Czechoslovak Mathematical Journal

Jan Kadlec

О регулярности решения задачи Пуассона на области с границей подобной границе куба

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 4, 599–611

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100590

Чехословацкий математический журнал т. 13 (88) 1963, Прага

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПУАССОНА НА ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ ПОДОБНОЙ ГРАНИЦЕ КУБА

ЯН КАДЛЕЦ (Jan Kadlec), Прага

(Поступило в редакцию 5/II 1962 г.)

Настоящая работа содержит доказательство теоремы 20, которая утверждает, что решение задачи Пуассона для эллиптического диффеенациального оператора второго порядка с гладкими коэффициентами находится в пространстве $W_2^{(2)}$, если только область локально подобна кубу и правая часть уравнения интегрируема с квадратом.

1. Введение. Известная теорема утверждает: Если u – обобщенное решение задачи Пуассона $Au = f$ на Ω, $u = 0$ на границе области Ω, причем $f \in L_2(\Omega)$, и эллиптический дифференциальный оператор второго порядка A обладает достаточно регулярными коэффициентами, при некоторых предположениях о границе области Ω, функция u обладает вторыми обобщенными производными, интегрируемыми с квадратом.

В настоящей работе мы хотим обобщить эту теорему, расширяя класс областей Ω. Тот факт, что утверждение теоремы верно в некоторых случаях, когда коэффициенты очень мало регулярны, показывает теорема 6, но тем мы подробно не будем заниматься.

Для $f \in L_2(\Omega)$ и границы, которая не содержит угловых точек, доказательство ведется подобно, как доказательство леммы 3, и находится в работах [5], [8]. В работе [3] доказана теорема для $f \in L_p(\Omega)$ $(p \geqq 2)$. В этом случае вторые производные интегрируемы в p-ой степени.

Обозначения настоящей работы совпадают с обозначениями работы [1] и мы их кратко повторим.

$\mathfrak{A}$ обозначает класс ограниченных областей в E_ν, $\mathfrak{N}^{(k),1}$ – области с границей k-раз непрерывно дифференцируемой, и k-ые производные граничных функций удовлетворяют условию Липшица.

$W_2^{(k)}(\Omega)$ – пространство функций, все l-ые производные которых для $0 \leqq \leqq l \leqq k$ находятся в пространстве $L_2(\Omega)$.

$\mathscr{E}(\Omega)$ – класс бесконечно дифференцируемых функций на $\overline{\Omega}$. $\mathscr{D}(\Omega)$ – подмножество $\mathscr{E}(\Omega)$ функций с компактным носителем в Ω. $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ – замыкание $\mathscr{D}(\Omega)$ в пространстве $W_2^{(1)}(\Omega)$.

$$\hat{W}_2^{(2)}(\Omega) = W_2^{(2)}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)\,, \quad \hat{\mathscr{E}}(\Omega) = \mathscr{E}(\Omega_1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)\,,$$

где $\Omega_1 \supset \bar{\Omega}$.

Через A обозначим оператор

$$Au = -\left(a^{ij}u_i'\right)_j'\,,$$

где a^{ij} – всегда ограниченные измеримые функции. Предположим, что A – – эллиптический оператор с константой эллиптичности α; это значит, что для всех векторов $[\xi_i]$ из E_ν

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geqq \alpha\delta^{ij}\xi_i\xi_j\,,$$

где $\alpha > 0$.

Обозначим

$$A(u, v) = \int_\Omega a^{ij}u_i'v_j'\,\mathrm{d}\Omega\,,$$

$$\Delta(u, v) = \int_\Omega \delta^{ij}u_i'v_j'\,\mathrm{d}\Omega\,, \quad (u, v) = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}\Omega$$

и если $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, то $|u|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)} = [\Delta(u, u)]^{\frac{1}{2}}$.

2. Замечание. В $\hat{W}_2^{(2)}(\Omega)$ введем норму

$$|u|_{\hat{W}} = \left(\sum_{i,j=1}^{\nu}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, то она (на $\hat{W}_2^{(2)}(\Omega)$) эквивалентна норме, которая порождается нормой пространства $W_2^{(2)}(\Omega)$, которая введена соотношением

$$|u|_{W_2^{(2)}} = \left(|u|_{\hat{W}}^2 + |u|_{W_2^{(1)}}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Действительно, тождественное отображение I пространства $\hat{W}_2^{(2)}(\Omega)$ с нормой $W_2^{(2)}(\Omega)$ в $\hat{W}_2^{(2)}(\Omega)$ с нормой $\hat{W}_2^{(2)}(\Omega)$ непрерывно.

Если $|u|_{\hat{W}} = 0$, то

$$u(X) = \sum_{i=1}^{\nu} a_i x_i + b\,.$$

Но $u(X) = 0$ на границе Ω, значит, $a_i = b = 0$ и $u(X) = 0$ на Ω.

Итак, I обратимо. В силу полноти $W_2^{(2)}(\Omega)$ тоже I^{-1} непрерывно и утверждение справедливо.

3. Лемма. *Пусть или $\Omega = E_\nu$ или $\Omega = \mathscr{E}(X \in E_\nu,\ x_\nu < 0)$ и u – функция на Ω, носителем которой является ограниченное множество в E_ν, если определим $u(X) = 0$ для всех $X \notin \Omega$. Пусть, далее, $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ и $-\Delta u = f$, где $f \in L_2(\Omega)$. Тогда $u \in \hat{W}_2^{(2)}(\Omega)$.*

Доказательство. Если $\varphi \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$, то

$$\Delta(u, \varphi) = (f, \varphi) .$$

Если $i \neq \nu$, то обозначим через H вектор с координатами, равными нулю за исключением i-ой, которая равна h,

$$v_H(X) = v(X + H) , \quad \varrho_H v = \frac{1}{h}(v_H - v) .$$

Справедливо

$$\Delta(\varrho_H u, \varphi) = \frac{1}{h}[\Delta(u_H, \varphi) - \Delta(u, \varphi)] = \frac{1}{h}\Delta(u, \varphi_{-H} - \varphi) = -\Delta(u, \varrho_{-H}\varphi) =$$
$$= -(f, \varrho_{-H}\varphi) .$$

Теперь оценим $|\varrho_H \varphi|_{L_2}$:

$$|\varrho_H \varphi|_{L_2}^2 = \int_\Omega \left(\int_0^1 \varphi_i'(X + Ht)\,\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}\Omega \leqq \int_\Omega \int_0^1 |\varphi_i'(X + Ht)|^2 \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\Omega =$$
$$= \int_0^1 \int_\Omega |\varphi_i'(X + Ht)|^2 \,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t \leqq |\varphi|_{\mathring{W}_2(1)} ,$$

(1) $$|\Delta(\varrho_H u, \varphi)| \leqq |f|_{L_2}\, |\varrho_{-H}\varphi|_{L_2} \leqq |f|_{L_2}\, |\varphi|_{\mathring{W}_2(1)} .$$

Теперь

$$|\varrho_H u|^2_{\mathring{W}_2(1)} = \Delta(\varrho_H u, \varrho_H u) .$$

Из этого, если используем (1), вытекает

(2) $$|\varrho_H u|_{\mathring{W}_2(1)} \leqq |f|_{L_2} .$$

В смысле обобщенных функций справедливо

(3) $$\lim_{h \to 0} \varrho_H u = u_i' .$$

Из (2) и (3) вытекает, что (3) имеет место тоже в смысле слабого предела в пространстве $W_2^{(1)}(\Omega)$; итак, $u_i' \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Следовательно $u_{ij}'' \in L_2(\Omega)$ для $i + j \neq 2\nu$. Из равенства

$$u_{\nu\nu}'' = -f - \sum_{i=1}^{\nu-1} u_{ii}''$$

вытекает, что тоже $u_{\nu\nu}'' \in L_2(\Omega)$, и лемма доказана.

4. Лемма. *Пусть $\Omega \in \mathfrak{A}$, $Au = f$ на Ω, $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Пусть $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$. Тогда для $\tilde{u} = \varphi u$ справедливо на Ω уравнение $A\tilde{u} = \tilde{f}$, где*

$$\tilde{f} = f\varphi - (a^{ij} u \varphi_i')_j' - a^{ij} u_i' \varphi_j' .$$

Если $a_k^{ij'}$ являются ограниченными функциями на Ω и $f \in L_2(\Omega)$, то $\tilde f \in L_2(\Omega)$ и, очевидно,

$$|\tilde f|_{L_2} \leqq C(\varphi)\, |f|_{L_2}\,.\ ^{1})$$

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Тогда

$$A(\varphi u, \psi) - (\varphi f, \psi) = A(\varphi u, \psi) - A(u, \varphi\psi) =$$

$$= \int_\Omega a^{ij} u \varphi'_i \psi'_j \, d\Omega + \int_\Omega a^{ij} \varphi u'_i \psi'_j \, d\Omega - \int_\Omega a^{ij} u'_i \psi'_j \varphi \, d\Omega - \int_\Omega a^{ij} u'_i \varphi'_j \psi \, d\Omega =$$

$$= -\left((a^{ij} u \varphi'_i)'_j, \psi\right) - \int_\Omega a^{ij} u'_i \varphi'_j \psi \, d\Omega\,.$$

Из этого вычисления непосредственно следует утверждение леммы.

5. Лемма. *Пусть $\Omega \in \mathfrak{A}$, $a_k^{ij'}$ — ограниченные на Ω функции, $Au = f$ на Ω, $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$. Пусть T — обратимое отображение*

$$y_i = T_i(x_1, \ldots, x_\nu) \quad (i = 1, \ldots, \nu)$$

области Ω со всеми производными первого порядка, непрерывными на Ω, и определителем Якоби

$$D_T(X) = \frac{D(y_1, \ldots, y_\nu)}{D(x_1, \ldots, x_\nu)} \neq 0$$

на Ω.

Обозначим $T^{-1} = S$, $T(\Omega) = \tilde\Omega$ и определим $v(Y) = u(SY)$ для всех $Y \in \tilde\Omega$. Тогда на $\tilde\Omega$ для функции v справедливо $Bv = g$, где

$$g(Y) = f(SY)\, |D_T(SY)|^{-1}$$

и коэффициенты оператора B даны соотношениями

$$b^{kl}(Y) = a^{ij}(SY) \frac{\partial T_k}{\partial x_i}(SY) \frac{\partial T_l}{\partial x_j}(SY)\, |D_T(SY)|^{-1}\,. \tag{4}$$

---

[1]) Это значит: $\tilde f$ является обобщенной функцией, действующей по формуле

$$(\tilde f, \psi) = (f, \varphi\psi) + \int_\Omega a^{ij} u \varphi'_i \psi'_j \, d\Omega - \int_\Omega a^{ij} u'_i \varphi'_j \psi \, d\Omega\ ;$$

если $f \in L_2(\Omega)$ и функции a^{ij} обладают первыми обобщенными производными, которые являются ограниченными функциями, то ее, конечно, возможно представить в виде

$$\tilde f = f\varphi - (a^{ij} u \varphi'_i)'_j - a^{ij} u'_i \varphi'_j\,,$$

где теперь все слагаемые уже определены в обыкновенном смысле.

Здес (G, φ) обозначает значение обобщенной функции G на функции $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(\tilde{\Omega})$. Функция ψ, определенная соотношением $\psi(X) = \varphi(TX)$, принадлежит $W_2^{(1)}(\Omega)$. Тогда

$$\int_\Omega a^{ij} u'_i \psi'_j \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega a^{ij}(X)\, v'_k(TX) \frac{\partial T_k}{\partial x_i}(X)\, \varphi'_l(TX) \frac{\partial T_l}{\partial x_j}(X)\, \mathrm{d}\Omega = \tag{5}$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} b^{kl}(Y)\, v'_k(Y)\, \varphi'_l(Y)\, \mathrm{d}\tilde{\Omega}$$

и

$$\int_\Omega f(X)\, \psi(X)\, \mathrm{d}\Omega = \int_{\tilde{\Omega}} f(SY)\, \varphi(Y)\, |D_S(Y)|\, \mathrm{d}\tilde{\Omega}\,. \tag{6}$$

Из соотношений (5), (6) и определения решения непосредственно следует лемма.

6. Теорема. *Пусть A — оператор*

$$Au = a^{ij} u''_{ij} + b^j u'_j + cu\,,$$

который взаимно однозначно отображает $\hat{W}_2^{(2)}(\Omega)$ на $L_2(\Omega)$. Пусть $|A^{-1}| \leqq C$, и P — оператор, действующий из $\hat{W}_2^{(2)}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, и $C|P| \leqq \frac{1}{2}$. Тогда оператор $A + P$ обладает непрерывным обратным оператором в $L_2(\Omega)$, и для нормы обратного оператора справедливо

$$|(A + P)^{-1}| \leqq 2C\,.$$

Доказательство. Мы будем изучать отображение R из $\hat{W}_2^{(2)}(\Omega)$ в $\hat{W}_2^{(2)}(\Omega)$, данное уравнением

$$Ru = A^{-1}f - A^{-1}Pu\,,$$

где $f \in L_2(\Omega)$ — произвольное, но фиксированное. Для R используем принцип неподвижной точки (смотри, напр., [2] стр. 563). Действительно, предположения имеют место, так как

$$|R\tilde{u} - R\tilde{\tilde{u}}|_{\hat{W}} = |A^{-1}P(\tilde{u} - \tilde{\tilde{u}})|_{\hat{W}} \leqq |A^{-1}|\,|P|\,|\tilde{u} - \tilde{\tilde{u}}|_{\hat{W}}$$

и $|A^{-1}|\,|P| < 1$. Существует точно одна неподвижная точка u. Для $u = Ru$ получим

$$|u|_{\hat{W}} \leqq |A^{-1}f|_{\hat{W}} + |A^{-1}Pu|_{\hat{W}} \leqq C|f|_{L_2} + C|P|\,|u|_{\hat{W}}\,, \tag{7}$$

$$|u|_{\hat{W}} \leqq 2C|f|_{L_2}\,.$$

Но $u = Ru$ эквивалентно $(A + P)\,u = f$. Итак, для $f \in L_2$ существует точно одна u, для которой $Au + Pu = f$, и теорема является доказанной.

7. Определение. Пусть K — куб $\mathscr{E}(X \in E_\nu,\ |x_i| < 1)$ и $|\varepsilon| = 1$. Через $K_{i,\varepsilon}$ обозначим $(\nu - 1)$-мерную грань куба K, данную соотношениями $x_i = \varepsilon$,

$|x_j| \leqq 1$. Пусть Ψ – множество функций на K, которые обладают следующим свойством:

Если N_v – замыкание в E_ν носителя функции v и если

$$N_v \cap K_{i,\varepsilon_1} \neq \emptyset\,, \quad N_v \cap K_{j,\varepsilon_2} \neq \emptyset\,,$$

то или $i \neq j$ или $i = j$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Следующая лемма непосредственно вытекает из определения.

8. Лемма. *Если $v \in \Psi$, то существует вершина*

$$V(v) = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu]\,, \quad (|\varepsilon_i| = 1)$$

так, что

$$\varrho(N_v, K_{i,-\varepsilon_i}) > 0\,, \quad i = 1, \ldots, \nu\,.$$

9. Теорема. *Пусть $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(K)$ и $-\Delta v = f$, где $f \in L_2(K)$. Тогда $v \in \hat{W}_2^{(2)}(K)$.*

Доказательство. Сначала предположим, что $v \in \Psi$, $V(v) = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu]$. Обозначим через K_1 куб $|x_i - \varepsilon_i| < 2$, $i = 1, \ldots, \nu$. На K_1 определим функции v^* и f^* так, чтобы они на K совпадали с функциями v и f и чтобы имели место соотношения

$$v^*(\varepsilon_1 + x_1, \ldots, \varepsilon_\nu + x_\nu) = \eta_1, \ldots, \eta_\nu v^*(\varepsilon_1 + \eta_1 x_1, \ldots, \varepsilon_\nu + \eta_\nu x_\nu)\,, \tag{8}$$

$$f^*(\varepsilon_1 + x_1, \ldots, \varepsilon_\nu + x_\nu) = \eta_1, \ldots, \eta_\nu f^*(\varepsilon_1 + \eta_1 x_1, \ldots, \varepsilon_\nu + \eta_\nu x_\nu)\,,$$

для всех $|\eta_i| = 1$. Очевидно, что носитель v^* и f^* – компактное множество в K_1, $f^* \in L_2(K_1)$, $v^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(K_1)$.

Докажем, что на K_1 справедливо $-\Delta v^* = f^*$. Это значит, что

$$(f^*, \varphi) = \Delta(v^*, \varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathscr{D}(K_1)\,. \tag{9}$$

Итак, обозначим $M_0 = K$, $\mathbf{e}_i = [0, \ldots, 0, \varepsilon_i, 0, \ldots, 0]$, причем ε_i стоит на i-ом месте. Пусть

$$M_i = M_{i-1} \cup \mathscr{E}(X \in E_\nu,\ 2\mathbf{e}_i - X \in M_{i-1}) \quad \text{для} \quad i = 1, \ldots, \nu\,.$$

Соотношение (9) докажем по индукции. Очевидно, $M_\nu = K_1$ и M_i – ν-мерное параллелепипеды. Пусть $-\Delta v^* = f^*$ на M_i. В некоторой окрестности $\mathscr{V}$ любой точки $\dot{M}_i$, которая является внутренней точкой некоторой $(\nu - 1)$-мерный грани, справедливо

$$v^* \in W_2^{(2)}(M_i \cap \mathscr{V})$$

(смотри леммы 4 и 5) и для $\varphi \in \mathscr{D}(M_{i+1})$

$$\int_{M_i} f^* \varphi \,\mathrm{d}M_i = -\int_{\dot{M}_i} \frac{\partial v^*}{\partial \mathrm{v}} \varphi \,\mathrm{d}\dot{M}_i + \Delta(v^*, \varphi)\,, \tag{10}$$

(11) $$\int_{M_{i+1}-M_i} f^*\varphi = -\int_{(M_{i+1}-M_i)^\cdot} \frac{\partial v^*}{\partial \nu}\varphi + \Delta(v^*, \varphi),$$

где $\partial v^*/\partial \nu = v_i^{*\prime}\nu_i$ и $v_i^{*\prime}$ следы производных.[2])

Теперь

(12) $$N_\varphi \cap \dot{M}_i = N_\varphi \cap (M_{i+1} - M_i)^\cdot$$

направления ν_i к M_i и $M_{\overline{i+1}} - \overline{M}_i$ противоположны и значения $v_i^{*\prime}$ совпадают (по определению v^*); итак,

$$\int_{\dot{M}_i} \frac{\partial v^*}{\partial \nu}\varphi = -\int_{(M_{i+1}-M_i)^\cdot} \frac{\partial v^*}{\partial \nu}\varphi .$$

Сложением (10), (11) получим

$$(f^*, \varphi) = \Delta(v^*, \varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathscr{D}(M_{i+1}) .$$

По индукции получим (9).

Теперь v^* дополним вне K_1 нулем и, используя лемму 3, получим $v^* \in W_2^{(2)}(E_\nu)$; значит, $v \in W_2^{(2)}(K)$. Теорема для $v \in \Psi$ доказана; общий случай легко сводится к рассмотренному при помощи разложения единицы.

10. Лемма. *Если* $\mathsf{A} = (a^{ij})$ – *симметричная матрица и если для всех векторов* $\mathscr{X}$ (*которые понимаем как столбцы*) *справедливо*

$$\overline{\mathscr{X}}\mathsf{A}\mathscr{X} \geqq \alpha \overline{\mathscr{X}}\mathscr{X}, \quad \alpha > 0,$$

то для всех матриц (ξ_{ik}) *справедливо*

(13) $$a^{ij}a^{kl}\xi_{i_k}\xi_{jl} \geqq \alpha^2\delta^{ij}\delta^{kl}\xi_{ik}\xi_{jl} .$$

Доказательство. Существует ортонормальная матрица $\mathsf{B} = (b^{ij})$ так, что матрица $\mathsf{C} = \mathsf{BAB} = (c^{ij})$ диагональна. C является эллиптической с константой эллиптичности α. Действительно, если $\mathscr{X} = \mathsf{B}\mathscr{Y}$, то

$$\overline{\mathscr{Y}}\overline{\mathsf{B}}\mathsf{AB}\mathscr{Y} \geqq \alpha\overline{\mathscr{Y}}\overline{\mathsf{B}}\mathsf{B}\mathscr{Y} = \alpha\overline{\mathscr{Y}}\mathscr{Y} .$$

Обозначим через $a^{ik,jl} = a^{ij}a^{kl}$, $b^{ik,jl} = b^{ij}b^{kl}$, $A = (a^{ik,jl})$ матрицу $\nu^2 \times \nu^2$, дге ik – индекс строки и jl индекс столбца, $B = (b^{ik,jl})$.

Матрица B ортонормальна, так как

$$\sum_{jl} b^{ik,jl}b^{mn,jl} = \sum_{jl} b^{ij}b^{kl}b^{mj}b^{nl} = \delta^{im}\delta^{kn} = \delta^{ik,mn} .$$

Вычислим элемент матрицы $C = \overline{B}AB$

$$c^{mn,pr} = \sum_{i,j,k,l} b^{ij,mn}a^{ij,kl}b^{kl,pr} = \sum_{i,j,k,l} a^{ik}a^{jl}b^{im}b^{jn}b^{kp}b^{lr} = c^{mp}c^{nr} .$$

---

[2]) ν_i здесь обозначает i-ую координату внешней нормали к области M_i (в соотношении (10)) или к области $M_{i+1} - \overline{M}_i$ (в соотношении (11)).

Теперь нетрудно видеть, что C — диагональная матрица, так как и C является диагональной.

Коэффициентом эллиптичности C является

$$\min_{m,n} c^{mm}c^{nn} = (\min_{m} c^{mm})^2 \geqq \alpha^2 .$$

Соотношение (13) эквивалентно эллиптичности A — это значит эллиптичности матрицы, которая является прямым произведением $\mathsf{A} \times \mathsf{A}$ (смотри [6]).

11. Теорема. *Пусть A — эллиптический дифференциальный оператор с константной эллиптичности α с постоянными коэффициентами. Пусть $u \in \hat{\mathscr{E}}(K)$. Тогда имеет место оценка*

$$|u|_{\hat{W}(K)} \leqq \frac{1}{\alpha} |Au|_{L_2(K)} .$$

Доказательство. Мы здесь повторим для нашего специального случая оценки, сделанные О. А. Ладыженской в работе [4].

Мы можем предполагать, что $a^{ij} = a^{ji}$ и, интегрируя два раза по частям, получим:

$$\int_K |Au|^2 = \int_K a^{ij}u''_{ij}a^{kl}u''_{kl} = \int_K a^{ij}a^{kl}u''_{ik}u''_{jl} + Z ,$$

где

$$Z = \int_{\dot{K}} a^{ij}a^{kl}u'_i u''_{kl}\nu_j - \int_{\dot{K}} a^{ij}a^{kl}u'_i u''_{jl}\nu_k = \int_{\dot{K}} (a^{ij}a^{kl} - a^{ik}a^{jl})\, u''_{kl}u'_i\nu_j .$$

Но $u = 0$ на $K^{\bullet}$, значит на $K_{i,\varepsilon}$ имеет место $u'_j = 0$ для $j \neq i$, $u''_{kl} = 0$ для $k \neq i$, $l \neq i$ и $\nu_j = \delta^{ji}\varepsilon$. Теперь

$$Z = \sum_{\substack{i=1 \\ |\varepsilon|=1}}^{\nu} \varepsilon \int_{K_{i,\varepsilon}} (a^{ii}a^{kl} - a^{ik}a^{il})\, u''_{kl}u'_i = 0 ,$$

так как если $k \neq i$, $l \neq i$, то $u''_{kl} = 0$, и если или $k = i$ или $l = i$, то

$$a^{ii}a^{kl} - a^{ik}a^{il} = 0 .$$

Итак, используя лемму 10, получаем

$$|Au|^2_{L_2} = \int_K a^{ij}a^{kl}u''_{ik}u''_{jl} \geqq \alpha^2 |u|^2_{\hat{W}} .$$

12. Теорема. *Множество $\hat{\mathscr{E}}(K)$ плотно в $\hat{W}_2^{(2)}(K)$.*

Доказательство. Пусть $v \in \hat{W}_2^{(2)}(K)$. Обозначим через $f = -\Delta v$. Пусть v^*, f^* — функции на $K_2 = \mathscr{E}(X \in E_\nu, |x_i| < 3)$, удовлетворяющие соотношениям (8) для всех $[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu]$, $|\varepsilon_i| = 1$. Тогда $-\Delta v^* = f^*$ и, следовательно, $v^* \in \hat{W}_2^{(2)}(K_2)$.

Пусть теперь $0 < h < 1$,

$$v_h^*(X) = \frac{1}{\kappa h^\nu} \int_{K_2} \omega(X - Y, h)\, v^*(Y)\, \mathrm{d}K,$$

где

$$\omega(Z, h) = \begin{cases} \exp \dfrac{|Z|^2}{|Z|^2 - h^2} & \text{для} \quad |Z| < h\,, \\ 0 & \text{для} \quad |Z| \geqq h\,, \end{cases}$$

$$\kappa = \int_{|Z|<1} \exp \frac{|Z|^2}{|Z|^2 - 1}\, \mathrm{d}Z\,.$$

Известно, что $v_h^* \in \mathscr{E}(K)$ и $|v_h^* - v|_{W_2^{(2)}(K)} \to 0$, если $h \to 0$. Из определения v^* и ω следует, что $v_h^* = 0$ на границе K. Этим наша теорема доказана.

13. Теорема. *Пусть A — эллиптический оператор с константой эллиптичности α и с постоянными коэффициентами.*

Тогда для всех $f \in L_2(K)$ решение задачи Пуассона $Au = f$ на K является элементом $\hat{W}_2^{(2)}(K)$ и справедливо

$$|u|_{\hat{W}(K)} \leqq \frac{1}{\alpha}\, |f|_{L_2(K)}\,. \tag{14}$$

Доказательство. Если $u \in \hat{\mathscr{E}}(K)$, то (14) имеет место. Из теоремы 12 следует, что (14) имеет место, если $u \in \hat{W}_2^{(2)}(K)$.

Если $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$, то определим

$$A_\lambda = (1 - \lambda)(-\Delta) + \lambda A\,.$$

Через A_λ и A обобзначим соответственно матрицы коэффициентов A_λ и A. Справедливо

$$\bar{\mathscr{X}} \mathsf{A}_\lambda \mathscr{X} = (1 - \lambda)\, \bar{\mathscr{X}} \mathscr{X} + \lambda \bar{\mathscr{X}} \mathsf{A} \mathscr{X} \geqq \tilde{\alpha} \bar{\mathscr{X}} \mathscr{X}\,,$$

где $\tilde{\alpha} = \min(\alpha, 1)$.

Обозначим через Λ подмножество тех $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$, для которых решение задачи. Пуассона $A_\lambda u = f$ принадлежит $\hat{W}_2^{(2)}(K)$ для всех $f \in L_2(K)$. Из теоремы 9 вытекает, что $\Lambda \neq \emptyset$.

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из следующего утверждения:

Если $\lambda_0 \in \Lambda$, то все λ, для которых

$$|\lambda - \lambda_0| \leqq \frac{\tilde{\alpha}}{2} (|\Delta| + |A|)^{-1}\,, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1\,,$$

принадлежат Λ. Нормы операторов обозначают нормы отображений из $\hat{W}_2^{(2)}(K)$ в $L_2(K)$.

Теперь мы докажем это утверждение.

Для u, $A_{\lambda_0}u = f$, справедливо $\tilde{\alpha}|u|_{\hat{W}} \leqq |f|_{L_2}$. Теперь $A_\lambda = A_{\lambda_0} + (A_\lambda - A_{\lambda_0})$. Имеем

$$|A_\lambda - A_{\lambda_0}| \leqq |\lambda - \lambda_0| \left(|\Delta| + |A|\right) \leqq \frac{\tilde{\alpha}}{2}.$$

Итак, имеют место предположения теоремы 6 и $\lambda \in \Lambda$.

14. Теорема. *Пусть на K задан эллиптический оператор A с константой эллиптичности α. Пусть, далее, $a_k^{ij'}$ являются ограниченными функциями. Предположим, что*

$$\operatorname*{osc}_K a^{ij}(x) \leqq \frac{\alpha}{2}.\ ^{3})$$

Тогда решение задачи Пуассона $Au = f$, $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(K)$, $f \in L_2(K)$ принадлежит $\hat{W}_2^{(2)}(K)$.

Доказательство. Мы можем предпологать, что a^{ij} — непрерывные функции. Обозначим $\tilde{a}^{ij} = a^{ij}(X_0)$, где $X_0 \in K$.

Для оператора $\tilde{A}$ с постоянными коэффициентами $\tilde{a}^{ij}$ справедлива оценка

$$|v|_{\hat{W}} \leqq \frac{1}{\alpha} |g|_{L_2},$$

где $\tilde{A}v = g$, $v \in \mathring{W}_2^{(1)}(K)$ и $g \in L_2(K)$.

Если обозначим

$$Pv = -\left(a^{ij} - \tilde{a}^{ij}\right) v''_{ij}, \quad B = \tilde{A} + P,$$

то $|P| \leqq \frac{1}{2}\alpha$, и можно пользоваться теоремой 6 для оператора B. Но справедливо

$$Bu = f + a_j^{ij'} u'_i, \quad f + a_j^{ij'} u'_i \in L_2(K);$$

итак, $u \in \hat{W}_2^{(2)}(K)$.

15. Определение. Мы скажем, что $\Omega \in \mathfrak{C}$, если Ω обладает следующими свойствами:

1) $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$.

2) Каждой точке $X \in \bar{\Omega}$ соответствует окрестность $\mathcal{U}$ и обратимое отражение T окрестности $\mathcal{U}$ на окрестность $\mathcal{V} = T(\mathcal{U})$ точки $Y = TX$ так, что имеет место:

а) Отображения T и $S = T^{-1}$ непрерывны, и вторые обобщенные производные функций, определяющих S и T, являются ограниченными функциями.

---

[3]) osc — это разность между „истинным максимумом" и „истинным минимумом".

б) Справедливо соотношение

$$\mathscr{U} \cap \Omega = S(K \cap \mathscr{V}),$$

где K — куб из определения 7.

Если $\Omega \in \mathfrak{C}$, то будем говорить, что граница Ω (локально) подобна границе куба. Если имеет место 2) в точке X, то граница Ω в точке X подобна границе куба.

16. Замечание. Окрестности $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$, очевидно, можно уменшить так, чтобы

1) $\mathscr{V} \cap K$ был куб.

2) Если

$$\mathscr{V} \cap K_{i,\varepsilon_1} \neq \emptyset\,, \quad \mathscr{V} \cap K_{j,\varepsilon_2} \neq \emptyset\,,$$

то или $i \neq j$ или $i = j$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Эти свойства будем всегда предпологать.

Почти очевидно следующее замечание:

17. Замечание.

$$\mathscr{U} \cap \Omega^{\cdot} = S(K^{\cdot} \cap \mathscr{V}), \quad \mathscr{U} \cap (E_\nu - \overline{\Omega}) = S(\mathscr{V} \cap (E_\nu - \overline{K})).$$

18. Теорема. *Функции, определяющие T и S обладают непрерывными, локально липшицевскими производными и $D_T(X) \neq 0$ для всех $X \in \mathscr{U}$.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1.6 работы [1] и из соотношения

$$D_T(X) \,.\, D_S(TX) \equiv 1\,.$$

19. Замечание. В определении $\mathfrak{C}$ можно только предпологать, что $\Omega \in \mathfrak{A}$. Из этого факта и свойства 2 уже следует, что

$$\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}\,.$$

20. Теорема. *Пусть $\Omega \in \mathfrak{C}$. Пусть u — решение задачи Пуассона $Au = f$ на Ω, $u = 0$ на $\Omega^{\cdot}$ и $f \in L_2(\Omega)$. Пусть $a_k^{ij'}$ — ограниченные измеримые функции на Ω. Пусть A — эллиптический. Тогда $u \in \hat{W}_2^{(2)}(\Omega)$, и существует постоянная C такая, что*

$$|u|_{\hat{W}} \leqq C|f|_{L_2}\,.$$

Доказательство. Пусть $X_0 \in \overline{\Omega}$. В далнейшем сохраним обозначения определения 15 и предположим, что имеют место предположения заметки 16. Точку X_0 предпологаем постоянной.

Если через b^{kl} обозначим функцию на $\mathscr{V} \cap K$, определенную соотношением (4), то b^{kl} обладает ограниченными производными и удовлетворяет условию Липшица на $\mathscr{V} \cap K$ (смотри теорему 1.6 работы [1]). Общую константу Липшица для функций b^{kl} обозначим L. Далее обозначим символом B матрицу коэффициентов b^{kl}.

Для всех $\mathscr{X} \in E_\nu$ имеет место соотношение

$$\mathscr{X} \neq 0 \Rightarrow \overline{\mathscr{X}} \mathrm{B} \mathscr{X} \neq 0\,;$$

значит, существует $\alpha(Y) > 0$ так, что B в точке Y эллиптична с константой эллиптичности $\alpha(Y)$, и $\alpha(Y)$ является на $\mathscr{V} \cap \overline{K}$ непрерывной функцией. Если уменьшим $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$, то существует

$$\tilde{\alpha} = \min_{Y \in \mathscr{V} \cap K} \alpha(Y) > 0\,.$$

Обозначим $\delta = \alpha(2L)^{-1}$ и уменьшим $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ так, чтобы диаметр $\mathscr{V} \cap K$ не превосходил δ. Теперь существует $\mathscr{U}'$ — окрестность точки X такая, что $\overline{\mathscr{U}'} \subset \mathscr{U}$. Существует, далее, фунция $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{U})$, $\varphi(X) = 1$ для всех $X \in \mathscr{U}'$.

Обозначим $\tilde{u}(X) = u(X)\,\varphi(X)$ для всех $X \in \Omega$, и пусть v такова, что $v(Y) = \tilde{u}(SY)$. Тогда (смотри леммы 4 и 5) v является на $\mathscr{V} \cap K$ решением задачи Пуассона $Bv = g$, где B — оператор с коэффициентами b^{kl},

$$v \in \mathring{W}_2^{(1)}(\mathscr{V} \cap K) \quad \text{и} \quad g \in L_2(\mathscr{V} \cap K)\,.$$

Теперь $\operatorname*{osc}_{\mathscr{V} \cap K} b^{kl} \leqq L\delta = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}$ и можно использовать теорему 14, из которой получим, что

$$v \in \hat{W}_2^{(2)}(\mathscr{V} \cap K)\,.$$

Используя свойства отображения S, получим

$$\tilde{u} \in \hat{W}_2^{(2)}(\mathscr{U} \cap \Omega)\,.$$

Итак, справедливо

$$u \in W_2^{(2)}(\mathscr{U}' \cap \Omega)\,.$$

Мы получили, что в окрестности любой точки $X_0 \in \overline{\Omega}$ справедливо $u \in W_2^{(2)}$. Существует конечное число $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_m$ таких окрестностей, что

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathscr{U}_i \quad \text{и} \quad u \in W_2^{(2)}(\mathscr{U}_i)\,.$$

При помощи разложения единицы получим

$$u \in W_2^{(2)}(\Omega)\,.$$

Существование C вытекает из известной теоремы Банаха.

21. Замечание. Более точную оценку постоянной C можно получить из априорных рассуждений, например, работы [4]. Аналогичный результат возможно получить и для $f \in L_p(\Omega)$.

Литература

[1] *Ян Кадлец:* О некоторых свойствах решений задачи Дирихле с неограниченным интегралом Дирихле. Чехосл. мат. журн. (в печати).

[2] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов:* Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва 1959.

[3] *А. И. Кошелев:* Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем. Успехи мат. науке *X 11*, вып. 4, 1958, 29—86.

[4] *О. А. Ладыженская:* Об интегральных оценках, сходимости приближенных методов и решений в функционалах для линейных эллиптических операторов. Вестник Ленинград. Унив., 1958, № 7, 60—69.

[5] *E. Magenes, G. Stampacchia:* I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico. Annali di Pisa, Ser. III., Vol. *XII.*, Fasc. III (1958), 247—357.

[6] *А. И. Мальцев:* Основы линейной алгебры. Москва 1948.

[7] *Й. Нечас:* О решениях эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с неограниченным интегралом Дирихле. Чехосл. мат. журн. *10* (*85*), 1960, 283—298.

[8] *L. Nirenberg:* Remarks on Strongly Elliptic Partial Differential Equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, *VIII*, 1955, 649—675.

Summary

ON THE REGULARITY OF THE SOLUTION OF THE POISSON PROBLEM ON A DOMAIN WHOSE BOUNDARY IS LOCALY SIMILAR TO THE BOUNDARY OF A CUBE

Jan Kadlec, Praha

In this paper we deal with an elliptic differential equation of the second order on a domain Ω of the form

$$-(a^{ij}u'_i)'_j = f$$

with the boundary condition $u = 0$ on $\Omega^{\cdot}$ and the right hand side $f \in L_2(\Omega)$.

There are two requirements for the coefficients a^{ij}. The first one is that for a^{ij} a Lipschitz condition holds on the domain Ω and the second one is the usual condition of the strong ellipticity

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geqq \alpha\delta^{ij}\xi_i\xi_j$$

for all ξ_i, where $\alpha > 0$ is a constant.

According to the domain Ω we assume that its boundary $\Omega^{\cdot}$ can be localy transformed on a part of the boundary of a cube by a regular transformation, whose all derivatives of the second order are bounded in the neighbourhood of a point of $\Omega^{\cdot}$.

Under these conditions all the second order derivatives of the solution u of the problem are square integrable in Ω, i.e. $u \in W_2^{(2)}(\Omega)$ provided that $f \in L_2(\Omega)$.