (итак, за исключения класса, содержащего только пустое пространство, ни один из наших классов не является множеством). В соответствии с этим, если имеются пространства P_α, $\alpha \in A$, то говоря о классе пространств P_α, мы подразумеваем класс, состоящий из всех пространств, гомеоморфных с каким-нибудь P_α; в частности, класс пространства P, иногда обозначаемый через $\mathrm{cl}\, P$, есть класс всех пространств, гомеоморфных с P.

Знаки $\subset$, $\cup$, $\cap$, $-$, и соответствующие термины употребляются в обычном смысле также для классов. Если имеются классы $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}'$, то $\mathscr{X}(\times)\,\mathscr{X}'$ обозначает класс всех пространств $P \times P'$, где $P \in \mathscr{X}$, $P' \in \mathscr{X}'$. Для любого кардинального числа α мы обозначим через $\mathscr{X}_{\leqq \alpha}$ класс всех $P \in \mathscr{X}$ таких, что $\mathrm{card}\, P \leqq \alpha$ и через $\mathscr{X}_\alpha$ класс всех $P \in \mathscr{X}$ таких, что $\mathrm{card}\, P = \alpha$. Букву $\mathscr{D}$ мы употребляем для класса всех дискретных пространств, а $\mathscr{B}$ – для класса всех бикомпактных пространств. Говоря о бикомпактных, паракомпактных или сильно-паракомпактных пространствах мы всегда предполагаем их отделимыми (хаусдорфовыми).

Для полноты изложения в некоторых предложениях и леммах приведены также известные или очевидные факты; доказательства в таких случаях обычно опущены.

Некоторые результаты настоящей статьи были без доказательств опубликованы в [6].

Пользуюсь случаем выразить благодарность М. Катетову, который обратил мое внимание на ω-отображения, указал определение замыкания класса пространств по ω-отображениям и своими замечаниями содействовал улучшению изложения.

2

Определение 2,1. Пусть имеются топологические пространства P, Q и открытое покрытие ω пространства P. Непрерывное отображение f пространства P в Q назовем *ω-отображением P в Q*, если существует открытое покрытие $\mathbf{V}$ пространства Q такое, что $\{f^{-1}(V);\ V \in \mathbf{V}\}$ вписано в ω. Если $f(P) = Q$, то назовем f ω-отображением P на Q.

Определение 2,2. Пусть $\mathscr{X}$ есть класс топологических пространств. Назовем *замыканием класса $\mathscr{X}$ по ω-отображениям* класс $\mathbf{O}(\mathscr{X})$ состоящий из тех (и только тех) пространств P, которые обладают следующим свойством: для каждого открытого покрытия ω пространства P существует пространство $Q \in \mathscr{X}$ и ω-отображение P в Q. Иногда мы будем также говорить, что класс $\mathscr{X}$ ω-порождает класс $\mathbf{O}(\mathscr{X})$.

Известно (см., напр., [2]), что замыканием класса всех метризуемых пространств по ω-отображениям является класс всех паракомпактных пространств.

Определение 2,3. Класс $\mathscr{X}$ называтся *замкнутым по ω-отображеням*, короче $\mathbf{O}$-замкнутым, если $\mathbf{O}(\mathscr{X}) = \mathscr{X}$.

Предложение 2,1. *Для каждого класса $\mathscr{X}$ класс $\mathbf{O}(\mathscr{X})$ является $\mathbf{O}$-замкнутым.*

Предложение 2,2. *Для любых классов $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$ имеет место равенство $\mathbf{O}(\mathscr{X} \cup \mathscr{X}') = \mathbf{O}(\mathscr{X}) \cup \mathbf{O}(\mathscr{X}')$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{O}(\mathscr{X}) \cup \mathbf{O}(\mathscr{X}') \subset \mathbf{O}(\mathscr{X} \cup \mathscr{X}')$. Пусть $P \in \mathbf{O}(\mathscr{X} \cup \mathscr{X}')$, $P \notin \mathbf{O}(\mathscr{X})$. Тогда существует открытое покрытие ω пространства P такое, что если ψ — открытое покрытие P, вписанное в ω, то не существует ψ-отображения P ни в какое пространство класса $\mathscr{X}$; следовательно, для всякого такого ψ, существует ψ-отображение P в какое-то пространство из класса $\mathscr{X}'$. Из этого вытекает $P \in \mathbf{O}(\mathscr{X}')$.

Предложение 2,3. *Для любых классов $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$ имеет место $\mathbf{O}(\mathscr{X} \cap \mathscr{X}') \subset \mathbf{O}(\mathscr{X}) \cap \mathbf{O}(\mathscr{X}')$; в частности, пересечение двух $\mathbf{O}$-замкнутых классов есть $\mathbf{O}$-замкнутый класс.*

Замечание. Соотношение $\mathbf{O}(\mathscr{X} \cap \mathscr{X}') \supset \mathbf{O}(\mathscr{X}) \cap \mathbf{O}(\mathscr{X}')$ не верно, как это можно легко проверить.

Предложение 2,4. *Если $\mathscr{X}$ есть $\mathbf{O}$-замкнутый класс, $P \in \mathscr{X}$, то всякое замкнутое подмножество Q пространства P принадлежит классу $\mathscr{X}$.*

Предложение 2,5. *Пусть $\mathscr{X}$ есть класс такой, что начиная с некоторого кардинального числа α все $\mathscr{X}_{\leqq\alpha}$ $\mathbf{O}$-замкнуты. Тогда весь класс $\mathbf{O}$-замкнут.*

Доказательство. Пусть $P \in \mathbf{O}(\mathscr{X})$; для каждого открытого покрытия ω пространства P существует ω-отображение в некоторое пространство $Q_\omega \in \mathscr{X}$. Пусть α есть кардинальное число такое, что card $Q_\omega \leqq \alpha$ для всех ω и $\mathbf{O}(\mathscr{X}_{\leqq\alpha}) = \mathscr{X}_{\leqq\alpha}$. Ясно, что $P \in \mathbf{O}(\mathscr{X}_{\leqq\alpha}) = \mathscr{X}_{\leqq\alpha} \subset \mathscr{X}$.

Утверждение, обратное к предложению 2,5 неверно; класс $\mathscr{B}$ всех бикомпактных пространств $\mathbf{O}$-замкнут, хотя $\mathscr{B}_{\leqq\alpha}$ не является $\mathbf{O}$-замкнутым ни для какого бесконечного кардинального числа α.

Предложение 2,6. *Следующие классы замкнуты по ω-отображениям: Класс всех хаусдорфовых пространств, всех регулярных пространств, всех вполне регулярных пространств, всех нормальных пространств, всех коллективно-нормальных пространств, всех счетно-паракомпактных пространств, всех сильно-паракомпактных пространств, всех* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$*-компактных пространств.*[1])

Предложение 2,7. *Пусть $\mathscr{M}$ есть класс всех нормальных счетно-паракомпактных пространств, $\mathscr{N}$ класс всех совершенно-нормальных пространств. Тогда $\mathscr{N} \subsetneqq \mathbf{O}(\mathscr{N}) \subsetneqq \mathscr{M}$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathscr{N} \subset \mathbf{O}(\mathscr{N}) \subset \mathscr{M}$; легко проверить, что несчетное бикомпактное пространство с единственной изолированной точкой принадлежит классу $\mathbf{O}(\mathscr{N}) - \mathscr{N}$. Покажем еще, что пространство всех счетных ординальных чисел T_{ω_1} принадлежит классу $\mathscr{M} - \mathbf{O}(\mathscr{N})$. Известно, что $T_{\omega_1} \in \mathscr{M}$, следовательно, остается показать, что $T_{\omega_1} \notin \mathbf{O}(\mathscr{N})$. Докажем сначала две леммы.

Лемма 2,1. *Пусть f есть отображение пространства T_{ω_1} в любое множество T, причем все $f^{-1}(y)$, $y \in T$, счетны. Тогда существует замкнутая конфинальная часть Q пространства T_{ω_1} такая, что для $x_1, x_2 \in Q$, $x_1 \neq x_2$, имеем $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Доказательство. Обозначим (для $\alpha \in T_{\omega_1}$) через T_α множество всех порядковых чисел β, меньших α. Пусть M — множество всех $\alpha \in T_{\omega_1}$ таких, что $f^{-1}(f(T_\alpha)) = T_\alpha$. Легко проверить, что M конфинально в T_{ω_1}. При $\alpha \in M$ положим $Q_\alpha = T_\alpha - \bigcup\limits_{\substack{\beta \in M \\ \beta < \alpha}} T_\beta$. Пусть Q обозначает множество всех первых элементов всех непустых Q_α, $\alpha \in M$. Легко проверить, что Q имеет требуемые свойства.

Лемма 2,2. *Пусть Q — замкнутая конфинальная часть T_{ω_1}. Тогда Q гомеоморфно всему T_{ω_1}.*

Доказательство. Покажем, что топология подпространства Q совпадает с топологией, определенной упорядочением Q. Для этого достаточно показать,

---

[1]) Определение $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-компактных пространств см., напр., в [1].

что для любых $\alpha, \beta \in T_{\omega_1}$ или $T_\alpha \cap Q = \emptyset$ или существуют $\gamma, \delta \in Q$ такие, что $(\alpha, \beta) \cap Q = (\gamma, \delta) \cap Q$, где (α, β) и (γ, δ) означают интервалы. Пусть $T_\alpha \cap Q \neq \emptyset$; обозначим через S множество всех $\mu \in T_{\omega_1}$, больших чем все элементы множества $T_\alpha \cap Q$, и пусть ν есть первый элемент в S. Множество Q замкнуто, и потому или существует число $\nu - 1$, которое мы возьмем в качестве γ, или $\nu = \alpha$ и потом положим $\gamma = \alpha$. В качестве δ мы возьмем первый элемент множества $Q \cap (T_{\omega_1} - T_\beta)$.

Теперь мы закончим доказательство предложения 2,8. Пусть существует ω-отображение f пространства T_{ω_1} в совершенно нормальное пространство R, где $\omega = \{T_\alpha;\ \alpha \in T_{\omega_1}\}$. Как вытекает из леммы, можно предполагать, что f взаимно однозначно. Пусть L обозначает множество всех неизолированных точек пространства T_{ω_1}; положим еще $L_\alpha = L \cap T_\alpha$. Пусть $S = f^{-1}(\overline{f(L)})$; S является замкнутым G_δ-подпространством T_{ω_1} и $L \subset S$; следовательно существует $\beta \in S - L$. Пусть V есть открытое покрытие R такое, что $\{f^{-1}(V);\ V \in \mathsf{V}\}$ вписано в ω. Пусть $f(\beta) \in W \in \mathsf{V}$, $\gamma \in T_{\omega_1}, f^{-1}(W) \subset T_{\gamma+1}$. Ясно, что тогда $f(\beta) \in \overline{f(L_{\gamma+1})}$. Но f является гомеоморфным на бикомпактном множестве $T_{\gamma+1}$ и потому $\overline{f(L_{\gamma+1})} = f(L_{\gamma+1})$, $f(\beta) \in f(L_{\gamma+1})$, что противоречит выбору элемента $\beta \in S - L$.

Определение 2,4. Пусть $\mathscr{X}$ есть класс топологических пространств. Обозначим через $\mathbf{p}\mathscr{X}$ класс всех подпространств и через $\mathbf{z}\mathscr{X}$ класс всех замкнутых подпространств всех пространств из $\mathscr{X}$. Через $\Omega(\mathscr{X})$ мы обозначим класс всех пространств X со следующим свойством: если ω есть открытое покрытие X, то существует ω-отображение пространства X на пространство из $\mathscr{X}$.

Ясно, что *для каждого $\mathscr{X}$ имеет место $\Omega(\mathbf{z}\mathscr{X}) \subset \mathbf{O}(\mathscr{X}) \subset \Omega(\mathbf{p}\mathscr{X})$.*

Покажем, что равенства $\Omega(\mathbf{z}\mathscr{X}) = \mathbf{O}(\mathscr{X})$ и $\mathbf{O}(\mathscr{X}) = \Omega(\mathbf{p}\mathscr{X})$, вообще говоря, неверны. Действительно, пусть P и Q – пространства такие, что замыканием каждого бесконечного множества является все пространство, и пусть $\operatorname{card} P > \operatorname{card} Q \geqq \aleph_0$; легко проверить, что $Q \in \mathbf{O}(\operatorname{cl} P)$, $Q \notin \Omega(\operatorname{cl} P)$. Если же взять класс $\mathscr{X}'$ всех кубов (т.е. всех произведений любого числа отрезков $\langle 0, 1 \rangle$), то $\mathbf{p}\mathscr{X}'$ и $\Omega(\mathbf{p}\mathscr{X}')$ есть класс всех вполне регулярных пространств, в то время как $\mathbf{O}(\mathscr{X}')$ есть класс всех бикомпактных пространств. Если положить $\mathscr{X} = \mathscr{X}' \cup \operatorname{cl} P$, то ясно, что $\Omega(\mathbf{z}\mathscr{X}) \subsetneqq \mathbf{O}(\mathscr{X}) \subsetneqq \Omega(\mathbf{p}\mathscr{X})$. Отметим, что в первом примере мы имеем дело с неотделимыми пространствами; пример с достаточно хорошим классом не удалось построить.

3

Теперь мы покажем, что некоторые часто встречающиеся классы пространств являются замыканиями по ω-отображениям некоторых очень специальных классов.

Обозначим через H произведение счетного числа сегментов $\langle 0, 1\rangle$, а через 0 его точку, все координаты которой равны нулю. Пусть E^∞ обозначает произведение счетного числа открытых интервалов $(0, 1)$; через $\mathscr{E}$ обозначим класс всех евклидовых пространств, а через E^n обозначим n-мерное евклидово пространство.

Предложение 3,1. *Класс* $\mathbf{O}(\mathrm{cl}\, H)$ *совпадает с классом всех бикомпактных пространств.*

Лемма 3,1. *Подпространство* $H - (0)$ *пространства* H *гомеоморфно замкнутому подмножеству пространства* E^∞.

Доказательство. Пусть L — линейное нормированное пространство всех ограниченных последовательностей $\alpha = \{a_1, a_2, \ldots\}$ действительных чисел, где норма определена равенством $\|\alpha\| = \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k \,.\, |a_k|$. Множество всех $\alpha \in L$ таких, что $0 \leqq a_k \leqq 1$ можно отождествить с H. Обозначим через $\varepsilon_k = \{e_1, e_2, \ldots\}$ последовательность такую, что $e_k = 1$, $e_l = 0$ для $l \neq k$. Положим $\varrho = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$, $\sigma_k = \frac{1}{4}(\varepsilon_k + 1/2^k \,.\, \varrho)$ и определим отображение φ, полагая $\varphi(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varepsilon_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\sigma_k$. Легко проверить, что φ является гомеоморфным отображением H в H, переводящим $H - (0)$ в замкнутое подмножество E^∞.

Предложение 3,2. *Класс* $\mathbf{O}(\mathrm{cl}\, E^\infty)$ *совпадает с классом всех регулярных финально-компактных пространств.*

Доказательство, которое проводится при помощи леммы 3,1, мы опускаем.

Предложение 3,3. *Класс* $\mathbf{O}(\mathrm{cl}\, E^n)$ *совпадает с классом всех тех регулярных пространств, в каждое открытое покрытие которых можно вписать покрытие, нерв которого реализуется звездно-конечным геометрическим комплексом в* E^n.

Доказательство. В каждое открытое покрытие пространства E^n можно вписать отркытое покрытие, нерв которого можно реализовать звездно-конечным геометрическим комплексом в E^n. Поэтому очевидно, это свойство имеют и все пространства из $\mathbf{O}(\mathrm{cl}\, E^n)$. Если ω есть открытое покрытие паракомпактного пространства P, нерв которого релизуется звездно-конечным геометрическим комплексом K в E^n, то хорошо известным способом можно отобразить P в K так, что прообразы звезд вершин K вписаны в ω.

Предложение 3,4. *Класс* $\mathbf{O}(\mathscr{E})$ *совпадает с классом всех регулярных пространств, в каждое открытое покрытие которых можно вписать счетное открытое покрытие конечного порядка.*

Это вытекает из предложения 3,3.

Определение 3,1. Если $\mathscr{Y}$ — класс топологических пространств, то его $\mathbf{O}$-*прообразом* назовем каждый класс $\mathscr{X}$ такой, что $\mathbf{O}(\mathscr{X}) = \mathscr{Y}$.

Очевидно, класс $\mathscr{Y}$ имеет $\mathbf{O}$-прообраз, если — и только если — он $\mathbf{O}$-замкнут. Например, класс всех метризуемых пространств не имеет $\mathbf{O}$-прообраза. Ясно, что если $\mathscr{X} \subset \mathscr{Y} \subset \mathscr{Z}$ и $\mathscr{X}$ является $\mathbf{O}$-прообразом $\mathscr{Z}$, то $\mathscr{Y}$ тоже будет $\mathbf{O}$-прообразом $\mathscr{Z}$. Поэтому, напр., класс всех сильно-метризуемых пространств[2]) является $\mathbf{O}$-прообразом класса всех вполне-паракомпактных пространств (см. 4).

Определение 3,2. $\mathbf{O}$-прообраз $\mathscr{X}$ класса $\mathscr{Y}$ называется *минимальным* $\mathbf{O}$-*прообразом*, если для каждого $\mathbf{O}$-прообраза $\mathscr{Z}$ класса $\mathscr{Y}$ такого, что $\mathscr{Z} \subset \mathscr{X}$, выполнено $\mathscr{Z} = \mathscr{X}$.

Из предложений 3,1—3,4 вытекает, что классы всех бикомпактных и всех регулярных финально-компактных пространств имеют минимальный $\mathbf{O}$-прообраз. Минимальный $\mathbf{O}$-прообраз имеет также класс всех тех пространств Хаусдорфа, в каждое открытое покрытие которых можно вписать счетное открытое покрытие конечного порядка. При помощи предложения 3,4 легко показать, что минимальным $\mathbf{O}$-прообразом этого класса является класс $\operatorname{cl} E$, где E обозначает следующее пространство: $E = (\xi) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E^n$, E^n имеет обычную топологию евклидова пространства, E^n не пересекаются и открыто-замкнуты в E, $\xi \notin E^n$, и полной системой окрестностей ξ в E является система $\{(\xi) \cup \bigcup_{n=k}^{\infty} E^n;\ k = 1, 2, \ldots\}$. Минимальный $\mathbf{O}$-прообраз не всегда только один. Если, например, P и Q — два бесконечных бикомпактных пространства с единственной неизолированной точкой, $\operatorname{card} P \neq \operatorname{card} Q$, то $\operatorname{cl} P$ и $\operatorname{cl} Q$ являются двумя различными минимальными $\mathbf{O}$-прообразами класса всех нульмерных бикомпактных пространств.

Если $\mathscr{X}$ есть $\mathbf{O}$-прообраз класса $\mathscr{Y}$, то может случиться, что $\mathscr{X}$ не содержит никакого минимального $\mathbf{O}$-прообраза $\mathscr{Y}$, хотя такой прообраз и существует. Достаточно в качестве $\mathscr{X}$ взять класс всех метризуемых конечномерных бикомпактов. Класс всех бикомпактных пространств дает также пример класса, который имеет минимальный $\mathbf{O}$-прообраз, хотя и содержит пространства сколь угодно большой мощности.

Предложение 3,5. *Пусть $\mathscr{Y}$ — непустой класс, $\mathscr{Y} = a\mathscr{Y}$.*[3]) *Тогда $\mathscr{Y}$ не имеет минимального $\mathbf{O}$-прообраза.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{X}$ является $\mathbf{O}$-прообразом класса $\mathscr{Y}$; ясно, что $\mathscr{X}$ — непустой класс; пусть $X \in \mathscr{X}$. Обозначим через $\mathscr{X}'$ класс всех тех пространств из $\mathscr{X}$, мощность которых больше мощности пространства X. Легко проверить, что $\mathscr{X}' \subsetneqq \mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$ является $\mathbf{O}$-прообразом $\mathscr{Y}$.

[2]) Регулярное пространство называется сильно-метризуемым, если оно имеет базу, которая является объединением счетного числа звездно-конечных открытых покрытий.

[3]) Класс $a\mathscr{Y}$ вводится в определении 5,1 настоящей статьи.

Теперь будут приведены некоторые предложения о тех классах, которые (как это вытекает из предложения 3,5) не имеют минимального **O**-прообраза.

Предложение 4,1. *Класс* $\mathbf{O}(\mathscr{D})$ *совпадает с классом всех паракомпактных нульмерных пространств.*

Доказательство. Легко вытекает из факта, что паракомпактное пространство нульмерно, если и только если в каждое его открытое покрытие можно вписать открытое покрытие кратности 1.

Предложение 4,2. *Класс* $\mathbf{O}(\mathscr{D}\,(\times)\,\mathrm{cl}\,E^{\infty})$ *совпадает с классом всех сильно-паракомпактных пространств.*

Это легко доказать при помощи предложения 3,2.

Предложение 4,3. *Класс* $\mathbf{O}(\mathscr{D}\,(\times)\,\mathscr{E})$ *совпадает с классом всех регулярных пространств, в каждое открытое покрытие которых можно вписать звездно-конечное открытое покрытие конечного порядка.*

Это легко вытекает из предложения 3,4.

Предложение 4,4. *Класс* $\mathbf{O}(\mathscr{D}\,(\times)\,\mathrm{cl}\,H)$ *совпадает с классом всех сильно-паракомпактных пространств, все квазикомпоненты которых являются бикомпактными и имеют полную систему окрестностей, состоящую из открыто-замкнутых множеств.*

Доказательство вытекает из следующего утверждения:

Лемма 4,1. *Следующие свойства пространства P эквивалентны:*

(a) $P \in \mathbf{O}(\mathscr{D}\,(\times)\,\mathrm{cl}\,H)$.

(b) *P регулярно и в каждое открытое покрытие пространства P можно вписать открытое покрытие, компоненты*[4]) *которого являются объединением конечного числа множеств рассматриваемого покрытия.*

(c) *P сильно паракомпактно, все его квазикомпоненты бикомпактны и имеют полную систему окрестностей, состоящую из открыто-замкнутых множеств.*

Доказательство. Очевидно, что $(a) \Leftrightarrow (b)$. Покажем теперь, что $(c) \Rightarrow (b)$. Пусть $\mathbf{U}$ — открытое покрытие P, $\mathbf{K}$ — система всех квазикомпонент пространства P. Для каждого $K \in \mathbf{K}$ существует открыто-замкнутое множество U_K такое, что оно покрыто конечным числом множеств из $\mathbf{U}$. Пусть $\mathbf{V}$ — звездно-конечное открытое покрытие P, вписанное в $\mathbf{K} = \{U_K;\ K \in \mathbf{K}\}$. Пусть $\{B_\alpha;\ \alpha \in A\}$ есть система всех компонент покрытия $\mathbf{V}$; пусть $\{C_{\alpha,i};\ i = 1, 2, \ldots\}$ — последователь-

[4]) Компонентой системы $\mathbf{V}$ называется каждое множество H которое имеет вид $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, где $H_1 \in \mathbf{V}$, $H_n = \bigcup_{V \in \mathbf{V},\, V \cap H_{n-1} \neq \emptyset} V$.

ность элементов покрытия $\mathbf{V}$ такая, что $B_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\alpha,i}$. Для каждого $C_{\alpha,i}$ мы выберем $U_{\alpha,i} \in \mathbf{K}$ так, чтобы $C_{\alpha,i} \subset U_{\alpha,i}$. Если положить $D_{\alpha,i} = B_\alpha \cap \left(U_{\alpha,i} - \bigcup_{k=1}^{i-1} U_{\alpha,k}\right)$ то ясно, что $\{D_{\alpha,i};\ \alpha \in A,\ i = 1, 2, \ldots\}$ состоит из попарно не пересекающихся открыто-замкнутых множеств, и каждое $D_{\alpha,i}$ покрывается конечным числом множеств из $\mathbf{U}$. Дальнейшее очевидно.

Докажем теперь, что $(b) \Rightarrow (c)$. Ясно, что если для пространства P выполнено условие из (b), то P – сильно паракомпактно и все его квазикомпоненты бикомпактны. Пусть $K \subset P$ есть квазикомпонента P, U – открытое множество, $K \subset U \subset P$; найдем открыто-замкнутое множество V так, чтобы $K \subset V \subset U$: для каждого $x \notin K$ существует открыто-замкнутое множество U_x так, что $x \in U_x$, $U_x \cap K = \varnothing$. Пусть открытое покрытие ω вписано в систему $\mathbf{U} = \{U\} \cup \{U_x;\ x \in P - K\}$ и каждая компонента ω является объединением конечного числа множества из ω. Пусть H – компонента ω, содержащая K; пусть $H = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, $V_i \in \omega$. Для всех V_i таких, что $V_i - U \neq \varnothing$ выберем $W_i \in \mathbf{U}$ так, чтобы $V_i \subset W_i$. Для всех V_i таких, что $V_i \subset U$ определим $W_i = \varnothing$. Множество $V = H - \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ имеет требуемые свойства.

В [4] приведены следующие определения:

Покрытие ψ пространства P называется слабо вписанным в покрытие ω пространства P, если существует подпокрытие покрытия ψ, которое вписано в ω. Регулярное пространство P называется вполне-паракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно слабо вписать открытое покрытие, являющееся объединением счетного числа звездно-конечных покрытий.

В следующем предложении дается характеристика класса вполне паракомпактных пространств. При этом B^τ обозначает произведение счетного числа дискретных пространств мощности τ, $S^\tau = B^\tau \times E^\infty$; $\mathscr{S}$ обозначает класс всех пространств S^τ (для всех мощностей τ).

Предложение 4,5. *Класс $\mathbf{O}(\mathscr{S})$ совпадает с классом всех вполне паракомпактных пространств.*

Доказательство. Каждое пространство S^τ является сильно-метризуемым, и потому легко проверить, что если $P \in \mathbf{O}(\mathscr{S})$, то P вполне паракомпактно. Пусть ω есть открытое покрытие вполне паракомпактного пространства P; найдем ω-отображение φ пространства P в S^τ, где τ – вес пространства P. Пусть $\mathbf{A}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ звездно-конечные открытые покрытия P, $\mathbf{C}_n$ их подсистемы такие, что $\mathbf{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{C}_n$ есть покрытие P, вписанное в ω. Положим еще $\mathbf{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n$. Для каждого $A \in \mathbf{C}$ найдем открытое множество D_A так, чтобы $\overline{D}_A \subset A$ и чтобы система $\{D_A;\ A \in \mathbf{C}\}$ была покрытием P. Положим еще $\mathbf{C}'_n =$

$= \{D_A;\ A \in \mathbf{C}_n\}$, $\mathbf{C}' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{C}'_n$. Пусть τ — вес пространства P; обозначим через T дискретное пространство мощности τ. Очевидно, мы можем предполагать, что все $\mathbf{C}_n$ не пусты.

Пусть $\mathbf{G}_n = \{\Gamma_t;\ t \in B_n\}$ есть система непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств P, покрывающая P и такая, что каждое Γ_t содержит хоть одно, но не больше чем счетное число подмножеств, являющихся элементами $\mathbf{C}_n$ (такую систему можно легко получить из системы компонент[2]) покрытия $\mathbf{A}_n$). Можно предположить, что $B_n \subset T$. Пусть ψ_n есть отображение P в T такое, что $\psi_n(x) = t$ для $x \in \Gamma_t$. Пусть для каждого $t \in B_n$ возьмем последовательность $\{C_{t,k};\ k = 1, 2, \ldots\}$ такую, что всегда $C_{t,k} \in \mathbf{C}_n$, $C_{t,k} \subset \Gamma_t$, и, наоборот, всякое $A \in \mathbf{C}_n$ такое, что $A \subset \Gamma_t$, равно некоторому $C_{t,k}$. Обозначим через $f_{n,k}$ непрерывную действительную функцию такую, что $0 \leqq f_{n,k} \leqq 1$, $f_{n,k}(x) = 1$ для $x \in \bigcup\limits_{t \in B_n} \bar{D}_{C_{t,k}}$, $f_{n,k}(x) = 0$ для $x \in P - \bigcup\limits_{t \in B_n} C_{t,k}$; обозначим через φ_n непрерывное отображение P в $Q_n = T \times H$ такое, что $\varphi_n(x) = \{\psi_n(x), f_{n,1}(x), f_{n,2}(x), \ldots\}$. Для $s \in T$ и натурального k положим $W_{s,k} = \{\{t, y_1, y_2, \ldots\} \in T \times H;\ t = s,\ y_k > 0\}$, $\mathbf{W}_n = \{W_{s,k};\ s \in T,\ k = 1, 2, \ldots\}$. Пусть $Q = Q_1 \times Q_2 \times \ldots$, $\mathbf{W}'_n = \{Q_1 \times Q_2 \times \times \ldots \times Q_{n-1} \times W \times Q_{n+1} \times \ldots;\ W \in \mathbf{W}_n\}$, $\mathbf{W} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{W}'_n$. Легко видеть, что $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots]$ является непрерывным отображением P в $Q = B^\tau \times H$ и что для каждого $W \in \mathbf{W}$ или $W \cap \varphi(P) = \varnothing$ или существует $C \in \mathbf{C}$ так, что $D_C \subset \subset \varphi^{-1}(W) \subset C$ и потому система $\{\varphi^{-1}(W);\ W \in \mathbf{W}\}$ есть покрытие P, вписанное в ω. Легко проверить, что $\bigcup\limits_{W \in \mathbf{W}} W$ совпадает с пространством $B^\tau \times (H - (0))$, которое по лемме 3,1 гомеоморфно замкнутой части пространства $B^\tau \times E^\infty$.

Пусть $\mathfrak{m}(Q)$ обозначает множество всех ограниченных функций на множестве Q, где для $f \in \mathfrak{m}(Q)$ определена норма $\|f\| = \sup\limits_{x \in Q} |f(x)|$; на $\mathfrak{m}(Q)$ берем топологию, заданную этой нормой. Пусть $\mathfrak{m}$ есть класс всех $\mathfrak{m}(Q)$ (для всех мощностей множества Q).

Предложение 4,6. *Класс* $\mathbf{O}(\mathfrak{m})$ *совпадает с классом всех паракомпактных пространств.*

Это вытекает из следующих лемм 4,2 ,4,3.

Назовем открытое покрытие $\mathbf{V}$ метрического пространства (P, ϱ) *ϱ-равномерным,* если существует $\varepsilon > 0$ такое, что система всех открытых шаров с радиусом ε вписана в $\mathbf{V}$.

Лемма 4,2. *Пусть ω есть локально-конечное открытое покрытие нормального пространства P. Тогда существует ω-отображение P в метрическое пространство (Q, ϱ) и ϱ-равномерное открытое покрытие $\mathbf{V}$ такое, что $\{f^{-1}(V);\ V \in \mathbf{V}\}$ вписано в ω.*

Доказательство. Для каждого $U \in \omega$ существует замкнутая $M_U \subset U$ так, что $\{M_U; U \in \omega\}$ есть покрытие P. Пусть f_U есть непрерывная на P функция такая, что $0 \leqq f_U \leqq 1$, $f_U(x) = 1$ для $x \in M_U$, $f_U(x) = 0$ для $x \in P - U$. Если положить $\sigma(x, y) = \sum_{U \in U} |f_U(x) - f_U(y)|$ и отождествить все точки x, y для которых $\sigma(x, y) = 0$, тогда получаем метрическое пространство с требуемыми свойствами; ε можно выбрать равным единице.

Лемма 4,3. *Пусть Q — метрическое пространство с метрикой ϱ, $\mathbf{V}$ — его открытое ϱ-равномерное покрытие. Пусть S есть пополнение пространства Q. Тогда существует открытое покрытие $\mathbf{W}$ пространства S такое, что $\{W \cap Q; W \in \mathbf{W}\} = \mathbf{V}$.*

Доказательство. Для каждого $V \in \mathbf{V}$ определяем W_V, как множество всех $x \in S - Q$ таких, что если последовательность $\{x_n\}$ точек Q сходится к x, то существует n_0 так, что $x_n \in V$ для всех $n \geqq n_0$. Из ϱ-равномерности $\mathbf{V}$ вытекает, что система $\{V \cup W_V; V \in \mathbf{V}\}$ является покрытием S; легко проверить, что все $V \cup W_V$ открыты в S.

Предложение 4,6 теперь вытекает из известного факта, что всякое полное метрическое пространство Q можно изометрически отобразить на замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{m}(Q)$.

Определение 4,1. $\mathbf{O}$-прообраз $\mathscr{X}$ класса $\mathscr{Y}$ назовем *однородным,* если для любого кардинального числа α или $\mathscr{X}_\alpha$ пустой класс, или выполняются условия: $\mathscr{X}_{\leqq \alpha} \subset \mathbf{z}\mathscr{X}_\alpha$ и $\mathscr{X}_\alpha$ является минимальным $\mathbf{O}$-прообразом класса $\mathbf{O}(\mathscr{Y}_{\leqq \alpha})$.

Очевидно, что однородный $\mathbf{O}$-прообраз класса $\mathscr{Y}$ может не быть его минимальным $\mathbf{O}$-прообразом. С другой стороны, минимальный $\mathbf{O}$-прообраз не всегда является однородным. Рассмотрим, например, класс, состоящий, во-первых, из всех бикомпактных пространств, во-вторых, из всех тех паракомпактных нульмерных пространств, любое открытое покрытие которых содержит подпокрытие мощности $\leqq \mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ — фиксированная мощность, большая $2^{\aleph_0}$. Этот класс имеет минимальный $\mathbf{O}$-прообраз $\mathrm{cl}\, H \cup \mathrm{cl}\, D$, где D — дискретное пространство мощности $\mathfrak{a}$. Однако, легко установить, что этот $\mathbf{O}$-прообраз не является однородным.

При помощи приведеных выше предложений можно показать, что классы всех бикомпактных, финально-компактных, сильно паракомпактных, вполне-паракомпактных и. т. д. пространств имеют однородные $\mathbf{O}$-прообразы.

5

Определение 5,1. Если $\mathscr{X}$ есть класс топологических пространств, обозначим через $a\mathscr{X}$ класс всех пространств, являющихся объединением попарно непересекающихся открыто-замкнутых подмножеств, которые принадлежат (как пространства) классу $\mathscr{X}$ (иначе говоря, $a\mathscr{X}$ — это класс всех топологических объединений пространств из $\mathscr{X}$); через $b\mathscr{X}$ обозначим класс всех пространств Y, которые можно представить в виде объединения конечного числа открытых подмножеств, замыкания которых (в Y) принадлежат классу $\mathscr{X}$.

Отношения $a\mathbf{O}(\mathscr{X}) \supset \mathbf{O}(a\mathscr{X})$, $b\mathbf{O}(\mathscr{X}) \supset \mathbf{O}(b\mathscr{X})$, вообще говоря, могут быть неверными. Для первого из них это вытекает прямо из предложения 3,5; что касается второго, то это видно, если в качестве $\mathscr{X}$ взять класс всех одноточечных пространств.

Предложение 5,1. *Для каждого класса $\mathscr{X}$ имеет место $a\mathbf{O}(\mathscr{X}) \subset \mathbf{O}(a\mathscr{X})$; в частности, если $\mathscr{X} = a\mathscr{X}$, то $\mathbf{O}(\mathscr{X}) = a\mathbf{O}(\mathscr{X})$. Для каждого класса $\mathscr{X}$ мы имеем $\mathbf{O}a\mathbf{O}(\mathscr{X}) = \mathbf{O}(a\mathscr{X})$.*

Для оператора b включение $b\mathbf{O}(\mathscr{X}) \subset \mathbf{O}(b\mathscr{X})$, вообще говоря, неверно. Пусть $\mathscr{X}'$ есть класс всех сепарабельных метрических пространств; положим $\mathscr{X} = a\mathscr{X}'$. Тогда легко проверить, что класс $\mathbf{O}(\mathscr{X}) = \mathbf{O}(b\mathscr{X})$ есть класс всех сильно-паракомпактных пространств, о которых известно (см. [5]), что вложение $b\mathbf{O}(\mathscr{X}) \subset \mathbf{O}(\mathscr{X})$ не имеет места.

Однако, верны следующие предложения.

Предложение 5,2. *Пусть $\mathscr{X}$ есть класс такой, что $\mathscr{X}\ (\times)\ \mathscr{X} \subset \mathscr{X}$ и существует $X \in \mathscr{X}$ такое, что $\langle 0, 1\rangle \subset X$. Пусть P — нормальное пространство, $P = \bigcup_{i=1}^{k} M_i$, M_i открыты. Тогда $P \in \mathbf{O}(\mathscr{X})$, если и только если для каждого открытого покрытия ω_i множества $\overline{M}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ существует непрерывное отображение f_i всего пространства P в пространство $Q_i \in \mathscr{X}$ и отркытое покрытие $\mathbf{V}_i$ пространства Q_i так, что $\{f_i^{-1}(V) \cup M_i;\ V \in \mathbf{V}_i\}$ вписано в ω_i.*

Доказательство. Если $P \in \mathbf{O}(\mathscr{X})$, то ясно, что выполнены требования предложения. Пусть P удовлетворяет условиям предложения; покажем что $P \in \mathbf{O}(\mathscr{X})$. Пусть ω — открытое покрытие P; положим $\omega_i = \{U \cap \overline{M}_i;\ U \in \omega\}$. По предложению для $i = 1, \ldots, k$ существует непрерывное отображение f_i пространства P в пространство $Q_i \in \mathscr{X}$ и открытое покрытие $\mathbf{V}_i$ пространства Q_i такое, что система $\{f_i^{-1}(V) \cap M_i;\ V \in \mathbf{V}_i\}$ вписана в ω_i. Пусть теперь N_i — замкнутые подмножества P, $P = \bigcup_{i=1}^{k} N_i$, $N_i \subset M_i$. Пусть g_i есть непрерывная функция такая, что $g_i(x) = 1$ для $x \in N_i$, $g_i(x) = 0$ для $x \in P - M_i$, $0 \leqq g_i \leqq 1$. Положим еще $H_i = \{x \in P;\ g_i(x) > 0\}$. Пусть $X \in \mathscr{X}$, $\langle 0, 1\rangle \subset X$. Положим $S_i = Q_i \times X$, $\psi_i = \{f_i, g_i\}$, $\mathbf{W}_i = \{V \times (X - (0));\ V \in \mathbf{V}_i\}$, $W_i = Q_i \times (X - (1))$. Легко проверить, что ψ_i есть непрерывное отображение P в S_i такое, что $\{\psi_i^{-1}(W);\ W \in \mathbf{W}_i\}$ является покрытием H_i, вписанным в ω_i. Если положить $\tilde{\mathbf{W}}_i = \mathbf{W}_i \cup \{W_i\}$, $Q = S_1 \times \ldots \times S_k$, и обозначить через $\mathbf{U}$ семейство всех $U_1 \times \ldots \times U_k$, где $U_i \in \tilde{\mathbf{W}}_i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, то ясно, что $Q \in \mathscr{X}$, $\mathbf{U}$ есть открытое покрытие Q и $\{\psi^{-1}(U);\ U \in \mathbf{U}\}$ вписано в ω.

Предложение 5,3. *Пусть $\mathcal{X}$ есть класс такой, что $\mathcal{X}\,(\times)\,\mathcal{X} \subset \mathcal{X}$ и существует $X \in \mathcal{X}$ так, что $\langle 0, 1\rangle \subset X$. Пусть P есть нормальное пространство, $P = \bigcup_{i=1}^{k} M_i$, M_i открыты, $\overline{M}_i \in \mathbf{O}(\mathcal{X})$. Пусть каждое непрерывное отображение множества $\overline{M}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ в пространство из $\mathcal{X}$ можно продолжить до отображения всего пространства P на замкнутую часть пространства из $\mathcal{X}$. Тогда $P \in \mathbf{O}(\mathcal{X})$.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 4,2.

6

Покажем теперь, что оператор $\mathbf{O}$ „не коммутирует с операцией произведения", точнее, что ни одно из вложений $\mathbf{O}(\mathcal{X}\,(\times)\,\mathcal{X}') \subset \mathbf{O}(\mathcal{X})\,(\times)\,\mathbf{O}(\mathcal{X}')$, $\mathbf{O}(\mathcal{X}\,(\times)\,\mathcal{X}') \supset \mathbf{O}(\mathcal{X})\,(\times)\,\mathbf{O}(\mathcal{X}')$ неверно; вообще говоря. Пусть P_1 – метризуемое пространство с единственной неизолированной точкой ξ, в которой P_1 не является локально-сепарабельным; пусть P_2 есть открытый интервал $(0, 1)$. Известно, что пространство $P = P_1 \times P_2$ не является сильно-паракомпактным. Если в пространстве P отождествить все точки $[\xi, x]$, где $x \in P_2$, то мы получим сильно-паракомпактное пространство P^*, которое не являтеся произведением финально-компактного пространства на нульмерное паракомпактное пространство. Если мы теперь в качестве класса $\mathcal{X}$ возьмем класс всех дискретных пространств и в качестве класса $\mathcal{X}'$ класс всех финально компактных пространств, то

$$P \in \mathbf{O}(\mathcal{X})\,(\times)\,\mathbf{O}(\mathcal{X}') - \mathbf{O}(\mathcal{X}\,(\times)\,\mathcal{X}')\,, \quad P^* \in \mathbf{O}(\mathcal{X}\,(\times)\,\mathcal{X}') - \mathbf{O}(\mathcal{X})\,(\times)\,\mathbf{O}(\mathcal{X}')\,.$$

Предложение 6,1. *Для любого класса $\mathcal{X}$ топологических пространств $\mathcal{B}\,(\times)\,(\times)\,\mathbf{O}(\mathcal{X}) \subset \mathbf{O}(\mathcal{B}\,(\times)\,\mathcal{X})$.*

Доказательство достаточно просто и потому опускается.

Предложение 6,2. *Пусть класс $\mathcal{X}$ содержится в классе всех паракомпактных пространств. Тогда $\mathcal{B}\,(\times)\,\mathbf{O}(\mathcal{X}) \subset \mathbf{O}(\mathrm{cl}\, H\,(\times)\,\mathcal{X})$.*

Доказательство. Пусть $P = R \times Q$, Q – бикомпактное пространство, $R \in \mathbf{O}(\mathcal{X})$; пусть ω – открытое покрытие P. Легко найти пространство $X \in \mathcal{X}$, непрерывное отображение f пространства $R \times Q$ в $X \times Q$, покрытие α пространства X и для каждого $A \in \alpha$ конечное открытое покрытие $\{U_A^i;\ i = 1, 2, \ldots, n_A\}$ прострнства Q такое, что если положить $\beta = \{A \times U_A^i;\ i = 1, 2, \ldots, n_A,\ A \in \alpha\}$, то система $\{f^{-1}(B);\ B \in \beta\}$ вписана в ω. Можно еще предполагать, что α – локально-конечное покрытие и $\alpha = \bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, где α_k – дискретные системы подмножеств X. Положим $H_A^i = A \times U_A^i$; пусть G_A^i замкнуты, $G_A^i \subset H_A^i$, и семейство $\{G_i^A;\ i = 1, \ldots, n_A,\ A \in \alpha\}$ является покрытием $Y = X \times Q$. Положим $H_{ik} = \bigcup_{A \in \alpha_k} H_i^A$, $G_{ik} = \bigcup_{A \in \alpha_k} G_i^A$. Пусть $f_{i,k}$ – непрерывная функция такая, что $0 \leqq f_{i,k} \leqq 1$, $f_{i,k}(x) = 1$ для $x \in G_{i,k}$, $f_{i,k}(x) = 0$ для $x \in Y - H_{i,k}$. Пространство H мы будем понимать как пространство всех систем $h = \{h_{ik};\ i, k = 1, 2, \ldots\}$ где $0 \leqq h_{ik} \leqq 1$. Определим непрерывное отображение φ пространства $Y = X \times Q$ в $X \times H$; для $y = [x, q]$ положим $\varphi(y) = [x, \{f_{i,k}(y);\ i, k = 1, 2, \ldots\}]$. Надо еще найти открытое покрытие γ пространства $X \times H$ такое, чтобы $\{\varphi^{-1}(C);\ C \in \gamma\}$ было вписано в β. Для $A \in \alpha_k$, $i = 1, 2, \ldots, n_A$, мы положим $B_A^i = \{h \in H;\ h_{ik} > 0\}$, $B_A = \{h \in H;\ h_{ik} < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n_A\}$. Легко видеть, что $\gamma_A = \{A \times B_A\} \cup \{A \times B_i^A;\ i = 1, 2, \ldots, n_A\}$ является открытым покрытием $A \times H$, и покрытие $\gamma = \bigcup_{A \in \alpha} \gamma_A$ пространства $X \times H$ имеет требуемые свойства.

Если в предложении 6,2 взять в качестве класса $\mathscr{X}$ класс всех метризуемых или сильно метризуемых или метризуемых локально сепарабельных пространств, то мы получим известные теоремы о том, что при умножении на бикомпактное пространство сохраняется паракомпактность, сильная паракомпактность и т. п.

Литература

[1] *P. S. Alexandroff, P. S. Uryson:* Mémoire sur les espaces topologiques compacts. Verhandlungen kon. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam, sectie *I*, deel *XIV*., Nr. 1, 1—96.

[2] *M. Katětov:* Plně normální prostory. Dodatek II. v knize E. Čecha: Topologické prostory. Praha 1959.

[3] *Ю. М. Смирнов:* О топологических пространствах компактных в данном отрезке мощностей. Изв. АН СССР, сер. мат. *14* (1950), 155—178.

[4] *А. Зарелуа:* О теореме Гуревича. ДАН СССР *141* № 4 (1961), 777—780.

[5] *В. Трнкова:* Об объединениях сильно паракомпактных пространств. ДАН СССР *146* (1962), 43—46.

[6] *В. Трнкова:* О замыкании классов пространств по ω-отображениям. ДДН СССР *156*, № 2 (1964), 272—274.

Summary

THE CLOSURE OF CLASSES OF SPACES BY MEANS OF ω-MAPPINGS

Věra Trnková, Praha

Let ω be an open covering of a topological space P. A continuous mapping f on P into a space Q is called ω-mapping if there exists an open covering ψ of the space Q such that $\{f^{-1}(U);\ U \in \psi\}$ refines ω.

Let $\mathscr{X}$ be a class of topological spaces (containing, with any element P, all spaces homeomorphic to P). We shall denote by $\mathbf{O}(\mathscr{X})$ the class of all spaces P such that, for every open covering ω of P, there exists an ω-mapping into a space from $\mathscr{X}$. In the present paper properties of the "operator" $\mathbf{O}$ are studied.

The following relations hold: $\mathscr{X} \subset \mathbf{O}(\mathscr{X})$, $\mathbf{O}(\mathbf{O}(\mathscr{X})) = \mathbf{O}(\mathscr{X})$, $\mathbf{O}(\mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2) = \mathbf{O}(\mathscr{X}_1) \cup \mathbf{O}(\mathscr{X}_2)$, $\mathbf{O}(\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2) \subset \mathbf{O}(\mathscr{X}_1) \cap \mathbf{O}(\mathscr{X}_2)$.

For many classes of topological spaces (Hausdorff, regular, completely regular, normal, collectionwise normal, countably paracompact, paracompact, hypocompact, $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-compact) there holds $\mathbf{O}(\mathscr{X}) = \mathscr{X}$.

Let $\mathscr{X}_1 (\times) \mathscr{X}_2$ denote the class of all spaces $X_1 \times X_2$, where $X_i \in \mathscr{X}_i$ $(i = 1, 2)$. Let cl$P$ denote the class of all spaces homeomorphic with P. Let $E^\infty = (0, 1)^{\aleph_0}$, $H = \langle 0, 1 \rangle^{\aleph_0}$, let $\mathscr{D}$ be the class of all discrete spaces, $\mathscr{E}$ the class of all Euclidean spaces. Then

$\mathbf{O}(\mathrm{cl}\, H)$ is the class of all compact spaces,

$\mathbf{O}(\mathrm{cl}\, E^\infty)$ is the class of all regular Lindelöf spaces,

$\mathbf{O}(\mathscr{E})$ is the class of all regular spaces every open covering of which has an open countable refinement with finite order;

$\mathbf{O}(\mathscr{D})$ is the class of all *0*-dimensional paracompact spaces;

$\mathbf{O}(\mathscr{D}) (\times) \mathrm{cl} E^\infty)$ is the class of all hypocompact spaces;

$\mathbf{O}(\mathscr{D} (\times) E)$ is the class of all regular spaces every open covering of which has an open star-finite refinement with finite order;

$\mathbf{O}(\mathscr{D} (\times) \mathrm{cl}\, H)$ is the class of all hypocompact spaces all quasicomponents of which are compact, and having a complete collection of open-closed neighbourhoods;

$\mathbf{O}(\mathsf{m})$ is the class of all paracompact spaces (where m denotes the class of all spaces of all real bounded functions with the usual norm).

In the present paper some relations between the "operator" $\mathbf{O}$ and some further "operators" are given.

It is shown that in general neither $\mathbf{O}(\mathscr{X}_1 (\times) \mathscr{X}_2) \subset \mathbf{O}(\mathscr{X}_1) (\times) \mathbf{O}(\mathscr{X}_2)$ nor $\mathbf{O}(\mathscr{X}_1 (\times) \mathscr{X}_2) \supset \mathbf{O}(\mathscr{X}_1) (\times) \mathbf{O}(\mathscr{X}_2)$ hold.

The following theorem is proved:

Let $\mathscr{X}$ be contained in the class of all paracompact spaces. Then $\mathbf{O}(\mathrm{cl}\, H) (\times) \mathbf{O}(\mathscr{X}) \subset \mathbf{O}(\mathrm{cl}\, H (\times) \mathscr{X})$.

If in this theorem we choose for $\mathscr{X}$ the class of all metric spaces (or $\mathscr{X} = \mathscr{T}$ or $\mathscr{X} = \mathscr{D} (\times) \mathscr{T}$, where $\mathscr{T}$ denotes the class of all separable metric spaces), we obtain the well-known theorems that the product of a compact space with a paracompact space (or regular Lindelöf space or hypocompact space) is paracompact (regular Lindelöf, hypocompact, respectively).