Marko Švec

Asymptotische Darstellung der Lösungen der Differentialgleichung $y^{(n)} + Q(x)y = 0$, $n = 3, 4$

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 12 (1962), No. 4, 572–581

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100541

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

# ASYMPTOTISCHE DARSTELLUNG DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y^{(n)} + Q(x)\,y = 0,\; n = 3,4$

MARKO ŠVEC, Bratislava

(Eingelangt am 24. November 1960)

In der vorliegenden Arbeit werden die asymptotischen Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung $y^{(n)} + Q(x)y = 0$, $n = 3,4$, abgeleitet.

**I.** Wir werden uns zuerst mit der Differentialgleichung

$$y^{(4)} + Q(x)\,y = 0 \tag{1}$$

beschäftigen. Von der Funktion $Q(x)$ werden wir voraussetzen, dass sie eine stetige Funktion in dem Intervall $\langle a, \infty)$ ist. Weitere Voraussetzungen über $Q(x)$ werden im Laufe unserer Erörterungen an den betreffenden Stellen hinzugefügt.

Verwendet man auf die Gleichung (1) die Substitution

$$y(x) = u(x)\,v(t(x))\,, \tag{2}$$

so ergibt sich für $v$ als Funktion von $t$ die Gleichung

$$\begin{gathered} ut'^4 v^{(\mathrm{IV})} + (4u't'^3 + 6ut'^2t'')\,\dddot{v} + (6u''t'^2 + 12u't't'' + 3ut''^2 + \\ + 4ut't''')\,\ddot{v} + (4u'''t' + 6u''t'' + 4u't''' + 4ut^{(4)})\,\dot{v} + (u^{(4)} + Q(x)\,u)\,v = 0\,. \end{gathered} \tag{3}$$

(Die Punkte und (IV) bedeuten dabei die Ableitungen nach $t$ und die Striche und (4) die Ableitungen nach $x$.)

Setzt man nun

$$u = t'^{-3/2}\,, \tag{4}$$

so ergibt sich aus (3) die Gleichung

$$\begin{gathered} v^{(\mathrm{IV})} + 10t'^{-3/2}(t'^{-1/2})''\,\ddot{v} + 10t'^{-1}[t'^{-3/2}(t'^{-1/2})'']'\,\dot{v} + \\ + [t'^{-5/2}(t'^{-3/2})^{(4)} + Q(x)\,t'^{-4}]\,v = 0\,. \end{gathered} \tag{5}$$

Bevor wir einige Sätze über die asymptotischen Formeln der Lösungen von (1) aussprechen, führen wir einen Hilfssatz [[1], Th. 8, S. 64] an.

**Hilfssatz 1.** *Es sei $z$ ein $n$-dimensionaler Vektor und $A$ eine konstante quadratische Matrix von der Ordnung $n$. Es seien weiter $B(t)$ und $C(t)$ quadratische Matrizen von der Ordnung $n$, deren Elemente die im Intervall $J = \langle t_0, \infty)$ defi-*

*nierte Funktionen sind. Die Elemente von $C(t)$ seien differenzierbar in $J$ und es seien noch folgende Voraussetzungen erfüllt:*

a) *die Matrix $A$ hat nur einfache charakteristische Wurzeln;*[1])

b) $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0, \int_{t_0}^{\infty} \|C'(t)\| \, dt < \infty, \int_{t_0}^{\infty} \|B(t)\| \, dt < \infty;$

c) *für die charakteristischen Wurzeln $r_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ der Matrix $A + B(t)$ gilt wenigstens eine von den Ungleichungen:*

$$\int_{t_1}^{t} \mathrm{Re}[r_i(\tau) - r_k(\tau)] \, d\tau > -c, \quad \int_{t_1}^{t} \mathrm{Re}[r_i(\tau) - r_k(\tau)] \, d\tau < c.$$

*Dabei ist $t \geqq t_1 \geqq t_0$ und $c$ ist eine von $t$ und $t_1$ unabhängige Zahl.*

*Dann hat das Differentialsystem $z' = (A + B(t) + C(t)) z$ solche $n$ linear unabhängige Lösungen $z_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, dass*

$$z_k = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} r_k(\tau) \, d\tau\right\} (c_k + o(1)).$$

**Satz 1.** *Es sei die Funktion $Q(x)$ im Intervall $\langle a, \infty)$ positiv und viermal differenzierbar und es gelte:*

$$\int_{x_0}^{\infty} (Q(x))^{\frac{1}{4}} \, dx = \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} Q^{-1/8}(x) |(Q^{-1/8}(x))''| \, dx < \infty, \tag{6}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} |[Q^{-3/8}(x) (Q^{-1/8}(x))'']'| \, dx < \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} Q^{-3/8}(x) |(Q^{-3/8}(x))^{(4)}| \, dx < \infty,$$

$$x_0 \geqq a.$$

*Dann lässt sich jede Lösung von (1) in der Form*

$$y(x) = Q^{-3/8}(x) \left\{c_1 \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} (Q(\tau))^{\frac{1}{4}} \, d\tau\right\}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} (Q(\tau))^{\frac{1}{4}} \, d\tau + \varphi\right) + o(1)\right] + \right. \tag{7}$$

$$\left. + c_2 \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} (Q(\tau))^{\frac{1}{4}} \, d\tau\right\}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} (Q(\tau))^{\frac{1}{4}} \, d\tau + \psi\right) + o(1)\right]\right\}$$

*schreiben. Dabei sind $c_1$, $c_2$, $\varphi$, $\psi$ passende Konstanten.*

Beweis. Setzen wir

$$Q(x) \, t'^{-4} = 4, \quad \text{d.h.} \quad t(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} (Q(\tau))^{\frac{1}{4}} \, d\tau. \tag{8}$$

Aus (5) ergibt sich dann die Gleichung

$$v^{(\mathrm{IV})} + 20 Q^{-3/8}(x) (Q^{-1/8}(x))'' v^{\cdot\cdot} + 20 \sqrt{(2)} Q^{-1/4}(x) [Q^{-3/8}(x) (Q^{-1/8}(x))'']' v^{\cdot} + \tag{9}$$

$$+ [4 Q^{-5/8}(x) (Q^{-3/8}(x))^{(4)} + 4] v = 0.$$

[1]) Das Zeichen $\| \ \|$ bedeutet die Norm, die folgendermassen definiert wird: Sind $b_{ik}$ die Elemente der Matrix $B$, so ist $\|B\| = \sum_{i,k=1} |b_{ik}|$.

Dabei ist noch für $x$ die zu $t(x)$ inverse Funktion $x(t)$ zu setzen. Wenn wir die Gleichung (9) in der Form eines linearen Differentialsystems schreiben und wenn wir dann die Bedingungen (6) berücksichtigen, so folgt aus dem Hilfssatz 1, dass die Lösungen von (9) sich in der Form

$$v = c_1 \exp\{t\}\left[\sin(t + \varphi) + o(1)\right] + c_2 \exp\{-t\}\left[\sin(t + \psi) + o(1)\right]$$

schreiben lassen. Hieraus und aus (2), (4) und (8) erhalten wir (7).

**Hilfssatz 2.** *Es gelte* $0 < f(x) \leqq M$, $f^{(4)}(x) \geqq 0$ *im Intervall* $\langle a, \infty)$ *und es sei* $\alpha \geqq \frac{1}{3}$. *Dann hat die Funktion* $g(x) = f^{\alpha}(x)$ *folgende Eigenschaften*:

$$0 < g(x) \leqq M^{\alpha}, \quad g'(x) \leqq 0, \quad g''(x) \geqq 0, \quad \lim_{x\to\infty} g'(x) = 0 .$$

Beweis. Vor allem ist es leicht zu ersehen, dass

$$f'''(x) \leqq 0, \quad f''(x) \geqq 0, \quad f'(x) \leqq 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = \lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0 .$$

Ist

$$g(x) = f^{\alpha}(x), \quad \text{so ist} \quad g'(x) = \alpha f^{\alpha-1}(x) f'(x) \leqq 0 .$$

Rechnen wir jetzt $g''(x)$ aus:

$$g''(x) = \alpha f^{\alpha-2}(x)\left[(\alpha - 1) f'^2(x) + f(x) f''(x)\right].$$

Setzen wir

$$H(x) = (\alpha - 1) f'^2(x) + f(x) f''(x) .$$

Dann ergibt sich für $H'(x)$ und $H''(x)$:

$$H'(x) = (2\alpha - 1) f'(x) f''(x) + f(x) f'''(x),$$
$$H''(x) = (2\alpha - 1) f''^2(x) + 2\alpha f'(x) f'''(x) + f(x) f^{(4)}(x) .$$

Es sei

$$S(x) = (2\alpha - 1) f''^2(x) + 2\alpha f'(x) f'''(x) .$$

Dann ist

$$S'(x) = (6\alpha - 2) f''(x) f'''(x) + 2\alpha f'(x) f^{(4)}(x) .$$

Aus diesem letzten Ausdruck und aus den am Anfang des Beweises erwähnten Tatsachen geht hervor, dass $S'(x) \leqq 0$ für $\alpha \geqq \frac{1}{3}$. Das bedeutet aber, dass $S(x)$ nichtwachsend ist. Da aber $\lim_{x\to\infty} S(x) = 0$, was aus den Eigenschaften der Funktion $f(x)$ ersichtlich ist, so muss $S(x) \geqq 0$ sein. Daraus folgt jedoch, dass

$$H''(x) = S(x) + f(x) f^{(4)}(x) \geqq 0 .$$

Da $\lim_{x\to\infty} H'(x) = \lim_{x\to\infty} H(x) = 0$, so muss $H'(x) \leqq 0$, $H(x) \geqq 0$. Es ist also

$$g''(x) = \alpha f^{\alpha-2}(x)\, H(x) \geqq 0,$$

was bedeutet, dass $g'(x)$ nichtabnehmend ist. Da $0 < g(x) \leqq M^{\alpha}$, so muss $g'(x) \leqq 0$, $\lim_{x\to\infty} g'(x) = 0$.

**Hilfssatz 3.** *Es sei* $0 < f(x) \leqq M, f^{(4)}(x) \leqq 0$ *im Intervall* $\langle a, \infty)$ *und es sei* $0 < \alpha \leqq 1$. *Die Funktion* $g(x) = f^{\alpha}(x)$ *hat dann folgende Eigenschaften*:

$$0 < g(x) \leqq M^{\alpha}, \quad g'(x) \geqq 0, \quad g''(x) \leqq 0, \quad g'''(x) \geqq 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty} g''(x) = 0.$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen über die Funktion $f(x)$ folgt leicht, dass $f'''(x) \geqq 0, f''(x) \leqq 0, f'(x) \geqq 0, \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = \lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0.$

Für die Funktion $g(x) = f^{\alpha}(x)$ und ihre Ableitungen erhalten wir:

$$0 < g(x) \leqq M^{\alpha}, \quad g'(x) = \alpha f^{\alpha-1}(x) f'(x) \geqq 0,$$
$$g''(x) = \alpha f^{\alpha-2}(x) \left[(\alpha - 1) f'^2(x) + f(x) f''(x)\right],$$
$$g'''(x) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) f^{\alpha-3}(x) f'^3(x) + 3\alpha(\alpha - 1) f^{\alpha-2}(x) f'(x) f''(x) +$$
$$+ \alpha f^{\alpha-1}(x) f'''(x).$$

Also, für $0 < \alpha \leqq 1$ ist $g''(x) \leqq 0$, $g'''(x) \geqq 0$. Aus dieser Tatsache und aus der Ungleichung $0 < g(x) \leqq M^{\alpha}$ ergibt sich, dass

$$\lim_{x\to\infty} g''(x) = \lim_{x\to\infty} g'(x) = 0.$$

**Hilfssatz 4.** *Es sei* $t'(x) \geqq m > 0$, $(t'^{-3/2}(x))^{(4)} \geqq 0 \ (\leqq 0)$ *für* $x \geqq a$. *Für* $x_0 \geqq a$ *gilt dann*

$$\int_{x_0}^{\infty} t'^{-3/2}(x) \, |(t'^{-3/2}(x))^{(4)}| \, dx < \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} t'^{-1/2}(x) \, |(t'^{-1/2}(x))''| \, dx < \infty,$$
$$\int_{x_0}^{\infty} |[t'^{-3/2}(x) \, (t'^{-1/2}(x))'']'| \, dx < \infty.$$

Beweis. Nehmen wir an, dass $(t'^{-3/2}(x))^{(4)} \geqq 0$, und setzen wir $f(x) = t'^{-3/2}(x)$. Aus den Voraussetzungen über $t'(x)$ folgt dann, dass

$$0 < f(x) \leqq m^{-3/2}, \quad f^{(4)}(x) \geqq 0, \quad f'''(x) \leqq 0, \quad f''(x) \geqq 0,$$
$$f'(x) \leqq 0, \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = \lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0.$$

Nach dem Hilfssatz 2, erhalten wir jedoch, dass für die Funktion $g(x) = f^{1/3}(x) = t'^{-1/2}(x)$ gilt:

$$0 < g(x) \leqq m^{-1/2}, \quad g'(x) \leqq 0, \quad g''(x) \geqq 0, \quad \lim_{x\to\infty} g'(x) = 0.$$

Nun, aus den Eigenschaften der Funktion $f(x)$ und $g(x)$ folgt, dass

$$\int_{x_0}^{\infty} t'^{-3/2}(x) \, |(t'^{-3/2}(x))^{(4)}| \, dx = \int_{x_0}^{\infty} f(x) \, |f^{(4)}(x)| \, dx \leqq$$
$$\leqq m^{-3/2} \int_{x_0}^{\infty} f^{(4)}(x) \, dx = -m^{-3/2} f'''(x_0),$$
$$\int_{x_0}^{\infty} t'^{-1/2}(x) \, |(t'^{-1/2}(x))''| \, dx = \int_{x_0}^{\infty} g(x) \, |g''(x)| \, dx \leqq m^{-1/2} \int_{x_0}^{\infty} g''(x) \, dx =$$
$$= -m^{-1/2} g'(x_0).$$

Um die Existenz des dritten Integrals dieses Hilfssatzes zu beweisen, beginnen wir mit der Identität

$$(t'^{-1/2}(x))' = \tfrac{1}{3}t'(x)\,(t'^{-3/2}(x))' .$$

Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} t'^{-3/2}(x)\,(t'^{-1/2}(x))'' &= \tfrac{1}{3}[t'^{-3/2}(x)\,t''(x)\,(t'^{-3/2}(x))' + t'^{-1/2}(x)\,(t'^{-3/2}(x))''] = \\ &= \tfrac{1}{3}[-2(t'^{-1/2}(x))'(t'^{-3/2}(x))' + t'^{-1/2}(x)\,(t'^{-3/2}(x))''] = \\ &= \tfrac{1}{3}[-2g'(x)\,f'(x) + g(x)\,f''(x)]\,, \end{aligned}$$

$$[t'^{-3/2}(x)\,(t'^{-1/2}(x))'']' = \tfrac{1}{3}[-2g''(x)\,f'(x) - g'(x)\,f''(x) + g(x)\,f'''(x)]\,,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} |[t'^{-3/2}(x)\,(t'^{-1/2}(x))'']'|\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \tfrac{1}{3}\left[2\int_{x_0}^{\infty}|g''(x)\,f'(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{\infty}|g'(x)\,f''(x)|\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{\infty}|g(x)\,f'''(x)|\,\mathrm{d}x\right] \leqq$$

$$\leqq \tfrac{1}{3}\left[2\,|f'(x_0)|\int_{x_0}^{\infty}g''(x)\,\mathrm{d}x + |g'(x_0)|\int_{x_0}^{\infty}f''(x)\,\mathrm{d}x - m^{-1/2}\int_{x_0}^{\infty}f'''(x)\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \tfrac{1}{3}[2\,|f'(x_0)|\,(-g'(x_0)) + |g'(x_0)|\,(-f'(x_0)) + m^{-1/2}f''(x_0)]\,.$$

Es sei nun $(t'^{-3/2}(x))^{(4)} \leqq 0$. Wir setzen

$$f(x) = t'^{-3/2}(x)\,, \quad g(x) = f^{1/3}(x) = t'^{-1/2}(x)\,.$$

Dann ist

$$0 < f(x) \leqq m^{-3/2}\,, \quad f^{(4)}(x) \leqq 0\,, \quad f'''(x) \geqq 0\,, \quad f''(x) \leqq 0\,,$$
$$f'(x) \geqq 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = \lim_{x\to\infty} f'''(x) = 0$$

und nach dem Hilfssatz 3

$$0 < g(x) \leqq m^{-1/2}\,, \quad g'(x) \geqq 0\,, \quad g''(x) \leqq 0\,, \quad g'''(x) \geqq 0\,,$$
$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty} g''(x) = 0\,.$$

Auf Grund dieser Eigenschaften gilt

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} t'^{-3/2}(x)\,|(t'^{-3/2}(x))^{(4)}|\,\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^{\infty} f(x)\,|f^{(4)}(x)|\,\mathrm{d}x \leqq \\ &\leqq -m^{-3/2}\int_{x_0}^{\infty} f^{(4)}(x)\,\mathrm{d}x = m^{-3/2}f'''(x_0)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} t'^{-1/2}(x)\,|(t'^{-1/2}(x))''|\,\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^{\infty} g(x)\,|g''(x)|\,\mathrm{d}x \leqq \\ &\leqq -m^{-1/2}\int_{x_0}^{\infty} g''(x)\,\mathrm{d}x = m^{-1/2}g'(x_0)\,, \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} |[t'^{-1/2}(x)\,(t'^{-1/2}(x))'']'|\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{\infty} |[f(x)\,g''(x)]'|\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \int_{x_0}^{\infty} |f'(x)\, g''(x)|\, dx + \int_{x_0}^{\infty} |f(x)\, g'''(x)|\, dx =$$

$$= -f'(x_0) \int_{x_0}^{\infty} g''(x)\, dx + m^{-3/2} \int_{x_0}^{\infty} g'''(x)\, dx = f'(x_0)\, g'(x_0) - m^{-3/2}\, g''(x_0)\,.$$

Damit ist der Beweis beendet.

Aus dem Satz 1 und Hilfssatz 4 folgt unmittelbar

**Satz 2.** *Es sei $Q(x) \geqq m > 0$, $(Q^{-3/8}(x))^{(4)} \geqq 0$ $(\leqq 0)$ für $x \geqq a$. Dann lassen sich die Lösungen von (1) in der Form (7) darstellen.*

**Satz 3.** *Für*

$$x \geqq a \quad \textit{gelte} \quad Q(x) < 0\,, \quad \int_{x_0}^{\infty} (-Q(x))^{\frac{1}{4}}\, dx = \infty\,,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} (-Q(x))^{-1/8} |[(-Q(x))^{-1/8}]''|\, dx < \infty\,,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} |\{(-Q(x))^{-3/8}[(-Q(x))^{-1/8}]''\}'|\, dx < \infty\,,$$

$$\int_{x_0}^{\infty} (-Q(x))^{-3/8} |[(-Q(x))^{-3/8}]^{(4)}|\, dx < \infty\,.$$

*Dann lässt sich jede Lösung von (1) in der Form*

$$y(x) = (-Q(x))^{-3/8} \left\{ \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} (-Q(u))^{\frac{1}{4}}\, du \right\} (c_1 + o(1)) + \right. \tag{10}$$

$$\left. + \exp\left\{ - \int_{x_0}^{x} (-Q(u))^{\frac{1}{4}}\, du \right\} (c_2 + o(1)) + c_3 \sin\left( \int_{x_0}^{x} (Q(u))^{\frac{1}{4}}\, du + \varphi \right) + o(1) \right\}.$$

*darstellen. Dabei sind $c_1$, $c_2$, $c_3$ und $\varphi$ passende Konstanten.*

Beweis. Setzen wir

$$Q(x)\, t'^{-4} = -1\,, \quad \text{d.h.} \quad t(x) = \int_{x_0}^{x} (-Q(u))^{\frac{1}{4}}\, du\,.$$

Dann erhalten wir aus (5) durch Verwendung des Hilfssatzes 1, dass die Lösungen von (5) in der Form

$$v = \exp\{t\}\, (c_1 + o(1)) + \exp\{-t\}\, (c_2 + o(1)) + c_3 \sin(t + \varphi) + o(1)$$

darstellbar sind. Aus (2), (4) und aus diesem letzten Ausdruck erhalten wir schon (10).

Aus dem Satz 3 und aus dem Hilfssatz 4 folgt unmittelbar

**Satz 4.** *Es sei*

$$Q(x) \leqq -m < 0\,, \quad [(-Q(x))^{-3/8}]^{(4)} \geqq 0\ (\leqq 0) \quad \textit{für} \quad x \geqq a\,.$$

*Dann sind die Lösungen von (1) in der Form (10) darstellbar.*

Setzen wir nun in der Gleichung (5) $t(x) = \frac{1}{2}\log x$. Dann ist

$$t'^{-3/2}(x)\,(t'^{-1/2}(x))'' = -1\,.$$

Die Gleichung (5) geht in die Gleichung

$$v^{(\mathrm{IV})} - 10v^{\cdot\cdot} + (9 + 16x^4\,Q(x))\,v = 0 \tag{11}$$

über. Durch Verwendung des Hilfssatzes 1 erhalten wir das bekannte Resultat ([2], [3]):

**Satz 5.** *Es sei* $\int_{x_0}^{\infty} x^3|Q(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. *Dann lassen sich die Lösungen von* (1) *in der Form*

$$y(x) = x^3(c_1 + o(1)) + x^2(c_2 + o(1)) + x(c_3 + o(1)) + c_4 + o(1) \tag{12}$$

*darstellen.*

Beweis. Die Differentialgleichung $v^{(\mathrm{IV})} - 10v^{\cdot\cdot} + 9v = 0$ hat die charakteristischen Wurzeln $3, -3, 1, -1$. Da

$$\int_{x_0}^{\infty} x^4|Q(x)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{\infty} x^3|Q(x)|\,\mathrm{d}x < \infty\,,$$

erhalten wir nach dem Hilfssatz 1, dass die Lösungen von (11) in der Form

$$v = \exp\{3t\}\,(c_1 + o(1)) + \exp\{t\}\,(c_2 + o(1)) + \exp\{-t\}\,(c_3 + o(1)) + \\ + \exp\{-3t\}\,(c_4 + o(1))$$

darstellbar sind. Hieraus und aus (4) und (2) folgt schon (12).

**II.** Führen wir jetzt die Substitution (2) in die Gleichung

$$y''' + Q(x)\,y = 0 \tag{13}$$

ein. Für $v$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$ut'^3v^{\cdot\cdot\cdot} + (3u't'^2 + 3ut't'')\,v^{\cdot\cdot} + (3u''t' + 3u't'' + ut''')\,v^{\cdot} + \\ + (u''' + Q(x)\,u)\,v = 0\,. \tag{14}$$

Setzt man nun

$$u = t'^{-1}\,, \tag{15}$$

so arhält man aus (14) die Gleichung

$$v^{\cdot\cdot\cdot} + 4t'^{-3/2}(t'^{-1/2})''\,v^{\cdot} + \left[t'^{-2}(t'^{-1})''' + Q(x)\,t'^{-3}\right]v = 0\,. \tag{16}$$

**Satz 6.** *Die Funktion* $Q(x)$ *sei für* $x \geqq a$ *positiv und stetig und es gelte*

$$\int_{x_0}^{\infty}(Q(x))^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \infty\,,\quad \int_{x_0}^{\infty}|Q^{-1/3}(x)\,(Q^{-1/3}(x))'''|\,\mathrm{d}x < \infty\,, \tag{17}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} Q^{-1/6}(x)\,|(Q^{-1/6}(x))''|\,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

*Dann lassen sich die Lösungen von* (13) *in der Form*

$$(18)\qquad y(x) = Q^{-1/3}(x)\left\{\exp\left\{-\int_{x_0}^{x}(Q(u))^{\frac{1}{3}}\,du\right\}(c_1 + o(1)) + \right.$$

$$\left. + \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(Q(u))^{\frac{1}{3}}\,du\right\} c_2\left[\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\int_{x_0}^{x}(Q(u))^{\frac{1}{3}}\,du + \varphi\right) + o(1)\right]\right\}$$

*darstellen. Dabei sind $c_1$, $c_2$ und $\varphi$ passende Konstanten.*

Beweis. Setzen wir

$$(19)\qquad t(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}(Q(u))^{\frac{1}{3}}\,du\,.$$

Dann ist $Q(x)\,t'^{-3}(x) = 8$ und die Gleichung (16) bekommt die Form

$$(20)\qquad v^{\cdots} + 16Q^{-1/2}(x)\,(Q^{-1/6}(x))''\,v^{\cdot} + [8Q^{-2/3}(x)\,(Q^{-1/3}(x))''' + 8]\,v = 0\,,$$

wohin noch für $x$ die Funktion $x(t)$, welche die inverse Funktion zu $t(x)$ ist, zu setzen ist. Schreibt man diese Gleichung als equivalentes Differentialsystem und berücksichtigt man dann die Bedingungen (17) und den Hilfssatz 1, so ist leicht zu ersehen, dass die Lösungen von (20) in der Form

$$v = \exp\{-2t\}\,(c_1 + o(1)) + \exp\{t\}\,c_2[\sin(\sqrt{3}t + \varphi) + o(1)]$$

darstellbar sind. Hieraus und aus (2) und (15) folgt schon (18).

**Satz 7.** *Es sei $Q(x) \geqq m > 0$, $(Q^{-1/3}(x))''' \geqq 0$ $(\leqq 0)$ für $x \geqq a$. Dann lassen sich die Lösungen von* (13) *in der Form* (18) *darstellen.*

Beweis. Es genügt zu beweisen, dass aus den in diesem Satz eingeführten Voraussetzungen die Bedingungen (17) folgen. Da $Q(x) \geqq m > 0$ für $x \geqq a$, so ist $\int_{x_0}^{\infty}(Q(u))^{\frac{1}{3}}\,du = \infty$, $0 < Q^{-1/3}(x) \leqq m^{-1/3}$. Nehmen wir an, dass $(Q^{-1/3}(x))''' \geqq 0$. $(Q^{-1/3}(x))''$ nimmt also nicht ab und weil $Q^{-1/3}(x) \leqq m^{-1/3}$, muss $\lim_{x\to\infty}(Q^{-1/3}(x))'' = 0$ sein. Es muss also $(Q^{-1/3}(x))'' \leqq 0$ sein. Das bedeutet jedoch, dass $(Q^{-1/3}(x))'$ nicht wächst, und da $Q(x)$ von unten begrenzt ist, muss $\lim_{x\to\infty}(Q^{-1/3}(x))' = 0$ sein. Daraus folgt aber, dass $(Q^{-1/3}(x))' \geqq 0$. Aus den abgeleiteten Eigenschaften von $Q^{-1/3}(x)$ folgt, dass

$$\int_{t_0}^{\infty} Q^{-1/3}(x)\,|(Q^{-1/3}(x))'''|\,dx \leqq m^{-1/3}\int_{x_0}^{\infty}(Q^{-1/3}(x))'''\,dx = m^{-1/3}(Q^{-1/3}(x_0))'' < \infty\,.$$

Setzen wir $f(x) = Q^{-1/3}(x)$, $g(x) = f^{1/2}(x) = Q^{-1/6}(x)$. Dann ist $f'(x) \geqq 0$, $f''(x) \leqq 0$, $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{2}f^{-1/2}(x)f'(x) \geqq 0\,,\quad g''(x) = \frac{1}{4}f^{-3/2}(x)\,[-f'^2(x) + 2f(x)f''(x)] \leqq 0\,.$$

$g'(x)$ wächst also nicht. Da aber $g'(x) \geqq 0$ und $g(x)$ von oben begrenzt ist, muss

$\lim_{x \to \infty} g'(x) = 0$ sein. Hieraus folgt, dass

$$\int_{x_0}^{\infty} Q^{-1/6}(x) \, |(Q^{-1/6}(x))''| \, dx = \int_{x_0}^{\infty} g(x) \, |g''(x)| \, dx \leqq -m^{-1/6} \int_{x_0}^{\infty} g''(x) \, dx =$$
$$= m^{-1/6} g'(x_0) < \infty \, .$$

Damit ist der Beweis im Falle $(Q^{-1/3}(x))''' \geqq 0$ beendet. Der Fall $(Q^{-1/3}(x))''' \leqq 0$ kann ähnlicherweise behandelt werden.

**Satz 8.** *Es sei* $Q(x) \leqq m < 0$, $(Q^{-1/3}(x))''' \geqq 0$ $(\leqq 0)$ *für* $x \geqq a$. *Dann lassen sich die Lösungen von* (13) *in der Form* (18) *darstellen.*

Beweis. Wir setzen $Q(x) \, t'^{-3} = -8$ und benützen eine ähnliche Beweisführung, wie beim Satz 6 und 7.

**Satz 9.** *Es sei* $\int_{x_0}^{\infty} x^2 |Q(x)| \, dx < \infty$. *Für die Lösungen von* (13) *gelten dann die asymptotischen Formeln*

$$y(x) = x^2(c_1 + o(1)) + x(c_2 + o(1)) + c_3 + o(1) \, . \tag{21}$$

(Siehe [2], [3], [4].)

Beweis. Wir setzen $t(x) = \frac{1}{2} \log x$. Für $v$ erhalten wir dann aus (16) die Gleichung

$$v^{\cdot\cdot\cdot} - 4v^{\cdot} + 8x^3 \, Q(x) \, v = 0 \, . \tag{22}$$

Da

$$\int_{t_0}^{\infty} x^3 |Q(x)| \, dt = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{\infty} x^2 |Q(x)| \, dx < \infty \, ,$$

sind nach dem Hilfsatz 1 die Lösungen von (22) in der Form

$$v = \exp\{2t\} \, (c_1 + o(1)) + c_2 + o(1) + \exp\{-2t\} \, (c_3 + o(1))$$

darstellbar. Hieraus und aus (2) und (15) folgt schon (21).

Bemerkung. Das Verfahren, welches wir bei der Ableitung der asymptotischen Formeln für die Lösungen von (1) bzw. (13) benützten, können wir auch im Falle allgemeinerer linearen Differentialgleichungen dritter und vierter Ordnung benützen. Wir haben auch die asymptotischen Formeln für die Ableitungen der Lösungen von (1) bzw. (13) nicht eingeführt. Aus dem ganzen Verfahren ist aber ersichtlich, wie man sie finden kann.

### *Literaturverzeichniss*


[1] *Bellman R.:* Stability theory of differential equations. Russische Übersetzung, Moskva 1954.

[2] *Zlámal M.:* Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Nachrichten, 1953, 168—174.

[3] *Ghizzetti A.:* Un teorema sul comportamento assintotico degli integrali delle equazioni differnziali lineari omogenee. Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni (5) *8*, 1949, 28—42.

[4] *Ráb M.:* Asymptotické vlastnosti integrálu diferenciální rovnice 3. řádu. Spisy přír. fak. MU č. *379*, 1956, 1—14.

## Резюме

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y^{(n)} + Q(x)\, y = 0,\ n = 3, 4$

МАРКО ШВЕЦ (Marko Švec), Братислава

В работе выводятся асимптотические формулы для решений дифференциального уравнения (1) $y^{(4)} + Q(x)\, y = 0$ и дифференциального уравнения (13) $y''' + Q(x)\, y = 0$. О функции $Q(x)$ предполагается, помимо прочего, что она непрерывна для $x \geqq a$. Приведем главные результаты:

Если
$$Q(x) \geqq m > 0\,, \quad [Q^{-3/8}(x)]^{(4)} \geqq 0 \quad (\leqq 0)\,,$$
то решения дифференциального уравнения (1) имеют асимптотический вид
$$y = Q^{-3/8}(x) \left\{c_1 \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} (Q(u))^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{d}u\right\} \left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} (Q(u))^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{d}u + \varphi\right) + o(1)\right] + \right.$$
$$\left. + c_2 \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} (Q(u))^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{d}u\right\}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^{x} (Q(u))^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{d}u + \psi\right) + o(1)\right]\right\}.$$

Если
$$Q(x) \leqq m < 0\,, \quad [(-Q(x))^{-3/8}]^{(4)} \geqq 0 \quad (\leqq 0)\,,$$
то решения уравнения (1) имеют асимптотический вид
$$y = (-Q(x))^{-3/8} \left\{\exp \int_{x_0}^{x} (-Q(u))^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{d}u\right\} (c_1 + o(1)) +$$
$$+ \exp\left\{- \int_{x_0}^{x} (-Q(u))^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{d}u\right\} (c_2 + o(1)) + c_3 \sin\left(\int_{x_0}^{x} (Q(u))^{\frac{1}{4}}\, \mathrm{d}u + \varphi\right) + o(1)\right\}.$$

Если
$$Q(x) \geqq m > 0\,, \quad \text{или} \quad Q(x) \leqq k < 0 \quad \text{и} \quad (Q^{-1/3}(x))^{(3)} \geqq 0 \quad (\leqq 0)\,,$$
то решения дифференциального уравнения (13) можно выразить асимптотически в виде
$$y = Q^{-1/3}(x) \left\{\exp\left\{- \int_{x_0}^{x} (Q(u))^{\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}u\right\} (c_1 + o(1)) + \right.$$
$$\left. + \exp\left\{\tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (Q(u))^{\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}u\right\} c_2 \left[\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \int_{x_0}^{x} (Q(u))^{\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}u + \varphi\right) + o(1)\right]\right\}.$$