Fouad M. Ragab

Reihen für Mac-Robertsche und Whittakersche Funktionen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 2, 284–289

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100567

REIHEN FÜR MAC-ROBERTSCHE UND WHITTAKERSCHE FUNKTIONEN

F. M. RAGAB, Cairo (U.A.R.)

(Eingegangen am 8. April 1961)

In der Arbeit werden einige Formeln aus der Theorie der Mac-Robertschen E-Funktionen und Whittakerschen Funktionen $W_{k,m}(z)$ abgeleitet. Das Hauptergebnis ist in der Formel (8) enthalten, aus der noch Summen (9) bis (12) von einiger Reihen abgeleitet werden.

1. VORWORT

In den Arbeiten [1], [2], [3] wurden schon einige Reihen von Produkten der Mac-Robertschen E-Funktionen angegeben. Bezüglich der Definitionen und Eigenschaften dieser E-Funktionen wird auf [4], Seite 352—358, verwiesen.

Die betreffende Funktion E ist in dieser Behandlung durch die folgende Beziehung definiert:

$$E\left[\begin{matrix}\alpha, \beta : p; \alpha_r; z \\ \gamma; q; \varrho_s\end{matrix}\right] = \Gamma(\beta)\left\{\Gamma(\gamma-\alpha)\prod_{n=1}^{q}\Gamma(\varrho_n-\alpha_n)\right\}^{-1} \times \int_0^1 \lambda^{\alpha-1}(1-\lambda)^{\gamma-\alpha-1}\,\mathrm{d}\lambda \times$$
$$\times \prod_{n=1}^{q}\int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n-1}(1-\lambda_n)^{\varrho_n-\alpha_n-1}\mathrm{d}\lambda_n \prod_{n=q+1}^{p}\int_0^\infty e^{-\lambda_n}\lambda_n^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\lambda_n \times$$
$$\times \int_0^\infty e^{-\lambda-1}\lambda^{\alpha-1}[1+\lambda\lambda_1\ldots\lambda_p/z]^{-\beta}\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

(*Bemerkung der Redaktion.*)

Weitere Reihen von diesem Typ befinden sich in § 3 der vorliegenden Arbeit. Eine Hilfsformel wird in § 2 bewiesen werden. Sie ist von demselben Typ wie die in [5] und [6] angegebenen Formeln. In § 4 werden zwei Reihen für die Whittakersche Funktion $W_{k,m}(z)$ abgeleitet. Diese Funktion kann als E-Funktion mittels der Formel

$$(1) \qquad E(\alpha, \beta : : z) = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,z^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)}e^{\frac{1}{2}z}W_{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta),\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}(z)$$

ausgedrückt werden. Für $p \leqq q$ kann die E-Funktion durch

$$(2) \qquad E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z) = \frac{\Gamma(\alpha_1) \ldots \Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\varrho_1) \ldots \Gamma(\varrho_q)} {}_pF_q \left[\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p, - 1/z \\ \varrho_1, \ldots, \varrho_q \end{matrix} \right]$$

definiert werden.

Diese Formel gilt auch, wenn $p = q + 1$, und wird im Folgenden für diesen Fall benutzt (*Bemerkung der Redaktion*).

In den Beweisen werden die folgenden Formeln benötigt:

Wenn $R(\varrho_{q+1}) > R(\alpha_{p+1}) > 0$, so gilt nach [4], S. 395:

$$(3) \qquad \int_0^1 \lambda^{\alpha_{p+1}-1}(1 - \lambda)^{\varrho_{q+1}-\alpha_{p+1}-1} E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z/\lambda) \, d\lambda = $$
$$= \Gamma(\varrho_{q+1} - \alpha_{p+1}) \, E(p + 1; a_r : q + 1; \varrho_s : z) \, .$$

Wenn $R(\alpha_{p+1}) > 0$, so gilt nach [4], S. 394:

$$(4) \qquad \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{\alpha_{p+1}-1} E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z/\lambda) \, d\lambda = E(p + 1; \alpha_r : q; \varrho_s : z) \, .$$

(Siehe [7], S. 86);

$$(5) \qquad {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta; z \\ \alpha + \beta - \frac{1}{2} \end{matrix} \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta; z \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] = {}_3F_2 \left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta; z \\ 2\alpha + 2\beta - 1, \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] .$$

Wenn $|\arg z| < \pi$, so gilt nach [4], S. 374:

$$(6) \qquad E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\zeta) \prod_{r=1}^{p} \Gamma(\alpha_r - \zeta)}{\prod_{s=1}^{q} \Gamma(\varrho_s - \zeta)} z^\zeta \, d\zeta \, ,$$

wobei das Integral längs der η-Achse genommen wird, nötigenfalls jedoch mit Schleifen, um zu erreichen, dass der Pol im Ursprung links und alle anderen Pole in den Punkten $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ rechts von dem Integrationsweg liegen. Die ganzen Zahlen $\leqq 0$ sind als Werte für die Parameter ausgeschlossen.

Für $p < q + 1$ ist der Integrationsweg an den Enden nach links gebogen. Für $p \geqq q + 1$ gilt die Formel für $|\arg z| < \frac{1}{2}(p - q + 1) \pi$. Wegen (2) und (5) bekommt man

$$(7) \qquad E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta : z \\ \alpha + \beta - \frac{1}{2} \end{matrix} \right] E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta : z \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] =$$
$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha) \, \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \, \Gamma(\beta + \frac{1}{2})} E \left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta : z \\ 2\alpha + 2\beta - 1, \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] .$$

Es ist zu beweisen, dass

$$(8)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(\zeta)\,\Gamma(\alpha-\zeta)\,\Gamma(\beta-\zeta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\frac{1}{2}-\zeta)}\, z^{\zeta} E\left[\begin{matrix}\alpha,\beta,p;\alpha_r-\zeta:z\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},q;\varrho_s-\zeta\end{matrix}\right]\mathrm{d}\zeta =$$
$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}\, E\left[\begin{matrix}2\alpha,2\beta,\alpha+\beta,\alpha_1,\ldots,\alpha_p:z\\ 2\alpha+2\beta-1,\alpha+\beta+\frac{1}{2},\varrho_1,\ldots,\varrho_q\end{matrix}\right]$$

gilt. Hierin ist $p \geqq q$, $|\arg z| < \frac{1}{2}(p-q+2)\pi$,

$$R(\varrho_n-\alpha_n) > 0(n=1,2,\ldots,q)\,,\quad R(\alpha_n) > 0(n=q+1,\ldots,p)\,,\quad R(\alpha) > 0\,.$$

Der Integrationsweg ist wie in (6) nötigenfalls mit Schleifen zu wählen, um zu sichern, dass α und β rechts von dem Integrationswege liegen.

Beweis von (8). Mit (3) und (4) erhält man, dass die linke Seite von (8) gleich

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(\zeta)\,\Gamma(\alpha-\zeta)\,\Gamma(\beta-\zeta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\frac{1}{2}-\zeta)}\, z^{\zeta}\left\{\prod_{n=1}^{q}\Gamma(\varrho_n-\alpha_n)\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{q}\int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n-\zeta-1}(1-\lambda_n)^{\varrho_n-\alpha_n-1}\,\mathrm{d}\lambda_n\,\cdot$$
$$\cdot\prod_{n=q+1}^{p}\int_0^{\infty} e^{-\lambda_n}\lambda_n^{\alpha_n-\zeta-1}\,\mathrm{d}\lambda_n\, E\left[\begin{matrix}\alpha,\beta:z/(\lambda_1\ldots\lambda_p)\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]\mathrm{d}\zeta$$

ist.

Hier wird die Reihenfolge der Integrationen in der Weise vertauscht, dass das erste Integral an das Ende gesetzt wird; dann erhalten wir

$$\left\{\prod_{n=1}^{q}\Gamma(\varrho_n-\alpha_n)\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{q}\int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n-1}(1-\lambda_n)^{\varrho_n-\alpha_n-1}\,\mathrm{d}\lambda_n\prod_{n=q+1}^{p}\int_0^{\infty} e^{-\lambda_n}\lambda_n^{\alpha_n-1}\,\mathrm{d}\lambda_n\,\cdot$$
$$.\,E\left[\begin{matrix}\alpha,\beta:z/(\lambda_1\ldots\lambda_p)\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(\zeta)\,\Gamma(\alpha-\zeta)\,\Gamma(\beta-\zeta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\frac{1}{2}-\zeta)}\left(\frac{z}{\lambda_1\ldots\lambda_p}\right)^{\zeta}\mathrm{d}\zeta\,.$$

Wegen (6) lässt sich das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(\zeta)\,\Gamma(\alpha-\zeta)\,\Gamma(\beta-\zeta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\frac{1}{2}-\zeta)}\left(\frac{z}{\lambda_1\ldots\lambda_p}\right)^{\zeta}\mathrm{d}\zeta$$

durch

$$E\left[\begin{matrix}\alpha,\beta:z/(\lambda_1\ldots\lambda_p)\\ \alpha+\beta-\frac{1}{2}\end{matrix}\right]$$

ersetzen. Daher wird der zu untersuchende Ausdruck gleich

$$\left\{\prod_{n=1}^{q}\Gamma(\varrho_n-\alpha_n)\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{q}\int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n-1}(1-\lambda_n)^{\varrho_n-\alpha_n-1}\,\mathrm{d}\lambda_n\prod_{n=q+1}^{p}\int_0^{\infty} e^{-\lambda_n}\lambda_n^{\alpha_n-1}\,\mathrm{d}\lambda_n\,\cdot$$
$$.\,E\left[\begin{matrix}\alpha,\beta:z/(\lambda_1\ldots\lambda_p)\\ \alpha+\beta-\frac{1}{2}\end{matrix}\right]E\left[\begin{matrix}\alpha,\beta:z/(\lambda_1\ldots\lambda_p)\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix}\right].$$

Vermöge (7) erhält man daraus weiter

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}\left\{\prod_{n=1}^{q}\Gamma(\varrho_n-\alpha_n)\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{p}\int_0^1\lambda_n^{\alpha_n-1}(1-\lambda_n)^{\varrho_n-\alpha_n-1}\,\mathrm{d}\lambda_n\,.$$

$$\cdot\prod_{n=q+1}^{p}\int_0^{\infty}e^{-\lambda_n}\lambda_n^{\alpha_n-1}\,\mathrm{d}\lambda_n\,E\left[\begin{matrix}2\alpha,\,2\beta+\beta:z/(\lambda_1\ldots\lambda_p)\\2\alpha+2\beta-1,\;\alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix}\right].$$

Durch die Anwendung von (3) und (4) ergibt sich das zu beweisende Resultat (8).

Die Einschränkungen über die ϱ können ausser Betracht gelassen werden, weil die Integrationswege von 0 bis 1 können durch Integrationswege, welche bei 0 anfangen, die Stelle 1 umlaufen und dann nach 0 zurückkehren, ersetzt werden.

3. REIHEN VON PRODUKTEN VON E-FUNKTIONEN

Es erweist sich, dass (8) *für das Summieren der folgenden Reihen verwendet werden kann*:

(9) $$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^{-2r}}{r!\,(\gamma;r)}\,E\left[\begin{matrix}\alpha+r,\;\beta+r,\;\gamma+r:z\\\alpha+\beta-\frac{1}{2}+r\end{matrix}\right]E\left[\begin{matrix}\alpha+r,\;\beta+r,\;\gamma+r:z\\\alpha+\beta+\frac{1}{2}+r\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}\,E\left[\begin{matrix}2\alpha,2\beta,\alpha+\beta,\gamma:z\\2\alpha+2\beta-1,\alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix}\right],$$

wobei $|\arg z|<\frac{3}{2}\pi$, $R(\alpha)>0$, $R(\gamma)>0$.

(10)

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^{-2r}}{r!\,(\alpha+\beta-\frac{1}{2};r)}\,E\,(\alpha+r,\;\beta+r::z)\,E\left[\begin{matrix}\alpha+r,\;\beta+r,\;\alpha+\beta-\frac{1}{2}+r:z\\\alpha+\beta+\frac{1}{2}+r\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}\,E\left[\begin{matrix}2\alpha,\;2\beta,\;\alpha+\beta,\;\alpha+\beta-\frac{1}{2}:z\\2\alpha+2\beta-1,\;\alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{matrix}\right],$$

wobei $|\arg z|<\frac{3}{2}\pi$, $R(\alpha)>0$, $R(\alpha+\beta)>\frac{1}{2}$;

(11)

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^{-2r}}{r!\,(\alpha+\beta+\frac{1}{2};r)}\,E\left[\begin{matrix}\alpha+r,\;\beta+r,\alpha+\beta+\frac{1}{2}+r:z\\\alpha+\beta-\frac{1}{2}+r\end{matrix}\right]E(\alpha+r,\;\beta+r::z)=$$

$$=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}\,E\left[\begin{matrix}2\alpha,2\beta,\alpha+\beta:z\\2\alpha+2\beta-1\end{matrix}\right],$$

wobei $|\arg z|<\frac{3}{2}\pi$, $R(\alpha)>0$, $R(\alpha+\beta)>-\frac{1}{2}$.

Beweis von (9). Nach (6) ersetze man die E-Funktionen in der linken Seite von (9) durch Integrale, wodurch man

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{z^{-2r}}{r!\,(\gamma;r)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(\zeta)\,\Gamma(\alpha+r-\zeta)\,\Gamma(\beta+r-\zeta)\,\Gamma(\gamma+r-\zeta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\frac{1}{2}+r-\zeta)}\,z^{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(\xi)\,\Gamma(\alpha+r-\xi)\,\Gamma(\beta+r-\xi)\,\Gamma(\gamma+r-\xi)}{\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2}+r-\xi)}\,z^{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

erhält.

Jetzt ersetze man ζ bzw. ξ durch $\zeta + r$ bzw. $\xi + r$ und vertausche die Reihenfolge der Integration und Summation. Dann erhält man

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(\zeta)\,\Gamma(\alpha-\zeta)\,\Gamma(\beta-\zeta)\,\Gamma(\gamma-\zeta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\frac{1}{2}-\zeta)}\, z^{\zeta}\, \mathrm{d}\zeta\,.$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(\xi)\,\Gamma(\alpha-\xi)\,\Gamma(\beta-\xi)\,\Gamma(\gamma-\xi)}{\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2}-\xi)}\, z^{\xi}\, {}_2F_1\begin{bmatrix}\zeta,\ \xi;\ 1\\ \gamma\end{bmatrix} \mathrm{d}\xi\,.$$

Durch die Anwendung des Gausschen Satzes summiert man die ${}_2F_1$ und erhält

$$\Gamma(\gamma)\,.\,\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(\zeta)\,\Gamma(\alpha-\zeta)\,\Gamma(\beta-\zeta)}{\Gamma(\alpha+\beta-\frac{1}{2}-\zeta)}\, z^{\zeta}\, E\begin{bmatrix}\alpha,\ \beta,\ \gamma-\zeta : z\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{bmatrix} \mathrm{d}\zeta\,.$$

Das Resultat folgt jetzt aus (8) mit $p = 1$, $q = 0$. Es sei bemerkt, dass (9) für $\gamma = \alpha + \beta - \frac{1}{2}$ in (10), für $\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$ in (11) übergeht.

4. REIHEN FÜR WHITTAKERSCHE FUNKTIONEN

Wegen (1) und (10) bekommt man, dass

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha; r)\,(\beta; r)}{r!\,(\alpha+\beta-\frac{1}{2}; r)}\, z^{-r} W_{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)-r,\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}(z)\,.\tag{12}$$

$$.\,E\begin{bmatrix}\alpha+r,\ \beta+r,\ \alpha+\beta-\frac{1}{2}+r : z\\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}+r\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\alpha+\beta-\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}\, e^{-\frac{1}{2}z}\, z^{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)}\,.\,E\begin{bmatrix}2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta,\ \alpha+\beta-\frac{1}{2} : z\\ 2\alpha+2\beta-1,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

wobei $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $R(\alpha) > 0$, $R(\alpha+\beta) > \frac{1}{2}$.

Ähnlicherweise, aus (11) und (1) folgt

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha; r)\,(\beta; r)}{r!\,(\alpha+\beta+\frac{1}{2}; r)}\, z^{-r} W_{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)-r,\,\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}(z)\,.\tag{13}$$

$$.\,E\begin{bmatrix}\alpha+r,\ \beta+r,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2}+r : z\\ \alpha+\beta-\frac{1}{2}+r\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\alpha+\beta+\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\,\Gamma(\beta+\frac{1}{2})}\, e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)}\, E\begin{bmatrix}2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta : z\\ 2\alpha+2\beta-1\end{bmatrix},$$

wobei $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $R(\alpha) > 0$, $R(\alpha+\beta) > -\frac{1}{2}$.

Literatur

[1] *F. M. Ragab:* Expansion of an *E*-funktion in a series of products of *E*-funktions. Proc. Glasg. Math. Assoc. *3* (1958), 194—195.

[2] *F. M. Ragab:* Research report No BR-23 (1957). New York University, Inst. of Math. Science.

[3] *F. M. Ragab:* An expansion involving confluent hypergeometric funktions. Nieuw. Archief voor Wiskunde (*3*), VI (1958), 52—54.

[4] *Mac-Robert, T. M.:* Functions of a Complex Variable (4th edition), London 1954.

[5] *F. M. Ragab:* Integration of *E*-functions with regard to their parameters. Proc. Glasg. Math. Assoc. *3* (1956), 94—98.

[6] *F. M. Ragab:* Integration of *E*-functions and related functions with respect to their parameters. Proceedings, Konikl. Nederl. Ak. van Wetenschappen *61* (1958), 335—340.

[7] *W. B. Bailey:* Generalized hypergeometric functions. Cambridge tracts in Math. No 32, Cambridge.

Резюме

РЯДЫ ФУНКЦИЙ МАК-РОБЕРТА И УИТТЭКЕРА

Ф. М. РАГАБ (F. M. Ragab), Каиро (Y.A. P.)

Доказывается, что функция Мак-Роберта E, определенная соотношением

$$E\begin{bmatrix}\alpha, \beta : p; \alpha_r; z\\ \gamma; q; \varrho_s\end{bmatrix} = \Gamma(\beta)\left\{\Gamma(\gamma-\alpha)\prod_{n=1}^{q}\Gamma(\varrho_n-\alpha_n)\right\}^{-1} \times \int_0^1 \lambda^{\alpha-1}(1-\lambda)^{\gamma-\alpha-1}\,\mathrm{d}\lambda \times$$
$$\times \prod_{n=1}^{q}\int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n-1}(1-\lambda_n)^{\varrho_n-\alpha_n-1}\,\mathrm{d}\lambda_n \prod_{n=q+1}^{p}\int_0^\infty e^{-\lambda_n}\lambda_n^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\lambda_n \times$$
$$\times \int_0^\infty e^{-\lambda-1}\lambda^{\alpha-1}[1+\lambda\lambda_1\ldots\lambda_p/z]^{-\beta}\,\mathrm{d}\lambda$$

удовлетворяет соотношению (8), которое и является главным результатом работы. При помощи этого соотношения далее выводятся соотношения (9)—(12) для функции E и для функций Уиттэкера $W_{k,m}(z)$.