Ján Jakubík

Лексикографические произведения частично упорядоченных группоидов

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 2, 281–305

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100620

Чехословацкий математический журнал т. 14 (89) 1964, Прага

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППОИДОВ

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 5/XI 1962 г.)

Изучаются разложения в лексикографическое произведение определенного класса частично упорядоченных группоидов, в первую очередь вопросы существования изоморфных уплотнений двух лексикографических разложений данного группоида.

А. И. Мальцев в [2] изучал разложения упорядоченной (= линейно упорядоченной) группы в лексикографическое произведение. В настоящей работе мы будем изучать разложения в лексикографическое произведение для некоторого класса T частично упорядоченных группоидов. Класс T содержит все частично упорядоченные группы, каждый лексикографический множитель которых является направленным множеством; в частности, T содержит все упорядоченные группы. В § 1 исследуются разложения с конечным числом факторов; § 2 посвящен разложениям, в которых может быть бесконечное число множителей. В § 3 изучается множество всех лексикографических разложений данного группоида, в котором естественным способом введено частичное упорядочение.

I

В настоящем параграфе вводятся понятия u_1-группоида и u-группоида. Затем определяется разложение u_1-группоида в лексикографическое произведение с конечным числом множителей. Простым способом доказывается существование изоморфных уплотнений двух лексикографических разложений u-группоида (путем индужции по числу $n_1 + n_2$, где n_1, n_2 означают, соответственно, число множителей в первом и во втором произведении).

1. Пусть A – частично упорядоченное множество (при помощи отношения $\leqq$; символ $<$ имеет обыкновенный смысл). Если элементы $a_1, a_2 \in A$ несравнимы, то мы запишем это обстоятельство следующим образом: $a_1 \parallel a_2$. Пусть $M = \{<, \parallel\}$. Предположим, что на A определена бинарная операция $+$, обладающая следующими свойствами:

a) существует нулевой элемент $0 \in A$ так, что для каждого $a \in A$ будет $a + 0 = 0 + a = a$;

b) если $x, y, z \in A$, $s \in M$, то $xsy \Rightarrow (x + z)\, s(y + z)$, $(z + x)\, s(z + y)$.

При выполнении приведенных предположений называем множество A u_1-группоидом. Множество $B \subset A$ мы называем u_1-подгруппоидом в A, если $0 \in B$ и если из соотношения $b_1, b_2 \in B$ вытекает $b_1 + b_2 \in B$. Если C, D — u_1-группоиды, то символом $C \simeq D$ мы выражаем их изоморфизм (т. е. существование простого отображения C на D, которое является изоморфным отображением по отношению к частичному упорядочению и одновременно по отношению к операции $+$).

2. Пусть A, B — u_1-группоиды, пусть C — множество всех пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$, в котором определено частичное упорядочение лексикографически, (т.е. $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ тогда и только тогда, когда $a_1 < a_2$ или $a_1 = a_2$ и одновременно $b_1 < b_2$; сравни [1], стр. 9). На C определим операцию $+$ по координатам: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Тогда C, очевидно, u_1-группоид; мы назовем его лексикографическим произведением u_1-группоидов A, B и обозначим через $C = [A \circ B]$. Множества $A_1 = \{a, 0_B) \mid a \in A\}$, $B_1 = \{(0_A, b) \mid b \in B\}$ являются, очевидно, u_1-подгруппоидами в C и $A \simeq A_1$, $B \simeq B_1$. (Символы 0_A и 0_B означают, соответственно, нулевые элементы в A и B.)

3. Пусть G — u_1-группоид, пусть G_1, G_2 — u_1-подгруппоиды в G, удовлетворяющие следующим условиям:

a) каждый элемент $g \in G$ можно одним единственным способом представить в виде $g = g_1 + g_2$, $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$;

b) если $x, y \in G$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in G_1$, $x_2, y_2 \in G_2$, то $x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$;

c) при условиях из б) справедливо соотношение $x < y$ тогда и только тогда, когда либо $x_1 < y_1$, либо $x_1 = y_1$, $x_2 < y_2$.

Легко можно обнаружить, что отображение $g \to (g_1, g_2)$ (пользуемся обозначениями из a)) является изморфным отображением u_1-группоида G на $C = [G_1 \circ G_2]$. При таком положении мы пишем:

$$G = G_1 \circ G_2 \,. \tag{3.1}$$

Мы говорим, что соотношение (3.1) определяет лексикографическоре разложение u_1-группоида G.

4. *Пусть для u_1-группоида G имеет место следующее*: $G = (A \circ B) \circ C$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. *Тогда* $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Доказательство. Так как $a, b \in A \circ B$, $c \in C$, то согласно 3b) $a + (b + c) = (a + 0) + (b + c) = (a + b) + (0 + c) = (a + b) + c$.

5. Псуть выполнены те же условия, как в 4, пусть, далее, $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, $c_1 \in C$, $x = (a + b) + c$, $x_1 = (a_1 + b_1) + c_1$. Пусть $s \in M$. Если $a \neq a_1$, то согласно 3c) xsx_1 тогда и только тогда, если asa_1. Пусть $a = a_1$, $b \neq b_1$. Тогда xsx_1 только в том случае, когда bsb_1.

6. *Если $G = (A \circ B) \circ C$, то $G = A \circ (B \circ C)$.*

Доказательство. Пусть D — подгруппоид в G, образованный множеством $B \cup C$. По предположению и по абз. 3 $D = B \circ C$. Согласно 4 выполняются для A, D условия 3a), b). Согласно 5 выполняется для A, D и условие 3c).

Аналогичным способом можно доказать: $G = A \circ (B \circ C) \Rightarrow G = (A \circ B) \circ C$.

Замечание. В силу 6 можем вместо выражения $(A \circ B) \circ C$ писать $A \circ B \circ C$ и аналогично (по индукции) можем писать без скобок выражение $A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n$. Мы скажем, что A представляет собой лексикографический множитель (или лексикографический фактор) в G, если существуют u_1-подгруппоиды H, D в G так, что $G = H \circ A \circ D$. Напомним, что всегда $G = \{0\} \circ G \circ \{0\}$, $G = G \circ \{0\} \circ \circ \{0\}$, и т. под.

Пусть $G = A_1 \circ \ldots \circ A_n$, пусть k_i — натуральные числа, $1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < < k_m \leqq n$, пусть C_{k_i} — u_1-подгруппоид u_1-группоида A_{k_i} $(i = 1, \ldots, m)$. Пусть C — множество всех $c \in G$, которые можно представить в виде $c = c_1 + \ldots + c_m$, $c_i \in C_{k_i}$. (Из результата в 4 по индукции вытекает, что в предыдущем выражении можем опустить скобки; этим обстоятельством мы еще несколько раз воспользуемся.) Очевидно, что C является u_1-подгруппоидом в G и что $C = C_{k_1} \circ \circ \ldots \circ C_{k_m}$.

Лекцикографическим разложением (с конечным числом множителей) u_1-группоида G мы называем представление G в виде $G = A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n$.

7. *Пусть G — u_1-группоид, $G = A \circ B$. Множество B является выпуклым в G.*

Доказательство. Пусть $b_1, b_2 \in B$, $z \in G$, $b_1 \leqq z \leqq b_2$, $z = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Из соотношения $0 + b_1 \leqq a + b \leqq 0 + b_2$ вытекает $a = 0$, значит, $z \in B$.

8. Если C является подмножеством u_1-группоида G, то обозначим $C^+ = = \{c \mid c \in C, c \geqq 0\}$, $C^- = \{c \mid c \in C, c \leqq 0\}$. G мы назовем u-группоидом, если он выполняет условие (P): если A_1, A_2 — лексикографические множители в G, то
$$A_1^+ \subset A_2^+ \Rightarrow A_1 \subset A_2\,, \quad A_1^- \subset A_2^- \Rightarrow A_1 \subset A_2\,.$$

В абз. 9—18 мы предполагаем, что G — u-группоид.

Замечание 1. Если A — лексикографический множитель в G, то A является u-группоидом. Каждый лексикографический множитель B в A, то есть, является одновременно лексикографическим множителем в G.

Замечание 2. Так как всегда $G = G \circ \{0\} = \{0\} \circ G$, то из определения u-группоида непосредственно вытекает: если A — лексикографический множитель в G, $A \neq \{0\}$, то существуют элементы $a_1, a_2 \in A$, $a_1 < 0 < a_2$.

9. *Пусть* $G = A \circ B$, $G = C \circ D$. *Тогда или* $B \subset D$ *или* $D \subset B$.

Доказательство. Пусть $D \nsubseteq B$. Так как G u-группоид, то существуют элементы $d_1, d_2, d_1 \in D^+ - B^+$, $d_2 \in D^- - B^-$. (Если X, Y — множества, то символом $X - Y$ мы обозначаем их разность.) Пусть $d_i = a_i + b_i$, $a_i \in A$, $b_i \in B$; так как $d_i \notin B$, то $a_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Из соотношения $d_1 > 0$ вытекает тогда $a_1 > 0$; аналогично $a_2 < 0$. Для каждого $b \in B$ будет, следовательно, $d_2 < b < d_1$, так что, солгасно 7, $B \subset D$.

10. Пусть $G = A \circ B$, $C \subset G$. Каждый элемент $x \in C$ представим в виде $x = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Множество всех элементов a или b, полученных таким образом (если x пробегает множество C) обозначим символом $C(A)\,[A \circ B]$ или $C(B)\,[A \circ B]$ (по случаю, не может ли возникнуть недоразумения, $C(A)$ или $C(B)$). Если $C = \{x\}$, то мы вместо указанных символов будем писать $x(A)\,[A \circ B]$ или короче $x(A)$ и аналогично для B. Подобными обозначениями мы пользуемся и в случае лексикографических разложений с n факторами. Если $G = A_1 \circ \ldots \circ A_n$, то, очевидно, имеет место следующее: для $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, $a_i \in A_i$ будет $a_i(A_i) = a_i$, $a_i(A_j) = 0$; для $x \in G$ будет $x(A_i \circ A_{i+1})\,(A_i) = x(A_i)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$.

11. *Пусть* $G = A \circ B$, $G = C \circ D$, $D \subset B$. *Тогда* $B = E \circ D$, *причем* $E = B(C)\,[C \circ D] = B \cap C$.

Доказательство. Обозначим $B(C) = E$. Тогда E является, очевидно, u_1-группоидом в G. Пусть $c \in E$. Тогда существует $b \in B$ так, что $b = c + d$, $d \in D$. Так как $d \in B$, будет, согласно 3b) $b = (c(A) + c(B)) + d = c(A) + (c(B) + d)$ и, следовательно, в силу 3a) (однозначность представления) $c(A) = 0$, $c \in B$. Значит, E является u_1-подгруппоидом в B. Для u_1-группоидов E, D в B, очевидно, выполняются условия 3a), b), c); следовательно, $B = E \circ D$. Мы уже доказали соотношение $E \subset B \cap C$. Пусть $x \in B \cap C$. Тогда $x(C) = x$, значит, $x \in E$. Итак, $E = B \cap C$.

Замечание. Если $G = A \circ B = C \circ D$, то $B(C) \subset B$, $B(D) \subset B$. Если, то есть, $D \subset B$, то согласно 11 $B(C) = B \cap C \subset B$ и $B = E \circ D$, откуда вытекает $B(D) \subset D \subset B$; если $B \subset D$, то $B(D) = B$, $B(C) = \{0\}$. Следовательно, во всяком случае $B = (B \cap C) \circ (B \cap D)$. Из предыдущих результатов можно путем полной индукции доказать: Если $G = A \circ B$, $G = C_1 \circ C_2 \circ \ldots \circ C_n$, то $B = (B \cap C_1) \circ \ldots \circ (B \cap C_n) = B(C_1) \circ \ldots \circ B(C_n)$.

12. Пусть $G = A \circ B$. Рассмотрим наименьшую конгруэнцию $R(B) = R$ на группоиде G, в которой все элементы множества B принадлежат одному классу. Нетрудно убедиться в том, что каждый класс этой конгруэнции имеет вид $\{a + x \mid x \in B\}$ при данном $a \in A$. Класс этой конгруэнции, содержащий данный элемент $g \in G$, обозначим через $\bar{g}$. Значит, каждый класс $\bar{g}$ содержит лишь один элемент $a \in A$, и отображение $\bar{g} \to a$ определяет изоморфизм фактор-группоида G/R на группоид A.

13.1. Пусть $G = A \circ B$, $G = A \circ C$. Тогда $B = C$. Согласно 9, то есть, будет $B \subset C$ или $C \subset B$. Пусть, например, $B \subset C$. Тогда по 11 $C = E \circ B$, откуда получаем $G = A \circ E \circ B$ (*). Пусть $e \in E$. По преположению можно e записать в виде $e = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Из уравнений $e = a + 0 + b$, $e = 0 + e + 0$ (в силу 4 можем в этих выражениях не писать скобок), учитывая равенство (*) и однозначность представления, получаем утверждение $e = 0$, так что $E = \{0\}$, $C = B$.

13.2. *Пусть $G = H_1 \circ A \circ D_1$, $G = H_2 \circ A \circ D_2$, $A \neq \{0\}$. Тогда $D_1 = D_2$.*

Доказательство. Пусть $d_1 \in D_1$. Согласно 8 (замечание 2) существует $a_1, a_2 \in A$, $a_1 < 0 < a_2$. Справедливо соотношение $a_1 < d_1 < a_2$, и ввиду того, что множество $A \circ D_2$ является в силу 7 выпуклым в G, получаем $d_1 \in A \circ D_2$, $A \circ D_1 \subset A \circ D_2$; подобным образом получается $A \circ D_2 \subset A \circ D_1$. В итоге имеем $A_1 \circ D_1 = A_2 \circ D_2$. По 13.1 тогда будет $D_1 = D_2$.

Замечание 1. Для $A = \{0\}$ аналогичное утверждение неверно.

Замечание 2. Если $G = H \circ A \circ D$, $A \neq \{0\}$, то лексикографический множитель D (однозначно определенный) называем концевым лексикографическим множителем, принадлежащим A.

13.3. Пусть $G = A \circ B$, $G = C \circ B$. Вообще не должно быть $A = C$. (Пример: Пусть D — упорядоченная (аддитивная) группа всех целых чисел, $G = [D \circ D]$, $A = \{(x, 0)\}$, $B = \{(0, x)\}$, $C = \{(x, x)\}$, где x в каждом из предыдущих случаев пробегает множество D.)

13.4. *Пусть $G = A \circ B$, $G = C \circ B$. Соответствие $a \to c$, где $a = c + b$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ определяет изоморфизм и-группиоида A на и-группоид C.*

Доказательство. Пусть R имеет то же значение, как в отделе 12. По рассуждениям отд. 12 отображение $a \to c$ (возникшее сложением отображений $a \to \bar{a} = \bar{c} \to c$) является изоморфизмом по отношению к операции $+$. Пусть, далее, $a_1 = c_1 + b_1$, $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, $c_1 \in C$. Из определения упорядочения в лексикографическом произведении вытекает, что $a_1 < a$ тогда и только тогда, если $c_1 < c$.

14. Пусть

$$G = G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_n\,, \tag{14.1}$$

пусть для $i = 1, \ldots, n$ выполняется $G_i = G_{i1} \circ \ldots \circ G_{im(i)}$. Тогда на основании ассоциативности получаем

$$G = G_{11} \circ G_{12} \circ \ldots \circ G_{ij} \circ \ldots \circ G_{nm(n)}\,. \tag{14.2}$$

Мы скажем, что лексикографическое разложение (14.2) является уплотнением лексикографического разложения (14.1).

Пусть далее,

$$G = H_1 \circ H_2 \circ \ldots \circ H_m . \tag{14.3}$$

Мы говорим, что лексикографические разложения (14.1), (14.3) изоморфны, если $n = m$ и если для $i = 1, \ldots, n$ также G_i, H_i изоморфны.

15. Теорема. *Лексикографические разложения $G = A_1 \circ \ldots \circ A_n$, $G = B_1 \circ \ldots \circ B_m$ и-группоида G имеют изоморфные уплотнения.*

Доказательство произведем индукцией по натуральному числу $n + m$. Имеет место неравенство $n + m \geqq 2$; если $n + m = 2$, то утверждение тривиально. Пусть $n + m > 2$.

Согласно 9 можем, не умаляя общности, предполагать $A_n \subset B_m$, следовательно, по 11 $B_m = E \circ A_n$, $G = B_1 \circ B_2 \circ \ldots \circ B_{m-1} \circ E \circ A_n$. Согласно 13.4 $A_1 \circ \ldots \circ A_{n-1} \simeq B_1 \circ \ldots \circ B_{m-1} \circ E$. По предположению индукции этим утверждение доказано.

Следующие рассуждения из отд. 16—18, касающиеся лексикографических разложений с конечным числом множителей, используем и в дальнейшем при исследовании лексикографических разложений, в которых число множителей может быть бесконечным.

16. *Пусть $G = A \circ B$, $G = C_1 \circ C_2 \circ \ldots \circ C_n$, $A \neq \{0\}$. Тогда $A = C_1(A) \circ \ldots \circ C_n(A)$.*

Доказательство. Если бы было $C_i \subset B$ для $i = 1, \ldots, n$, то мы получили бы $G \subset B$, $A = \{0\}$, что противоречит предположению. Следовательно, существует i так, что $C_i \not\subset B$; выберем наибольшее i, имеющее такое свойство; так как $C_i \circ C_{i+1} \circ \ldots \circ C_n \not\subset B$, должно быть $B \subset C_i \circ C_{i+1} \circ \ldots \circ C_n$, так что $C_i \circ \ldots \circ C_n = Z \circ B$ для удобного u-подгруппоида Z u-группоида G. Из уравнений $G = A \circ B$, $G = C_1 \circ \ldots \circ C_{i-1} \circ Z \circ B$ по рассуждениям отд. 13.4 вытекает: u-группоид $Z_1 = C_1 \circ \ldots \circ C_{i-1} \circ Z$ изоморфен с u-группоидом A; соответствующий изоморфизм дан отображением $z_1 \to f(z_1) = z_1(A)$. Следовательно, $A = f(Z_1) = f(C_1 \circ \ldots \circ C_{i-1} \circ Z) = f(C_1) \circ \ldots \circ f(C_{i-1}) \circ f(Z) = C_1(A) \circ \ldots \circ C_{i-1}(A) \circ Z(A)$. Если $k > i$, то $C_k \subset B$, так что $C_k(A) = \{0\}$. Для окончания доказательства достаточно доказать равенство $Z(A) = C_i(A)$.

Пусть $x \in Z$. Тогда $x \in C_i \circ \ldots \circ C_n$, следовательно, элемент x можно писать в виде $x = c_i + c_{i+1} + \ldots + c_n$, $c_k \in C_k$, $k = i, i+1, \ldots, n$. Так, как $c_{i+1}, \ldots, c_n \in B$, то по предыдущему уравнению $x(A) = c_i(A)$, откуда вытекает $Z(A) \subset C_i(A)$. Пусть, далее, $y \in C_i$. Тогда $y \in Z \circ B$, так что $y = z + b$ для удобных $z \in Z$, $b \in B$. Значит, $y(A) = z(A)$ (потому что $b(A) = 0$), откуда получаем $C_i(A) \subset Z(A)$, и, в итоге, $C_i(A) = Z(A)$.

Предыдущий результат можно обобщить следующим образом:

16.1. *Пусть* $G = H \circ A \circ D$, $G = C_1 \circ C_2 \circ \ldots \circ C_n$. *Тогда* $A = (A \circ D \cap C_1)(A) \circ \circ \ldots \circ (A \circ D \cap C_n)(A)$.

Доказательство. Согласно 11 $A \circ D = (A \circ D \cap C_1) \circ \ldots \circ (A \circ D \cap C_n)$, так, что ввиду 16 доказываемое равенство имеет место.

16.2. В отделах 16.2 – 18 исследуем лексикографические разложения вида

$$G = H \circ A \circ D\,, \quad G = H' \circ B \circ D'\,.$$

В силу 9 множества $A \circ D$, D, $B \circ D'$, D' образуют цепь (в системе всех подмножеств множества G, частично упорядоченной при помощи множественного включения). Так как $D \subset A \circ D$, $D' \subset B \circ D'$, то для упорядочения элементов этой цепи возможны следующие случаи:

a) $B \circ D' \subset D$,
b) $D' \subset D \subset B \circ D' \subset A \circ D$,
c) $D \subset D' \subset B \circ D' \subset A \circ D$,
d) $D' \subset D \subset A \circ D \subset B \circ D'$,
e) $D \subset D' \subset A \circ D \subset B \circ D'$,
f) $A \circ D \subset D'$.

Обозначим $(A \circ D \cap B)(A) = E_1$. В случае a) $B \subset D$, так что $B(A) = \{0\}$, $E_1 = \{0\}$. В случае f) $A \circ D \cap B = \{0\}$, $E_1 = \{0\}$. Во всех остальных случаях $D \cup D' \subset A \circ D \cap B \circ D'$, и оба эти множества являются лексикографическими факторами в G, следовательно, в силу 11 $D \cup D'$ – лексикографический множитель в u-группоиде $A \circ D \cap B \circ D'$. В принятых обозначенийх справедливо следующее утверждение:

17. *В случаях* b) – e) $A \circ D \cap B \circ D' = E_1 \circ (D \cap D')$.

Доказательство произведем постепенно для отдельных случаев b) – e).

Случай b). Требуется доказать, что $B \circ D' = E_1 \circ D$. Сначала докажем соотношение $(B \circ D')(A) = B(A)$. Очевидно, что $B(A) \subset (B \circ D')(A)$. Пусть $x = b + d' \in B \circ D'$, $b \in B$, $d' \in D'$. Так как $d' \in D$, то $d'(A) = 0$, $x(A) = b(A) \in \in B(A)$, т. е. $(B \circ D')(A) \subset B(A)$. Теперь по отд. 11 имеем $B \circ D' = (B \circ D' \cap A) \circ \circ (B \circ D' \cap D) = (B \circ D')(A) \circ D = B(A) \circ D = E_1 \circ D$.

Случай c). В этом случае также $E_1 = B(A)$; требуется доказать, что $B \circ D' = = B(A) \circ D'$. Согласно 6.1 $A = (A \circ D \cap H')(A) \circ (A \circ D \cap B)(A) \circ (A \circ D \cap D')(A) = = (A \circ D \cap H')(A) \circ B(A) \circ D'(A)$, так что $A \circ D = (A \circ D \cap H')(A) \circ B(A) \circ \circ D'(A) \circ D$. Одновременно, в силу 11, $D' = D'(A) \circ D$, следовательно, $A \circ D = = (A \circ D \cap H')(A) \circ B(A) \circ D'$. Значит, в G существует лексикографический фактор $B(A) \circ D'$. Остается доказать, что справедливо равенство $B \circ D' = = B(A) \circ D'$. Прежде всего $B(A) \subset (B \circ D')(A) = B \circ D' \cap A \subset B \circ D'$, значит,

$B(A) \circ D' \subset B \circ D'$. Далее, каждый элемент $b \in B$ можно представить в виде $b = a + d$, $a \in A$, $d \in D$. Так как $d \in D'$, $a \in B(A)$, то $b \in B(A) \circ D'$, откуда вытекает $B \circ D' \subset B(A) \circ D'$.

Случай d)—e). Обозначим $A \circ D \cap B = B'$, $(A \circ D \cap B')(A) = E_1'$. Так как $G = H \circ (A \circ D)$, $G = (H' \circ B) \circ D'$, $D' \subset A \circ D$, будет в силу 11 (вместо B, C, D имеем теперь $A \circ D$, $H' \circ B$, D') $A \circ D = (A \circ D \cap H' \circ B) \circ D'$. Пусть $h' \in H'$, $b \in B$, $h' + b \in A \circ D$. Так как $A \circ D \subset B \circ D'$, то $(A \circ D)(H') = \{0\}$, следовательно $(h' + b)(H') = \{0\}$. Но одновременно $(h' + b)(H') = h'$, так что $h' = 0$, $b \in A \circ D$. Из этого вытекает $A \circ D \cap H' \circ B = A \circ D \cap B$, так что $A \circ D = (A \circ D \cap B) \circ D' = B' \circ D'$. Согласно b) или же c) тогда будет

$$A \circ D \cap B' \circ D' = E_1' \circ (D \cup D') . \tag{17.1}$$

Ибо $A \circ D \cap B = A \circ D \cap B'$, будет $E_1 = E_1'$. Далее, в случаях d), e) $A \circ D \cap B' \circ D' = A \circ D = A \circ D \cap B \circ D'$, так что, в силу (17.1), доказываемое утверждение справедливо и в случаях d), e).

17.1. Из 17 и 13.4 вытекает в качестве непосредственного следствия: В случаях b)—*e*) $E_1 \neq \{0\}$ тогда и только тогда, если $D \cup D' \neq A \circ D \cap B \circ D'$.

17.2. Если в 17 заменим символы A, B и D, D', то получим:

В случаях b)—e) $A \circ D \cap B \circ D' = (B \circ D' \cap A)(B) \circ (D \cup D')$.

18. $(A \circ D \cap B)(A) \simeq (B \circ D' \cap A)(B)$.

Доказательство. В случаях a), f) правая и левая часть приведенного соотношения равна $\{0\}$. В случаях b)—e) вытекает утверждение из 17, 17.2, 13.4.

II

В настоящем параграфе мы определим лексикографическое произведение u_1-группоидов G_i, где индекс i пробегает упорядоченное множество I (оно может быть конечным или бесконечным). Затем при помощи „внутрених свойств" характеризуется разложение u_1-группоида в такое лексикографическое произведение. Описано построение, посредством которого каждой паре α, β лексикографических разложений данного u-группоида G поставлены в соответствие лексикографически разложения $f_1(\alpha, \beta)$, $f_2(\alpha, \beta)$ так, что $f_1(\alpha, \beta)$ является уплотнением разложения α, $f_2(\alpha, \beta)$ является уплотнением разложения β, и лексикографические разложения $f_1(\alpha, \beta)$, $f_2(\alpha, \beta)$ изоморфны. Аналогичный результат имеет место и для т. наз. σ-разложений; таким образом получается обобщение одной из теорем А. И. Мальцева [2].

19. Приступаем к случаю, когда число лексикографических множителей может быть бесконечным. Пусть $I \neq \emptyset$ — упорядоченное множество. Пусть для каждого $i \in I$ G_i является u_1-группоидом с нулем 0_i. Обозначим символом

$[(l)\prod G_i\,(i\in I)]$ или же $[(l)\prod G_i]$ множество всех функций f, отображающих множество I в $\cup\, G_i$ и таких, что

a) для каждого $i\in I$ $f(i)\in G_i$;

b) для каждой f множество $I(f)=\{i\mid i\in I,\, f(i)\neq 0\}$ является вполне упорядоченным.

Элемент $f(i)$ мы также называем состовляющей элемента f в G_i. На множестве $[(l)\prod G_i]$ определим операцию $+$ по составляющим. Пусть $f,g\in [(l)\prod G_i]$, $f\neq g$. По предположению множество $I_1=I(f)\cup I(g)$ вполне упорядочено; пусть j — наименьший элемент в I_1. Для $s\in M$ положим fsg тогда и только тогда, когда $f(j)\,s\,g(j)$. В таком случае $[(l)\prod G_i]$ есть u_1-группоид. Если $I=\{1,2,\ldots,n\}$, то $[(l)\prod G_i]=[G_1\circ\ldots\circ G_n]$. Нулевой элемент в $[(l)\,\Pi G_i]$ обозначим 0.

20. Пусть σ — порядковое число такое, что сумма и произведение двух порядковых чисел, меньших σ, опять-таки меньше σ. Пусть $[(\sigma)\,\Pi G_i]$ — множество всех $f\in[(l)\prod G_i]$, для которых справедливо следующее: порядковый тип множества $I(f)$ меньше σ. Очевидно, что $[(\sigma)\prod G_i]$ является u_1-подгруппоидом в $[(l)\prod G_i]$. (Сравни А. И. Мальцев [2].)

21. Пусть $G=[(l)\prod G_i\,(i\in I)]$. Для каждого $j\in I$ пусть символы D_j, S_j, H_j означают соответственно множество всех $f\in G$, для которых из соотношений $i\leqq j$, $i\neq j$, $i\geqq j\;(i\in I)$ (соответственно) вытекает $f(i)=0$. Тогда множества D_j, S_j, H_j являются u_1-подгруппоидами в G, $S_j\simeq G_j$. Далее:

a) для каждого $j\in I$ $G=H_j\circ S_j\circ D_j$;

b) если $x\in G$, то множество всех $j\in I$, для которых $x(S_j)\neq 0$, вполне упорядочено;

c) если I_1 — вполне упорядоченное подмножество множества I и если для каждого $j\in I_1$ выберем произвольно элемент $x_j\in S_j$, то будет существовать как раз один элемент $x\in G$ так, что для каждого $i\in I_1$, $j\in I-I_1$ будет $x(S_i)=x_i$, $x(S_j)=0$;

d) если $i,j\in I$, $i<j$, то $S_j\circ D_j\subset D_i$, $H_i\circ S_i\subset H_j$.

22. Условия a)—d) из отдела 21 позволяют дать внутреннюю характеристику лексикографического произведения в случае бесконечного числа лексикографических множителей.

22.1. *Пусть G — u_1-группоид. Пусть I — упорядоченное множество. Пусть для каждого $j\in I$ существуют u_1-подгруппоиды H_j, S_j, D_j в G так, что выполнены условия* a)—d) *из отд.* 21. *Элементу $x\in G$ поставим в соответствие функцию f, определенную на I следующим образом: $f(i)=x(S_i)$ для каждого $i\in I$. Тогда соответствие $x\to f$ является изоморфным отображением u_1-группоида G на u_1-группоид $[(l)\prod S_i(i\in I)]$.*

Доказательство произведем в несколько приемов.

α) *Описанное отображение*

$$x \to f \tag{22.1}$$

является простым отображением множества G *на множество* $[(l)\prod S_i(i \in I)]$. *Далее, отображение* (22.1) *является гомоморфным относительно операции* $+$.

Первое утверждение вытекает из c); второе утверждение очевидно.

β) *Пусть* $i, j \in I$. *Справедливы утверждения*:

β_1) *Пусть* $i < j$, $x \in H_i \circ S_i$. *Тогда* $x(S_j) = 0$.

β_2) *Пусть* $i < j$, $y \in S_j \circ D_j$. *Тогда* $y(S_i) = 0$.

β_3) *Пусть* $i \neq j$, $x \in S_i$. *Тогда* $x(S_j) = 0$.

Если выполнены предположения из β_1), то согласно d) $x \in H_j$, так что $x(S_j) = 0$. Если же выполнены предположения из β_2), то $y \in D_i$, $y(S_i) = 0$. Утверждение β_3) вытекает из β_1) и β_2).

γ) *Пусть* $i \in I$, $x, y \in G$. *Пусть для каждого* $j \in I$, $j < i$ *будет* $x(S_j) = y(S_j)$. *Тогда* $x(H_i) = y(H_i)$.

Это утверждение докажем следующим образом. В силу a) можно x представить в виде $x = x(H_i) + x(S_i \circ D_i)$, и для каждого $k \in I$

$$x(S_k) = x(H_i)(S_k) + x(S_i \circ D_i)(S_k)\,; \tag{22.2}$$

аналогично для y. Пусть $k < i$. Согласно β) $x(S_i \circ D_i)(S_k) = 0 = y(S_i \circ D_i)(S_k)$, и так как по предположению $x(S_k) = y(S_k)$, должно, ввиду (22.2), быть $x(H_i)(S_k) = y(H_i)(S_k)$. Если $k > i$, то согласно β) $x(H_i)(S_k) = 0 = y(H_i)(S_k)$; эти равенства, очевидно, верны и для $k = i$. Следовательно по α) $x(H_i) = y(H_i)$.

δ) *Пусть* $x, y \in G$, $x \neq y$, *пусть* j — *наименьший элемент в* I, *для которого*

$$x(S_j) \neq y(S_j)\,. \tag{22.3}$$

В таком случае соотношение xsy *справедливо тогда и только тогда, если* $x(S_j)\, s\, y(S_j)$ $(s \in M)$.

Доказательство. Отметим сначала, что согласно α) индекс j, имеющий требуемое свойство, существует. Далее, в силу γ) $x(H_j) = y(H_j)$, так что по a) и по (22.3) соотношение xsy выполнено именно тогда, когда $x(S_j)\, s\, y(S_j)$.

Из α)—δ) теперь уже вытекает, что отображение (22.1) является изоморфизмом.

22.2. Введем следующее понятие: Если выполнены условия a)—d), то мы скажем, что G является лексикографическим произведением своих u_1-подгруппоидов S_i и пишем

$$G = (l)\prod S_i \; (i \in I) \tag{22.4}$$

или более коротко $G = (l)\prod S_i$. Соотношение (22.4) представляет лексикографическое разложение u_1-группоида G.

Из этого определения и из 22.1 непосредственно вытекает:

22.3. *Пусть* $G = (l)\prod S_\iota$. *Тогда справедливы утверждения* $\alpha)-\delta)$ *из отдела* 22.1.

23. Пусть σ имеет то же значение как в 20. Пусть G — u_1-группоид, пусть I — упорядоченное множество. Пусть для каждого $j \in I$ существуют u_1-подгруппоиды H_j, S_j, D_j в G так, что выполнены условия a), d) из отд. 21. Пусть далее выполнено:

b′) если $x \in G$, то множество всех $j \in I$, для которых $x(S_j) \neq 0$, вполне упорядочено и его порядковый тип меньше σ;

c′) если I_1 — вполне упорядоченное подмножество множества I, причем порядковый тип множества I_1 меньше σ, и если для каждого $j \in I_1$ выберем элемент $x_j \in S_j$, то будет существовать лишь один элемент $x \in G$ так, что для $j \in I_1$ или же $j \in I - I_1$ будет $x(S_j) = x_j$ или же $x(S_j) = 0$.

При этих условиях u_1-группоид G изморфен с u_1-группоидом $[(\sigma)\prod S_i\,(i \in I)]$; доказательство производится подобным способом, как в отд. 22. В таком случае мы пишем $G = (\sigma)\prod S_i\,(i \in I)$; мы говорим, что G является σ-произведением u_1-группоидов S_i.

Замечание. Большинство нижеследующих результатов сформулированы для лексикографических разложений; нетрудно проверить, что аналогичные результаты верны и для σ-разложений.

24. Пусть $G = (l)\prod A_i\,(i \in I)$, $G = (l)\prod B_k\,(k \in K)$. Мы скажем, что эти лексикографические разложения изоморфны, если будет существовать изоморфизм φ множества I на K так, что для каждого $i \in I$ будет $A_i \simeq B_{\varphi(i)}$.

Пусть выполняется (22.4); пусть каждый u_1-группоид S_i можно разложить в лексикографическое произведение $S_i = (l)\prod S_{ij}\,(j \in J_i)$. Пусть Q — множество всех пар (i, j), $i \in I$, $j \in J_i$, упорядоченное лексикографически, т. е. $(i_1, j_1) < (i_2, j_2)$ тогда и только тогда, если или $i_1 < i_2$, или $i_1 = i_2$ и одновременно $j_1 < j_2$. Пусть $i \in I$, $j \in J_i$, пусть (при аналогичных обозначениях как в 22) $S_i = H_{ij}^0 \circ S_{ij} \circ D_{ij}^0$, значит, $G = H_i \circ H_{ij}^0 \circ S_{ij} \circ D_{ij}^0 \circ D_i$ (сравни отд. 6); обозначим $D_{ij} = D_{ij}^0 \circ D_i$, $H_{ij} = H_i \circ H_{ij}^0$. Тогда

$$G = (l)\prod S_q\,(q \in Q)\,. \tag{24.1}$$

Доказательство этого соотношения получим путем непосредственной проверки выполнения условий a)–d) из отд. 21 (вместо H_i, D_i имеем теперь H_{ij}, D_{ij}). Аналогичный результат имеет место и для σ-произведений. Лексикографическое разложение (24.1) называется уплотнением разложения (22.4).

Замечание. Если G — u-группоид и если выполнено (22.4), то согласно 21 а) все S_i являются u-группоидами. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что G — u-группоид.

25. Пусть $\emptyset \neq I_1 \subset I$. Пусть для каждого $i \in I_1$ будет T_i — u-подгруппоидом в S_i. Обозначим $T = \{x \mid x \in G,\ x(S_i) \in T_i$ для каждого $i \in I_1,\ x(S_j) = 0$ для $j \in I - I_1\}$. Из 22.1 получаем

$$T = (l) \prod T_i \, (i \in I_1) . \tag{25.1}$$

Замечание. Если для $i \in I' \subset I$ является Z_i u-подгруппоидом в S_i, то символ $(l) \prod Z_i \, (i \in I')$ имеет всегда аналогичное значение, как в (25.1).

25.1. Из изоморфизма (25.1) непосредственно вытекает:

а) Пусть $I_1 \neq \emptyset$ — выпуклое подмножество в I, пусть I_2 или же I_3 множество всех $j \in I$, которые при каждом $i \in I_1$ выполняют неравенство $j < i$ или же $j > i$. Пусть $H = (l) \prod S_i \ (i \in I_2)$, $A = (l) \prod S_i \ (i \in I_1)$, $D = (l) \prod S_i \ (i \in I_3)$. Тогда $G = H \circ A \circ D$, $\bigcap D_i \, (i \in I_1) = D$, $\bigcup S_i \circ D_i \, (i \in I_1) = A \circ D$.

b) Если I — множественная сумма взаимно непересекающихся множеств $J_k \neq \emptyset \, (k \in K)$, из которых каждое является выпуклым в I, то $G = (l) \prod T_k \, (k \in K)$, где $T_k = (l) \prod S_i \, (i \in J_k)$.

В отделах 26—32 мы считаем выполнеными равенство (22.4) и равенство $G = A \circ B$.

26. Обобщением результата из отд. 11 является соотношение:

$$B = (l) \prod B(S_i) \ (i \in I) . \tag{26.1}$$

Доказательство. а) Так как для $i \in I$ справедливо $B(S_i) \subset S_i$, то согласно 25 имеет смысл символ $(l) \prod B(S_i) \, (i \in I) = B'$. Пусть $x \in B$, $i \in I$. Из уравнения $G = H_i \circ S_i \circ D_i$ вытекает, вследствие замечания из отд. 11, $x(S_i \circ D_i) \in B$. Согласно тому же замечанию будет тогда $x(S_i) = x(S_i \circ D_i) \, (H_i \circ S_i) \in B$. Следовательно, $x \in B'$.

b) Наоборот, пусть $0 \neq x \in B'$, т. е. $x(S_i) \in B(S_i)$ для каждого $i \in I$. Пусть j — наименьший элемент из I, удовлетворяющий соотношению $x(S_j) \neq 0$. Если бы в таком случае было $B \subset D_j$, то мы получим бы $B(S_j) = \{0\}$ и, следовательно, $x(S_j) = 0$, что противоречит условию. Итак, должно быть $D_j \subset B$. Далее, по 22γ) $x(H_j) = 0$, так что $x \in S_j \circ D_j$. Согласно 9 или $S_j \circ D_j \subset B$, или $B \subset S_j \circ D_j$. В первом случае $x \in B$. Во втором случае, в силу 11, $B = (B \cap H_j \circ S_j) \circ D_j$. Одновременно $x = x(S_j) + x(D_j)$, $x(S_j) \in H_j \circ S_j$. Так как $x \in B'$, то $x(S_j) \in B(S_j)$, следовательно, существует элемент $b \in B$ так, что $x(S_j) = b(S_j)$. Согласно части а) этого доказательства будет $b(S_j) \in B$, значит, $x(S_j) \in B \cap H_j \circ S_j$. Из этого вытекает $x \in (B \cap H_j \circ S_j) \circ D_j = B$.

Замечание. В силу а) имеем $B(S_i) \subset B \cap S_i$; очевидно, $B \cap S_i = (B \cap S_i)(S_i) \subset B(S_i)$, так что $B(S_i) = B \cap S_i$, $B = (l) \prod (B \cap S_i) \, (i \in I)$.

27. *Пусть $G \neq \{0\}$, пусть I' — множество всех тех $i \in I$, для которых $S_i \neq \{0\}$. Тогда $G = (l)\prod S_i \ (i \in I')$.*

Доказательство вытекает непосредственно из определения лексикографического произведения (отд. 20, 21).

В следующих рассуждениях предполагаем, что для (22.4) имеют место соотношения $G \neq \{0\}$, $I = I'$. Займемся подробнее разложением (26.1).

28. *Пусть $B \neq \{0\}$. Пусть $I(B)$ — множество всех $i \in I$, для которых $B \cap S_i \neq \{0\}$. Если $i_1, i_2 \in I$, $i_1 \in I(B)$, $i_1 < i_2$, то $S_{i_2} \subset B$. $I(B)$ — двойственный идеал в I.*

Доказательство. Пусть $i_1, i_2 \in I$, $i_1 < i_2$, $i_1 \in I(B)$. Согласно (26.1) $B \cap S_{i_1}$ является лексикографическим множителем в G и по предположению $B \cap S_{i_1} \neq \{0\}$, так что, в силу замечания 2 из отд. 8, существуют элементы $x_1, x_2 \in B \cap S_{i_1}$, $x_1 < 0 < x_2$. Пусть $x \in S_{i_2}$. Тогда $x \in D_{i_1}$, следовательно, $x_1 < x < x_2$. Из выпуклости B вытекает $x \in B$, так что $S_{i_2} \subset B$. Второе утверждение является непосредственным следствием первого.

Теперь будем различать два случая:

a) Пусть в $I(B)$ нет наименьшего элемента. Тогда по (26.1) и 28

$$B = (l)\prod S_i \ (i \in I(B)) \,. \tag{28.1}$$

b) Пусть i_0 — наименьший элемент в $I(B)$. Тогда

$$B = (S_{i_0} \cap B) \circ (l)\prod S_i \ (i \in I,\ i > i_0) \,. \tag{28.2}$$

29. *Пусть φ — изоморфное отображение и-группоида $P = (l)\prod P_i \ (i \in I)$ на и-группоид Q, пусть для каждого $i \in I$ Q_i — образ множества P_i в этом изморфизме. Тогда $Q = (l)\prod Q_i \ (i \in I)$.*

Это утверждение вытекает из определения лексикографического произведения.

30. *Пусть выполняется* (28.1). *Тогда $A = (l)\prod S_i(A) \ (i \in I - I(B))$.*

Доказательство. Очевидно, что $G = (l)\prod\limits_{i \in I - I(B)} S_i \circ (l)\prod\limits_{i \in I(B)} S_i$, так что $G = (l)\prod\limits_{i \in I - I(B)} S_i \circ B$. Обозначим $(l)\prod\limits_{i \in I - I(B)} S_i = C$. Из уравнений $G = A \circ B$, $G = C \circ B$ вытекает по 13.4 соотношение $C \simeq A$, причем соответствующий изморфизм определен отображением $c \to c(A)$ $(c \in C)$. Итак, согласно 29 будет $A = (l)\prod S_i(A) \ (i \in I - I(B))$.

31. *Пусть выполняется* (28.2). *Тогда $A = (l)\prod\limits_{i < i_0} S_i(A) \circ (S_{i_0} \circ D_{i_0} \cap A)$.*

Доказательство. Так как $(l)\prod S_i \ (i > i_i) = D_{i_0}$ (сравни 25.1), то $B \subset S_{i_0} \circ D_{i_0}$. Согласно 11 $S_i \circ D_{i_0} = (S_{i_0} \circ D_{i_0} \cap A) \circ (S_{i_0} \circ D_{i_0} \cap B) = (S_{i_0} \circ D_{i_0} \cap A) \circ B$. Следовательно, $G = H_{i_0} \circ (S_{i_0} \circ D_{i_0} \cap A) \circ B$. Обозначим $C = H_{i_0} \circ (S_{i_0} \circ D_{i_0} \cap A)$. Ибо $(S_{i_0} \circ D_{i_0} \cap A)(A) = S_{i_0} \circ D_{i_0} \cap A$, получаем подобным образом как в 30 $A = (l)\prod\limits_{i < i_0} S_i(A) \circ (S_{i_0} \circ D_{i_0} \cap A)$.

32. $A = (l) \prod S_i(A)\ (i \in I)$.

Доказательство. В случае выполнения (28.1) для каждого $i \in I(B)$ $S_i \subset B$, значит, $S_i(A) = \{0\}$, так что доказываемое равенство имеет место. В случае (28.2) $S_i \subset B$ для каждого $i > i_0$. Пусть $b \in B$. Для $i < i_0$ $b(S_i) = 0$ по определению элемента i_0; следовательно, в силу 22.3 и 22γ) $b \in S_{i_0} \circ D_{i_0}$, так что $B \subset \subset S_{i_0} \circ D_{i_0}$. Из соотношений $G = A \circ B$, $G = H_{i_0} \circ (S_{i_0} \circ D_{i_0})$ затем по 11 вытекает $S_{i_0} \circ D_{i_0} \cap A = (S_{i_0} \circ D_{i_0})(A)$. Пусть $x \in S_{i_0} \circ D_{i_0}$. Тогда $x = s + d$, $s \in S_{i_0}$, $d \in D_{i_0} \subset B$ (из соотношения $B \subset D_{i_0}$ вытекало бы $B \cap S_{i_0} = \{0\}$, что противоречит предположению). Итак, $d(A) = 0$, $x(A) = s(A)$, $(S_{i_0} \circ D_{i_0})(A) = S_{i_0}(A)$.

33. Пусть для u-группоида G справедливы уравнения:

$$G = (l) \prod A_i\ (i \in I)\,, \tag{33.1}$$

$$G = (l) \prod B_j\ (j \in J)\,. \tag{33.2}$$

Не умаляя общности, можем предполагать, что $I \cap J = \emptyset$; это условие будем в нальнейшем считать выполненным. Значит, к любому $i \in I$ или же $j \in J$ существуют лексикографические множители H_i, D_i или же H_j, D_j так, что $G = H_i \circ A_i \circ D_i$, $G = H_j \circ B_j \circ D_j$. Согласно 26 $A_i \circ D_i = (l) \prod (A_i \circ D_i \cap B_j)\ (j \in J)$. Тогда, в силу 32, $A_i = (l) \prod (A_i \circ D_i \cap B_j)(A_i)\ (j \in J)$. Обозначим

$$E_{ij} = (A_i \circ D_i \cap B_j)(A_i)\,.$$

Следовательно, для каждого $i \in I$

$$A_i = (l) \prod E_{ij} \quad (j \in J)\,. \tag{33.3}$$

Пусть I_1 — множество всех пар (i, j), $i \in I$, $j \in J$, упорядоченное лексикографически. По (33.3)

$$G = (l) \prod E_k \quad (k \in I_1)\,; \tag{33.4}$$

это лексикографическое разложение является уплотнением разложения (33.1).

Обозначим далее $E_{ji} = (B_j \circ D_j \cap A_i)(B_j)$; пусть J_1 — множество всех пар (j, i), $j \in J$, $i \in I$, упорядоченное лексикографически. Аналогично тому, как в предыдущем случае, получаем

$$B_j = (l) \prod E_{ji} \quad (i \in I)\,, \tag{33.4'}$$

$$G = (l) \prod E_k \quad (k \in J_1)\,. \tag{33.5}$$

33.1. *Если $D_i \cup D_j \supset A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j$, то $E_{ij} = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть приведенное соотношение выполнено. Пусть $D_i \subset D_j$. Если при этом еще $A_i \circ D_i \supset B_j \circ D_j$, то по предположению $D_j \supset \supset B_j \circ D_j$, так что $B_j = \{0\}$; значит, $E_{ij} = (A_i \circ D_i \cap B_j)(A_i) = B_j(A_i) = \{0\}$. Если $A_i \circ D_i \subset B_j \circ D_j$, то $(A_i \circ D_i \cap B_j)(A_i) \subset (D_j \cap B_j)(A_i) = \{0\}(A_i) = \{0\}$. Пусть, далее, $D_j \subset D_i$. Если $A_i \circ D_i \subset B_j \circ D_j$, то по предположению $D_i \supset$

$\supset A_i \circ D_i$, следовательно, $A_i = \{0\}$; очевидно, что $E_{ij} \subset A_i$, значит, $E_{ij} = \{0\}$. Предположим, что $B_j \circ D_j \subset A_i \circ D_i$. Тогда $B_j \circ D_j \subset D_i$, следовательно, $A_i \circ D_i \cap B_j \subset B_j \subset D_i$, откуда вытекает $E_{ij} \subset D_i(A_i) = \{0\}$.

33.2. Из (33.4′) и из определения лексикографического произведения вытекает, что существуют лексикографические множители H_{ij}, D_{ij} так, что $G = H_{ij} \circ E_{ij} \circ D_{ij}$.

Пусть $E_{ij} \neq \{0\}$. *Тогда* $D_{ij} = D_i \cup D_j$.

Доказательство. Так как $E_{ij} \neq \{0\}$, то по 33.1 $D_i \cup D_j \subsetneq A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j$.[1]) Согласно 17 $A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j = E_{ij} \circ (D_i \cup D_j)$. Ибо $A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j$ является концевым лексикографическим фактором в G, можем писать $G = H \circ (A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j)$, так что $G = H \circ E_{ij} \circ (D_i \cup D_j)$. Согласно 13.2 тогда будет $D_{ij} = D_i \cup D_j$.

34. В следующих отделах пользуемся таким же обозначением, как в 33.

Пусть $(i, j) \in I_1$, $(k, l) \in I_1$, $k < i$, $l > j$, $E_{ij} \neq \{0\}$. *Тогда* $E_{kl} = \{0\}$.

Доказательство. Так как $E_{ij} \neq \{0\}$ является согласно 33.4 лексикографическим множителем в G, существует, в силу отд. 8 (замечание 2), элемент $a \in E_{ij}$, $a > 0$. Далее существует элемент $x \in A_i \circ D_i \cap B_j$ так, тчо $x(A_i) = a$. Следовательно, должно быть $x > 0$. Для каждого $y \in (B_l \circ D_l)^+ \subset D_j^+$ тогда будет $y < x$, так что $B_l \circ D_i \subset A_i \circ D_i \subset D_k$. Из этого вытекает $B_l(A_k) = \{0\}$, $E_{kl} = \{0\}$.

Следствие. Пусть I'_1 – множество таких $(i, j) \in I_1$, для которых $E_{ij} \neq \{0\}$. Если $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in I'_1$, $(i_1, j_1) \leqq (i_2, j_2)$, то $i_1 \leqq i_2$, $j_1 \leqq j_2$.

Замечание. Аналогичный результат имеет место и для J_1.

35. Теорема. *Два произвольных лексикографических разложения и-группоида G имеют изоморфные уплотнения.*

Доказательство. Если $G = \{0\}$, то утверждение тривиально; пусть $G \neq \{0\}$. Легко можно обнаружить, что производя доказательство, можем ограничиться случаем, когда все множители исследуемых разложений отличны от $\{0\}$ („нулевые" лексикографические множители можем в любом количестве добавлять или выпускать). Пусть заданы лексикографические разложения (33.1), (33.2). Пусть для каждого $i \in I$ и для каждого $j \in J$ будет $A_i \neq \{0\} \neq B_j$. По (33.4) и (33.5)

$$G = (l) \prod E_{ij} \quad ((i, j) \in I'_1), \tag{35.1}$$

$$G = (l) \prod E_{ji} \quad ((j, i) \in J'_1). \tag{35.2}$$

Согласно 18 для каждого $(i, j) \in I_1 E_{ij} \simeq E_{ji}$. В частности, $(i, j) \in I'_1$ тогда и только тогда, когда $(j, i) \in J'_1$. По 34 (следствие) соответствие $(i, j) \to (j, i)$ опре-

---

[1]) Если $P \subset Q$, $P \neq Q$, то мы пишем $P \subsetneq Q$.

деляет изоморфизм упорядоченного множества I'_1 на J'_1. Лексикографические разложения (35.1), (35.2), следовательно, изоморфны. Очевидно, что (35.1) и (35.2) служат соответственно уплотнением разложений (33.1) и (33.2).

Замечание. Если символами α, β обозначим соответственно разложения (33.1) и (33.2), то символы $f_1(\alpha, \beta)$ или же $f_2(\alpha, \beta)$ будут обозначать разложение (35.1) или же (35.2).

35′. Теорема. *Два произвольных σ-разложения и-группоида G имеют изоморфные уплотнения.*

Доказательство производилось бы одинаковым способом, как в предыдущей теореме. (Изоморфные уплотнения данных разложений являются в этом случае опять-таки σ-разложениями.)

35.1. При аналогичных обозначениях, как в 33.2, справедливо: *Если* $E_{ji} \neq \{0\}$, $G = H_{ji} \circ E_{ij} \circ D_{ji}$, *то* $D_{ji} = D_i \cup D_j$. (При доказательстве используется 17.2.)

36. *Пусть G — u_1-группоид. Пусть G по отношению к операции $+$ является квазигруппой. Тогда каждый лексикографический множитель A в G является квазигруппой.*

Доказательство. Пусть $G = H \circ A \circ D$, $a_1, a_2 \in A$. По предположению существует (единственный) элемент x так, что $a_1 + x = a_2$. Для любых $Z \in \in \{H, A, D\}$ будет $a_1(Z) + x(Z) = a_2(Z)$. Ибо $a_i(H) = a_i(D) = 0$ $(i = 1, 2)$, получаем $x(H) = x(D) = 0$, так что $x \in A$. Аналогичный результат имеет место и для элемента $y \in G$, удовлетворяющего уравнению $y + a_1 = a_2$.

Следствие. Если G — u_1-группоид и если G является по отношению к операции $+$ группой, то каждый лексикографический множитель в G является группой.

37. *Пусть G — u_1-группоид и пусть одновременно G — группа. Пусть A, B — — направленные лексикографические множители в G, $A^+ \subset B^+$. Тогда $A \subset B$.*

Доказательство. По 36 A, B — направленные группы. Пусть $z \in A$. Тогда существуют элементы $a_1, a_2 \in A^+$ такие, что $z = a_1 - a_2$. По предположению одновременно $a_1, a_2 \in B^+$, следовательно, $z \in B$, $A \subset B$.

Подобным способом доказывается аналогичное утверждение в случае $A^- \subset \subset B^-$.

Следствие. Пусть G — частично упорядоченная группа. Пусть все лексикографические множители в G направлены. Тогда G — u-группоид.

Из этого и из теоремы 35′ получим:

37.1. Теорема. *Пусть G — частично упорядоченная группа, пусть все лексикографические множители в G направлены. Тогда два любых σ-разложения G имеют изоморфные уплотнения.*[2])

---

[2]) Замечание при корректуре. См. тоже L. Fuchs: Partially ordered algebraic systems. Oxford 1963 (Chap. II, Theorem 9).

Замечание. Из этой теоремы вытекает в качестве частного случая теорема 2 А. И. Мальцева [2].

38. Относительно формулировки предыдущей теоремы заметим следующее: Если все лексикографические множители частично упорядоченной группы G направлены, то G, очевидно, также направлена; обратное утверждение не имеет места. Пример: Пусть A — аддитивная группа целых чисел, натурально упорядоченных; пусть B — аддитивная группа целых чисел с тривиальным частичным упорядочением (т. е. для $x, y \in B$ будет $x \leqq y$ только тогда, когда $x = y$), $G = [A \circ B]$ является направленной, но B нет. На этом примере одновременно видно, что направленная частично упорядоченная группа не должна быть обязательно u-группоидом (справедливо, то есть, $(\{0\} \circ B)^+ \subset \{0\}^+$, $\{0\} \circ B \not\subset \{0\}$). Наоборот, направленный u-группоид может не быть группой. Пример: пусть G — множество всех целых чисел, натурально упорядоченных. Положим $x \oplus y = 2x + 2y (x, y \in G)$. Тогда $G = G(\oplus, \leqq)$ — u_1-группоид. В G существуют только тривиальные лексикографические множители (т. е. $\{0\}$, G), так что G является u-группоидом, но не группой.

III

Ход рассуждений в этом параграфе мотивирован такой мыслью: Предположим, что $G \neq \{0\}$ была бы направленной группой; пусть $\mathscr{G}$ — множество всех ее прямых разложений, не содержащих лексикографические множители с одним элементом (сравни [3], [4, § 2]). Для $\alpha, \beta \in \mathscr{G}$ положим $\alpha \leqq \beta$, если α будет уплотнением разложения β. Если α, β — произвольные элементы из $\mathscr{G}$, построим их общее уплотнение $f(\alpha, \beta)$ при помощи построения, описанного в [3, § 5]. Легко можно доказать, что $f(\alpha, \beta) = \inf \{\alpha, \beta\}$.

Зададимся подобными проблемами для лексикографических разложений u-группоидов. Если $G \neq \{0\}$ — u-группоид и если $\mathscr{G}$ — множество всех лексикографических разложений u-группоида G, несодержащих тривиальных факторов, равных $\{0\}$ (частично упорядоченное при помощи отношения $\alpha \leqq \beta$, выражающего факт, что разложение α является уплотнением разложения β), то $\mathscr{G}$ не должно быть вовсе направленным множеством (сравни отд. 39). На $\mathscr{G}$ мы определим эквивалентность $\sim$; затем докажем, что $\alpha \sim \beta$ тогда и только тогда, когда $f_1(\alpha, \beta) = \alpha$, $f_2(\alpha, \beta) = \beta$) т. е. когда f_1, f_2 „не нарушат" исходные разложения α, β). Множество классов по отношению к эквивалентности $\sim$ естественным образом частично упорядочено; доказывается, что это множество является структурой, и исследуется связь между структурными операциями и операциями f_1, f_2, определенными на G.

Пусть G — u-группоид, $G \neq \{0\}$, пусть $\mathscr{G}$ — множество всех лексикографических разложений u-группоида G вида $G = (l) \prod G_i$ $(i \in I)$, в которых для каждого $i \in I$ $G_i \neq \{0\}$. Для $\alpha, \beta \in \mathscr{G}$ будем писать $\alpha \leqq \beta$, если разложение α

будет уплотнением разложения β; если при этом $\alpha \neq \beta$, то пишем $\alpha < \beta$. Множество $\mathscr{G}$ с отношением $\leqq$ является частично упорядоченным множеством. (Сравни отд. 24.)

В $\mathscr{G}$ всегда существует наибольший элемент (это тривиальное разложение, соержащее лишь один лексикографический множитель G), следовательно, $\mathscr{G}$ направлено вверх. Напротив, $\mathscr{G}$ не должно быть направленным вниз. Пример: Пусть G u-группоид, описанный в отделе 13.3. Потому что D (а также и A, B, C) лексикографически неразложимый u-группоид, то лексикографические разложения $G = A \circ B$, $G = C \circ B$ являются минимальными элементами в $\mathscr{G}$; очевидно, что эти разложения несравнимы в $\mathscr{G}$.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathscr{G}$, пусть α и β – соответственно разложения (33.1) и (33.2). Тогда $f_i(\alpha, \beta) \in \mathscr{G}$ $(i = 1, 2)$, $f_1(\alpha, \beta) \leqq \alpha$, $f_2(\alpha, \beta) \leqq \beta$ и разложения $f_1(\alpha, \beta)$, $f_2(\alpha, \beta)$ изоморфны.

Может встретиться такое положение, что уже „исходные“ разложения α, β изоморфны, и что при этом $f_1(\alpha, \beta) < \alpha$, $f_2(\alpha, \beta) < \beta$. (Если бы дело касалось только изоморфных уплотнений, то построение разложений $f_1(\alpha, \beta)$, $f_2(\alpha, \beta)$, описанное в отд. 35, было бы лишним.) Пример: Пусть I – множество всех рациональных чисел интервала $\langle 0, 1 \rangle$, пусть для каждого $i \in I$ означает A_i аддитивную группу всех целых чисел, натурально упорядоченных, $G = [(l) \prod A_i \ (i \in I)]$. Если x – иррациональное число, $x \in (0, 1)$, пусть A_x или же B_x множество тех $f \in G$, которые для каждого $i \in I$ выполняют соотношение $i > x \Rightarrow f(i) = 0$ или же $i < x \Rightarrow f(i) = 0$. Тогда, очевидно, $G = A_x \circ B_x$. Положим $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Разложения $(\alpha)\ G = A_{x_1} \circ B_{x_1}$, $(\beta)\ G = A_{x_2} \circ B_{x_2}$, очевидно, изоморфны. При этом, как легко проверить, $f_1(\alpha, \beta) = f_2(\alpha, \beta)$, и это разложение имеет как раз три множителя A_{x_1}, $A_{x_2} \cap B_{x_1}$, B_{x_2}.

Мы докажем, что между $f_1(\alpha, \beta)$ и $f_2(\alpha, \beta)$ имеется, помимо изоморфизма, еще другая узкая связь.

39. Разложения α, β назовем эквивалентными (символически $\alpha \sim \beta$) если существует отображение φ множества I на J так, что для каждого $i \in I$

a) $D_i = D_{\varphi(i)}$, b) $A_i \circ D_i = B_{\varphi(i)} \circ D_{\varphi(i)}$.

Так как все множители A_i отличны от $\{0\}$, вытекает из соотношений $i_1, i_2 \in I$, $i_1 < i_2$, что должно быть $D_{i_2} \subset D_{i_1}$, $D_{i_2} \neq D_{i_1}$, следовательно $D_{\varphi(i_2)} \subset D_{\varphi(i_1)}$, $D_{\varphi(i_2)} \neq D_{\varphi(i_1)}$; ибо $B_j \neq \{0\}$ для всех $j \in J$, то $\varphi(i_1) < \varphi(i_2)$. Значит, отображение φ – изоморфизм. Далее, из b) в силу 13 вытекает соотношение $A_i \simeq B_{\varphi(i)}$, значит, эквивалентные разложения изоморфны. Обратное утверждение неверно (смотри приведенный выше пример). Отношение $\sim$ является рефлексивным, симметрическим и тразитивным, так что оно определяет разбиение на множестве $\mathscr{G}$; систему всех классов этого разбиения обозначим через $\mathscr{G}_1$ и класс, содержащий лексикографическое разложение $\alpha \in \mathscr{G}$ через $t(\alpha)$.

40. Теорема. *Если* $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$, *то* $f_1(\alpha, \beta) \sim f_2(\alpha, \beta)$.

Доказателство. Пусть α и β — соответственно лексикографические разложения (33.1) и (33.2). Согласно 35 $f_1(\alpha, \beta)$ и $f_2(\alpha, \beta)$ являются соответственно разложениями (35.1) и (35.2). Согласно 35 отображение $\varphi: (i, j) \to (j, i)$ $((i, j) \in I'_1$, $(j, i) \in J'_1)$ является (простым изотонным) отображением множества I'_1 на J'_1. Согласно 17 каждое из выражений $E_{ij} \circ (D_i \cup D_j)$, $E_{ji} \circ (D_i \cup D_j)$ является концевым лексикографическим множителем в G и $E_{ij} \circ (D_i \cup D_j) = A_i \circ D_i \cap \cap B_j \circ D_j = E_{ji} \circ (D_i \cup D_j)$. Далее, по 13.2

$$D_{ij} = D_{ji} = D_i \cup D_j \,. \tag{40.1}$$

Этим утверждение доказано.

41. Пусть α, β имеют то же значение, как в предыдущем. Введем в $\mathcal{G}$ еще одно бинарное отношение $\prec$ следующим образом: $\alpha \prec \beta$ именно тогда, если к каждому $i \in I$ существует $j \in J$ так, что

$$D_j \subset D_i \subset A_i \circ D_i \subset B_j \circ D_j \tag{41.1'}$$

(сравни 16.2, c) или d)). Из определения отношения $\prec$ непосредственно вытекает, что это отношение рефлексивно и транзитивно. Далее, из любого из соотношений $\alpha \sim \beta$, $\alpha \leqq \beta$ вытекает $\alpha \prec \beta$.

42. При помощи отношения $\prec$ можно дать следующую характеристику эквивалентности $\sim$:

Сотношение $\alpha \sim \beta$ *выполнено тогда и только тогда, когда одновременно* $\alpha \prec \beta$, $\beta \prec \alpha$.

Доказательство. Утверждение „только тогда" имеет место по 41. Пусть $\alpha \prec \beta$, $\beta \prec \alpha$. Выберем $i \in I$; потому что $\alpha \prec \beta$, существует $j \in J$ так, что выполнены неравенства (41.1'). Если $j_1 \in J$, $j_1 > j$, то согласно 21d) $B_{j_1} \subset D_j$, значит, по (41.1') $(A_i \circ D_i \cap B_{j_1})(A_i) \subset B_{j_1}(A_i) \subset D_j(A_i) = \{0\}$, $E_{ij_1} = \{0\}$. Если $j_1 \in J$, $j_1 < j$, то в силу 21d) $B_j \circ D_j \subset D_{j_1}$, так что $B_j \circ D_j \cap B_{j_1} = \{0\}$, откуда получаем при помощи (41.1') $A_i \circ D_i \cap B_{j_1} \subset B_j \circ D_j \cap B_{j_1} = \{0\}$, так что также $E_{ij_1} = \{0\}$. Для каждого $j_1 \in J$, $j_1 \neq j$ будет, следовательно, $E_{ij_1} = \{0\}$. Если бы для $j_1 \neq j$ выполнялись соотношения, аналогичные (41.1') (где вместо j пишем j_1), то мы получили бы, в силу 17, $A_i \circ D_i = E_{ij_1} \circ D_i$, следовательно, $A_i \simeq E_{ij_1}$, $A_i = \{0\}$, что противоречит предположению. К каждому $i \in I$ существует, следовательно, один единственный элемент $j \in J$, удовлевоpяющий соотношению (41.1'). Далее, (так как $\beta \prec \alpha$) существует $i' \in I$ так, что

$$D_{i'} \subset D_j \subset B_j \circ D_j \subset A_{i'} \circ D_{i'} \,. \tag{42.1}$$

Из (41.1') и из (42.1) получаем

$$D_{i'} \subset D_i \subset A_i \circ D_i \subset A_{i'} \circ D_{i'} \,. \tag{42.2}$$

Если $i < i'$ или же $i > i'$, то в силу 21d) $A_{i'} \circ D_{i'} \subset D_i$ или же $A_i \circ D_i \subset D_{i'}$; из (42.2), следовательно, в обоих случаях получаем $A_i \circ D_i = D_i$, что противоречит предположению $A_i \neq \{0\}$. Из этого вытекает $i = i'$. Из последних рассуждений вытекает: если элементу $i \in I$ поставим в соответствие тот элемент $j \in J$, который удовлетворяет соотношениям (41.1′), получаем простое отображение φ множества I на множество J; из (41.1′), (42.1) и из равенства $i = i'$ вытекает далее $A_i \circ D_i = B_j \circ D_j$, $D_i = D_j$, так что $\alpha \sim \beta$.

43. Пусть $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in \mathscr{G}$, $\alpha \prec \beta$, $\alpha_1 \sim \alpha$, $\beta_1 \sim \beta$. Тогда $\alpha_1 \prec \beta_1$. (Утверждение вытекает непосредственно из определений отношений $\prec$, $\sim$.)

44. Для $t(\alpha), t(\beta) \in \mathscr{G}_1$ положим $t(\alpha) \prec t(\beta)$ тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha_1 \in t(\alpha)$, $\beta_1 \in t(\beta)$ будет $\alpha_1 \prec \beta_1$. Тогда $\mathscr{G}_1(\prec)$ является частично упорядоченным множеством. Это вытекает из результатов 41—43.

45. Отношение $\prec$ на $\mathscr{G}$ можем также характеризовать при помощи операции f_1 или f_2, опеределенной на $\mathscr{G}$.

Отношение $\alpha \prec \beta$ справедливо тогда и только тогда, если $f_1(\alpha, \beta) = \alpha$.

Доказательство. Пусть $f_1(\alpha, \beta) = \alpha$. Согласно 40 будет тогда $\alpha \sim f_2(\alpha, \beta) \leqq \leqq \beta$, так что по 41 и 43 $\alpha \prec \beta$. Наоборот, пусть $\alpha \prec \beta$. Аналогично тому, как в 42, доказывается, что для каждого $i \in I$ существует $j \in J$ так, что $E_{ij} = A_i$, $E_{ij'} = = \{0\}$ для $j' \neq j$. Следовательно, $f_1(\alpha, \beta) = \alpha$.

Подобное утверждение справедливо для операции f_2.

Замечание. Пусть u — произвольный из элементов $f_1(\alpha, \beta)$, $f_2(\alpha, \beta)$ и v — произвольный из элементов α, β. Очевидно, что $u \prec v$.

46. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathscr{G}$. Следующие условия эквивалентны:*

a) $\alpha \sim \beta$, b) $f_1(\alpha, \beta) = \alpha$, $f_2(\alpha, \beta) = \beta$.

Утверждение вытекает из 42 и 45.

47. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{G}$, пусть γ имеет вид $G = (l) \prod C_k (k \in K)$, $\gamma \prec \alpha$, $\gamma \prec \beta$. Тогда $\gamma \prec f_1(\alpha, \beta)$.*

Доказательство. Выберем $k \in K$; по предположению существует $i \in I$, $j \in J$ так, что

$$D_i \subset D_k \subset C_k \circ D_k \subset A_i \circ D_i\,, \quad D_j \subset D_k \subset C_k \circ D_k \subset B_j \circ D_j$$

(причем D_k — концевой лексикографический множитель принадлежащий C_k; не умаляя общности можем предполагать $K \cap I = \emptyset = K \cap J$). Из этого вытекает

$$D_i \cup D_j \subset D_k \subset C_k \circ D_k \subset A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j\,.$$

Так как $E_{ij} \circ (D_i \cup D_j) = A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j$, утверждение этим доказано.

47.1. Теорема. *В частично упорядоченном множестве* $\mathscr{G}_1$ *к двум произвольным элементам* $t(\alpha)$, $t(\beta)$ *существует точная нижняя грань* (*инфимум*) *и*

$$\inf\{t(\alpha),\ t(\beta)\} = t(f_1(\alpha, \beta))\,.$$

Утверждение вытекает из 45 и 47.

48. Для α, β пользуемся обозначениями из предыдущего. Если $i_1, i_2 \in I$, то будем писать $i_1 s i_2$ в том случае, когда существует $j \in J$ так, что для $i = i_1$ и для $i = i_2$

$$D_i \cup D_j \in A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j\,. \tag{48.1}$$

В случае $D_i \cup D_j \supset A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j$ по 33.1 будет $E_{ij} = \{0\}$. Если $D_i \cup D_j \subset A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j$, то $A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j = E_{ij} \circ (D_i \cup D_j)$. Условие (48.1), следовательно, выполнено как раз тогда, когда $E_{ij} \neq \{0\}$. Пусть $i \in I$. Потому что по предположению $A_i \neq \{0\}$, существует согласно (33.3) по крайней мере одно $j \in J$ так, что $E_{ij} \neq \{0\}$, т. е. для пары i, j выполняется (48.1), так что isi.

Мы пишем iti', если существуют $i_1, i_2, \ldots, i_n$ так, что $i = i_1 s_{i2} s \ldots s i_n = i'$. Соотношение t является рефлексивным, симметрическим и транзитивным, значит, оно определяет разбиение множества I на дизъюнктные классы; класс, содержащий элемент i, обозначим через $\bar{i}$.

49. *Пусть* $i_1 s i_2 s \ldots s i_n$, *пусть элемент* i' *лежит в интервале, ограниченном некоторыми из элементов* $i_1, \ldots, i_n$. *Тогда* $\bar{i}_1 = \bar{i}'$.

Доказательство посредством индукции по числу n. Если $n = 1$, то утверждение тривиально. Предположим, что $n > 1$ и что утверждени справедливо для $n - 1$. Допустим, что i' лежит в интервале, ограниченном элементами i_u, i_v, $u \leqq v$, $u, v \in \{1, \ldots, n\}$. Если $u, v \in \{1, \ldots, n - 1\}$ или $u, v \in \{2, \ldots, n\}$, то по предположению индукции $\bar{i}_u = \bar{i}'$; очевидно, что $\bar{i}_1 = \bar{i}_u$, так что $\bar{i}_1 = \bar{i}'$. Далее достаточно исследовать только случай, когда i' находится в интервале, ограниченном элементами i_1, i_n, и при этом i' не находится ни в каком из интервалов, ограниченных элементами i_1, i_k $(k = 1, \ldots, n - 1)$. В таком случае i' должно лежать в интервале, ограниченном элементами i_{n-1}, i_n. Мы докажем, что $i' s i_n$ (откуда вытекает $\bar{i}' = \bar{i}_n = \bar{i}_1$).

Предположим, что например, $i_{n-1} \geqq i_n$ (в случае $i_{n-1} \leqq i_n$ рассуждения ведутся по правилу двойственности). Если $i' = i_n$ или $i' = i_{n-1}$, то очевидно $i' s i_n$. Пусть $i_{n-1} > i' > i_n$. Тогда, в силу 21d) $A_{i(n-1)} \circ D_{i(n-1)} \subset D_{i'}$, $A_{i'} \circ D_{i'} \subset D_{i(n)}$ (в индексах пишем $i(n)$, $i(n - 1)$ вместо i_n, i_{n-1}). По предположению существует индекс j так, что выполнено соотношение (48.1) для $i = i(n)$ и для $i = i(n - 1)$.

Если бы было $D_{i(n)} \subset D_j$, то мы получили бы $A_{i(n-1)} \circ D_{i(n-1)} \subset D_j$, что противоречит (48.1) (для $i = i(n - 1)$). Следовательно, $D_j \in D_{i(n)}$. Согласно (48.1) (для $i = i(n)$) тогда будет $D_{i(n)} \in B_j \circ D_j$, так что и $D_{i'} \in B_j \circ D_j$; из этого и из предположения $B_j \neq \{0\}$ получаем $D_{i'} \cup D_j \Subset B_j \circ D_j$. Остается доказать соотношение $D_{i'} \cup D_j \Subset A_{i'} \circ D_{i'}$. Но если бы было $A_{i'} \circ D_{i'} \subset D_j$, то мы получили бы $A_{i(n-1)} \circ D_{i(n-1)} \subset D_j$, что привело бы нас к противоречию с (48.1) (для $i = i(n-1)$). Этим доказательство закончено.

50. *Пусть $\bar{I}$ множество всех классов $\bar{i}$, $i \in I$. Для каждого $\bar{i} \in \bar{I}$ обозначим $A_{\bar{i}} = (l) \prod A_i (i \in \bar{i})$. Тогда $G = (l) \prod A_{\bar{i}} (\bar{i} \in \bar{I})$.*

Доказательство вытекает из 48 и 49 (сравни тоже 25.1)).

Приведенное выше лексикографическое разложение обозначим $f_3(\alpha, \beta)$. Очевидно, что $\alpha \leqq f_3(\alpha, \beta)$.

51. $\beta \prec f_3(\alpha, \beta)$.

Доказательство. Нам надо доказать, что к любому $j \in J$ существует $i_1 \in I$, удовлетворяющее неравенству

$$D_{\bar{i}_1} \subset D_j \subset B_j \circ D_j \subset A_{\bar{i}_1} \circ D_{\bar{i}_1},$$

где $D_{\bar{i}_1}$ означает концевой лексикографический фактор в G принадлежащий к $A_{\bar{i}_1}$. Пусть $j \in J$. Пусть $I(j)$ — множество всех $i \in I$ таких, что $E_{ji} \neq \{0\}$. Поэтому, в силу 18, также и $E_{ij} \neq \{0\}$; если $i_i \in I(j)$, то для каждого $i \in I(j)$ выполнено по 48 соотношение $i_1 s i$, $i \in \bar{i}_1$.

Пусть $i \in I(j)$; рассмотрим разложение $G = H_{ji} \circ E_{ji} \circ D_{ji}$. По 32.2 и 35.1 $D_{ji} = D_i \cup D_j = D_{ij}$. Согласно 49 $\bar{i}$ является выпуклым подмножеством в I. Значит, если G представим в виде $G = H_{\bar{i}} \circ A_{\bar{i}} \circ D_{\bar{i}}$, то согласно 25.1a) и 13.2 будет $D_{\bar{i}} = \cap D_k \, (k \in \bar{i})$; в частности, $D_{\bar{i}} \subset D_i$, следовательно, $D_{\bar{i}} \subset D_{ij}$. Согласно 25a) $\bigcap D_{ji} \, (i \in I(j)) = D_j$, так что $D_{\bar{i}} \subset D_j$. Далее, для $i \in I(j)$, в силу 17. $E_{ji} \circ D_{ji} = A_i \circ D_i \cap B_j \circ D_j = E_{ij} \circ D_{ij} \subset A_i \circ D_i \subset A_{\bar{i}} \circ D_{\bar{i}}$, так что и $\bigcup E_{ji} \circ \circ D_{ji} \; (i \in I(j)) \subset A_{\bar{i}} \circ D_{\bar{i}}$. Согласно 25a) и (33.4′) будет однако $\bigcup E_{ji} \circ D_{ji} \; (i \in I(j)) = B_j \circ D_j$; этим утверждение доказано.

52. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{G}$, $\alpha \prec \gamma$, $\beta \prec \gamma$, пусть γ имеет вид $G = (l) \prod C_k \, (k \in K)$. Пусть для выбранной пары $i \in I$, $j \in J$ имеет место соотношение* (48.1) *и пусть, далее, для некоторого $k \in K$ будет $D_k \subset D_i \subset A_i \circ D_i \subset C_k \circ D_k$ (D_k — концевой лексикографический множитель, принадлежащий к C_k). Тогда также $D_k \subset D_j \subset B_j \circ D_j \subset C_k \circ D_k$.*

Доказательство. По предположению существует $k_1 \in K$ так, что $D_{k_1} \subset \subset D_j \subset B_j \circ D_j \subset C_{k_1} \circ D_{k_1}$. Предположим, что $k_1 \neq k$. Пусть $k < k_1$. Тогда $C_{k_1} \circ D_{k_1} \subset D_k$, так что $B_j \circ D_j \subset D_k \subset D_i$, что противоречит (48.1). Аналогично из соотношения $k_1 < k$ получаем $C_k \circ D_k \subset D_{k_1}$, $A_i \circ D_i \subset D_{k_1} \subset D_j$, что опять-таки противоречит (48.1). Итак, должно быть $k_1 = k$, чем доказательство закончено.

53. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathscr{G}$, $\alpha \prec \gamma$, $\beta \prec \gamma$. Тогда $f_3(\alpha, \beta) \prec \gamma$.*

Доказательство. Пусть γ имеет вид из 52. Пусть $\bar{i}_1 \in \bar{I}$. Нам дано доказать, что существует $k \in K$ так, что

$$D_k \subset D_{\bar{i}_1} \subset A_{\bar{i}_1} \circ D_{\bar{i}_1} \subset C_k \circ D_k\,. \tag{53.1}$$

Так как $\alpha \prec \gamma$, существует $k \in K$ такое, что

$$D_k \subset D_{i_1} \subset A_{i_1} \circ D_{i_1} \subset C_k \circ D_k\,.$$

Пусть $i_1 s i_2$. Тогда существует B_j так, что для $i = i_1$ и $i = i_2$ выполнено соотношение (48.1). Согласно 52 в таком случае также $D_k \subset D_j \subset B_j \circ D_j \subset C_k \circ D_k$; используя опять 52 (для j, i_2) получим $D_k \subset D_{i_2} \subset A_{i_2} \circ D_{i_2} \subset C_k \circ D_k$. Из доказанного по индукции вытекает: если $i t i_1$ (т. е. если $i \in \bar{i}_1$), то $D_k \subset D_i \subset A_i \circ D_i \subset C_k \circ D_k$. Потому что $D_{\bar{i}_1} = \bigcap D_i$ $(i \in \bar{i}_1)$, $A_{\bar{i}_1} \circ D_{\bar{i}_1} = \bigcup A_i \circ D_i$ $(i \in \bar{i}_1)$, вытекает из предыдущего неравенства соотношение (53.1).

54. Теорема. *Если $\alpha, \beta \in \mathscr{G}$, то в $\mathscr{G}_1$*

$$t(f_3(\alpha, \beta)) = \sup \{t(\alpha), t(\beta)\}\,.$$

Утверждение вытекает из 50, 51 и 53.

Из 54 и 47.1 получаем:

54.1. Теорема. *Частично упорядоченное множество $\mathscr{G}_1$ является структурой.*

Литература

[1] *G. Birkhoff*: Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Vol. *XXV* (1948).

[2] *А. И. Мальцев:* Об упорядоченных группах. Изд. Акад. наук СССР, серия матем. *13*, (1949), 473—482.

[3] *Е. П. Шимбирева:* К теории частично упорядоченных групп. Матем. сборник *10*, (1947), 145—175.

[4] *Я. Якубик:* Прямые разложения частично упорядоченных групп, II. Чехосл. матем. журнал *11* (*86*), (1961), 490—515.

Zusammenfassung

LEXIKOGRAPHISCHE PRODUKTE VON HALBGEORDNETEN GRUPPOIDEN

JÁN JAKUBÍK, Košice

Es sei $G \neq \emptyset$ eine (durch die Relation $\leqq$) teilweise geordnete Menge, in der eine binäre (nicht notwendig kommutative) Operation $+$ erklärt ist, so dass aus $x, y, z \in G$,

xsy immer $(x + z)\, s(y + z)$ und $(z + x)\, s(z + y)$ folgt; dabei ist s ein beliebiges Element der Menge $\{<, \|\}$ ($x \| y$ bedeutet, dass x und y unvergleichbar sind). Es sei weiter vorausgesetzt, dass es in G ein Nullelement 0 gibt, das für jedes $x \in G$ den Gleichungen $x + 0 = 0 + x = x$ genügt. Dann wird G ein u_1-Gruppoid genannt. Ist $A \subset G$, bezeichnen wir $A^+ = \{a \mid a \in A, a \geqq 0\}$, $A^- = \{a \mid a \in A, a \leqq 0\}$; A heisst u_1-Untergruppoid von G, wenn $0 \in A$ und wenn $x, y \in A \Rightarrow x + y \in A$. Es seien A, B u_1-Untergruppoide von G, die den folgenden Bedingungen genügen:

a) $A + B = G$ und aus $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ $(a_i \in A, b_i \in B)$ folgt $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$;

b) aus $g_i = a_i + b_i$ $(a_i \in A,\ b_i \in B,\ i = 1, 2)$ folgt: $g_1 + g_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$, $g_1 < g_2 \Leftrightarrow a_1 < a_2$, oder $a_1 = a_2$ und $b_1 < b_2$.

Unter diesen Voraussetzungen wird G ein lexikographisches Produkt von A, B genannt (im Zeichen $G = A \circ B$). Es ist bewiesen, dass die Operation $\circ$ assoziativ ist, d. h. dass die Beziehungen $G = (A \circ B) \circ C$, $G = A \circ (B \circ C)$ äquivalent sind. Es sei

$$G = A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n \,, \tag{1}$$

$$G = B_1 \circ B_2 \circ \ldots \circ B_m \,. \tag{2}$$

A_i, B_j heissen lexikographische Faktoren von G. Die Zerlegungen (1) und (2) werden isomorph genannt, wenn $n = m$ und wenn A_i und B_i $(i = 1, \ldots, n)$ isomorph sind. Die Zerlegung (2) ist eine Verfeinerung von (1), wenn jedes A_i ein lexikographisches Produkt von gewissen B_j ist. Ein u_1-Gruppoid G wird u-Gruppoid genannt, wenn $A^+ \subset B^+ \Rightarrow A \subset B$ und $A^- \subset B^- \Rightarrow A \subset B$ für je zwei lexikographische Faktoren von G. Das Hauptergebnis von § 1 ist Satz 15: Ist G ein u-Gruppoid, so besitzen die Zerlegungen (1) und (2) isomorphe Verfeinerungen. (Bemerken wir, dass eine gemeinsame Verfeinerung von (1) und (2) nicht immer existiert.)

Im § 2 wird eine lexikographische Zerlegung $G = (l) \prod A_i$ $(i \in M)$ mit einer beliebigen Anzahl von Faktoren A_i erklärt, wobei A_i u_1-Untergruppoide von G sind und M eine geordnete Menge ist. Die im § 1 eingeführten Begriffe der Verfeinerung und der isomorphen Zerlegungen werden in naheliegender Weise für Zerlegungen mit beliebiger Anzahl von Faktoren verallgemeinert. Es sei G ein u-Gruppoid und es seien α, β beliebige lexikographische Zerlegungen von G. Es werden neue Zerlegungen $f_1(\alpha, \beta)$ und $f_2(\alpha, \beta)$ konstruiert, so dass $f_1(\alpha, \beta)$ bzw. $f_2(\alpha, \beta)$ eine Verfeinerung von α bzw. β ist. Wir beweisen den Satz (Satz 25): Die Zerlegungen $f_1(\alpha, \beta)$ und $f_2(\alpha, \beta)$ sind isomorph. Durch eine kleine Modifikation des vorigen Satzes erhalten wir den Satz 35, der eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von A. I. MAL'CEV [2, Satz 2] darstellt (der Satz von Mal'cev bezieht sich auf den Fall, wenn G eine geordnete Gruppe ist).

Im § 3 wird die Menge $\mathscr{G}$ aller solchen lexikographischen Zerlegungen eines u-Gruppoids untersucht, in denen lauter von $\{0\}$ verschiedene Faktoren auftreten. Für $\alpha, \beta \in \mathscr{G}$ setzen wir $\alpha \leqq \beta$, wenn α eine Verfeinerung von β ist; dann ist $\mathscr{G}$ eine halbgeordnete Menge. Es wird gezeigt, dass $\mathscr{G}$ im allgemeinen kein Verband zu sein braucht. Es sei

$$\alpha\colon\ G = (l)\prod A_i\ (i \in M)\,,\quad \beta\colon\ G = (l)\prod B_j\ (j \in N)\,.$$

Aus der Definition der lexikographischen Zerlegung folgt, dass es für jedes $i \in M$ und für jedes $j \in N$ lexikographische Faktoren H_i, D_i, H_j, D_j von G gibt, so dass $G = H_i \circ A_i \circ D_i$ und $G = H_j \circ B_j \circ D_j$ gilt; der Faktor D_i bzw. D_j ist durch A_i bzw. B_j eindeutig bestimmt. Wir setzen $\alpha \sim \beta$, wenn ein Isomorphismus $\varphi : M \to N$ existiert, so dass

$$D_i = D_{\varphi(i)}\,,\quad A_i \circ D_i = B_{\varphi(i)} \circ D_{\varphi(i)}$$

für jedes $i \in M$ ist. Wenn $\alpha \sim \beta$ gilt, so sind die Zerlegungen α und β isomorph (für isomorphe Zerlegungen α, β braucht die Beziehung $\alpha \sim \beta$ im allgemeinen nicht zu gelten). Es ist bewiesen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathscr{G}$ ist; die Menge der entsprechenden Klassen bezeichnen wir mit $\mathscr{G}_1$ und die das Element α enthaltende Klasse sei $\bar{\alpha}$. Jede Klasse $\bar{\alpha}$ ist eine konvexe Teilmenge von $\mathscr{G}$. In $\mathscr{G}_1$ ist in natürlicher Weise die Halbordnung definiert ($\bar{\alpha} \leqq \bar{\beta}$ wenn es Elemente $\alpha_1 \in \bar{\alpha}$, $\beta_1 \in \bar{\beta}$ gibt, so dass $\alpha_1 \leqq \beta_1$). Es ist bewiesen, dass $f_1(\alpha, \beta) \sim f_2(\alpha, \beta)$ gilt und dass die Beziehung $\alpha \sim \beta$ mit $f_1(\alpha, \beta) = \alpha, f_2(\alpha, \beta) = \beta$ äquivalent ist. Die halbgeordnete Menge $\mathscr{G}_1$ ist ein Verband, in dem $\bar{\alpha} \cap \bar{\beta} = \overline{f_1(\alpha, \beta)} = \overline{f_2(\alpha, \beta)}$ gilt.