Czechoslovak Mathematical Journal

Eduard Čech; Alois Švec

Quelques travaux de géométrie différentielle

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 2, 169–222

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100510`

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

QUELQUES TRAVAUX DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE *)

EDUARD ČECH et ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 25 juin 1960)

On a trouvé dans l'héritage de l'académicien EDUARD ČECH une série de manuscrits et de calculs, concernant la géométrie différentielle. La plupart d'entre eux ne contenait que des calculs faits sans texte, ou bien des travaux tout à fait incomplets et inachevés. Le reste a été rédigé en six articles que voici.

Dans le premier travail, je n'ai fait que de menues retouches styllistiques; le second a été complètement refait d'après une communication orale de M. E. Čech et quelques calculs incomplets. Le troisième travail a été rédigé à partir de plusieurs calcules et notices trouvés, concernant la théorie des correspondances; son arrangement styllistique et une partie des calculs sont nouveaux. Le quatrième travail n'a subi qu'une adaptation styllistique; il en est de même pour la deuxième partie du cinquème travail. Pour le sixième travail, on n'a pu trouver que des calculs.

J'exprime à cette occasion mes remerciements sincères au professeur J. KLAPKA pour la révision de l'ensemble du manuscrit et à M. B. CENKL pour le contrôle de certains calculs.

Alois Švec

I. BANDES D'ÉLÉMENTS SUR LES HYPERSURFACES DANS L'ESPACE AFFIN

On étudie le contact du second et du troisième ordres de deux hypersurfaces dans l'espace affin, suivant leur variété d'intersection.

1. Dans l'espace affin A_{n+1} à $n + 1$ dimensions, considérons une hypersurface P. Le point $x \in P$ soit donné d'une façon paramétrique

$$x = x(u) = x(u^1, \ldots, u^n) . \tag{I,1}$$

Au lieu des paramètres u, nous pouvons introduire les nouveaux paramètres v par les équations

$$u^r = u^r(v^1, \ldots, v^n) \; ; \quad h, k, \ldots, r, s, \ldots = 1, \ldots, n \; ; \tag{I,2}$$

*) Collection de six travaux trouvés inachevés dans l'héritage de l'académicien EDUARD ČECH, rédigée par ALOIS ŠVEC.

où

$$D = \left|\frac{\partial u^r}{\partial v^s}\right| \neq 0\,. \tag{I,3}$$

Orienter P signifie n'admettre que de tels changements de paramètres (I,2), pour lesquels on a $D > 0$. Il existe deux orientations possibles.

Les paramètres u étant donnés, nous posons

$$\eta(u) = \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u^n}\right)\,; \tag{I,4}$$

η est un covecteur. Nous avons évidemment

$$\eta(v) = \boldsymbol{D}\,.\,\eta(u) \quad \text{où} \quad \boldsymbol{D} = \left\|\frac{\partial u^r}{\partial v^s}\right\| \tag{I,5}$$

et nous supposons partout $\eta \neq 0$, c'est-à-dire que P admet partout un hyperplan tangent déterminé. Nous posons ensuite

$$b_{rs}(u) = \eta(u)\,.\,\frac{\partial^2 x}{\partial u^r \partial u^s} = \left(\frac{\partial x}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u^n}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^r \partial u^s}\right). \tag{I,6}$$

En vertu de (I,2), nous avons

$$b_{rs}(v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial v^1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial v^n}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^h \partial u^k}\frac{\partial u^h}{\partial v^r}\frac{\partial u^k}{\partial v^s}\right)$$

soit encore d'après (I,3)

$$b_{rs}(v) = D\,.\,b_{hk}(u)\frac{\partial u^h}{\partial v^r}\frac{\partial u^k}{\partial v^s} \tag{I,7}$$

de sorte que

$$b_{rs}(v)\,\mathrm{d}v^r\,\mathrm{d}v^s = D\,.\,b_{rs}(u)\,\mathrm{d}u^r\,\mathrm{d}u^s \tag{I,8}$$

et l'équation

$$b_{rs}(u)\,\mathrm{d}u^r\,\mathrm{d}u^s = 0$$

a une signification invariante, ce qui est bien évident du point de vue géométrique, car elle définit *les lignes asymptotiques* sur l'hypersurface P. En posant

$$B(u) = |b_{rs}(u)| \tag{I,9}$$

nous aurons d'après (I,3) et (I,7)

$$B(v) = D^{n+2}\,.\,B(u)\,. \tag{I,10}$$

Nous allons nous borner au cas de $B \neq 0$, où le cône asymptotique n'a pas une direction singulière. Si n est pair, le signe

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} B(u) = \pm 1 \tag{I,11}$$

sera invariant, car il ne dépend ni de l'orientation de l'espace A_{n+1}, ni de celle de l'hypersurface P. Dans ce qui va suivre, supposons

$$\varepsilon = 1 \quad \text{si } n \text{ est pair.} \tag{I,11'}$$

Si n est impair, le signe (I,11) chanqe en signe contraire aussi bien à un changement d'orientation de l'espace A_{n+1} qu'à un changement d'orientation de l'hypersurface P. Posons maintenant

$$\xi(u) = [B(u)]^{-1/n+2} \, . \, \eta(u) \tag{I,12}$$

ce qui a une signification réelle même si n est pair, en raison de la convention (I,11'). D'après (I,5) et (I,10), nous avons

$$\xi(v) = \xi(u) \tag{I,13}$$

de sorte que le covecteur ξ a une signification invariante. Nous allons montrer que

$$\left(\xi, \frac{\partial \xi}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \xi}{\partial u^n}\right) \neq 0 \tag{I,14}$$

c'est-à-dire que

$$\left(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \eta}{\partial u^n}\right) \neq 0 \, . \tag{I,14'}$$

En effet, si (I,14') n'avait pas lieu, alors il existerait en raison de $\eta \neq 0$ de fonctions $\lambda^r = \lambda^r(u)$, $\mu = \mu(u)$ telles que λ^r ne s'annulent pas pour tous les r et que

$$\lambda^r \frac{\partial \eta}{\partial u^r} = \mu \eta \, . \tag{*}$$

Or, nous avons $\eta \, . \, (\partial x/\partial u^r)$, d'où il résulte par différentiation

$$\frac{\partial \eta}{\partial u^s} \, . \, \frac{\partial x}{\partial u^r} + \eta \frac{\partial^2 x}{\partial u^r \partial u^s} = 0$$

donc d'après (I,6)

$$b_{rs} = - \frac{\partial \eta}{\partial u^s} \, . \, \frac{\partial x}{\partial u^r}$$

de sorte que, en vertu de (*), on a

$$\lambda^s b_{rs} = - \mu \eta \frac{\partial x}{\partial u^r} = 0 \, .$$

Vu que λ^s n'est pas $= 0$ pour tous les s, il en résulte $B = 0$, en contradiction avec nos hypothèses.

Il découle de (I,14) qu'il est possible de définir le vecteur $X = X(u)$ par les équations

$$\xi \, . \, X = 1 \, , \quad \frac{\partial \xi}{\partial u^r} \, . \, X = 0 \tag{I,15}$$

et (I,13) donne

$$X(v) = X(u) \tag{I,16}$$

de sorte que le vecteur X est invariant.

2. Jusqu'à présent nous n'avons considéré qu'une seule hypersurface P. Soient maintenent données deux hypersurfaces P, P' qui aient en commun une variété Q à $n - 1$ dimensions. Supposons que nous ayons sur Q les paramètres u^i $(i, j = 1, \ldots, n - 1)$ et sur P, P' les paramètres u^r, donnés de telle façon que (sur les deux hypersurfaces) $u^n = 0$ donne la variété Q. Nous pouvons changer les paramètres (indépendament sur P et sur P') de façon à laisser inchangés les paramètres u^i pour $u^n = 0$.

Notons

$$B_n(u) = |b_{ij}(u)| \quad \text{pour} \quad u^n = 0 \,;$$

B_n est le discriminant de la forme $\eta \,.\, \mathrm{d}^2 x$ (pour $u^n = 0$), de sorte que l'équation $B_n = 0$ a une signification invariante. Les équations $B_n = 0$ et $B'_n = 0$ sont équivalentes si P et P' se touchent le long de Q. Si $B_n = 0$, nous dirons que Q es une $(n - 1)$-*varieté asymptotiquement singulière* sur P; ces variétés forment un ensemble dépendant d'une fonction de $n - 1$ variables.

La condition pour le contact du premier ordre des hypersurfaces P et P' le long de Q est $(\xi\xi') = 0$ suivant Q. Si le contact du premier ordre suivant Q a lieu et que Q soit asymptotiquement singulière sur P (et donc aussi sur P'), nous avons $\xi = \xi'$ suivant Q. Car nous pouvons choisir les paramètres sur P et sur P' de telle façon que le contact des hypersurfaces P, P' suivant Q soit un contact analytique du premier ordre, c'ést-à-dire que

$$\text{(I,17)} \qquad \frac{\partial x}{\partial u^r} = \frac{\partial x'}{\partial u^r} \quad \text{pour} \quad u^n = 0 \,.$$

Il découle de (I,17) par différentiation

$$\text{(I,18)} \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^r} = \frac{\partial^2 x'}{\partial u^i \partial u^r} \quad \text{pour} \quad u^n = 0 \,,$$

or, pour $u^n = 0$ nous avons

$$\text{(I,19)} \qquad B = b_{nn} \,.\, B_n + B^*$$

où B^* ne dépend que de $\partial x/\partial u^r$, $\partial^2 x/\partial u^i \partial u^r$; donc d'après (I,17) et (I,18) B^* ne changera pas si l'on passe de P à P'. Si maintenant $B_n = 0$, alors (I,19) donne $B = B'$ pour $u^n = 0$, de sorte que d'après (I,4), (I,12) et (I,17) on a $\xi = \xi'$ pour $u^n = 0$. On a également $\operatorname{sgn} B = \operatorname{sgn} B'$, c'est-à-dire $\varepsilon = \varepsilon'$.

Si Q n'est pas asymptotiquement singulière, on a $\varepsilon = \varepsilon'$ et $\xi = \xi'$ le long de Q si et seulement si P et P' ont le long de Q un contact du second ordre. Si P et P' ont un tel contact, nous pouvons le supposer analytique, ce qui entraînera évidemment $\varepsilon = \varepsilon'$, $\xi = \xi'$. Par contre soit $\varepsilon = \varepsilon'$, $\xi = \xi'$ le long de Q. Les hypersurfaces P et P' ont le long de Q un contact du premier ordre que nous pouvons supposer analytique, ce qui entraîne (I,17) et (I,18), donc B^* ne change pas si l'on passe de P à P'. D'après (I,6), (I,17) et (I,18) on a $b_{ir} = b'_{ir}$ pour $u^n = 0$, donc aussi $B_n = B'_n \neq 0$. D'après

(I,17), on a $\eta = \eta'$ pour $u^n = 0$. Compte tenu de $\varepsilon = \varepsilon'$, $\xi = \xi'$, nous voyons que $B = B'$ pour $u^n = 0$, et (I,19) donne $b_{nn} = b'_{nn}$ pour $u^n = 0$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u^n}, \frac{\partial^2 x}{(\partial u^n)^2}\right) = \left(\frac{\partial x'}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x'}{\partial u^n}, \frac{\partial^2 x'}{(\partial u^n)^2}\right)$$

donc d'après (I,17)

$$\frac{\partial^2 x'}{(\partial u^n)^2} - \frac{\partial^2 x}{(\partial u^n)^2} = \alpha^r \frac{\partial x}{\partial u^r} \quad \text{pour} \quad u^n = 0\ ;\ \alpha^r = \alpha^r(u^1, \ldots, u^{n-1})\,.$$

Nous introduisons maintenant sur P' de nouveaux paramètres v^r (en laissant inchangés les paramètres sur P) par les équations

$$\text{(I,20)} \qquad u^r = v^r - \tfrac{1}{2}\alpha^r(v^n)^2\ ;$$

nous aurons alors pour $u^n = 0$, c'est-à-dire pour $v^n = 0$,

$$\frac{\partial x'}{\partial v^r} = \frac{\partial x'}{\partial u^r}, \frac{\partial^2 x'}{\partial v^i \partial v^r} = \frac{\partial^2 x'}{\partial u^i \partial u^r}, \frac{\partial^2 x'}{(\partial v^n)^2} = \frac{\partial^2 x'}{(\partial u^n)^2} - \alpha^r \frac{\partial x'}{\partial u^r}$$

de sorte que d'après (1,17), (1,18) et (I,19) nous aurons le long de Q

$$\text{(I,21)} \qquad x' = x', \frac{\partial x'}{\partial v^r} = \frac{\partial x}{\partial u^r}, \frac{\partial^2 x'}{\partial v^r \partial v^s} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^r \partial u^s}$$

et P et P' auront le long de Q un contact du second ordre.

3. Supposons que les hypersurfaces P, P' aient en commun une $(n-1)$-variété Q qui ne soit pas asymptotiquement singulière sur P. *Si P et P' ont un contact du troisième ordre le long de Q, alors nous avons lo long de Q*

$$\text{(I,22)} \qquad \varepsilon' = \varepsilon\,, \quad \xi' = \xi\,, \quad X' = X\,,$$

le vecteur invariant X étant défini par les équations (I,15). Nous allons démontrer maintenant la proposition réciproque: *Si l'on a* (I,22) *le long de Q, alors P et P' ont le long de Q un contact du troisième ordre.* Nous savons déjà que P et P' ont un contact du second ordre suivant Q; nous pouvons le supposer analytique, c'est-à-dire nous pouvons supposer que

$$\text{(I,23)} \qquad x = x'\,, \quad \frac{\partial x}{\partial u^r} = \frac{\partial x'}{\partial u^r}\,, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^r \partial u^s} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^r \partial u^s} \quad \text{pour} \quad u^n = 0\,.$$

Nous en obtenons par différentiation

$$\text{(I,24)} \qquad \frac{\partial^3 x}{\partial u^r \partial u^s \partial u^i} = \frac{\partial^3 x}{\partial u^r \partial u^s \partial u^i} \quad \text{pour} \quad u^n = 0\,.$$

En raison de (I,4) et (I,23) on a

$$\eta = \eta'\,, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u^r} = \frac{\partial \eta'}{\partial u^r} \quad \text{pour} \quad u^n = 0$$

et, en dehors de cela encore

$$b_{rs} = b'_{rs}, \quad B = B' \quad \text{pour} \quad u^n = 0 .$$

Maintenant, (I,12) entraîne

$$\frac{\partial \xi'}{\partial u^r} - \frac{\partial \xi}{\partial u^r} = C_r \xi \quad \text{pour} \quad u^n = 0 ,$$

or comme $X' = X$, on a en vertu de (I,15)

$$0 = \left(\frac{\partial \xi'}{\partial u^r} - \frac{\partial \xi}{\partial u^n} \right) X = C_r ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \xi'}{\partial u^r} = \frac{\partial \xi}{\partial u^r} \quad \text{pour} \quad u^n = 0 .$$

Mais cela signifie d'après (I,12) que

$$\frac{\partial B'}{\partial u^n} = \frac{\partial B}{\partial u^n} \quad \text{pour} \quad u^n = 0$$

d'où il découle, en raison de (I,19),

$$\frac{\partial b_{nn}}{\partial u^n} = \frac{\partial b'_{nn}}{\partial u^n} \quad \text{pour} \quad u^n = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\text{(I,25)} \qquad \frac{\partial^3 x'}{(\partial u^n)^3} - \frac{\partial^3 x}{(\partial u^n)^3} = \beta^r \frac{\partial x}{\partial u^r} \quad \text{pour} \quad u^n = 0 \, ; \; \beta^r = \beta^r(u^1, \ldots, u^{n-1}) .$$

Nous introduisons maintenant sur P' de nouveaux paramètres v^r par les équations

$$u^r = v^r - \tfrac{1}{6}\beta^r (v^n)^3 .$$

Alors, il est aisé de trouver que

$$\frac{\partial}{\partial v^r} = \frac{\partial}{\partial u^r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial v^r \partial v^s} = \frac{\partial^2}{\partial u^r \partial u^s}, \quad \frac{\partial^3}{(\partial v^n)^3} = \frac{\partial^3}{(\partial u^n)^3} - \beta^r \frac{\partial}{\partial u^r} \quad \text{pour} \quad u^n = 0 .$$

Si maintenant nous écrivons sur P' u^r au lieu de v^r, les équations (I,23) et (I,24) subsisteront tandis que (I,25) sera remplacée par

$$\frac{\partial^3 x'}{(\partial u^n)^3} = \frac{\partial^3 x}{(\partial u^n)^3} \quad \text{pour} \quad u^n = 0$$

ce qui achève la démonstration.

4. *D'une manière générale, il suffit de supposer au lieu de* (I,22) *seulement*

$$\text{(I,26)} \qquad \varepsilon' = \varepsilon , \quad X' = X .$$

Il suffit de montrer qu'on a alors aussi $\xi' = \xi$, ce qui a lieu si les équations

$$\xi \, . \frac{\partial x}{\partial u^i} = 0 \, , \quad \xi \, . \, X = 1 \, , \quad \xi \, . \frac{\partial X}{\partial u^i} = 0$$

(manifestement valables) déterminent ξ de façon univoque. Or, une exception peut avoir lieu seulement si $\partial X/\partial u^i$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\partial x/\partial u^i$. Comme

$$\xi \, . \frac{\partial X}{\partial u^r} = 0 = \xi \, . \frac{\partial x}{\partial u^r}$$

nous voyons que $\partial X/\partial u^r$ sont certainement des combinaisons linéaires des vecteurs $\partial x/\partial u^r$, c'est-à-dire que

$$\text{(I,27)} \qquad \frac{\partial X}{\partial u^r} = c_r^s \frac{\partial x}{\partial u^s}$$

et le cas exceptionnel correspond à

$$\text{(I,28)} \qquad c_i^n = 0 \quad \text{pour tous les } i \text{ (et pour } u^n = 0) \, .$$

Or, cela signifie que si le point x décrit une courbe sur Q, la droite (xX) engendre une surface dont l'espace tangent A_3 est contenu dans l'union de la droite (xX) au $(n - 1)$-espace tangent à la varieté Q au point x (ou bien A_3 est indéterminé).

*

II. QUADRIQUES DE LIE D'UNE SURFACE

Pour chaque paire de points correspondants de deux surfaces π et π', dans S_3 et S_3' respectivement, en correspondance asymptotique, on détermine géométriquement l'unique homographie existant entre S_3 et S_3' qui, dans le cas où π' est une dualisation de la surface π, soit une polarité par rapport à la quadrique de Lie.

Dans deux espaces projectifs à trois dimensions S_3 et S_3' soient données deux surfaces $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$ respectivement, par les systèmes fondamentaux d'équations[1])

$$\text{(II,1)} \qquad \begin{aligned} x_{uu} &= \Theta_u x_u + \beta x_v + px \, , \\ x_{vv} &= \gamma x_u + \Theta_v x_v + qx \, , \quad (x x_u x_v x_{uv}) = \pm \, e^{2\Theta} \end{aligned}$$

resp.

$$\text{(II,2)} \qquad \begin{aligned} y_{uu} &= \Theta'_u y_u + \beta' y_v + p' y \, , \\ y_{vv} &= \gamma' y_u + \Theta'_v y_v + q' y \, , \quad (y y_u y_v y_{uv}) = \pm \, e^{2\Theta'} \, . \end{aligned}$$

Les deux surfaces sont en correspondance asymptotique C donnée par l'égalité des paramètres. L'homographie tangente la plus générale de la correspondance C est

$$\text{(II,3)} \qquad Kx = y \, , \quad Kx_u = y_u + \varrho_1 y \, , \quad Kx_v = y_v + \varrho_2 y \, ,$$

$$\text{(II,4)} \qquad Kx_{uv} = \alpha_0 y + \alpha_1 y_u + \alpha_2 y_v + \alpha_3 y_{uv} \, , \quad \alpha_3 \neq 0 \, .$$

[1]) Voir E. Čech: Introduction à la géometrie projective différentielle des surfaces, p. 47.

Pour chaque paire de points correspondantes des deux surfaces soit donnée *la partie essentielle* (II,3) de l'homographie tangente K. Pour $v = v_0 =$ const., considérons la correspondance C' entre les surfaces réglées $(X) = (x_v + tx)$, $(Y) = (y_v + \overline{t + \varrho_2} \,.\, y)$, donnée par l'égalité des paramètres u, t. Les deux surfaces en question sont formées par des tangentes asymptotiques (asymptotiques $u =$ const.) le long des asymptotiques $v = v_0$; les projectivités entre les droites en correspondance sont formées par les homographies (II,3). Essayons de choisir (II,4) de telle façon que les homographies tangentes K soient des homographies tangentes à la correspondance C' le long des droites entières (xx_v), (yy_v) en correspondance. Nous avons

$$KX = Y\,, \quad KX_t = Kx = y = Y_t\,,$$
$$KX_u = K(x_{uv} + tx_u) = (\alpha_0 + t\varrho_1)\, y + (\alpha_1 + t)\, y_u + \alpha_2 y_v + \alpha_3 y_{uv}\,,$$
$$Y_u = y_{uv} + (t + \varrho_2)\, y_u + \varrho_{2u} y\,.$$

La condition citée exige que $KX_u - Y_u$ soit proportionnel à $Y = y_v + (t + \varrho_2)\, y$, donc

$$\alpha_3 = 1\,, \quad \alpha_1 = \varrho_2\,, \quad \alpha_0 + t\varrho_1 = \varrho_2 u + \alpha_2(t + \varrho_2)\,,$$

c'est-à-dire

(II,5) $$\alpha_0 = \varrho_{2u} + \varrho_1\varrho_2\,, \quad \alpha_1 = \varrho_2\,, \quad \alpha_2 = \varrho_1\,, \quad \alpha_3 = 1\,.$$

Cela signifie que (II,3) étant choisi arbitrairement, il ne subsiste qu'une seule possibilité dans choix de (II,4). Echangeons u et v; le procédé décrit ci-dessus conduit à la même valeur (II,4) si et seulement si

(II,6) $$\varrho_{1v} = \varrho_{2u}\,.$$

Laissons pour l'instant (II,3) et (II,4) quelconques. D'après (II,1), (II,2), (II,3) nous avons

$$Kx_{uu} = y_{uu} + (\Theta_u + \Theta'_u)\, y_u + (\beta - \beta')\, y_v + (.)\, y\,,$$

de sorte que la tangente à l'asymptotique $u =$ const., c'est l'ensemble des points tels que la condition nécessaire et suffisante pour que les projections des asymptotiques $v = v_0$ des surfaces (Kx), (y) faites de ces points aient un contact analytique du second ordre est

(II,7) $$2\varrho_1 = \Theta_u - \Theta'_u\,.$$

En échangeant u et v, nous obtenons

(II,8) $$2\varrho_2 = \Theta_v - \Theta'_v\,.$$

La partie essentielle (II,3) de l'homographie K est bien déterminée par les conditions (II,7) et (II,8); en supposant (II,6) nous voyons ensuite que la condition (II,5) (au bien la condition analouge que l'on obtient en interchangeant u et v) détermine (II,4) sans équivoque. Si nous supposons encore

(II,9) $$\Theta = \Theta'$$

— ce qui ne restreint la généralité — cette homographie prend la forme

$$K_1 x = y\,, \quad K_1 x_u = y_u\,, \quad K_1 x_v = y_v\,, \quad K_1 x_{uv} = y_{uv}\,. \tag{II,10}$$

L'homographie (II,10) *généralise la quadrique de Lie.* En effet, si la surface $(y') \equiv \equiv (\xi)$ est le dual de la surface (y), alors ses équations fondamentales[1])

$$\xi_{uu} = \Theta_u \xi_u - \beta \xi_v + \pi_{11} \xi\,, \quad \xi_{vv} = -\gamma \xi_u + \Theta_v \xi_v + \pi_{22} \xi \tag{II,11}$$

et la polarité par rapport à la quadrique de Lie est donnée par les relations[2])

$$K_1 x = \xi\,, \quad K_1 x_u = \xi_u\,, \quad K_1 x_v = \xi_v\,, \quad K_1 x_{uv} = \xi_{uv}\,.^3) \tag{II,12}$$

*

III. DÉFORMATIONS PROJECTIVES SPÉCIALES DE SURFACES ANHOLONOMES

Le présent travail forme la suite d'une série de travaux de M. E. Čech sur les correspondances entre les espaces. On montre qu'il n'existe pas de déformations projectives spéciales des variétés anholonomes de l'espace à trois dimensions.

1. Dans son travail Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами VIII[4]) [Чех. мат. журнал, *4* (*79*) 1954, 143—174] E. Čech a étudié *les déformations projectives spéciales des couches d'hypersurfaces dans S_n. Nous allons passer maintenant à l'étude des deformations projectives spéciales de variétés anholonomes, en nous bornant au cas de $n = 3$; nous allons montrer que ces déformations n'existent pas.*

Cependant, considérons d'abord les possibilités de spécialiser le repère pour une couche arbitraire dans S_3. Nous obtenons une couche dans S_3 si nous faisons correspondre à tout point A un plan α passant par ce point. Choisissons le repère de telle manière que les plans α et $[AA_1A_2]$ coïncident; dans le cas où $[\omega_3\, d\omega_3] = 0$, il s'agira d'une couche holonome (donc une couche de surfaces), si $[\omega_3\, d\omega_3] \neq 0$ la couche en question sera anholonome (donc une surface anholonome V_3^2).

Comme nous avons $e_{13} = e_{23} = 0$, on a

$$\begin{aligned} \delta\omega_1 &= (e_{00} - e_{11})\,\omega_1 - e_{21}\omega_2 - e_{31}\omega_3\,, \\ \delta\omega_2 &= -\,e_{12}\omega_1 + (e_{00} - e_{22})\,\omega_2 - e_{32}\omega_3\,, \\ \delta\omega_3 &= (e_{00} - e_{33})\,\omega_3\,, \\ \delta\omega_{13} &= e_{10}\omega_3 + (e_{11} - e_{33})\,\omega_{13} + e_{12}\omega_{23}\,, \\ \delta\omega_{23} &= e_{20}\omega_3 + e_{21}\omega_{13} + (e_{22} - e_{33})\,\omega_{23}\,. \end{aligned} \tag{III,1}$$

[2]) Voir [1]), p. 62—63.

[3]) Connaissant le résultat de ce travail (par communication orale de M. E. Čech), je l'ai pris pour point de départ de mon travail Quadriques de Lie d'une surface plongée dans l'espace tridimensionnel à connexion projective; Чех. мат. журнал, 11 (86) 1961, 134—142. *A. Š.*

[4]) Dans la suite, nous désignerons ce travail par C.

Si $\tilde{\omega}_i$ est cogredient à ω_i, alors

$$(\text{III},2) \qquad \delta(\omega_{13}\tilde{\omega}_1 + \omega_{23}\tilde{\omega}_2) = (e_{00} - e_{33})(\omega_{13}\tilde{\omega}_1 + \omega_{23}\tilde{\omega}_2) + \\ + (e_{10}\tilde{\omega}_1 + e_{20}\tilde{\omega}_2)\,\omega_3 - (e_{31}\omega_{13} + e_{32}\omega_{23})\,\tilde{\omega}_3 .$$

Si nous nous bornons donc aux valeurs des différentiels pour lesquelles $\omega_3 = \tilde{\omega}_3 = 0$, alors $\omega_{13}\tilde{\omega}_1 + \omega_{23}\tilde{\omega}_2$ sera l'invariant relatif et nous pourrons spécialiser le repère de façon à avoir

$$(\text{III},3) \qquad \omega_{13}\tilde{\omega}_1 + \omega_{23}\tilde{\omega}_2 \equiv \varphi \quad (\text{mod}\ \omega_3, \tilde{\omega}_3)$$

où φ est une forme bilinéaire canonique en $\omega_1, \omega_2, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$. *Il peut donc y avoir les cas suivants* (les trois premiers sont holonomes, les autres trois anholonomes):

a) $\varphi = 0$, c'est-à-dire

$$(\text{III},4) \qquad \omega_{13} = \alpha\omega_3\,, \quad \omega_{23} = \beta\omega_3\,,$$

la couche se compose de plans;

b) $\varphi = \omega_1\tilde{\omega}_1$, c'est-à-dire

$$(\text{III},5) \qquad \omega_{13} = \omega_1 + \alpha\omega_3\,, \quad \omega_{23} = \beta\omega_3$$

et la couche est composée de surfaces développables qui ne sont pas plans;

c) $\varphi = \omega_1\tilde{\omega}_2 + \omega_2\tilde{\omega}_1$, c'est-à-dire

$$(\text{III},6) \qquad \omega_{13} = \omega_2 + \alpha\omega_3\,, \quad \omega_{23} = \omega_1 + \beta\omega_3\,,$$

la couche est composée de surface indéveloppables;

d) $\varphi = \omega_1\tilde{\omega}_2 - \omega_2\tilde{\omega}_1$, c'est-à-dire

$$(\text{III},7) \qquad \omega_{13} = -\,\omega_2 + \alpha\omega_3\,, \quad \omega_{23} = \omega_1 + \beta\omega_2\,,$$

la projectivité π qui (pour $\omega_3 = 0$) associe à la direction $[A\ \mathrm{d}A]$ la direction $[\alpha\ \mathrm{d}\alpha]$ est identité et toutes les courbes $\omega_3 = 0$ ont au point A le plan osculateur α;

e) $\varphi = \omega_1\tilde{\omega}_2 + c\omega_2\tilde{\omega}_1\ (c^2 \neq 1)$, c'est-à-dire

$$(\text{III},8) \qquad \omega_{13} = c\omega_2 + \alpha\omega_3\,, \quad \omega_{23} = \omega_1 + \beta\omega_3 \quad (c^2 \neq 1)\,,$$

π a deux directions doubles différentes;

f) $\varphi = \omega_1\tilde{\omega}_1 + \omega_2\tilde{\omega}_1 - \omega_1\tilde{\omega}_2$, c'est-à-dire

$$(\text{III},9) \qquad \omega_{13} = \omega_1 + \omega_2 + \alpha\omega_3\,, \quad \omega_{23} = -\,\omega_1 + \beta\omega_3\,,$$

alors π est parabolique de façon que V_3^2 est aussi parabolique.

2. La déformation projective spéciale d'une quelconque des couches de S_n est donnée par les équations C (1,3) et les conditions d'intégrabilité C (1,4)–(1,8). Si nous introduissons les fonctions a_{ij}, b_i, c_i, f par les équations C (1,9)–(1,12), nous obtenons C (1,13). Il est possible d'écrire ces équations sous forme de

$$(\text{III},10) \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} (a_{ij}\delta_{kl} + a_{ik}\delta_{jl} + a_{lj}\delta_{ik} + a_{lk}\delta_{ij})\,[\omega_{kn}\omega_l\omega_n] = 0 \quad (1 \leqq i, j \leqq n-1)\,,$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker. Les formes Ω_i prennent alors l'allure (voir C (2,4))

$$\Omega_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ji}\omega_j\omega_n + c_i\omega_n^2 \quad (1 \leqq i \leqq n-1), \quad \Omega_n = 0 . \tag{III,11}$$

Pour $n = 3$ les équations (III,10) deviennent $(i, j = 1, 2)$

$$\begin{aligned}(a_{ij} + a_{i1}\delta_{j1} + a_{1j}\delta_{i1} + a_{11}\delta_{ij})\,[\omega_{13}\omega_1\omega_3] &+ \\ + (a_{i1}\delta_{j2} + a_{2j}\delta_{i1} + a_{21}\delta_{ij})\,[\omega_{13}\omega_1\omega_3] &+ \\ + (a_{i2}\delta_{j1} + a_{1j}\delta_{i2} + a_{12}\delta_{ij})\,[\omega_{23}\omega_1\omega_3] &+ \\ + (a_{ij} + a_{i2}\delta_{j2} + a_{2j}\delta_{i2} + a_{22}\delta_{ij})\,[\omega_{23}\omega_2\omega_3] &= 0 .\end{aligned} \tag{III,12}$$

Passons maintenant au cas où la couche dans S_3 sera une surface anholonome V_3^2 aux asymptotiques indéterminées, c'est-à-dire au cas, où (III,7) a lieu. Il résulte alors de (III,12)

$$a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0 \tag{III,13}$$

de sorte que, en vertu de (III,11) on a

$$\Omega_1 = c_1\omega_3^2 , \quad \Omega_2 = c_2\omega_3^2 , \quad \Omega_3 = 0 . \tag{III,14}$$

Ainsi, nous voyons que notre correspondance admet des droites totalement K-linéarisantes, car (*) $\Omega_i = c_i\Omega\,(1 \leqq i \leqq 3)$, où Ω a le rang $r = 1$. Pour toutes les correspondances existant entre S_3 et S'_3 aux droites totalement K-linéarisantes qui ne passent pas par le point fixe, on a (*) avec $r = 2$. Dans le cas où ces droites passent par un point fixe et $r = 1$, nous obtenons une correspondance composée de ∞^1 homographies planes, et qui ne peut pas être une déformation projective spéciale d'une surface anholonome; voir C VI, § 6, (Чех. мат. журнал, 2 (1952), 297–331). Donc, *les surfaces anholonomes* (III,7) *n'admettent pas de déformation projective spéciale.*

Nous arrivons au même résultat également dans le cas des surfaces anholonomes paraboliques, car (III,9) et (III,12) entraînent de nouveau (III,13) et (III,14).

3. Passons enfin au cas de surface anholonome générale, pour laquelle (III,8) a lieu. L'équation (III,12) donne

$$4ca_{11} = a_{11} + a_{22} , \quad c(a_{11} + a_{22}) = 4a_{22} , \quad (c-1)\,a_{12} = (c-1)\,a_{21} = 0$$

de sorte que nous obtenons soit le cas exclu (III,13), ou bien

$$c^2 - 4c + 1 = 0 \tag{III,15}$$

c'est-à-dire

$$c = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ou bien} \quad c = 2 - \sqrt{3} . \tag{III,16}$$

Supposons donc dès à présent que c vérifie (III,16), alors nour aurons

$$a_{22} = c^2 a , \quad a_{11} = a \neq 0 , \quad a_{12} = a_{21} = 0 . \tag{III,17}$$

Or, (III,8) et (III,1) entraînent de sorte qu'il est possible de spécialiser de façon à avoir $\alpha = \beta = 0$, c'est-à-dire

$$\omega_{13} = c\omega_2 , \quad \omega_{23} = \omega_1 . \tag{III,18}$$

Il en découle par différentiation extérieure

$$(III,19)\quad (c+1)[\omega_{12}\omega_1] - c[\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega_2] + [\omega_{10} + c\omega_{32}\omega_3] = 0\,,$$
$$[\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega_1] - (c+1)[\omega_{21}\omega_2] - [\omega_{20} + \omega_{31}\omega_3] = 0\,.$$

Le problème considéré est donc donné par les équations C (1,3) pour $n = 3$, (III,18) et (III,16) que l'on ferme par les équations C (1,4) – (1,8) pour $n = 3$, et (III,19); de sorte qu'après un prolongement partiel (voir C (1,9) – (1,12)) nous obtenons en somme le système

$$(III,20)\qquad \tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = 0\,,$$

$$(III,21)\qquad \tau_{13} = 0\,,\quad \tau_{23} = 0\,,\quad \tau_{33} - \tau_{00} = 0\,,$$

$$(III,22)\qquad \tau_{11} - \tau_{00} = a\omega_3\,,\quad \tau_{22} - \tau_{00} = c^2 a\omega_3\,,\quad \tau_{12} = 0\,,\quad \tau_{21} = 0\,,$$

$$(III,23)\qquad \tau_{31} = a\omega_1 + 2c_1\omega_3\,,\quad \tau_{32} = ac^2\omega_2 + 2c_2\omega_3\,,$$

$$(III,24)\qquad \tau_{10} = ac\omega_2 + 2b_1\omega_3\,,\quad \tau_{20} = ac^2\omega_1 + 2b_2\omega_3\,,$$

$$(III,25)\qquad \tau_{30} = (b_1 + c_2)\,\omega_1 + (b_2 + cc_1)\,\omega_2 + f\omega_3$$

et (III,18); les conséquences différentielles des équations (III,20) et (III,21) sont vérifiées.

En différentiant extérieurement les équations (III,23), on trouve

$$\delta a = a(e_{33} - e_{00})\,,\quad \delta c_1 = c_1(2e_{33} - e_{00} - e_{11}) + ae_{31}\,,$$
$$\delta c_2 = c_2(2e_{33} - e_{00} - e_{22}) + 2ac^2 e_{32}\,;$$

on peut donc spécialiser de façon à avoir

$$(III,26)\qquad a = 1\,,\quad c_1 = c_2 = 0\,.$$

$(III,22_{1,2})$ donne $\tau_{22} + (c^2 - 1)\,\tau_{00} - c^2\tau_{11} = 0$, par différentiation extérieure, il en vient

$$(III,27)\qquad b_1 = b_2 = 0$$

de sorte que le système (III,20) – (III,25) prend la forme

$$(III,28)\qquad \tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = 0\,,$$

$$(III,29)\qquad \tau_{13} = 0\,,\quad \tau_{23} = 0\,,\quad \tau_{33} - \tau_{00} = 0\,,$$

$$(III,30)\qquad \tau_{11} - \tau_{00} = \omega_3\,,\quad \tau_{22} - \tau_{00} = c^2\omega_3\,,\quad \tau_{12} = 0\,,\quad \tau_{21} = 0\,,$$

$$(III,31)\qquad \tau_{31} = \omega_1\,,\quad \tau_{32} = c^2\omega_2\,,$$

$$(III,32)\qquad \tau_{10} = c\omega_2\,,\quad \tau_{20} = c^2\omega_1\,,\quad \tau_{30} = f\omega_3\,;$$

le système considéré n'est pas en involution. Par différentiation extérieure des équations $(III,30_{3,4})$ et de

$$\tau_{20} = c^2(\tau_{31} + \omega_1 - \omega_{23})\,,\quad \tau_{32} = c(\tau_{10} + \omega_{13}) - c^2\omega_2$$

obtenu à partir de (III,31), (III,32) et (III,18) on arrivera à

$$[\omega_{12}\omega_3] = 0\,, \quad [\omega_{21}\omega_3] = 0\,,$$

$$[\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} + 2(c^{-1}f - c)\,\omega_3\omega_1] - 2(c + 1)\,[\omega_{21}\omega_2] = 0\,,$$

$$2(c^{-1} + 1)\,[\omega_{12}\omega_1] - [\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} + 2(c^{-1}f - c)\,\omega_3\omega_2] = 0$$

de sorte que

(III,33) $$\omega_{12} = 0\,, \quad \omega_{21} = 0\,,$$

(III,34) $$\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} = 2g\omega_3 \quad \text{où} \quad g = c - c^{-1}f\,.$$

Différentiant extérieurement les équations ($III,30_{1,2}$) on obtient

$$[\omega_{33} - \omega_{00}\omega_3] = 0$$

de sorte que

$$\omega_{00} - \omega_{33} = h\omega_3\,,$$

$$[\mathrm{d}h + 2\omega_{30}\omega_3] + [\omega_{32} + \omega_{10}\omega_1] + [\omega_{20} + c\omega_{31}\omega_2] + (c - 1)\,h\,[\omega_1\omega_2] = 0\,.$$

On peut donc faire la spécialisation de façon à avoir $h = 0$, c'est-à-dire

(III,35) $$\omega_{00} - \omega_{33} = 0\,,$$

(III,36) $$2[\omega_{30}\omega_3] + [\omega_{32} + \omega_{10}\omega_1] + [\omega_{20} + c\omega_{31}\omega_2] = 0\,.$$

Les équations (III,19) deviennent maintenant

(III,37) $$[c^{-1}\omega_{10} + \omega_{32} + 2g\omega_2\omega_3] = 0\,, \quad [\omega_{20} + \omega_{31} + 2g\omega_1\omega_3] = 0\,.$$

Par différentiation extérieure de (III, 31) nous obtenons

(III,38) $$[2\omega_{31} + (1 - f)\,\omega_1\omega_3] = 0\,, \quad [2\omega_{32} + (c^2 - c^{-2}f)\,\omega_2\omega_3] = 0\,,$$

(III,33) entraîne

(III,39) $$[c^{-1}\omega_{10} - \omega_{32}\omega_2] = 0\,, \quad [\omega_{20} - \omega_{31}\omega_1] = 0\,.$$

Il résulte de (III,37), (III,38) que

(III,40) $$[c^{-1}\omega_{10} - \omega_{32} + (1 - f - 2g)\,\omega_2\omega_3] = 0$$
$$[\omega_{20} - \omega_{31} + (2g + f - 1)\,\omega_1\omega_3] = 0$$

de sorte que

(III,41) $$c^{-1}\omega_{10} - \omega_{32} = (2g + f - 1)\,\omega_2\,, \quad \omega_{20} - \omega_{31} = (1 - f - 2g)\,\omega_1\,.$$

Il découle de ($III,32_3$) et (III,34) que l'on a

$$2\tau_{30} = 2c^2\omega_3 - c(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33})$$

ce qui donne par différentiation extérieure

$$[c^{-1}\omega_{10} - \omega_{32}\omega_1] + [\omega_{20} - \omega_{31}\omega_2] + (c^2 - 1)\,[\omega_1\omega_2] = 0\,.$$

En y substituant suivant (III,41), nous aurons

(III,42) $$f = 0\,, \quad g = c$$

de sorte que (III,41) entraîne

$$\text{(III,43)} \qquad c^{-1}\omega_{10} - \omega_{32} = (2c - 1)\,\omega_2\,, \quad \omega_{20} - \omega_{31} = (1 - 2c)\,\omega_1\,.$$

En accord avec (III,37), on peut poser

$$\text{(III,44)} \qquad \begin{aligned} c^{-1}\omega_{10} &= -\tfrac{1}{2}\omega_2 + k_2\omega_3\,, \quad \omega_{20} = -\tfrac{1}{2}c^2\omega_1 + k_1\omega_3\,, \\ \omega_{31} &= -\tfrac{1}{2}\omega_1 + k_1\omega_3\,, \quad \omega_{32} = -\tfrac{1}{2}c^2\omega_2 + k_2\omega_3\,. \end{aligned}$$

Les équations (III,43) donnent par différentiation extérieure.

$$[4\omega_{30} - 7c^2\omega_3\omega_1] = 0\,, \quad [4\omega_{30} - 7c^2\omega_3\omega_2] = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$\text{(III,45)} \qquad \omega_{30} = \tfrac{7}{4}c^2\omega_3\,.$$

En le substituant en (III,36), nous obtenons $k_1 = k_2 = 0$, de sorte que les équations (III,44) deviennent

$$\text{(III,46)} \quad \omega_{10} = -\tfrac{1}{2}c\omega_2\,, \quad \omega_{20} = -\tfrac{1}{2}c^2\omega_1\,, \quad \omega_{31} = -\tfrac{1}{2}\omega_1\,, \quad \omega_{32} = -\tfrac{1}{2}c^2\omega_2.$$

Or, la différentiation extérieure de $(\text{III},46)_1$ donne $[\omega_2\omega_3] = 0$, de sorte que même *la variété anholonome V_3^2 générale n'admet pas de déformations projectives spéciales.*

*

IV. DÉFORMATIONS PROJECTIVES DES CONGRUENCES PARABOLIQUES QUI ONT UNE COURBE DIRECTRICE

Soit donnée une courbe (A) et le système de ses plans tangents (E); l'ensemble des droites de tous les faisceaux (A, E) engendre une congruence parabolique L. Supposons que nous ayons deux congruences L, L' de cette espèce et une correspondance t existant entre les courbes (A), (A'), donc aussi entre les systèmes de faisceaux (A, E), (A', E'). Alors on étudie la question de savoir quand il est possible d'étendre t en correspondance T entre les droites des congruences L, L' d'une telle manière que T soit une déformation projective des deux congruences.

1. Soit L une *congruence parabolique à courbe directrice*; c'est donc un système de ∞^1 faisceaux de droites (A, E) de centre A et de plan E de l'espace projectif S_3. Nous avons donc la courbe des foyers (A) et la courbe duale (E) formée par les plans focaux pour lesquels

$$\text{(IV,1)} \qquad A\,.\,E = A\,.\,\mathrm{d}E = \mathrm{d}A\,.\,E = 0$$

donc aussi

$$\text{(IV,2)} \qquad \mathrm{d}^2A\,.\,E = -\,\mathrm{d}A\,.\,\mathrm{d}E = A\,.\,\mathrm{d}^2E\,.$$

Commençons par considérer le cas où les expressions de (IV,2) ne s'annulent pas.

Alors la courbe (A) n'est pas une droite, (E) n'est pas un faisceau, et les plans E sont tangents, mais non pas osculateurs, à la courbe (A). Nous pouvons choisir le repère mobile A, A_1, A_2, A_3 de telle manière que 1° E soit le plan $[AA_1A_2]$, 2° $[AA_2]$ soit tangente à la courbe (A), 3° $[AA_1]$ soit la tangente à la courbe duale (E), c'est-à-dire la droite $[E\, \mathrm{d}E]$; soit ensuite: 4° $[AA_2A_3]$ le plan osculateur $[A\, \mathrm{d}A\, \mathrm{d}^2A]$ de la courbe (A), et 5° soit A_1 le point $[E\, \mathrm{d}E\, \mathrm{d}^2E]$. Il découle de 2° et 4° que l'on a

$$\omega_{01} = \omega_{03} = \omega_{21} = 0 \tag{IV,3}$$

mais on a $\omega_{02} \neq 0 \neq \omega_{23}$. Posons

$$\omega_{02} = \omega\,. \tag{IV,4}$$

Nous avons $[\mathrm{d}\omega] = [\omega_{00} - \omega_{22}\omega]$ de sorte qu'il existe une variable v telle que $[\omega\, \mathrm{d}v] = 0$; v est évidemment un paramètre sur la courbe (A). Par différentiation extérieure, (IV,3) donne

$$[\omega_{23}\omega] = 0\,, \quad [\omega_{23}\omega_{31}] = 0\,. \tag{IV,5}$$

Nous pouvons donc poser $\omega_{23} = \sigma\omega(\sigma \neq 0)$, d'où nous obtenons par différentiation extérieure $[\mathrm{d}\sigma + \sigma(\omega_{00} - 2\omega_{22} + \omega_{33})\,\omega] = 0$; il est donc possible de spécialiser de façon à avoir $\sigma = 1$. En somme, (IV,5) donne

$$\omega_{23} = \omega\,, \quad \omega_{31} = \alpha\omega \tag{IV,6}$$

avec les conséquences différentielles

$$[\omega_{00} - 2\omega_{22} + \omega_{33}\omega] = 0\,, \quad [\mathrm{d}\alpha + \alpha(2\omega_{00} + \omega_{11} - 3\omega_{22})\,\omega] = 0\,. \tag{IV,7}$$

Il résulte de 1°, 3° et 5° que

$$\omega_{13} = \omega_{12} = 0\,. \tag{IV,8}$$

La différentiation extérieure donne $[\omega_{10}\omega] = 0$ de sorte que nous pouvons poser

$$\omega_{10} = \beta\omega \tag{IV,9}$$

d'où

$$[\mathrm{d}\beta + \beta(2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22})\,\omega] = 0\,. \tag{IV,10}$$

Tout compte fait, nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_{00}A && + \omega A_2\,, \\ \mathrm{d}A_1 &= \beta\omega A + \omega_{11}A_1\,, \\ \mathrm{d}A_2 &= \omega_{20}A && + \omega_{22}A_2 + \omega A_3\,, \\ \mathrm{d}A_3 &= \omega_{30}A + \alpha\omega A_1 && + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3\,; \end{aligned} \tag{IV,11}$$

d'une façon évidente, $\alpha = 0$ $(\beta = 0)$ *est la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe* (A) (*ou sa courbe duale* (E) *respectivement*) *soit plane* (*conique*).

Ecrivons encore les équations de mouvement des repères associés:

$$
\begin{aligned}
\text{(IV,12)}\quad \mathrm{d}[AA_1] &= (\omega_{00} + \omega_{11})[AA_1] - \omega[A_1A_2], \\
\mathrm{d}[AA_2] &= (\omega_{00} + \omega_{22})[AA_2] + \omega[AA_3], \\
\mathrm{d}[AA_3] &= \alpha\omega[AA_1] + \omega_{32}[AA_2] + (\omega_{00} + \omega_{33})[AA_3] + \omega[A_2A_3], \\
\mathrm{d}[A_1A_2] &= -\omega_{20}[AA_1] + \beta\omega[AA_2] + (\omega_{11} + \omega_{22})[A_1A_2] + \omega[A_1A_3], \\
\mathrm{d}[A_1A_3] &= -\omega_{30}[AA_1] + \beta\omega[AA_3] + \omega_{32}[A_1A_2] + \\
&\quad + (\omega_{11} + \omega_{33})[A_1A_3], \\
\mathrm{d}[A_2A_3] &= -\omega_{30}[AA_2] + \omega_{20}[AA_3] - \alpha\omega_1[A_1A_2] + \\
&\quad + (\omega_{22} + \omega_{33})[A_2A_3].
\end{aligned}
$$

2. Supposons qu'il soit donné dans l'espace S_3' une congruence L' du même type que L, et que les congruences L, L' soient en transformation T (droite $\to$ droite). Les repères correspondants à la congruence L' soient spécialisés d'une manière analogue comme pour L; toutes les expressions concernant L' seront marquées par un accent. Soit enfin

$$\text{(IV,13)} \qquad \omega_{ij}' - \omega_{ij} = \tau_{ij}.$$

Nous envisagerons le cas où la transformation T est une *déformation projective* des congruences L, L'. Cela signifie que pour toute droite $g \in L$, il existe une homographie $H : S_3 \to S_3'$ qui est osculatrice pour T. Mais déjà pour toute homographie K qui est tangente à T on doit avoir $HA = A'$, $HE = E'$, et si H est osculatrice à T, alors H est tangente aux transformations $A \to A'$, $E \to E'$. Maintenant, T contient une transformation t (faisceau $\to$ faisceau), pour laquelle $t(A, E) = (A', E')$.

Soit donné d'abord t seulement, de telle sorte que A, A', E, E' se rapportent au même paramètre v. Les repères peuvent être supposés choisis d'une telle manière que $\omega' = \omega$, c'est-à-dire

$$\text{(IV,14)} \qquad \tau_{02} = \tau_{23} = 0.$$

Aux équations (IV,3) et (IV,8) correspondent les équations

$$\text{(IV,15)} \qquad \tau_{01} = \tau_{03} = \tau_{21} = \tau_{13} = \tau_{12} = 0$$

et aux équations (IV,6) et (IV,9) les équations

$$\text{(IV,16)} \qquad \omega_{31}' = \alpha'\omega, \quad \omega_{10}' = \beta'\omega.$$

Il résulte de (IV,14) que

$$\text{(IV,17)} \qquad [\tau_{00} - \tau_{22}\omega] = [\tau_{22} - \tau_{33}\omega] = 0$$

tandis qu'en différentiant extérieurement (IV,15) on n'obtient que (IV,16).

A partir de (IV,11), (IV,11'), la transformation $A \to A'$, $E \to E'$ donne pour *l'homographie tangente la plus générale*

$$
\begin{aligned}
\text{(IV,18)}\qquad HA &= A', \\
HA_1 &= qA' + \varrho A_1', \\
HA_2 &= pA' + A_2', \\
HA_3 &= r_0A' + r_1A_1' + r_2A_2' + A_3'
\end{aligned}
$$

où $\varrho \neq 0$.

La transformation associe à la droite

(IV,19) $$g = x[AA_1] + y[AA_2]$$

la droite

$$g' = x'[A'A_1'] + y'[A'A_2']$$

où le rapport $x' : y'$ depend de v et de $x : y$. A present

$$Hg = \varrho x[A'A_1'] + y[A'A_2']$$

de sorte que la coïncidence de Hg avec g' donne $x' : y' = \varrho x : y$ et nous pouvons supposer $y' = y$, c'est-à-dire

(IV,20) $$g' = \varrho x[A'A_1'] + y[A'A_2']$$

d'où

(IV,21) $$Hg = g' .$$

Un calcul direct donne

$$H\,\mathrm{d}g = \mathrm{d}g' + \{yr_1\omega - \varrho x(\varrho^{-1}\,\mathrm{d}\varrho + \tau_{00} + \tau_{11} - p\omega)\}\,[A'A_1'] - \\ - \{xq\omega + y(\tau_{00} + \tau_{22} - r_2\omega)\}\,[A'A_2'] .$$

Pour que H soit une homographie tangente à T, c'est-à-dire que $H\,\mathrm{d}g = \mathrm{d}g' + (.)\,g'$, *il faut et il suffit que l'on ait*

(IV,22) $$x^2\varrho q\omega + y^2 r_1\omega - xy\varrho\{\varrho^{-1}\,\mathrm{d}\varrho + \tau_{11} - \tau_{22} + (r_2 - p)\,\omega\} = 0 .$$

Supposons maintenant pour l'instant les repères complètement fixés; nous aurons donc p. ex.

(IV,23) $$[\tau_{11} - \tau_{22}\omega] = 0 ;$$

il découle alors de (IV,22) que $[\mathrm{d}\varrho\omega] = 0$, c'est-à-dire $\varrho = \varrho(v)$. Il résulte alors de (IV,20) que *les droites de deux faisceaux correspondants (A, E), (A', E') se correspondent projectivement et les droites $[AA_1]$, $[AA_2]$ se transforment géométriquement en droites $[A'A_1']$, $[A'A_2']$.* Nous pouvons donc supposer toujours

(IV,24) $$[\mathrm{d}\varrho\omega] = 0$$

ce qui entraînera (IV,23).

3. Etudions d'abord *les déformations projectives T pour lesquelles l'homographie osculatrice H ne dépend que de v;* elle est donc constante pour les droites g, g' des faisceaux (A, E), (A', E') qui se correspondent par la transformation t. Alors les fonctions p, q, r_i de (IV,18) sont fonctions de v seulement (et dépendent donc pas de $x : y$); il résulte de (IV,22) que $q = r_1 = 0$, on a

(IV,25) $$HA = A' ,\ HA_1 = \varrho A_1' ,\ HA_2 = A_2' + pA' ,\ HA_3 = r_0A' + r_2A_2' + A_3'$$

avec

(IV,26) $$\varrho^{-1}\,\mathrm{d}\varrho + \tau_{11} - \tau_{22} + (r_2 - p)\,\omega = 0 .$$

A présent, nous avons

$$\text{(IV,27)} \qquad g' = Hg\,, \quad \mathrm{d}g' = H\,\mathrm{d}g + (\tau_{00} + \tau_{22} - r_2\omega)\,Hg\,,$$

$$\begin{aligned}\text{(IV,28)} \quad \mathrm{d}^2g' = H\,\mathrm{d}^2g &+ 2(\tau_{00} + \tau_{22} - r_2\omega)\,H\,\mathrm{d}g + (.)\,[A'A_1'] + (.)\,[A'A_2'] + \\ &+ y\omega\{\tau_{33} - \tau_{22} + (2r_2 - p)\,\omega\}\,[A'A_3'] + \\ &+ \varrho x\omega\{\tau_{00} - \tau_{22} + (r_2 - 2p)\,\omega\}\,[A_1'A_2']\,.\end{aligned}$$

Nous appelons H *homographie quasiosculatrice* à T(et *T-quasidéformation*) si les deux derniers termes de (IV,28) s'annulent, c'est-à-dire si

$$\text{(IV,29)} \qquad \tau_{22} - \tau_{33} = (2r_2 - p)\,\omega\,, \quad \tau_{22} - \tau_{00} = (r_2 - 2p)\,\omega\,.$$

Sous l'hypothèse admissible

$$\text{(IV,30)} \qquad \tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0$$

il découle de (IV,26) et (IV,29) que

$$\text{(IV,31)} \qquad 3\varrho^{-1}\,\mathrm{d}\varrho + 4\tau_{11} = 0\,.$$

La relation (IV,31) détermine ϱ à un facteur constant près, de sorte qu'à *une transformation t donnèe correspondent ∞^1 quasidéformations projectives T.* Pour chacune d'entre elles nous calculons p et r_2 — déterminés d'une façon univoque — *l'homographie quasiosculatrice H contient donc encore un paramètre arbitraire.*

Nous pouvons supposer sans restreindre le généralité que $\varrho = 1$ est une des solutions de l'équation (IV,31), donc que l'on a $\tau_{11} = 0$. D'après (IV,26), (IV,29) — (IV,31) on a alors

$$\text{(IV,32)} \qquad \tau_{00} = p\omega\,, \quad \tau_{11} = 0\,, \quad \tau_{22} = (r_2 - p)\,\omega\,, \quad \tau_{33} = -\,r_2\omega\,.$$

La solution générale de l'équation (IV,31) est maintenant $\varrho = \text{const.} \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} g' &= Hg\,, \quad \mathrm{d}g' = H\,\mathrm{d}g\,, \\ \mathrm{d}^2g' &= H\,\mathrm{d}^2g + \{\varrho x(\mathrm{d}p + \tau_{20} + p\,.\,\overline{\omega_{00} - \omega_{22}} + \overline{p^2 - r_0}\,.\,\omega) + \\ &\quad + y\omega(\alpha' - \varrho\alpha)\}\,\omega[A'A_1'] + \{x\omega(\beta - \varrho\beta') + \\ &\quad + y(\mathrm{d}r_2 + \tau_{32} + r_2\,.\,\overline{\omega_{22} - \omega_{33}} + \overline{r_2^2 - pr_2 + r_0}\,.\,\omega)\}\,\omega[A'A_2']\,.\end{aligned}$$

Donc, *T est une déformation projective si et seulement si*

$$\text{(IV,33)} \qquad \alpha' = \varrho\alpha\,, \quad \alpha' = \varrho^{-1}\beta\,,$$

$$\begin{aligned}\text{(IV,34)} \quad \mathrm{d}(p - r_2) + \tau_{20} - \tau_{32} + p(\omega_{00} - \omega_{22}) + r_2(\omega_{33} - \omega_{22}) &+ \\ + (p^2 - r_2^2 + pr_2 - 2r_0)\,\omega = 0\,.&\end{aligned}$$

L'équation (IV,34) fixe seulement le paramètre r_0 et donc aussi l'homographie osculatrice H. Les seules conditions sont donc (IV,33), c'est-à-dire

$$\text{(IV,35)} \qquad \omega_{31}' = \varrho\omega_{31}\,, \quad \omega_{10}' = \varrho^{-1}\omega_{10}$$

mais en les différentiant extérieurement on n'obtient rien de nouveau.

La différentiation extérieure des équations (IV,32) donne

$$[\mathrm{d}p + p(\omega_{00} - \omega_{22}) + \tau_{20}\omega] = [\mathrm{d}r_2 + r_2(\omega_{00} - \omega_{22}) + \tau_{32}\omega] = 0$$

de sorte que l'on peut obtenir par spécialisation $p = r_2 = 0$, c'est-à-dire

$$\tau_{00} = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = 0\,. \tag{IV,36}$$

Il en vient par différentiation extérieure

$$[\tau_{20}\omega] = [\tau_{32}\omega] = 0 \tag{IV,37}$$

et H est

$$HA = A'\,, \quad HA_1 = \varrho A_1'\,, \quad HA_2 = A_2'\,, \quad HA_3 = A_3' + r_0 A'\,, \tag{IV,38}$$

r_0 étant déterminé par l'équation (IV,34), c'est-à-dire par

$$\tau_{20} - \tau_{32} = 2r_0\omega\,. \tag{IV,39}$$

L étant donnée, t est déterminée par le système de Pfaff (IV,14), (IV,15), (IV,35), (IV,36), d'où il résulte, par différentiation extérieure, (IV,37), de façon que *la transformation t dèpend de deux fonctions d'une variable. La tranformation t étant donnée, T dépend encore d'une constante. Ce qui caractérise géométriquement nos transformations t c'est que* (pour $\alpha\beta \neq 0$) *l'homographie H réalise un contact analytique non seulement pour* $A \to A'$, $E \to E'$, *mais aussi pour* $[AA_2A_3] \to [A'A_2'A_3']$, $A_1 \to A_1'$.

4. Au paragraphe précédent nous avons supposé que l'homographie osculatrice H dépendant de v seulement, mais non pas de $x : y$. Envisageons maintenant le cas générale.

En vertu de (IV,17) on trouve aisément qu'on peut spécialiser les repères de telle manière que l'on ait

$$\tau_{22} - \tau_{00} = \tau_{33} - \tau_{22} = 0\,. \tag{IV,40}$$

En vertu de (IV,23), il est possible de poser $\tau_{11} - \tau_{22} = -4\lambda\omega$, donc à l'aide de (IV,30) on obtient

$$\tau_{00} = \lambda\omega\,, \quad \tau_{11} = -3\lambda\omega\,, \quad \tau_{22} = \lambda\omega\,, \quad \tau_{33} = \lambda\omega\,. \tag{IV,41}$$

Par différentiation extérieure (IV,40) et (IV,41) donnent

$$[\tau_{20}\omega] = [\tau_{32}\omega] = 0\,, \tag{IV,42}$$

$$[\mathrm{d}\lambda + \lambda(\omega_{00} - \omega_{22})\,\omega] = 0\,. \tag{IV,43}$$

Autre cela nous pouvons supposer

$$\varrho = 1\,. \tag{IV,44}$$

L'équation (IV,22) sera

$$qx^2 + r_1y^2 + (p - r_2 + 4\lambda)\,xy = 0\,, \tag{IV,45}$$

nous pouvons donc introduire la quantité z moyennant les équations

$$(2\lambda + p + z)\,x + r_1y = 0\,, \quad qx + (2\lambda - r_2 - z)\,y = 0\,. \tag{IV,46}$$

Alors nous avons

$$
\begin{aligned}
\text{(IV,47)} \qquad g' &= Hg\,, \quad \mathrm{d}g' = H\,\mathrm{d}g + z\omega\,.\,g'\,, \\
\mathrm{d}^2g' &= H\,\mathrm{d}^2g + 2z\omega\,\mathrm{d}g' - \{2\omega\,\mathrm{d}x\,.\,(z + 2\lambda + p) + 2\omega\,\mathrm{d}y\,.\,r_1 + \\
&\quad + x(\overline{2\lambda + p}\,.\,d\omega + 2\omega d\lambda + 2\,.\,\overline{2\lambda + z}\,.\,\overline{\omega_{00} + \omega_{11}}\,.\,\omega + \\
&\quad + p\,.\,\overline{\omega_{00} + 2\omega_{11} + \omega_{22}}\,.\,\omega - \tau_{20}\omega + \overline{r_0 - qr_1 - 4\lambda(\lambda + z)}\,.\,\omega^2) + \\
&\quad + y(r_1\,\mathrm{d}\omega + r_1\,.\,\overline{2\omega_{00} + \omega_{22} + \omega_{33}}\,.\,\omega + \\
&\quad + \overline{pr_1 - \alpha' + \alpha}\,.\,\omega^2)\}\,[A'A'_1] + \{2\omega\,\mathrm{d}x\,.\,q + \\
&\quad + 2\omega\,\mathrm{d}y\,.\,(2\lambda - r_2 - z) + x(q\,\mathrm{d}\omega + q\,.\,\overline{\omega_{00} + 2\omega_{11} + \omega_{22}}\,.\,\omega + \\
&\quad + \overline{qr_2 - \beta' + \beta}\,.\,\omega^2) + y(\overline{2\lambda - r_2}\,.\,\mathrm{d}\omega + 2\omega\,\mathrm{d}\lambda + \\
&\quad + 2\,.\,\overline{2\lambda - z}\,.\,\overline{\omega_{00} + \omega_{22}}\,.\,\omega - r_2\,.\,\overline{2\omega_{00} + \omega_{22} + \omega_{33}}\,.\,\omega + \\
&\quad + \tau_{32}\omega + \overline{r_0 - pr_2 + 4\lambda(\lambda - z)}\,.\,\omega^2)\}\,[A'A'_2] + \\
&\quad + \{xq + y(4\lambda - p - 2z)\}\,\omega^2\,[A'A'_3] + \\
&\quad + \{x(4\lambda + r_2 + 2z) + yr_1\}\,\omega^2\,[A'_1A'_2]\,.
\end{aligned}
$$

La condition de quasidéformation projective est

$$(4\lambda + r_2 + 2z)\,x + r_1y = 0\,, \quad qx + (4\lambda - p - 2z)\,y = 0\,.$$

En la comparant avec (IV,46) nous en obtenons

$$x(2\lambda - p + r_2 + z) = 0\,, \quad y(2\lambda - p + r_2 - z) = 0$$

de sorte que la seule quasidéformation projective donne

$$\text{(IV,48)} \qquad z = 0\,, \quad r_2 = p - 2\lambda\,.$$

Si nous le substituons dans (IV,46), nous aurons

$$\text{(IV,49)} \qquad (2\lambda + p)\,x + r_1y = 0\,, \quad qx + (4\lambda - p)\,y = 0\,.$$

Maintenant, on a

$$
\begin{aligned}
\text{(IV,50)} \quad \mathrm{d}^2g' &= H\,\mathrm{d}^2g + \{x(2\omega\,\mathrm{d}\overline{\lambda + p} - \overline{2\lambda + p}\,.\,\mathrm{d}\omega - 4\lambda\,.\,\overline{\omega_{00} + \omega_{11}}\,.\,\omega - \\
&\quad - p\,.\,\overline{\omega_{00} + 2\omega_{11} + \omega_{22}}\,.\,\omega + \tau_{20}\omega - \overline{r_0 - qr_1 - 4\lambda^2}\,.\,\omega^2) + \\
&\quad + y(-\omega\,\mathrm{d}r_1 + r_1\,\mathrm{d}\omega + r_1\,.\,\overline{2\omega_{00} + \omega_{22} + \omega_{33}}\,.\,\omega + \\
&\quad + \overline{pr_1 - \alpha' + \alpha}\,.\,\omega^2)\}\,[A'A'_1] + \{x(-2\omega\,\mathrm{d}q + q\,\mathrm{d}\omega + \\
&\quad + q\,.\,\overline{\omega_{00} + 2\omega_{11} + \omega_{22}}\,.\,\omega + \overline{pq - 2\lambda q - \beta' + \beta}\,.\,\omega^2) + \\
&\quad + y(-2\omega\,\mathrm{d}\overline{3\lambda - p} + \overline{4\lambda - p}\,.\,\mathrm{d}\omega + 4\lambda\,.\,\overline{\omega_{00} + \omega_{22}}\,.\,\omega + \\
&\quad + \overline{2\lambda - p}\,.\,\overline{2\omega_{00} + \omega_{22} + \omega_{33}}\,.\,\omega + \tau_{32}\omega + \\
&\quad + \overline{r_0 - p^2 + 2p\lambda + 4\lambda^2}\,.\,\omega^2)\}\,[A'A'_2]\,.
\end{aligned}
$$

Si nous écrivons cette équation sous la forme

$$\text{(IV,51)} \qquad \mathrm{d}^2g' = H\,\mathrm{d}^2g + (\xi_1x + \eta_1y)\,[A'A'_1] + (\xi_2x + \eta_2y)\,[A'A'_2]\,,$$

nous avons

$$\xi_1 = 2\omega\, \mathrm{d}p + \bullet\,, \quad \xi_2 = -\, 2\omega\, \mathrm{d}q + \bullet\,, \quad \eta_1 = -\, \omega\, \mathrm{d}r_1 + \bullet\,,$$
$$\eta_2 = 2\omega\, \mathrm{d}p + \bullet$$

où les points remplacent des expressions différentielles dans lesquelles la différentielle du rapport $w = y : x$ ne figure pas.

Pour la déformation projective nous avons la condition

(IV,52) $$\xi_2 x^2 - \eta_1 y^2 + (\eta_2 - \xi_1)\, xy = 0$$

ou bien encore

$$\omega(w^2\, \mathrm{d}r_1 - 2\mathrm{d}q) + \bullet = 0\,.$$

Il faut donc que l'on ait

(IV,53) $$w \frac{\partial r_1}{\partial w} = 2 \frac{\partial q}{\partial w}\,.$$

D'autre part, il découle de (IV,49)

(IV,54) $$r_1 w^2 + q + 6\lambda w = 0$$

d'où par différentiation

$$w^2 \frac{\partial r_1}{\partial w} + 2 r_1 w + \frac{\partial q}{\partial w} + 6\lambda = 0$$

de sorte que

(IV,55) $$3 \frac{\partial q}{\partial w} - 2 \frac{q}{w} = 6\lambda\,.$$

En différentiant à nouveau on obtient

$$3w^2 \frac{\partial^2 q}{\partial w^2} - 2w \frac{\partial q}{\partial w} + 2q = 0$$

d'où $q = q_0 w + q_1 w^{2/3}$, où q_0, q_1 ne dépendent plus de w. La substitution dans (IV,55) donne $q_0 = 6\lambda$, c'est-à-dire

(IV,56) $$q = 6\lambda w + q_1 w^{2/3}\,;$$

à partir de (IV,54) et (IV,49) nous obtenons

(IV,57) $$r_1 = -\, 12 \frac{\lambda}{w} - q_1 w^{-4/3}\,, \quad p = 10\lambda + q_1 w^{-1/3}\,,$$

enfin, le coefficient r_0 est déterminé par la condition (IV,52). Nous obtenons ainsi le résultat final: *Toute transformation t peut être etendue en une déformation projective, la projectivité qui existe entre les droites des faisceaux en correspondance (A, E) et (A', E') n'est soumise qu'à la condition $[AA_1] \to [A'A'_1]$, $[AA_2] \to [A'A'_2]$. Les homographies H ne sont pas déterminées d'une façon univoque; elles dépendent du choix de q_1.*

5. Considérons deux congruences L, L' en déformation projective T qui associe à la droite $g = [A, A_1 + wA_2]$ la droite $g' = [A', A'_1 + wA'_2]$. Etendons T en une transformation ponctuelle $B \to B'$ de l'espace S_3 sur S'_3 qui transforme la droite $g \in L$ en $g' \in L'$ d'une telle manière qu'il existe une homographie tangente à la transformation ponctuelle le long de toute droite g. L'extension ponctuelle la plus général de la transformation T qui met en correspondance projective les droites des congruences L et L' est donnée par les points en correspondance

(IV,58) $$B = A_1 + wA_2 + tA\,, \quad B' = A'_1 + wA'_2 + (t + \varphi)\,A'\,; \quad \varphi = \varphi(v, w)\,.$$

Posons, en accord avec (IV,41) et (IV,42)

(IV,59) $$\omega_{00} = a_0\omega\,, \quad \omega_{11} = a_1\omega\,, \quad \omega_{22} = a_2\omega\,, \quad \omega_{33} = a_3\omega\,,$$

(IV,60) $$\tau_{00} = \tau_{22} = \tau_{33} = \lambda\omega\,, \quad \tau_{11} = -3\lambda\omega\,, \quad \tau_{20} = \mu_1\omega\,, \quad \tau_{32} = \mu_2\omega\,,$$

(IV, 61) $$\mathrm{d}\varphi = \psi\omega + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\,\mathrm{d}w\,.$$

Nous avons

$$\mathrm{d}B = (\mathrm{d}t + t\omega_{00} + w\omega_{20} + \beta\omega)\,A + \omega_{11}A_1 + (\mathrm{d}w + t\omega + w\omega_{22})\,A_2 + w\omega A_3\,,$$

$$\mathrm{d}B' = \Big\{\mathrm{d}t + t\omega_{00} + w\omega_{20} + \beta'\omega + (\lambda t + \mu_1 w + \psi)\,\omega + (\lambda + a_0)\,\varphi\omega +$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial w}\,\mathrm{d}w\Big\}\,A' + (\omega_{11} - 3\lambda\omega)\,A'_1 + \{\mathrm{d}w + (t + \varphi)\,\omega + w(\omega_{22} + \lambda\omega)\}\,A'_2 +$$
$$+ w\omega A'_3\,.$$

Supposons maintenant l'existance des homographies H_1 jouissant des propriétés exigées, c'est-à-dire

(IV,62) $$H_1 = H_1(v, w)\,, \quad H_1B = B'\,, \quad H_1\,\mathrm{d}B = \mathrm{d}B' + (.)\,B'\,.$$

Il résulte alors de (IV,62_2)

(IV,63) $$H_1A = A'\,, \quad H_1(A_1 + wA_2) = A'_1 + wA'_2 + \varphi A'$$

et de (IV,62_3) nous obtenons par comparaison des termes en $\mathrm{d}w$ l'équation

$$H_1A_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial w}\,A' + A'_2 + \Theta\{A'_1 + wA'_2 + (t + \varphi)\,A'\}$$

devant être vérifiée pur tout t, de sorte que $\Theta = 0$ et

(IV, 64) $$H_1A_2 = A'_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\,A'\,.$$

La comparaison des termes en ω dans (IV,62) donne

(IV,65) $$H_1\{\beta A + a_1A_1 + (t + a_2w)\,A_2 + wA_3\} =$$
$$= \{\lambda t + \mu_1 w + \psi + (\lambda + a_0)\,\varphi + \beta'\}\,A' + (a_1 - 3\lambda)\,A'_1 +$$
$$+ \{t + \varphi + (\lambda + a_2)\,w\}\,A'_2 + wA'_3 + s\{A'_1 + wA'_2 + (t + \varphi)\,A'\}$$

où $s = s(v, w, t)$. Comme l'équation (IV,65) est vérifiée pour tout t, nous avons $H_1 A_2 = (\lambda + s) A' + A'_2$ et par comparaison avec (IV,64) nous obtenons

$$s = \frac{\partial \varphi}{\partial w} - \lambda . \tag{IV,66}$$

A partir des équations (IV,63), (IV,64) et (IV,66), il est déjà facile de calculer

$$H_1 A = A', \quad HA_1 = A'_1 + \left(\varphi - w \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) A', \quad H_1 A_2 = A'_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial w} A', \tag{IV,67}$$
$$wH_1 A_3 = wA'_3 + \left\{\psi + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w} + (a_0 - a_1)\varphi + (a_1 - a_2) w \frac{\partial \varphi}{\partial w} + \mu_1 w + \beta' - \right.$$
$$\left. - \beta\right\} A' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} - 4\lambda\right) A'_1 + \left(\varphi + w \frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) A'_2 .$$

L'homographie (IV,67) jouit des propriétés (IV,62), car

$$H_1 \, \mathrm{d}B = \mathrm{d}B' + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} - \lambda\right) wB' . \tag{IV,68}$$

Pour que la part de l'homographie H_1 qui concerne le plan $[AA_1A_2]$ ne dépende pas de w, il faut et il suffit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} = 0 ; \tag{IV,69}$$

pour que la part de H_1 concernant l'étoile A ne dépende pas de w, il faut et il suffit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} - 4\lambda = \kappa_1 w , \quad \varphi + w \frac{\partial \varphi}{\partial w} = \kappa_2 w \tag{IV,70}$$

où $\kappa_i \, (i = 1, 2, \ldots)$ ne dépende pas de w. La première équation entraîne $\partial^2\varphi/\partial w = \kappa_1$, c'est-à-dire $\varphi = \frac{1}{2}\kappa_1 w^2 + \kappa_3 w + \kappa_4$. En le substituant dans (IV,70), nous obtenons $\kappa_3 - 4\lambda = 0$, $\frac{3}{2}\kappa_1 w^2 + (2\kappa_3 - \kappa_2) w + \kappa_4 = 0$ d'où $\kappa_1 = \kappa_4 = 0$, $\kappa_3 = 4\lambda$; la condition recherchée prend donc la forme

$$\varphi = 4\lambda w . \tag{IV,71}$$

La condition (IV,69) découle de (IV,71), donc: *Si la part de l'homographie H_1 concernant l'ètoile A ne dépend pas de w, alors la part de H_1 concernant le plan $[AA_1A_2]$ ne dépend pas non plus de w.*

En tenant compte de (IV,43), nous pouvons écrire

$$\mathrm{d}\lambda = \lambda(\omega_{22} - \omega_{00}) + \vartheta\omega . \tag{IV,72}$$

Si nous supposons (IV,71), (IV,67) sera

$$H_1 A = A', \quad H_1 A_1 = A'_1, \quad H_1 A_2 = A'_2 + 4\lambda A', \tag{IV,73}$$
$$wH_1 A_3 = w\{A'_3 + 8\lambda A'_2 + (4\vartheta + 16\lambda^2 + \mu_1) A'\} + (\beta' - \beta) A' .$$

Pour que H_1 ne dépend pas de w, il faut et il suffit que l'on ait (IV,71) *et*

(IV,74) $$\beta' = \beta \quad \text{c'est-à-dire} \quad \tau_{10} = 0 .$$

Passons aux problèmes duals. Si nous posons, en supposant $[AA_1A_2A_3] = 1$,

(IV,75) $$E = [AA_1A_2], \quad E_1 = -[AA_2A_3], \quad E_2 = [AA_1A_3], \quad E_0 = -[A_1A_2A_3]$$

alors les équations duales aux équations (IV,11) seront

(IV,76) $$\begin{aligned} dE &= -\omega_{33}E && -\omega E_2 , \\ dE_1 &= -\alpha\omega E - \omega_{11}E_1 , \\ dE_2 &= -\omega_{32}E && -\omega_{22}E_2 - \omega E_0 , \\ dE_0 &= -\omega_{30}E - \beta\omega E_1 - \omega_{20}E_2 - \omega_{00}E_0 . \end{aligned}$$

La droite $[A, A_1 + wA_2]$ est identique à la droite $[E, E_2 - wE_1]$, de sorte que la transformation ponctuelle $B \to B'$ passe par dualisation en transformation de plans en plans $R \to R'$ où

(IV,77) $$R = E_2 - wE_1 + t^*E , \quad R' = E_2' - wE_1' + (t^* + \varphi^*)\, E'$$

où $\varphi^* = \varphi^*(v, w)$. A l'homographie H_1 s'associe l'homographie duale

(IV,78) $$H_2E = E' , \quad H_2E_1 = E_1' - \frac{\partial\varphi^*}{\partial w} E' , \quad H_2E_2 = E_2' + \left(\varphi^* - w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w}\right) E' ,$$

$$H_2E_0 = E_0' + \left\{-\psi^* + \varphi^*\left(\varphi^* - w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w}\right) + (a_3 - a_2)\,\varphi^* + \right.$$

$$\left. + (a_2 - a_1)\, w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w} + \mu_2 - (\alpha' - \alpha)\, w\right\} E' + w\left(w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w} - \varphi^* + 4\lambda\right) E_1' +$$

$$+ \left(2\varphi^* - w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w}\right) E_2'$$

où

(IV,79) $$d\varphi^* = \psi^*\omega + \frac{\partial\varphi^*}{\partial w}\, dw ;$$

on a en effet

(IV,80) $$H_2\, dR = dR' + \left(\lambda - \varphi^* + w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w}\right)\omega R' .$$

Pour que la part de H_2 concernant le plan $[EE_1E_2]$, c'est-à-dire l'ètoile A, soit indépendante de w, il faut et il suffit

(IV,81) $$\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial w^2} = 0 ;$$

pour que la part de H_2 concernant l'étoile E_2, c'est-à-dire le plan $[AA_1A_2]$, soit indépendante de w, il faut et il suffit que l'on ait

(IV,82) $$\varphi^* = 4\lambda ;$$

la condition (IV,81) découle de la condition (IV,82). En repères ponctuels, l'homographie H_2 (IV,78) est données par les relations

(IV,83) $$H_2A = A', \quad H_2A_1 = A_1' - w\left(w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w} - \varphi^* + 4\lambda\right)A',$$
$$H_2A_2 = A_2' - \left(2\varphi^* - w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w}\right)A',$$
$$H_2A_2 = A_3' + \frac{\partial\varphi^*}{\partial w}A_1 + \left(w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w} - \varphi^*\right)A_2' + \left\{\psi^* + \left(w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w} - \varphi^*\right)^2 + \right.$$
$$\left. + (a_2 - a_3)\varphi^* + (a_1 - a_2)w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w} - \mu_2 + (\alpha' - \alpha)w\right\}A'$$

et spécialement, en supposant (IV,82), nous avons

(IV,84) $$H_2A = A', \quad H_2A_1 = A_1', \quad H_2A_2 = A_2' - 8\lambda A',$$
$$H_2A_3 = A_3' - 4\lambda A_2' + \{4\vartheta + 16\lambda^2 + 4\lambda(2a_2 - a_0 - a_3) - \mu_2 + (\alpha' - \alpha)\omega\}A'.$$

Pour que H_2 ne dépend pas de w, il faut et il suffit que l'on ait outre (IV,82) *encore*

(IV,85) $$\alpha' = \alpha \quad \text{c'est-à-dire} \quad \tau_{31} = 0.$$

Pour que les homographies H_1 (IV,67) *et H_2* (IV,83) *coïncident sur le plan $[AA_1A_2]$, il faut et il suffit*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial w} = -\left(2\varphi^* - w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w}\right), \quad \varphi - w\frac{\partial\varphi}{\partial w} = -w\left(w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w} - \varphi^* + 4\lambda\right)$$

ce qui donne par intégration

(IV,86) $$\varphi = -8\lambda w + fw^{3/2}, \quad \varphi^* = 4\lambda - fw^{1/2}; \quad f = f(v).$$

Pour que ces homographies H_1 et H_2 coïncident sur l'étoile A, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{\partial\varphi}{\partial w} - 4\lambda = w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w}, \quad \varphi + w\frac{\partial\varphi}{\partial w} = w\left(w\frac{\partial\varphi^*}{\partial w} - \varphi^*\right)$$

ce qui donne par intégration

(IV,87) $$\varphi = 4\lambda w + gw^{1/2}, \quad \varphi^* = -8\lambda - gw^{-1/2}; \quad g = g(v).$$

Les conditions (IV,86) et (IV,87) sont remplies si et seulement si

(IV,88) $$\lambda = \varphi = \varphi^* = 0.$$

Pour que les homographies H_1 et H_2 coïncident complètement, il faut et il suffit que l'on ait outre (IV,88) *encore*

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \mu_1 + \mu_2 = 0,$$

c'est-à-dire

(IV,89) $$\tau_{10} = \tau_{31} = \tau_{20} + \tau_{32} = 0.$$

En vertu de (IV,18), (IV,44), (IV,48), (IV,56), (IV,57), l'homographie osculatrice H de la déformation projective T est donnée par les rélations

$$(\text{IV},90)\qquad \begin{gathered} HA = A', \quad HA_1 = (6\lambda w + q_1 w^{2/3})\, A' + A_1', \\ HA_2 = (10\lambda + q_1 w^{-1/3})\, A' + A_2', \\ HA_3 = r_0 A' - (12\lambda w^{-1} + q_1 w^{-4/3})\, A_1' + (8\lambda + q_1 w^{-1/3})\, A_2' + A_3' \end{gathered}$$

où $q_1 = q_1(v)$ et r_0 se calcule de (IV,52). Si (IV,88) a lieu, c'est-à-dire si les homographies H_1 et H_2 coïncident à la fois et sur le plan $[AA_1A_2]$ et sur l'étoile A, nous obtenons

$$(\text{IV},91)\qquad \begin{aligned} &HA = A', \quad HA_1 = A_1' + q_1 w^{2/3} A', \quad HA_2 = A_2' + q_1 w^{-1/3} A', \\ &HA_3 = A_3' + r_0 A' - q_1 w^{-4/3} A_1' + q_1 w^{-1/3} A_2', \end{aligned}$$

$$(\text{IV},92)\qquad \begin{aligned} &H_1 A = A', \quad H_1 A_1 = A_1', \quad H_1 A_2 = A_2', \\ &H_1 A_3 = A_3' + w^{-1}(\mu_1 w + \beta' - \beta)\, A', \end{aligned}$$

$$(\text{IV},93)\qquad \begin{aligned} &H_2 A = A', \quad H_2 A_1 = A_1', \quad H_2 A_2 = A_2', \\ &H_2 A_3 = A_3' + \{-\mu_2 + (\alpha' - \alpha)\, w\}\, A'. \end{aligned}$$

Les homographies H_1 et H_2 coïncident alors sur le plan $[AA_1A_2]$ et sur l'étoile A avec une des homographies osculatrices H, à savoir celle pour laquelle $q_1 = 0$, c'est-à-dire

$$(\text{IV},94)\qquad HA = A', \quad HA_1 = A_1', \quad HA_2 = A_2', \quad HA_3 = A_3' + r_0 A'.$$

Sous cette hypothèse, nous avons

$$(\text{IV},95)\qquad \begin{gathered} g' = Hg, \quad \mathrm{d}g' = H\,\mathrm{d}g, \\ \mathrm{d}^2 g' = H\,\mathrm{d}^2 g + \{\tau_{20} - r_0\omega + (\alpha - \alpha')\, w\omega\}\, \omega[A'A_1'] + \\ + \{(\beta - \beta')\, \omega + (\tau_{32} + r_0\omega)\, w\}\, \omega[A'A_2'] \end{gathered}$$

de sorte que nous calculons r_0 de l'équation

$$(\text{IV},96)\qquad \beta - \beta' + (\mu_2 - \mu_1 + 2r_0)\, w - (\alpha - \alpha')\, w^2 = 0.$$

Dans le cas où les homographies H_1 et H_2 se confondent, (IV,89) *a lieu et alors l'homographie osculatrice H* (IV,94) *coïncide aussi avec elles.* On trouve aisément en vertu de (IV,96) que si (IV,89) n'a pas lieu, les homographies H_1, H_2 et H (IV, 94) sont différentes, de sorte que ni H_1 ni H_2 ne coïncide alors avec aucune des homographies osculatrices.

6. Jusqu'à présent, nous avons supposé que les expressions (IV,2) sont différentes de zéro. Possons maintenant au cas, où elles s'annulent mais où (A) n'est cependant pas une droite; (E) est alors formé par ses plans osculateurs. Choissons le repère de telle manière que $[AA_2]$ et $[AA_1A_2]$ soit resp. la tangente et le plan osculateur de la courbe (A). Nous avons donc

$$(\text{IV},97)\qquad \omega_{01} = \omega_{03} = \omega_{23} = 0,$$

mais $\omega_{02}\omega_{21}\omega_{13} \neq 0$. De (IV,97) nous obtenons par différentiation extérieure

$[\omega_{21}\omega_{02}] = [\omega_{21}\omega_{13}] = 0$, et nous pouvons spécialiser le repère de façon à avoir

(IV,98) $$\omega_{21} = \omega_{13} = \omega_{02} = \omega\,;$$

par différentiation extérieure, il en vient

(IV,99) $$[\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22}\omega] = 0\,,$$

(IV,100) $$[\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega] = 0\,.$$

Si l'on suppose $\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0$, (IV,100) donne $\omega_{00} + \omega_{33} = \alpha\omega$, la différentiation extérieure donne $[\mathrm{d}\alpha + \alpha(\omega_{00} - \omega_{22}) + \omega_{20} - \omega_{31}\omega] = 0$ de sorte qu'il est possible de spécialiser le repère de façon à avoir $\alpha = 0$, c'est-à-dire

(IV,101) $$\omega_{00} + \omega_{33} = -\,\omega_{11} - \omega_{22} = 0$$

et

(IV,102) $$[\omega_{20} - \omega_{31}\omega] = 0\,.$$

Nous avons donc en fin de compte

(IV,103)
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A\; &= \omega_{00}A + \omega A_2\,,\\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{20}A + \omega A_1 \quad - \omega_{11}A_2\,,\\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega A_3\,,\\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{30}A + \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 - \omega_{00}A_3\,,
\end{aligned}$$

(IV,104)
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[AA_1] &= (\omega_{00} + \omega_{11})\,[AA_1] + \omega_{12}[AA_2] + \omega[AA_3] - \omega[A_1A_2]\,,\\
\mathrm{d}[AA_2] &= \omega[AA_1] + (\omega_{00} - \omega_{11})\,[AA_2]\,,\\
\mathrm{d}[AA_3] &= \omega_{31}[AA_1] + \omega_{32}[AA_2] + \omega[A_2A_3]\,,\\
\mathrm{d}[A_1A_2] &= -\,\omega_{20}[AA_1] + \omega_{10}[AA_2] - \omega[A_2A_3]\,,\\
\mathrm{d}[A_1A_3] &= -\,\omega_{30}[AA_1] + \omega_{10}[AA_3] + \omega_{32}[A_1A_2] +\\
&\quad + (\omega_{11} - \omega_{00})\,[A_1A_3] + \omega_{12}[A_2A_3]\,,\\
\mathrm{d}[A_2A_3] &= -\,\omega_{30}[AA_2] + \omega_{20}[AA_3] - \omega_{31}[A_1A_2] + \omega[A_1A_3] -\\
&\quad - (\omega_{00} + \omega_{11})\,[A_2A_3]\,.
\end{aligned}$$

La congruence L est formée par les droites des ∞^1 faisceaux de centre A et de plans E.

Dans l'espace S_3' soit donnée une congruence L' de type analogue, et qui soit avec L en correspondance T (droite $\to$ droite); T soit une déformation projective. Entre les courbes (A) et (A') est induite alors une correspondance t telle qu'au faisceau de droites (A, E) de la congruence L, il correspond le faisceau de droites (A', E') de la congruence L'. Supposons que les repères associés à la courbe (A') vérifient les relations (IV,97′), (IV,98′); la correspondance t étant écrite sous la forme $\omega = \omega'$ (dans la notation (IV,13)), nous avons

(IV,105) $$\tau_{01} = \tau_{02} = \tau_{03} = \tau_{13} = \tau_{21} = \tau_{23} = 0\,,$$

donc

(IV,106) $$[\tau_{11} - \tau_{00}\omega] = [\tau_{22} - \tau_{00}\omega] = [\tau_{33} - \tau_{00}\omega] = 0$$

et

(IV,107) $$\tau_{11} - \tau_{00} = \lambda_1\omega\,, \quad \tau_{22} - \tau_{00} = \lambda_2\omega\,, \quad \tau_{33} - \tau_{00} = \lambda_3\omega\,.$$

Par une nouvelle différentiation extérieure nous en obtenons

$$\text{(IV,108)} \qquad \begin{aligned} &[d\lambda_1 + \lambda_1(\omega_{00} - \omega_{22}) + \tau_{31} - \tau_{20}\omega] = 0\,, \\ &[d\lambda_2 + \lambda_2(\omega_{00} - \omega_{22}) - 2\tau_{20} + \tau_{12}\omega] = 0\,, \\ &[d\lambda_3 + \lambda_3(\omega_{00} - \omega_{22}) - \tau_{31} + \tau_{20}\omega] = 0 \end{aligned}$$

de sorte que nous pouvons spécialiser de façon à avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Si nous supposons (IV,30), les équations (IV,107) donnent

$$\text{(IV,109)} \qquad \tau_{00} = \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = 0$$

d'où par différentiation extérieure

$$\text{(IV,110)} \qquad [\tau_{20}\omega] = 0\,, \quad [\tau_{31}\omega] = 0\,,$$

$$\text{(IV,111)} \qquad [\tau_{12}\omega] = 0\,.$$

Il résulte de (IV,111) que $\tau_{12} = \mu\omega$, on trouve par différentiation extérieure qu'il est possible de spécialiser de façon à avoir $\mu = 0$, donc

$$\text{(IV,112)} \qquad \tau_{12} = 0\,,$$

$$\text{(IV,113)} \qquad [\tau_{10} - \tau_{32}\omega] = 0\,.$$

Nous avons donc $\tau_{10} - \tau_{32} = \nu\omega$; une nouvelle différentiation extérieure montre la possibilité d'une spécialisation telle que $\nu = 0$, c'est-à-dire

$$\text{(IV,114)} \qquad \tau_{10} - \tau_{32} = 0\,,$$

$$\text{(IV,115)} \qquad [\tau_{30} - c\omega_{12}\omega] = 0 \quad \text{où} \quad \tau_{20} + \tau_{31} = 2c\omega\,.$$

La transformation t est donc donnée par les équations (IV,105), (IV,109), (IV,112), (IV,114) avec les conséquences différentielles (IV,110), (IV,115).

Comme T est une déformation projective, il existe pour toute droite $g \in L$ une homographie osculatrice H de la transformation T; H est nécessairement une homographie tangente aux transformations $A \to A'$, $E \to E'$, $[AA_2] \to [A'A_2']$, elle a donc la forme

$$\text{(IV,116)} \qquad \begin{aligned} HA &= A'\,, \\ HA_1 &= A_1' + q_0A' + qA_2'\,, \\ HA_2 &= A_2' + pA'\,, \\ HA_3 &= A_3' + r_0A' + r_1A_1' + r_2A_2'\,. \end{aligned}$$

La congruence L est l'ensemble des droites $[A, xA_1 + yA_2]$ et pour T on a manifestement

$$\text{(IV,117)} \qquad [A, xA_1 + yA_2] \to [A', xA_1' + (y + qx)\,A_2']$$

où q dépend d'une part de v (c'est-à-dire du paramètre sur la courbe (A)), d'autre part du rapport $x : y$. Remarquons que (IV,117), exprime la transformation la plus générale du faisceau (A, E) sur (A', E'), qui fasse correspondre à la droite $[AA_2]$ la droite $[A'A_2']$. Evidemment

$$[A', xA'_1 + (y + qx)\, A'_2] = H[A, xA_1 + yA_2]\,,$$
$$\mathrm{d}[A', xA'_1 + (y + qx)\, A'_2] = H\, \mathrm{d}[A, xA_1 + yA_2] + (q - p - r_1)\, x\omega[A', A'_1] + \\ + \{x(\mathrm{d}q + \overline{q_0 - pq - r_2} \,.\, \omega + q \,.\, \overline{\omega_{22} - \omega_{11}}) - qy\omega\}\, [A'A'_2]\,.$$

La condition pour que H soit tangente pour T est exprimée par

$$\text{(IV,118)} \quad x\{\mathrm{d}q + (q_0 - q^2 + qr_1 - r_2)\, \omega + q(\omega_{22} - \omega_{11})\} + y(p - 2q + r_1)\, \omega = 0\,.$$

Si nous supposons pour l'instant un certain choix des repères, alors l'équation précédente donne $[\mathrm{d}q\omega] = 0$, q ne dépend donc pas de $x : y$ et la relation (IV,117) exprime une projectivité qui ne dépend que de v. Nous pouvons donc supposer $q = 0$. Si nous posons comme précédemment $y = wx$, la condition (IV,118) devient

$$\text{(IV,119)} \qquad q_0 - r_2 + w(p + r_1) = 0$$

et nous avons

$$\text{(IV,120)} \quad \begin{aligned} [A', A'_1 + wA'_2] &= H\ \ [A, A_1 + wA_2]\,, \\ \mathrm{d}[A', A'_1 + wA'_2] &= H\, \mathrm{d}[A, A_1 + wA_2] - (p + r_1)\, \omega[A', A'_1 + wA'_2]\,, \\ \mathrm{d}[A', A'_1 + wA'_2] &= H\, \mathrm{d}^2[A, A_1 + wA_2] - 2(p + r_1)\, \omega\, \mathrm{d}[A', A'_1 + wA'_2] \\ &\quad + (.)\, [A'A'_1] + (.)\, [A'A'_2] + 2r_1\omega^2[A'A'_3] - \\ &\quad - 2p\omega^2[A'_1A'_2]\,. \end{aligned}$$

La condition de la quasidéformation projective est

$$\text{(IV,121)} \qquad p = r_1 = 0,$$

dans cette hypothèse, (IV,119) entraîne

$$\text{(IV,122)} \qquad r_2 = q_0\,.$$

Maintenant, nous avons

$$\text{(IV,123)} \quad \begin{aligned} [A', A'_1 + wA'_2] &= H\ \ \ [A, A_1 + wA_2]\,, \\ \mathrm{d}[A', A'_1 + wA'_2] &= H\, \mathrm{d}\ [A, A_1 + wA_2]\,, \\ \mathrm{d}^2[A', A'_1 + wA'_2] &= H\, \mathrm{d}^2[A, A_1 + wA_2] + 2c\omega^2[A'A'_1] + 2r_0\omega^2[A'A'_2]\ ; \end{aligned}$$

la condition de la déformation projective est

$$\text{(IV,124)} \qquad r_0 = cw$$

et nous avons

$$\text{(IV,125)} \quad \begin{aligned} &HA = A'\,, \quad HA_1 = A'_1 + q_0A'\,, \quad HA_2 = A'_2\,, \\ &\qquad HA_3 = A'_3 + cwA' + q_0A'_2\,. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi le résultat suivant: *Pour obtenir la déformation projective la plus générale d'une congruence du type étudié, nous partons de deux courbes (A), (A') quelconques en correspondance et nous faisons correspondre projectivement les droites des congruences qui sont situées dans les plans ocsulateurs; cette projectivité doit transformer toute tangente à la courbe (A) en une tangente à la courbe (A'). Pour chaque paire de droites en correspondance il existe ∞^1 homographies osculatrices.*

7. Reste à étudier le cas où A décrit la droite (A), par laquelle passe bien entendu aussi le plan E. Nous choissons le repère de telle façon que (A) soit la droite $[AA_2]$ et que E soit le plan $[AA_1A_2]$. On a donc

$$\omega_{01} = \omega_{03} = \omega_{21} = \omega_{23} = 0\,; \tag{IV,126}$$

supposons qu' une situation analogue se présente dans S_3', de façon que

$$\tau_{01} = \tau_{03} = \tau_{21} = \tau_{23} = 0\,. \tag{IV,127}$$

Les points A, A' et les plans E, E' dépendent d'un seul paramètre v; posons

$$\omega_{02} = \omega \tag{IV,128}$$

de sorte que $\omega \neq 0$, $[\omega\,\mathrm{d}v] = 0$. Nous avons $[\omega_{13}\omega] = 0 \neq \omega_{13}$ et nous faisons subir le repère de S_3 encore la condition

$$\omega_{13} = \omega\,, \quad \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} = 0 \tag{IV,129}$$

qui signifie que la projectivité $xA + yA_2 \to x[AA_1A_2] - y[AA_2A_3]$ est osculatrice pour $A \to E$. Choissons les repères dans S_3' de telle manière que $xA + yA_2 \to xA' + yA_2'$ soit une homographie osculatrice pour $A \to A'$, et que $x[AA_1A_2] + y[AA_2A_3] \to x[A'A_1'A_2'] + y[A'A_2'A_3']$ soit une homographie osculatrice pour $E \to E'$. Cela s'exprime par les conditions

$$\tau_{02} = \tau_{13} = 0\,, \tag{IV,130}$$

$$\tau_{22} - \tau_{00} = \tau_{33} - \tau_{11} = 0\,. \tag{IV,131}$$

La différentiation extérieure des équations (IV,126) – (IV,131) donne

$$[\tau_{20}\omega] = 0\,, \quad [\tau_{31}\omega] = 0\,, \tag{IV,132}$$

$$[\omega_{20} - \omega_{31}\omega] = 0\,. \tag{IV,133}$$

Nous supposerons que même les droites $[AA_1]$, $[A'A_1']$ dépendent seulement de v, qu'on ait donc $[\omega_{12}\omega] = [\tau_{12}\omega] = 0$, c'est-à-dire

$$\omega_{12} = a\omega\,, \quad \tau_{12} = \alpha\omega \tag{IV,134}$$

et qu'il en est de même pour les positions géométriques de droites $x[AA_1] + y[AA_2]$, $x[A'A_1'] + y[A'A_2']$, que l'on a donc $[\omega_{11} - \omega_{22}\omega] = [\tau_{11} - \tau_{22}\omega] = 0$, donc

$$\omega_{11} - \omega_{22} = b\omega\,, \quad \tau_{11} - \tau_{22} = \beta\omega\,. \tag{IV,135}$$

La différentiation extérieure donne

$$\begin{aligned}
[\mathrm{d}a + a(\omega_{00} - \omega_{22}) + \omega_{32} - \omega_{10}\omega] &= 0\,,\\
[\mathrm{d}b + b(\omega_{00} - \omega_{22}) + \omega_{31} + \omega_{20}\omega] &= 0\,,\\
[\mathrm{d}\alpha + \alpha(\omega_{00} - \omega_{22}) + \tau_{32} - \tau_{10}\omega] &= 0\,,\\
[\mathrm{d}\beta + \beta(\omega_{00} - \omega_{22})\,\omega] &= 0\,.
\end{aligned} \tag{IV,136}$$

La congruence L est formée des droites $[A, A_1 + wA_2]$, la congruence L' par les droites $[A', A_1' + w'A_2']$ et la correspondance développable $T(L \to L')$ est donnée par le fait que w' est fonction de v, w avec $[dv\, dw] \neq 0 \neq [dv\, dw']$. Si T est une déformation projective, alors pour toute droite $g \in L$ il existe une homographie H osculatrice pour T et qui est forcément tangente à $A \to A'$, $E \to E'$. Aussi partirons nous d'une homographie H tangente à $A \to A'$, $E \to E'$, qui transforme la droite $[A, A_1 + wA_2]$ en une autre: $[A', A'_1 + wA'_2]$. La forme générale d'une telle homographie H est

$$\text{(IV, 137)} \qquad HA = A', \quad HA_1 = \varrho A'_1 + q_0 A' + qA'_2, \quad HA_2 = A'_2 + pA', \quad HA_3 = \varrho A'_3 + r_0 A' + r_1 A'_1 + r_2 A'_2$$

avec $\varrho \neq 0$ et

$$\text{(IV,138)} \qquad \varrho w' = w + q .$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \varrho[A', A'_1 + w'A'_2] &= H[A, A_1 + wA_2], \\ d(\varrho[A', A'_1 + w'A'_2]) &= H\, d[A, A_1 + wA_2] + \{d\varrho + \varrho(\tau_{00} + \tau_{11}) - \\ &\quad - (r_1 + \varrho p)\, w\}\, [A'A'_1] + \{dq + 2\varrho w' \tau_{00} + q(\omega_{22} - \omega_{11}) + \\ &\quad + (\overline{\varrho - 1} \,.\, a + \varrho\alpha - r_2 - pq + q_0)\, \omega\}\, [A'A'_2]. \end{aligned}$$

Donc H est tangente pour T si et seulement si

$$\text{(IV,139)} \quad \varrho\, dw' - dw = \{\varrho w' (\beta - r_1 - \varrho p) - (\varrho - 1)a - \varrho\alpha + r_2 + pq - q_0\}\, \omega$$

d'où il découle

$$\text{(IV,140)} \qquad \varrho \frac{\partial w'}{\partial w} = 1 .$$

Lorsque $w' = w'(v, w)$ est donné, alors (IV,140) détermine ϱ, ensuite (IV,138) détermine q et (IV,139) exprime une relation que doit vérifier le reste des paramètres q_0, p, r_0, r_1, r_2; il existe donc ∞^4 homographies H tangentes pour T, pour $A \to A'$ et pour $E \to E'$. Nous avons

$$\begin{aligned} \varrho[A', A'_1 + w'A'_2] &= H[A, A_1 + wA_2], \\ d(\varrho[A', A'_1 + w'A'_2]) &= H\, d\, [A, A_1 + wA_2] + \\ &\quad + \{d\varrho + 2\varrho\tau_{00} + (\varrho\beta - \varrho p - r_1)\, \omega\}\, [A', A'_1 + w'A'_2], \\ d^2(\varrho[A', A'_1 + w'A'_2]) &= H\, d^2[A, A_1 + wA_2] + \\ &\quad + 2\{d\varrho + 2\varrho\tau_{00} + (\varrho\beta - \varrho p - r_1)\, \omega\}\, d[A', A'_1 + w'A'_2] + \\ &\quad + 2(r_1 - \varrho p)\, \omega[A'A'_3] - 2(r_1 + \varrho p)\, \omega[A'_1 A'_2] + \\ &\quad + (.)\, [A'A'_1] + (.)\, [A'A'_2]. \end{aligned}$$

Donc H est quasiosculatrice pour T si et seulement si

$$\text{(IV,141)} \qquad p = r_1 = 0 ,$$

c'est-à-dire que H doit être osculatrice et pour $A \to A'$, et pour $E \to E'$. La condition (IV,139) devient ainsi

$$\text{(IV,142)} \qquad \varrho\, dw' - dw = \{\beta\varrho w' - (\varrho - 1)\, a - \varrho\alpha + r_2 - q_0]\, \omega .$$

Nous écrirons maintenant les égalités valables pour v = constant avec $\equiv$ au lieu de $=$. Comme nous supposons que les repères ne dépendent pas que de v, nous avons $\omega_{ik} \equiv 0$, $\tau_{ik} \equiv 0$. Il est facile de calculer

$$\begin{aligned} H[A, A_1 + wA_2] &\equiv \varrho[A', A_1' + w'A_2'], \\ H\,\mathrm{d}[A, A_1 + wA_2] &\equiv \varrho\,\mathrm{d}[A', A_1' + w'A_2'] + (\mathrm{d}w - \varrho\,\mathrm{d}w')[A'A_2'], \\ H\,\mathrm{d}^2[A, A_1 + wA_2] &\equiv \varrho\,\mathrm{d}^2[A^1, A_1' + w'A_2'] + (\mathrm{d}^2w - \varrho\,\mathrm{d}^2w')[A'A_2']. \end{aligned}$$

Or, d'après (IV,142) nous avons $\mathrm{d}w - \varrho\,\mathrm{d}w' \equiv 0$; pour H osculatrice nous devons avoir $\mathrm{d}^2w - \varrho\,\mathrm{d}^2w' \equiv 0$, c'est-à-dire $\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}w' \equiv 0$. Or $\mathrm{d}w' \not\equiv 0$, donc la condition nécessaire pour que H soit une homographie osculatrice est $\mathrm{d}\varrho \equiv 0$, c'est-à-dire

$$[\mathrm{d}\varrho\omega] = 0\,. \tag{IV,143}$$

Or, cela signifie que *T est une déformation projective seulement si H* (et donc aussi T) *transforme projectivement, pour v = const., le faisceau (A, E) en faisceau (A', E'); à la droite $[A\,\mathrm{d}A]$ on associe la droite $[A'\,\mathrm{d}A']$*. En vertu de cela, nous pouvons choisir le repère de telle façon que

$$w' = w\,. \tag{IV,144}$$

Alors (IV,138), (IV,140) et (IV,142) donnent

$$\varrho = 1\,, \quad q = 0\,, \quad r_2 - q_0 = \alpha - \beta w\,. \tag{IV,145}$$

Maintenant, nous avons (en supposant (IV,30))

$$\begin{aligned} [A', A_1' + wA_2'] &= H[A, A_1 + wA_2], \\ \mathrm{d}[A', A_1' + wA_2'] &= H\,\mathrm{d}[A, A_1 + wA_2], \\ \mathrm{d}^2[A', A_1' + wA_2'] &= H\,\mathrm{d}^2[A, A_1 + wA_2] + (\tau_{31} + \tau_{20})\,\omega[A'A_1'] + \{\mathrm{d}(\alpha - \beta w) - \\ &\quad - \beta(\mathrm{d}w + \omega_{12}) + \alpha(\omega_{00} - \omega_{11}) - \beta w(\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22}) + \\ &\quad + \tau_{32} - \tau_{10} - \beta(\alpha - \beta w)\,\omega + 2r_0\omega\}\,\omega[A'A_2'] \end{aligned}$$

et pour l'homographie osculatrice, nous obtenons la condition

$$\begin{aligned} &\beta(\mathrm{d}w + \omega_{12}) - \mathrm{d}(\alpha - \beta w) - \alpha(\omega_{00} - \omega_{11}) + \beta w(\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22}) - \\ &\quad - \tau_{32} + \tau_{10} + w(\tau_{31} + \tau_{20}) + \beta(\alpha - \beta w)\,\omega - 2r_0\omega = 0 \end{aligned}$$

d'où il résulte $\beta = 0$, c'est-à-dire

$$\tau_{11} - \tau_{22} = 0 \tag{IV,146}$$

et

$$\mathrm{d}\alpha + \alpha(\omega_{00} - \omega_{11}) + \tau_{32} - \tau_{10} - w(\tau_{31} + \tau_{20}) + 2r_0\omega = 0\,. \tag{IV,147}$$

L'homographie osculatrice est

$$\begin{aligned} HA = A'\,, \quad HA_1 = A_1' + q_0A'\,, \quad HA_2 = A_2'\,, \\ HA_3 = A_3' + r_0A' + (q_0 + \alpha)\,A' \end{aligned} \tag{IV,148}$$

où q_0 est arbitraire et r_0 peut être déterminé par (IV,147). La condition (IV,146) n'est pas remplie en général, mais on a toujours $[d(\tau_{11} - \tau_{22})] = 0$, donc aussi

$$\tau_{11} - \tau_{22} = \mathrm{d}f\,. \tag{IV,149}$$

Si, au lieu de A', A'_1, A'_2, A'_3, nous introduisons le repère (peu importe si (IV,30) n'aura pas lieu)

$$A',\ ce^{-f}A'_1 + \lambda A'_2,\ A'_2,\ ce^{-f}A'_3$$

où $\lambda = \lambda(v)$ est une fonction arbitraire et $0 \neq c =$ const., nous aurons aussi (IV,146).

La déformation projective T la plus générale qui existe entre les deux congruences données L, L' du type considéré peut donc être construite de la façon suivante: nous prenons une correspondance arbitraire entre les droites (A), (A') et puis nous spécialisons les repères de telle façon que (IV,126) – (IV,131) *ait lieu; la correspondance T associe alors à la droite $[A, A_1 + wA_2]$ du plan E la droite $[A', ce^{-f}A'_1 + (\lambda + w) A'_2]$ du plan correspondant E'. Pour chaque paire de droites correspondantes il existe ∞^1 homographies osculatrices.*

L'homographie H dépend en général de w; si nous choisissons q_0 indépendant de w alors la part de H qui concerne le plan E et l'étoile A est aussi indépendante de w. *Pour qu'il existe une homographie osculatrice H indépendante de w, il faut et il suffit que l'on ait outre* (IV,146) *encore*

$$\tau_{31} + \tau_{20} = 0. \qquad \text{(IV,150)}$$

Les éléments projectifs linéaires des correspondances $A \to A'$, $E \to E'$ sont $\tau_{20}\omega$, $\tau_{31}\omega$[5]) de sorte que (IV,150) est équivalente à la condition de nullité de leur somme. En particulier: *si l'une des correspondances $A \to A'$, $E \to E'$ est projective, l'autre l'est aussi.*

*

V. NORMALISATION PROJECTIVE DE CORRESPONDANCE ENTRE DEUX COURBES GAUCHES DUALES

Dans ce travail, on étudie les correspondances entre deux courbes des espaces projectifs à trois dimensions, ou respectivement entre les systèmes monoparamétriques de leurs plans osculateurs; la correspondance entre ces systèmes est étendu par un système de projectivités en une correspondance ponctuelle entre les espaces entiers; on étudie alors ses propriétés particulieres.

1. Dans l'espace projectif à trois dimensions P_3 ou $\bar{P}_3$, respectivement, soit donnée une courbe duale γ, ou $\bar{\gamma}$ resp.; nous entendons par courbe duale un système monoparamétrique de plans. Supposons que les plans des deux courbes duales dépendent d'un seul paramètre commun t, ce qui détermine entre eux une correspondance.

Nous associerons à chaque plan de la courbe duale γ, ou $\bar{\gamma}$ resp., le système de tous les repères $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ ou $\{B_0, B_1, B_2, B_3\}$ de l'espace P_3, ou $\bar{P}_3$ resp. Nous aurons donc les équations

---

[5]) Voir E. Čech, Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами; Чех. мат. журнал, *2 (77)* 1952, 91–107 ou bien Čas. pěst. mat. *74*, 1949, 32–46.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{V},1) \qquad \mathrm{d}A_0 &= \omega_{00}A_0 + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2 + \omega_{03}\omega_3\,, \\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{10}A_0 + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_{13}A_3\,, \\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{20}A_0 + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_{23}A_3\,, \\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{30}A_0 + \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{V},2) \qquad \mathrm{d}B_0 &= \varpi_{00}B_0 + \varpi_{01}B_1 + \varpi_{02}B_2 + \varpi_{03}B_3\,, \\
\mathrm{d}B_1 &= \varpi_{10}B_0 + \varpi_{11}B_1 + \varpi_{12}B_2 + \varpi_{13}B_3\,, \\
\mathrm{d}B_2 &= \varpi_{20}B_0 + \varpi_{21}B_1 + \varpi_{22}B_2 + \varpi_{23}B_3\,, \\
\mathrm{d}B_3 &= \varpi_{30}B_0 + \varpi_{31}B_1 + \varpi_{32}B_2 + \varpi_{33}B_3\,.
\end{aligned}
$$

Si nous supposons

$$(\mathrm{V},3) \qquad [A_0A_1A_2A_3] = 1\,,$$

$$(\mathrm{V},4) \qquad [B_0B_1B_2B_3] = 1\,,$$

il en résultera

$$(\mathrm{V},5) \qquad \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} = 0\,,$$

$$(\mathrm{V},6) \qquad \varpi_{00} + \varpi_{11} + \varpi_{22} + \varpi_{33} = 0\,.$$

Les équations de structure sont enfin

$$(\mathrm{V},7) \qquad [\mathrm{d}\omega_{ij}] = [\omega_{i0}\omega_{0j}] + [\omega_{i1}\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\omega_{2j}] + [\omega_{i3}\omega_{3j}]\,,$$

$$(\mathrm{V},8) \qquad [\mathrm{d}\varpi_{ij}] = [\varpi_{i0}\varpi_{0j}] + [\varpi_{i1}\varpi_{1j}] + [\varpi_{i2}\varpi_{2j}] + [\varpi_{i3}\varpi_{3j}]\,.$$

La normalisation d'ordre zéro est donnée par la condition que les deux courbes duales considérées sont décrites par les plans $[A_0A_1A_2]$, $[B_0B_1B_2]$. Les paires de repères associés aux plans correspondants des deux courbes duales dépendent donc d'un seul paramètre essentiel t; nous avons en outre 24 paramètres secondaires. La différentiation par rapport aux paramètres secondaires sera désignée par δ, donc $\delta t = 0$; nous poserons en outre

$$(\mathrm{V},9) \qquad \omega_{ij}(\delta) = e_{ij}\,, \quad \varpi_{ij}(\delta) = \varepsilon_{ij}\,.$$

Dans les expressions pour δA_0, δA_1, δA_2, il n'y a pas de A_3, nous avons donc

$$(\mathrm{V},10) \qquad e_{03} = e_{13} = e_{23} = 0$$

et d'une façon analogue

$$(\mathrm{V},11) \qquad \varepsilon_{03} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0\,.$$

2. Pour *la normalisation du premier ordre* nous supposerons que les plans $[A_0A_1A_2]$, $[B_0B_1B_2]$ touchent leurs enveloppes suivant les droites $[A_0A_1]$, $[B_0B_1]$, de façon que nous aurons

$$(\mathrm{V},12) \qquad \omega_{03} = \omega_{13} = 0\,,$$

$$(\mathrm{V},13) \qquad \varpi_{03} = \varpi_{13} = 0\,.$$

Nous éliminons les plans stationnaires, donc

$$(\mathrm{V},14) \qquad \omega_{23} \neq 0\,, \quad \varpi_{23} \neq 0\,;$$

d'après (V,10) et (V,11) il doit y avoir $\alpha \neq 0$ tel que

(V,15) $$\varpi_{23} = \alpha\omega_{23} .$$

Par différentiation extérieure nous en obtenons

(V,16) $$[d\alpha + \alpha(\omega_{22} - \omega_{33} - \varpi_{22} + \omega_{33})\,\omega_{23}] = 0$$

de sorte que

(V,17) $$\delta\alpha = (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} - e_{22} + e_{33})\,\alpha .$$

Comme $\alpha \neq 0$, $\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} - e_{22} + e_{33} \neq 0$, nous terminerons la normalisation du premier ordre par la condition $\alpha = 1$, c'est-à-dire

(V,18) $$\varpi_{23} = \omega_{23} .$$

La normalisation du premier ordre a introduit cinq relations (V,12), (V,13), (V,18), elle a donc abaissé le nombre de paramètres secondaires de 24 à 19. Il faut donc que l'on ait cinq relations existant entre les différentielles des paramètres secondaires. La différentiation extérieure des équations (V,12), (V,13), (V,18) donne

(V,19) $$[\omega_{02}\omega_{23}] = [\omega_{12}\omega_{23}] = [\varpi_{02}\omega_{23}] = [\varpi_{12}\omega_{23}] = \\ = [\varpi_{22} - \varpi_{33} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega_{23}] = 0$$

de sorte que les relations mentionnées sont

(V,20) $$e_{02} = e_{12} = \varepsilon_{02} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33} - e_{22} + e_{33} = 0 .$$

D'après (V,19) il existe a_0, a_1, α_0, α_1, b tels que

(V,21) $$\omega_{02} = a_0\omega_{23} , \quad \omega_{12} = a_1\omega_{23} ,$$

(V,22) $$\varpi_{02} = \alpha_0\omega_{23} , \quad \varpi_{12} = \alpha_1\omega_{23} ,$$

(V,23) $$\varpi_{22} - \varpi_{33} - \omega_{22} + \omega_{33} = b\omega_{23} .$$

3. Le but de *la normalisation du second ordre* est de fixer les coefficients a_0, a_1, α_0, α_1, b dans les équations (V,21) à (V,23). Posons

(V,24) $$\omega = \omega_{23} , \quad e = e_{23} .$$

D'après (V,7), (V,8), (V,12), (V,13), (V,18), (V,21), (V,22) et (V,23) nous aurons

(V,25) $$[d\omega] = [\omega_{22} - \omega_{33}\omega] ,$$

(V,26) $$\begin{aligned} [d\omega_{02}] &= [a_0(\omega_{00} - \omega_{22}) + a_1\omega_{01}\omega] , \\ [d\omega_{12}] &= [a_0\omega_{10} + a_1(\omega_{11} - \omega_{22})\,\omega] , \\ [d\omega_{22}] &= [a_0\omega_{21} + a_1\omega_{21} - \omega_{32}\omega] , \\ [d\omega_{33}] &= [\omega_{32}\omega] , \end{aligned}$$

(V,27) $$\begin{aligned} [d\varpi_{02}] &= [\alpha_0(\varpi_{00} - \varpi_{22}) + \alpha_1\varpi_{01}\omega] , \\ [d\varpi_{12}] &= [\alpha_0\varpi_{10} + \alpha_1(\varpi_{11} - \varpi_{22})\,\omega] , \\ [d\varpi_{22}] &= [\alpha_0\varpi_{20} + \alpha_1\varpi_{21} - \varpi_{32}\omega] , \\ [d\varpi_{33}] &= [\varpi_{32}\omega] \end{aligned}$$

de sorte qu'il résulte par différentiation extérieure des équations (V,21) à (V,23)

$$\begin{aligned}
&[da_0 - a_0(\omega_{00} - 2\omega_{22} + \omega_{33}) - a_1\omega_{01}\omega] = 0\,,\\
&[da_1 - a_0\omega_{10} - a_1(\omega_{11} - 2\omega_{22} + \omega_{33})\omega] = 0\,,\\
&[d\alpha_0 - \alpha_0(\varpi_{00} - 2\varpi_{22} + \varpi_{33}) - \alpha_1\varpi_{01}\omega] = 0\,,\\
&[d\alpha_1 - \alpha_0\varpi_{10} - \alpha_1(\varpi_{11} - 2\varpi_{22} + \varpi_{33})\,\omega] = 0\,,
\end{aligned} \tag{V,28}$$

$$[db + b(\omega_{22} - \omega_{33}) + a_0\omega_{20} + a_1\omega_{21} - \alpha_0\varpi_{20} - \alpha_1\varpi_{21} + 2\tau_{32}\omega] = 0 \tag{V,29}$$

où nous avons posé

$$\tau_{ij} = \varpi_{ij} - \omega_{ij} \tag{V,30}$$

de sorte que (V,5), (V,6), (V,12), (V,13) et (V,18) entraînent

$$\tau_{00} + \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = \tau_{03} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0\,. \tag{V,31}$$

Il résulte de (V,28) et (V,29)

$$\begin{aligned}
\delta a_0 &= a_0(e_{00} - 2e_{22} + e_{33}) + a_1e_{01}\,,\\
\delta a_1 &= a_0e_{10} + a_1(e_{11} - 2e_{22} + e_{33})\,,\\
\delta\alpha_0 &= \alpha_0(\varepsilon_{00} - 2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + \alpha_1\varepsilon_{01}\,,\\
\delta\alpha_1 &= \alpha_0\varepsilon_{10} + \alpha_1(\varepsilon_{11} - 2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\,,\\
\delta b &= -\,b(e_{22} - e_{33}) - a_0e_{20} - a_1e_{21} + \alpha_0\varepsilon_{20} + \alpha_1\varepsilon_{21} - 2t_{32}
\end{aligned} \tag{V,32}$$

où nous avons posé

$$t_{ij} = \tau_{ij}(\delta) = \varepsilon_{ij} - e_{ij} \tag{V,33}$$

de façon que nous obtenons de (V,31) et (V,20)

$$t_{00} + t_{11} + t_{22} + t_{33} = t_{03} = t_{13} = t_{23} = t_{02} = t_{12} = t_{22} - t_{33} = 0\,. \tag{V,34}$$

Il découle de (V,32) que les équations $a_0 = a_1 = 0$ de même que les équations $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ ont une signification invariante. Les équations $a_0 = a_1 = 0$ signifient d'après (V,21) que le plan $[A_0A_1A_2]$ tourne autour de la droite fixe $[A_0A_1]$; d'une façon analogue $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ signifie que le plan $[B_0B_1B_2]$ tourne autour de la droite fixe $[B_0B_1]$. Ces deux cas seront, dans ce qui suit, éliminés de nos considérations.

En procédant à la normalisation du second ordre nous pouvons demander que la droite $[A_0A_1]$ ou $[B_0B_1]$ resp., touche son enveloppes au point A_0, ou B_0 resp., ce qui signifie $\omega_{02} = \varpi_{02} = 0$ ou encore $a_0 = \alpha_0 = 0$. En somme, il est possible d'obtenir à partir des équations (V,32) les relations suivantes

$$a_0 = \alpha_0 = 0\,,\quad \alpha_1 = a_1 = 1\,,\quad b = 0 \tag{V,35}$$

soit encore

$$\omega_{02} = \varpi_{02} = 0\,,\quad \omega_{12} = \varpi_{12} = \omega\,,\quad \tau_{22} - \tau_{33} = 0\,. \tag{V,36}$$

Les cinq relations (V,35) abaissent le nombre de paramètres secondaires à 14. Les relations correspondantes existant entre les différentielles des paramètres secondaires sont d'après (V,32) et (V,35)

$$e_{01} = \varepsilon_{01} = e_{11} - 2e_{22} + e_{33} = \varepsilon_{11} - 2\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 2t_{32} - t_{21} = 0 \tag{V,37}$$

et les relations (V,28) et (V,29) deviennent

$$(V,28') \quad [\omega_{01}\omega] = [\omega_{11} - 2\omega_{22} + \omega_{33}\omega] = [\bar{\omega}_{01}\omega] = [\bar{\omega}_{11} - 2\bar{\omega}_{22} + \bar{\omega}_{33}\omega] = 0,$$

$$(V,29') \qquad [2\tau_{32} - \tau_{21}\omega] = 0 .$$

Il existe donc a, a', α, α', β tels que

$$(V,38) \qquad \begin{gathered} \omega_{01} = a\omega\,, \quad \bar{\omega}_{01} = \alpha\omega\,, \\ \omega_{11} - 2\omega_{22} + \omega_{33} = a'\omega\,, \quad \bar{\omega}_{11} - 2\bar{\omega}_{22} + \bar{\omega}_{33} = \alpha'\omega\,, \\ 2\tau_{32} - \tau_{21} = \beta\omega\,. \end{gathered}$$

4. *La normalisation du troisième ordre* a pour but de fixer les coefficients a, a', α', α, β dans (V,38). Par différentiation extérieure, nous obtenons

$$(V,39) \qquad \begin{aligned} &[\mathrm{d}a - a(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33})\,\omega] = 0\,, \\ &[\mathrm{d}\alpha - \alpha(\bar{\omega}_{00} - \bar{\omega}_{11} - \bar{\omega}_{22} + \bar{\omega}_{33})\,\omega] = 0\,, \\ &[\mathrm{d}a' + a'(\omega_{22} - \omega_{33}) - a\omega_{10} + 3(\omega_{21} - \omega_{32})\,\omega] = 0\,, \\ &[\mathrm{d}\alpha' + \alpha'(\omega_{22} - \omega_{33}) - \alpha\bar{\omega}_{10} + 3(\bar{\omega}_{21} - \bar{\omega}_{32})\,\omega] = 0\,, \\ &[\mathrm{d}\beta + 2\beta(\omega_{22} - \omega_{33}) - a\omega_{20} + \alpha\bar{\omega}_{20} - a'\omega_{21} + \alpha'\bar{\omega}_{21} - 3\tau_{31}\omega] = 0 \end{aligned}$$

de sorte que

$$(V,40) \qquad \begin{aligned} \delta a &= a(e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33})\,, \\ \delta\alpha &= \alpha(\varepsilon_{00} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\,, \\ \delta a' &= a'(e_{33} - e_{22}) + ae_{10} - 3(e_{21} - e_{32})\,, \\ \delta\alpha' &= \alpha(e_{33} - e_{22}) + a\varepsilon_{10} - 3(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{32})\,, \\ \delta\beta &= 2\beta(e_{33} - e_{22}) + ae_{20} - \alpha\varepsilon_{20} + a'e_{21} - \alpha'\varepsilon_{21} + 3t_{31}\,. \end{aligned}$$

L'équation $a = 0$ ainsi que l'équation $\alpha = 0$ ont une signification invariante. Elles signifient que le point A_0, ou B_0 respectivement, est fixe. Si nous éliminons ces cas-là, nous pouvons effectuer la normalisation du troisième ordre de façon à avoir

$$a = \alpha = 1\,, \quad a' = \alpha' = \beta = 0$$

ou bien encore

$$(V,41) \qquad \begin{aligned} &\omega_{01} = \bar{\omega}_{01} = \omega\,, \\ &\omega_{11} - 2\omega_{22} + \omega_{33} = \bar{\omega}_{11} - 2\bar{\omega}_{22} + \bar{\omega}_{33} = 2\tau_{32} - \tau_{21} = 0\,. \end{aligned}$$

Le nombre de paramètres secondaires est maintenant 9 et les nouvelles relations correspondantes qui existent entre les différentielles des paramètres secondaires sont d'après (V,40)

$$(V,42) \qquad \begin{aligned} &e_{00} - e_{11} - e_{22} + e_{33} = \varepsilon_{00} - \varepsilon_{11} - e_{22} + e_{33} = \\ &= e_{10} - 3(e_{21} - e_{32}) = \varepsilon_{10} - 3(\varepsilon_{21} - \varepsilon_{32}) = t_{20} - 3t_{31} = 0\,. \end{aligned}$$

Les équations (V,39) deviennent

$$\begin{gathered} [\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33}\omega] = [\bar{\omega}_{00} - \bar{\omega}_{11} - \bar{\omega}_{22} + \bar{\omega}_{33}\omega] = 0\,, \\ [\omega_{10} - 3(\omega_{21} - \omega_{32})\,\omega] = [\bar{\omega}_{10} - 3(\bar{\omega}_{21} - \bar{\omega}_{32})\,\omega] = 0\,, \\ [\tau_{20} - 3\tau_{31}\omega] = 0\,, \end{gathered}$$

il existe donc $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2, f$ tels que

$$\text{(V,43)} \quad \begin{gathered} \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} = c_1\omega\,, \quad \varpi_{00} - \varpi_{11} - \varpi_{22} + \varpi_{33} = \gamma_1\omega\,, \\ \omega_{10} - 3(\omega_{21} - \omega_{32}) = c_2\omega\,, \quad \varpi_{10} - 3(\varpi_{21} - \varpi_{32}) = \gamma_2\omega\,, \\ \tau_{20} - 3\tau_{31} = f\omega\,. \end{gathered}$$

5. *La normalisation du quatrième ordre* devra fixer les coefficients $c_1, \gamma_1, c_2, \gamma_2, f$ dans (V,43). La différentiation extérieure donne

$$\text{(V,44)} \quad \begin{aligned} [dc_1 + c_1(\omega_{22} - \omega_{33}) + 2(\omega_{10} - \omega_{32})\,\omega] &= 0\,, \\ [d\gamma_1 + \gamma_1(\omega_{22} - \omega_{33}) + 2(\varpi_{10} - \varpi_{32})\,\omega] &= 0\,, \\ [dc_2 + 2c_2(\omega_{22} - \omega_{33}) - c_1\omega_{10} + 4\omega_{20} - 6\omega_{31}\omega] &= 0\,, \\ [d\gamma_2 + 2\gamma_2(\omega_{22} - \omega_{33}) - \gamma_1\varpi_{10} + 4\varpi_{20} - 6\varpi_{31}\omega] &= 0\,, \\ [df + 4\tau_{30} + \ldots, \omega] &= 0\,, \end{aligned}$$

donc

$$\text{(V,45)} \quad \begin{aligned} \delta c_1 &= c_1(e_{33} - e_{22}) - 2(e_{10} - e_{32})\,, \\ \delta\gamma_1 &= \gamma_1(e_{33} - e_{22}) - 2(\varepsilon_{10} - \varepsilon_{32})\,, \\ \delta c_2 &= 2c_2(e_{33} - e_{22}) + c_1e_{10} - 4e_{20} + 6e_{31}\,, \\ \delta\gamma_2 &= 2\gamma_2(e_{33} - e_{22}) + \gamma_1\varepsilon_{10} - 4\varepsilon_{20} + 6\varepsilon_{31}\,, \\ \delta f &= -\,4t_{30} + \ldots\,. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc réaliser la normalisation du quatrième ordre de telle manière que nous ayons

$$c_1 = \gamma_1 = c_2 = \gamma_2 = f = 0$$

soit encore

$$\text{(V,46)} \quad \begin{gathered} \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} + \omega_{33} = \varpi_{00} - \varpi_{11} - \varpi_{22} + \varpi_{33} = 0\,, \\ \omega_{10} = 3(\omega_{21} - \omega_{32})\,, \quad \varpi_{10} = 3(\varpi_{21} - \varpi_{32})\,, \quad \tau_{20} = 3\tau_{31}\,. \end{gathered}$$

Par différentiation extérieure et quelques modifications convenables, les équations (V,46) donnent

$$\text{(V,47)} \quad \begin{gathered} [4\omega_{32} - 3\omega_{21}\omega] = 0\,, \quad [3\omega_{31} - 2\omega_{20}\omega] = 0\,, \\ [\tau_{30}\omega] = [\tau_{31}\omega] = [\tau_{32}\omega] = 0\,. \end{gathered}$$

Nous pouvons donc poser

$$\text{(V,48)} \quad \begin{gathered} 4\omega_{32} - 3\omega_{21} = u_1\omega\,, \quad 3\omega_{31} - 2\omega_{20} = u_2\omega\,, \\ \tau_{30} = v_0\omega\,; \quad \tau_{31} = v_1\omega\,, \quad \tau_{32} = v_2\omega\,. \end{gathered}$$

Entre ω_{ij} et $\varpi_{ij} = \omega_{ij} + \tau_{ij}$, il existe les relations (V,5), (V,6), (V,12), (V,13), (V,18), (V,24), (V,36), (V,41), (V,46) et (V,48). Si nous posons

$$\text{(V,49)} \quad \omega_{21} = \omega_0\,, \quad \omega_{21} - \omega_{32} = \omega_1\,; \quad \omega_{20} - \omega_{21} = \omega_2\,, \quad \omega_{30} = \omega_3\,,$$

les équations (V,1) et (V,2) deviennent

$$\text{(V,50)} \quad \begin{aligned} dA_0 &= 3\omega_0A_0 + \omega A_1\,, \\ dA_1 &= 3\omega_1A_0 + \omega_0A_1 + \omega A_2\,, \\ dA_2 &= (3\omega_2 + u_2\omega)\,A_0 + (4\omega_1 + u_1\omega)\,A_1 - \omega_0A_2 + \omega A_3\,, \\ dA_3 &= \omega_3A_0 + (2\omega_2 + u_2\omega)\,A_1 + (3\omega_1 + u_1\omega)\,A_2 - 3\omega_0A_3\,, \end{aligned}$$

(V,51) $$\begin{aligned} dB_0 &= 3\omega_0 B_0 + \omega B_1\,, \\ dB_1 &= 3(\omega_1 + v_2\omega)\, B_0 + \omega_0 B_1 + \omega B_2\,, \\ dB_2 &= \{3\omega_2 + (u_2 + 3v_1)\,\omega\}\, B_0 + \{4\omega_1 + (u_1 + 2v_2)\,\omega\}\, B_1 - \\ &\quad - \omega_0 B_2 + \omega B_3\,, \\ dB_3 &= (\omega_3 + v_0\omega)\, B_0 + \{2\omega_2 + (u_2 + v_1)\,\omega\}\, B_1 + \\ &\quad + \{3\omega_1 + (u_1 + v_2)\,\omega\}\, B_2 - 3\omega_0 B_3\,. \end{aligned}$$

Nous obtenons les conditions de l'intégrabilité en différentiant extérieurement les équations (V,48), compte tenu de (V,49); ce sont les conditions

(V,52) $$\begin{aligned} &[du_1 + 4u_1\omega_0 - 5\omega_2\omega] = 0\,, \\ &[du_2 + 6u_2\omega_0 - 3u_1\omega_1 - 5\omega_3\omega] = 0\,, \\ &[dv_0 + 8v_0\omega_0 - 6v_1\omega_1 - 3v_2\omega_2\omega] = 0\,, \\ &[dv_1 + 6v_1\omega_0 - 2v_2\omega_1\omega] = 0\,, \\ &[dv_2 + 4v_2\omega_0\omega] = 0\,. \end{aligned}$$

Si nous écrivons

$$\omega_0(\delta) = e_0\,, \quad \omega_1(\delta) = e_1\,, \quad \omega_2(\delta) = e_2\,, \quad \omega_3(\delta) = e_3\,,$$

nous aurons

(V,53) $$\begin{aligned} \delta u_1 &= -\,4u_1e_0 + 5e_2\,, \\ \delta u_2 &= -\,6u_2e_0 + 3u_1e_1 + 5e_3\,, \\ \delta v_0 &= -\,8v_0e_0 + 6v_1e_1 + 3v_2e_2\,, \\ \delta v_1 &= -\,6v_1e_0 + 2v_2e_1\,, \\ \delta v_2 &= -\,4v_2e_0\,. \end{aligned}$$

D'après ces équations, il serait possible d'effectuer la normalisation du cinquième ordre, ce que nous ne ferons pas.

6. Il résulte des équations (V,50) et (V,51) que l'on a

(V,54) $$\begin{aligned} &\delta A_0 = 3e_0A_0\,, \quad \delta A_1 = 3e_1A_0 + e_0A_1\,, \quad \delta A_2 = 3e_2A_0 + 4e_1A_1 - e_0A_2\,, \\ &\delta A_3 = e_3A_0 + 2e_2A_1 + 3e_1A_2 - 3e_0A_3\,, \end{aligned}$$

(V,55) $$\begin{aligned} &\delta B_0 = 3e_0B_0\,, \quad \delta B_1 = 3e_1B_0 + e_0B_1\,, \quad \delta B_2 = 3e_2B_0 + 4e_1B_1 - e_0B_2\,, \\ &\delta B_3 = e_3B_0 + 2e_2B_1 + 3e_1B_2 - 3e_0B_3\,. \end{aligned}$$

Si nous définissons donc l'homographie K par les équations

(V,56) $$KA_0 = B_0\,, \quad KA_1 = B_1\,, \quad KA_2 = B_2\,, \quad KA_3 = B_3\,,$$

nous aurons $\delta K = 0$, ce qui veut dire que l'homographie K est invariante.

Posons

(V,57) $$\begin{aligned} &[A_0A_1A_2] = R_3\,, \quad [A_0A_1A_3] = -R_2\,, \quad [A_0A_2A_3] = R_1\,, \\ &[A_1A_2A_3] = -R_0\,, \end{aligned}$$

(V,58) $$\begin{aligned} &[B_0B_1B_2] = S_3\,, \quad [B_0B_1B_3] = -S_2\,, \quad [B_0B_2B_3] = S_1\,, \\ &[B_1B_2B_3] = -S_0 \end{aligned}$$

de sorte que nous avons

(V,59) $$A_i \mid R_j = B_i \mid S_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad i \neq j \\ 1 & \text{pour} \quad i = j \end{cases}$$

ce qui donne par différentiation

$$\mathrm{d}R_i + \sum_j \omega_{ji} R_j = 0\,, \quad \mathrm{d}S_i + \sum_j \overline{\omega}_{ji} S_j = 0\,,$$

d'où, en vertu de (V,50) et (V,51)

(V,60) $$\begin{aligned} &\mathrm{d}R_0 + 3\omega_0 R_0 + 3\omega_1 R_1 + (3\omega_2 + u_2\omega) R_2 + \omega_3 R_3 = 0\,, \\ &\mathrm{d}R_1 + \omega R_0 + \omega_0 R_1 + (4\omega_1 + u_1\omega) R_2 + (2\omega_2 + u_2\omega) R_3 = 0\,, \\ &\mathrm{d}R_2 + \omega R_1 - \omega_0 R_2 + (3\omega_1 + u_1\omega) R_3 = 0\,, \\ &\mathrm{d}R_3 + \omega R_2 - 3\omega_0 R_3 = 0\,, \end{aligned}$$

(V,61) $$\begin{aligned} &\mathrm{d}S_0 + 3\omega_0 S_0 + 3(\omega_1 + v_2\omega) S_1 + \{3\omega_2 + (u_2 + 3v_1)\,\omega\} S_2 + \\ &\quad + (\omega_3 + v_0\omega) S_3 = 0\,, \\ &\mathrm{d}S_1 + \omega S_0 + \omega_0 S_1 + \{4\omega_1 + (u_1 + 2v_2)\,\omega\} S_2 + \\ &\quad + \{2\omega_2 + (u_2 + v_1)\,\omega\} S_3 = 0\,, \\ &\mathrm{d}S_2 + \omega S_1 - \omega_0 S_2 + \{3\omega_1 + (u_1 + v_2)\,\omega\} S_3 = 0\,, \\ &\mathrm{d}S_3 + \omega S_2 - 3\omega_0 S_3 = 0\,. \end{aligned}$$

D'après les relations (V,56) à (V,58) nous avons

(V,62) $$KR_0 = S_0\,, \quad KR_1 = S_1\,, \quad KR_2 = S_2\,, \quad KR_3 = S_3\,.$$

Nous allons trouver la signification géométrique de l'homographie K. Dans ce but, procédons au choix non-invariant des paramètres:

(V,63) $$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0\,, \quad \omega = \mathrm{d}t\,;$$

les équations (V,60) et (V,61) prennent alors la forme

$$\begin{gathered} R_0' = -\,u_2 R_2\,, \quad R_1' = -\,R_0 - u_1 R_2 - u_2 R_3\,, \quad R_2' = -\,R_1 - u_1 R_3\,, \\ R_3' = -\,R_2\,, \\ S_0' = -\,3v_2 S_1 - (u_2 + 3v_1) S_2 - v_0 S_3\,, \quad S_1' = -\,S_0 - (u_1 + 2v_2) S_2 - \\ -\,(u_2 + v_1) S_3\,, \\ S_2' = -\,S_1 - (u_1 + v_2) S_3\,, \quad S_3' = -\,S_2\,, \end{gathered}$$

où l'accent désigne la différentiation par rapport à t. Nous aurons alors

$$\begin{gathered} R_3' = -\,R_2\,, \quad R_3'' = R_1 + u_1 R_3\,, \quad R_3''' = -\,R_0 - 2u_1 R_2 + (u_1' - u_2) R_3\,, \\ R_3'''' = 2u_1 R_1 + (2u_2 - 3u_1') R_2 + (.)\, R_3\,, \\ S_3' = -\,S_2\,, \quad S_3'' = S_1 + (u_1 + v_2) S_3\,, \\ S_3''' = -\,S_0 - (2u_1 + 3v_2) S_2 + (u_1' + v_2' - u_2 - v_1) S_3\,, \\ S_3'''' = 2(u_1 + 3v_2) S_1 + (2u_2 + 4v_1 - 3u_1' - 4v_2') S_2 + (.)\, S_3\,, \end{gathered}$$

d'où en vertu de (V,62),

$$\begin{gathered} KR_3 = S_3\,, \quad KR_3' = S_3'\,, \quad KR_3'' = S_3'' - v_2 S_3\,, \\ KR_3''' = S_3''' + 3v_2 S_2 - (v_2' - v_1) S_3\,, \quad KR_3'''' = S_3'''' - 6v_2 S_1 + 4(v_2' - v_1) S_2 + (.) S_3\,. \end{gathered}$$

Il en vient, μ étant arbitraire,

$$
\begin{aligned}
K(\mu R_3) &= \mu S_3 ,\\
K(\mu R_3)' &= \mu S_3' + \mu' S_3 ,\\
K(\mu R_3)'' &= \mu S_3'' + 2\mu' S_3' + (\mu'' - \mu v_2) S_3 ,\\
K(\mu R_3)''' &= \mu S_3''' + 3\mu' S_3'' + 3(\mu'' - \mu v_2) S_3' + \{\mu''' - 3\mu' v_2 - \mu(v_2' - v_1)\} S_3 ,\\
K(\mu R_3)'''' &= \mu S_3'''' + 4\mu' S_3''' + 6(\mu'' - \mu v_2) S_3'' + 4\{\mu''' - 3\mu' v_2 - \mu(v_2' - v_1)\} S_3' +\\
&\quad + (.)\, S_3 .
\end{aligned}
$$

Pour la valeur donnée du paramètre t nous pouvons choisir la fonction μ d'une telle façon que nous ayons

$$\mu = 1 , \quad \mu' = 0 , \quad \mu'' = v_2 , \quad \mu''' = v_2' - v_1 ,$$

μ'''' étant choisi de telle façon que l'on ait

$$K(\mu R_3) = S_3 , \ K(\mu R_3)' = S_3' , \ K(\mu R_3)'' = S_3'' , \ K(\mu R_3)''' = S_3''' , \ K(\mu R_3)'''' = S_3'''' .$$

Nous voyons donc que *l'homographie K réalise un contact du quatrième ordre qui existe entre les courbes duales considérées.* Le résultat a été établi moyennant un choix non-invariant des paramètres, mais cela n'a aucune importance, car l'homographie K est elle même invariante.

Gardons encore le choix non-invariante (V,63). D'après (V,50) et (V,51) nous avons

$$
\begin{aligned}
&A_0' = A_1 , \quad A_1' = A_2 , \quad A_2 = u_2 A_0 + u_1 A_1 + A_3 , \quad A_3' = u_2 A_1 + u_1 A_2 ,\\
&B_0' = B_1 , \quad B_1' = 3v_2 B_0 + B_2 , \quad B_2' = (u_2 + 3v_1) B_0 + (u_1 + 2v_2) B_1 + B_3 ,\\
&B_3' = v_0 B_0 + (u_2 + v_1) B_1 + (u_1 + v_2) B_2 ,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
A_0' = A_1 , \quad A_0'' &= A_2 , \quad A_0''' = u_2 A_0 + u_1 A_1 + A_3 ,\\
A_0'''' &= u_2' A_0 + (u_1' + 2u_2) A_1 + 2u_1 A_2 ,\\
B_0' &= B_1 , \quad B_0'' = 3v_2 B_0 + B_2 ,\\
B_0''' &= (3v_2' + u_2 + 3v_1) B_0 + (u_1 + 5v_2) B_1 + B_3 ,\\
B_0'''' &= (3v_2'' + u_2' + 3v_1' + 3u_1 + v_2 + 15v_2^2 + v_0) B_0 +\\
&\quad + (8v_2' + u_1' + 4v_1 + 2u_2) B_1 + 2(u_1 + 3v_2) B_2
\end{aligned}
$$

de sorte que, d'après (V,56) on a

$$
\begin{aligned}
KA_0 = B_0 , \quad KA_0' &= B_0' , \quad KA_0'' = B_0'' - 3v_2 B_0 ,\\
KA_0''' &= B_0''' - 5v_2 B_0' - 3(v_2' + v_1) B_0 ,\\
KA_0'''' &= B_0'''' - 6v_2 B_0'' - 4(2v_2' + v_1) B_0' - (3v_2'' + 3v_1' + 3u_1 v_2 - 3v_2^2 + v_0) B_0
\end{aligned}
$$

et pour μ arbitraire, on a

$$
\begin{aligned}
K(\mu A_0) &= \mu B_0 ,\\
K(\mu A_0)' &= \mu B_0' + \mu' B_0 ,\\
K(\mu A_0)'' &= \mu B_0'' + 2\mu' B_0' + (\mu'' - 3v_2 \mu) B_0 ,\\
K(\mu A_0)''' &= \mu B_0''' + 3\mu' B_0'' + (3\mu'' - 5v_2 \mu) B_0' + \{\mu''' + 9v_2 \mu' - 3(v_2' + v_1)\mu\} B_0 ,\\
K(\mu A_0)'''' &= \mu B_0'''' + 4\mu' B_0''' + 6(\mu'' - v_2 \mu) B_0'' +\\
&\quad + 4\{\mu''' - 5v_2 \mu' - (2v_2' + v_1)\mu\} B_0' +\\
&\quad + \{\mu'''' - 18v_2 \mu'' - 12(v_2' + v_1)\mu' - (3v_2'' + 3v_1' + 3u_1 v_2 - 3v_2^2 + v_0)\mu\} B_0 .
\end{aligned}
$$

L'homographie K réalise donc entre les courbes A_0, B_0: 1) *un contact analytique du second ordre toujours*; 2) *un contact analytique de troisième ordre si et seulement si* $v_2 = 0$; 3) *un contact analytique du quatrième ordre si et seulement si* $v_1 = v_2 = 0$. Le résultat a été à son tour établi moyennant le choix non-invariant (V,63), ce qui n'importe pas, car d'après (V,53) l'équation $v_2 = 0$ ~~aussi bien~~ que le système d'équations $v_1 = v_2 = 0$ ont une signification invariante. Le système $v_0 = v_1 = v_2 = 0$ a lui-aussi une signification invariante; il exprime cependant le fait que K est une homographie fixe transformant $[A_0A_1A_2]$ en $[B_0B_1B_2]$ et A_0 en B_0.

7. En nous servant de la normalisation du quatrième ordre posons

(V,64) $$\mathscr{A} = x_0A_0 + x_1A_1 + A_2\,,$$

(V,65) $$\mathscr{B} = y_0B_0 + y_1B_1 + y_2B_2\,,$$

(V,66) $$y_0 = \lambda_{00}x_0 + \lambda_{01}x_1 + \lambda_{02}\,, \quad y_1 = \lambda_{10}x_0 + \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}\,,$$
$$y_2 = \lambda_{20}x_0 + \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}\,,$$

(V,67) $$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & \lambda_{02} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix}.$$

Les variables x_0, x_1 sont ici indépendantes de t, c'est-à-dire $[\mathrm{d}x_0\ \mathrm{d}x_1\ \mathrm{d}t] \neq 0$, λ_{ij} sont des fonctions données de la variable t, telles que $\Delta \neq 0$. Si nous avons

(V,68) $$\begin{aligned} \mathscr{L}A_0 &= \lambda_{00}B_0 + \lambda_{10}B_1 + \lambda_{20}B_2\,, \\ \mathscr{L}A_1 &= \lambda_{01}B_0 + \lambda_{11}B_1 + \lambda_{21}B_2\,, \\ \mathscr{L}A_2 &= \lambda_{02}B_0 + \lambda_{12}B_1 + \lambda_{22}B_2\,, \end{aligned}$$

alors

(V,69) $$\mathscr{L}\mathscr{A} = \mathscr{B}\,.$$

Si t est fixe, $\mathscr{L}$ est une homographie transformant le plan R_3 dans le plan S_3; si t varie, $(\mathscr{L})$ est une correspondance entre deux espaces, composée de ∞^1 homographies planes $\mathscr{L}$. D'après (V,50) et (V,51) nous avons

(V,70) $$\left[\mathscr{A}\,\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial x_0}\,\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial x_1}\,\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial t}\right]\mathrm{d}t = \omega\,,$$
$$\left[\mathscr{B}\,\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial x_0}\,\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial x_1}\,\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}\right]\mathrm{d}t = \Delta y_2\omega\,.$$

Donc, l'homographie locale $\mathscr{H}$ de la correspondance $(\mathscr{L})$ pour une paire de points en correspondance $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$[6]) est déterminée par les équations

[6]) Voir E. Čech, Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами I; Чех. мат. журнал, *2* (77), 1952, 92—93.

$$\mathscr{H}\mathscr{A} = \mathscr{B}\,, \quad \mathscr{H}\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial x_0} = \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial x_0} - \frac{1}{4}\frac{\partial \log(\Delta y_2)}{\partial x_0}\mathscr{B}\,,$$
$$\mathscr{H}\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial x_1} - \frac{1}{4}\frac{\partial \log(\Delta y_2)}{\partial x_1}\mathscr{B}\,,$$
$$\mathscr{H}\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathscr{B}}{\partial t} - \frac{1}{4}\frac{\partial \log(\Delta y_2)}{\partial t}\mathscr{B}$$

de sorte que, d'après (V,68), on a

(V,71) $$\mathscr{H}A_0 = \mathscr{L}A_0 - \frac{1}{4}\frac{\lambda_{20}}{y_2}\mathscr{B}\,,$$
$$\mathscr{H}A_1 = \mathscr{L}A_1 - \frac{1}{4}\frac{\lambda_{21}}{y_2}\mathscr{B}\,,$$
$$\mathscr{H}A_2 = \mathscr{L}A_2 + \frac{1}{4}\frac{\lambda_{20}x_0 + \lambda_{21}x_1}{y_2}\mathscr{B}\,.$$

Pour que la part de l'homographie $\mathscr{H}$ qui concerne le plan $[A_0A_1A_2]$ soit indépendante de x_0, x_1, il faut et il suffit que l'on ait

(V,72) $$\lambda_{20} = \lambda_{21} = 0$$

ce qui signifie d'après (V,68) que *l'image de la droite $[A_0A_1]$ par l'homographie $\mathscr{L}$ est la droite $[B_0B_1]$*. Si c'est le cas, nous pouvons supposer

(V,73) $$\lambda_{22} = 1\,,$$

donc

(V,74) $$\Delta = \lambda_{00}\lambda_{11} - \lambda_{01}\lambda_{10}\,.$$

Les équations (V,71) se simplifient alors et deviennent

(V,75) $$\mathscr{H}A_0 = \mathscr{L}A_0\,, \quad \mathscr{H}A_1 = \mathscr{L}A_1\,, \quad \mathscr{H}A_2 = \mathscr{L}A_2\,;$$

on a en outre

(V,76) $$\omega\mathscr{H}A_3 = \xi_0B_0 + \xi_1B_1 + \xi_2B_2 + \omega B_3\,,$$

où

(V,77) $$\xi_2 = x_0\lambda_{10}\omega + x_1(\lambda_{11} - 1)\,\omega + \omega\lambda_{12} - \tfrac{1}{4}\Delta^{-1}\,\mathrm{d}\Delta\,;$$

nous n'écrirons pas pour l'instant les expressions pour ξ_0, ξ_1. *Pour que la part de l'homographie $\mathscr{H}$ qui concerne le faisceau de plans ayant $[A_0A_1]$ pour son axe soit indépendante de x_0, x_1, il faut et il suffit que ξ_2* soit indépendant de x_0, x_1, donc que l'on ait

(V,78) $$\lambda_{10} = 0\,, \quad \lambda_{11} = 1\,, \quad \text{donc} \quad \Delta = \lambda_{00}\,.$$

L'homographie (V,68) devient alors

(V,79) $$\mathscr{L}A_0 = \lambda_{00}B_0\,,$$
$$\mathscr{L}A_1 = \lambda_{01}B_0 + B_1\,,$$
$$\mathscr{L}A_2 = \lambda_{02}B_0 + \lambda_{12}B_1 + B_2$$

ce qui signifie que *l'image par l'homographie $\mathscr{L}$ du point A_0 est le point B_0 et que des droites du faisceau de centre A_0 dans le plan $[A_0A_1A_2]$ ou bien chacune ou bien la droite $[A_0A_1]$ seule a le même image par $\mathscr{L}$ que par K.* Dans l'équation (V,76) on a maintenant

$$\text{(V,80)} \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= (\lambda_{00} - 1)\, x_0\omega + x_1\{(\lambda_{01} - \lambda_{12})\, \omega - \tfrac{1}{4}\, \mathrm{d} \log \lambda_{00}\} + \\ &\quad + \mathrm{d}\lambda_{12} + (\lambda_{02} + 2v_2)\, \omega + \lambda_{12}(2\omega_0 - \tfrac{1}{4}\, \mathrm{dlog}\, \lambda_{00})\,, \\ \xi_2 &= \omega\lambda_{12} - \tfrac{1}{4}\, \mathrm{dlog}\, \lambda_{00}\,. \end{aligned}$$

Pour que la part de l'homographie $\mathscr{H}$ qui concerne l'ètoile de centre A_0 soit indèpendante de x_0, x_1, il faut et il suffit que ξ_1 soit indépendant de x_0, x_1, c'est-à-dire que l'on ait

$$\text{(V,81)} \qquad \lambda_{00} = 1\,, \quad \lambda_{01} = \lambda_{12}\,.$$

L'homographie (V,79) devient alors

$$\text{(V,82)} \qquad \begin{aligned} \mathscr{L}A_0 &= B_0\,, \\ \mathscr{L}A_1 &= \lambda_{01}B_0 + B_1\,, \\ \mathscr{L}A_2 &= \lambda_{02}B_0 + \lambda_{01}B_1 + B_2\,; \end{aligned}$$

cela signifie que *de tous les points du plan $[A_0A_1A_2]$ ou bien le point A_0 tout seul, ou bien les points de la droite $[A_0A_1]$ et eux seuls, ou bien tous les points de ce plan, ont la même image par $\mathscr{L}$ que par K; ensuite que de toutes les droites du faisceau de centre A_0 dans le plan $[A_0A_1A_2]$ ou bien chacune ou bien la droite $[A_0A_1]$ seule a la même image par $\mathscr{L}$ que par K.*

Il découle de (V,81) que nous avons dans l'équation (V,76)

$$\text{(V,83)} \qquad \begin{aligned} \xi_0 &= -\, x_0\lambda_{01}\omega + x_1(\mathrm{d}\lambda_{01} + 2\lambda_{01}\omega_0 - \lambda_{02}\omega + 3v_2\omega) + \\ &\quad + \mathrm{d}\lambda_{02} - \lambda_{01}\{\omega_1 + (u_1 - 3v_2)\, \omega\} + 4\lambda_{02}\omega_0 + 3v_1\omega\,, \\ \xi_1 &= \mathrm{d}\lambda_{01} + 2\lambda_{01}\omega_0 + (\omega_{02} + 2v_2)\, \omega\,, \\ \xi_2 &= \lambda_{01}\omega\,. \end{aligned}$$

Pour que l'homographie $\mathscr{H}$ soit complètement indèpendante de x_0, x_1, il faut et il suffit que l'on ait encore

$$\text{(V,84)} \qquad \lambda_{01} = 0\,, \quad \lambda_{02} = 3v_2\,;$$

(V,82) deviendra alors

$$\text{(V,85)} \qquad \mathscr{L}A_0 = B_0\,, \quad \mathscr{L}A_1 = B_1\,, \quad \mathscr{L}A_2 = 3v_2B_0 + B_2\,;$$

d'après (V,75), (V,76), (V,83) et (V,84) on aura

$$\text{(V,86)} \qquad \begin{aligned} \mathscr{H}A_0 &= \mathscr{L}A_0 = B_0\,, \\ \mathscr{H}A_1 &= \mathscr{L}A_1 = B_1\,, \\ \mathscr{H}A_2 &= \mathscr{L}A_2 = 3v_2B_0 + B_2\,, \\ \omega\mathscr{H}A_3 &= 3(\mathrm{d}v_2 + 4v_2\omega_0 + v_1\omega)\, B_0 + (5v_2B_1 + B_3)\, \omega\,. \end{aligned}$$

8. Demandons-nous d'une façon plus générale quand l'homographie $\mathscr{H}$ est indépendante de x_0, c'est-à-dire quelles sont les conditions pour que l'homographie $\mathscr{H}$

ne change pas, lorsque le point $\mathscr{A}$ (t étant fixe) se déplace suivant une droite (quelconque) passant par le point A_0. En vertu de (V,71) il faut d'abord que l'on ait

$$\lambda_{20} = 0 \,. \tag{V,87}$$

S'il en est ainsi, nous avons

$$\mathscr{H}A_0 = \mathscr{L}A_0\,, \quad \mathscr{H}A_1 = \mathscr{L}A_1 - \frac{1}{4}\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}}\mathscr{B}\,, \tag{V,88}$$
$$\mathscr{H}A_2 = \mathscr{L}A_2 + \frac{1}{4}\frac{\lambda_{21}x_1}{\lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}}\mathscr{B}\,,$$

$$\omega\mathscr{H}A_3 = \xi_0 B_0 + \xi_1 B_1 + \xi_2 B_2 + (\lambda_{21}x_1 + \lambda_{22})\,\omega B_3\,, \tag{V,89}$$
$$\xi_0 = x_0\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda_{21}\,.\,x_1 + \mathrm{d}\lambda_{22}}{\lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}} + \frac{\mathrm{d}\Delta}{\Delta}\right)\lambda_{00} + \mathrm{d}\lambda_{00} + \right.$$
$$\left. + 3\lambda_{10}(\omega_1 + v_2\omega) - \lambda_{01}\omega\right\} + \ldots\,,$$
$$\xi_1 = x_0\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda_{21}\,.\,x_1 + \mathrm{d}\lambda_{22}}{\lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}} + \frac{\mathrm{d}\Delta}{\Delta}\right)\lambda_{10} + \mathrm{d}\lambda_{10} + \right.$$
$$\left. + (\lambda_{00} - \lambda_{11})\,\omega + 2\lambda_{10}\omega_0\right\} + \ldots\,,$$
$$\xi_2 = x_0(\lambda_{10} - \lambda_{21})\,\omega + \ldots\,,$$

où les termes supprimés sont indépendants de x_0. Pour que $\mathscr{H}$ soit indépendante de x_0, il faut donc, et il suffit, que les coefficients de x_0 dans ξ_0, ξ_1, ξ_2 s'annulent pour tout x_1, donc avant tout que

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_{21}\,.\,x_1 + \mathrm{d}\lambda_{22}}{\lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}}$$

soit fonction de t seul, d'où il résulte $\lambda_{21} = c_1\varphi$, $\lambda_{22} = c_2\varphi$, où c_1, c_2 sont constantes et $\varphi = \varphi(t)$ est une fonction arbitraire. La condition cherchée peut donc être écrite sous la forme

$$\lambda_{10} = \lambda_{21} = c_1\varphi\,, \quad \lambda_{22} = c_2\varphi\,, \tag{V,90}$$

où c_1, c_2 sont constantes (qui ne s'annulent pas les deux à la fois), $\varphi = \varphi(t)$ étant une fonction arbitraire;

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\lambda_{00} - \tfrac{1}{4}(\mathrm{d}\log\varphi + \mathrm{d}\log\Delta)\,\lambda_{00} - \lambda_{01}\omega + 3\lambda_{10}(\omega_1 + v_2\omega) = 0\,,\\ &\mathrm{d}\lambda_{10} - \tfrac{1}{4}(\mathrm{d}\log\varphi + \mathrm{d}\log\Delta)\,\lambda_{10} + (\lambda_{00} - \lambda_{11})\,\omega - 2\lambda_{10}\omega_0 = 0\,. \end{aligned} \tag{V,91}$$

Pour la correspondance donnée existant entre les courbes duales R_3 et S_3 les valeurs λ_{ij} dépendent donc de quatre fonctions arbitraires d'une variable, dont trois seulement sont essentielles, car il est possible de supposer p. ex. $\Delta = 1$.

9. Les homographies (V,85) jouissent, comme nous l'avons trouvé plus haut, de la propriété que l'homographie locale $\mathscr{H}$ de la correspondance $(\mathscr{L})$ entre les espaces ne dépend pas de x_0, x_1 lorsque t est fixé; l'homographie $\mathscr{H}$ correspondante est donnée par les relations (V,86). Nous allons montrer une construction géométrique des projectivités (V, 85) et des homographies (V,86).

En vertu de la dernière des équations (V,52) nous pouvons poser

$$\text{(V,92)} \qquad \mathrm{d}v_2 + 4v_2\omega_0 = w\omega\,.$$

Par différentiation extérieure il en vient

$$\text{(V,93)} \qquad [\mathrm{d}w + 6w\omega_0 + 4v_2\omega_1\omega] = 0$$

de sorte que nous aurons

$$\text{(V,94)} \qquad \delta w = -\,6we_0 - 4v_2e_1\,.$$

Posons maintenant

$$\text{(V,95)} \qquad K^*A_0 = B_0\,,\quad K^*A_1 = B_1\,,\quad K^*A_2 = B_2 + 2v_2B_0\,,$$
$$K^*A_3 = (w + 2v_1)\,B_0 + 2v_2B_1 + B_3\,.$$

D'après (V,53), (V,54), (V,55) et (V,94) nous avons $\delta K^* = 0$, ce qui signifie que l'homographie K^* est invariante. Introduisons de nouveau le choix non-invariant (V,63). D'après (V,92) nous avons maintenant $w = v_2'$. Ensuite

$$(\varrho A_0)' = \varrho' A_0 + \varrho A_1\,,$$
$$(\varrho A_0)'' = \varrho'' A_0 + 2\varrho' A_1 + \varrho A_2\,,$$
$$(\varrho A_0)''' = (\varrho''' + \varrho u_2)\,A_0 + (3\varrho'' + \varrho u_1)\,A_1 + 3\varrho' A_2 + \varrho A_3\,,$$
$$(\varrho A_0)'''' = (\varrho'''' + \ldots)\,A_0 + (4\varrho''' + 4\varrho' u_1 + \varrho u_1' + 2\varrho u_2)\,A_1 + (6\varrho'' + 2\varrho u_1)\,A_2 + $$
$$+\,4\varrho' A_3\,.$$

Si nous comparons cela aux expressions pour B_0, B_0', B_0'', B_0''' déduites déjà plus tôt, nous trouvons que pour un choix convenable de ϱ'''' et pour

$$\varrho = 1\,,\quad \varrho' = 0\,,\quad \varrho'' = v_2\,,\quad \varrho''' = 2v_2' + v_1$$

nous avons (t étant fixe)

$$K^*(\varrho A_0) = B_0\,,\quad K^*(\varrho A_0)' = B_0'\,,\quad K^*(\varrho A_0)'' = B_0''\,,\quad K^*(\varrho A_0)''' = B_0'''\,,$$
$$K^*(\varrho A_0)'''' = B_0''''\,,$$

c'est-à-dire que *l'homographie K^* réalise un contact analytique du quatrième ordre entre les courbes* (A_0), (B_0). A l'aide de (V,56), (V,85) et (V,95) nous trouvons que le birraport

$$\text{(V,96)} \qquad (K\mathscr{A},\, B_0,\, K^*\mathscr{A},\, \mathscr{L}\mathscr{A}) = \tfrac{2}{3}\,,$$

ce qui détermine la construction de la projectivité $\mathscr{L}$ à l'aide des homographies K et K^*.

Considérons ensuite le système $\mathscr{H} = \mathscr{H}(t)$ d'homographies (V,86). Chacune d'entre elles transforme le plan $[A_0A_1A_2]$ dans le plan $[B_0B_1B_2]$ (les deux plans correspondent à la même valeur du paramètre t) dans la même homographie que $\mathscr{L}$

figurant dans (V,85). La correspondance existant entre les deux espaces est l'enveloppe du système monoparamétrique d'homographies $\mathscr{H}(t)$ si et seulement si[7])

$$[\mathscr{H}X, \mathrm{d}\mathscr{H} \,.\, X] = 0 \tag{V,97}$$

pour tout point X du plan $[A_0A_1A_2]$. On a même, comme le montre un calcul direct suivant (V,86),

$$\mathrm{d}\mathscr{H} \,.\, A_0 = \mathrm{d}\mathscr{H} \,.\, A_1 = \mathrm{d}\mathscr{H} \,.\, A_2 = 0\,. \tag{V,98}$$

Cela donne l'interprétation des homographies $\mathscr{H}$.

*

VI. CLASSE DIFFÉRENTIELLE DES COURBES CERCLE OSCULATEUR ET SPHÈRE OSCULATRICE

Le travail contient les démonstrations des théorèmes de l'article paru sous le même titre dans Bul. Inst. Pol. din Iasi *5* (*9*), 1959, 1–4. Nous supposons que le Lecteur connait le travail Détermination du type différentiel d'une courbe de l'espace à deux, trois ou quatre dimensions (Czechoslovak Math. Journal, *7* (*82*), 1957, 599–631) du moins pour $n = 3$.

1. Dans l'espace euclidien à trois dimensions soit donnée une courbe $C : X = X(t)$. Son cercle osculateur $g(t)$ est situé dans le plan osculateur $T_2(t)$, son rayon est $\varrho = 1/k_1$; le cercle a pour centre le point

$$m = X + \varrho e_2 \tag{VI,1}$$

pour lequel on a d'une façon évidente

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\sigma_2} = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\sigma_2}\, e_2 + \varrho e_3\,. \tag{VI,2}$$

Nous définissons la classe différentielle du cercle osculateur comme le nombre

$$\mathrm{cl}\; g(t) = \min\,(\mathrm{cl}\; T_2(t), \mathrm{cl}\; \mathrm{m}(t), \mathrm{cl}\; k_1(t))\,. \tag{VI,3}$$

Dans ce qui va suivre, on déterminera les nombres cl $g(s)$, cl $g(\sigma_1)$, cl $g(\sigma_2)$ et max cl $g(t)$ (le maximum étant pris par rapport à tous les paramètres réguliers t). Pour la courbe C, les cas suivants sont possibles (voir Dét., (4·4)–(4·9)):

Le cas $A(r)$, $B(r)$, $C_1(r)$ et $D_1(r)$. On a cl $k_1(s) =$ cl $k_1(\sigma_i) = r$ de sorte que cl $m(s) =$ cl $m(\sigma_i) = r$. D'où cl $g(s) =$ cl $g(\sigma_i) = r$. Supposons que pour un certain paramètre t nous ayons cl $g(t) \geqq r + 1$, alors cl $T_2(t) \geqq r + 1$; en vertu de cl $T_2(\sigma_2) \geqq r + 2$, il ne résulte cl $t(\sigma_2) \geqq r + 1$ et cl $g(\sigma_2) \geqq r + 1$, ce qui n'est pas possible. On a donc max cl $g(t) = r$.

[7]) Voir E. Čech, Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами II, § 24, Чех. мат. журнал, *2* (*77*), 1952, 109–123 et V, § 4, Чех. мат. журнал *2* (*77*), 1952, 167–188.

Le cas $C_2(r)$ et $D_2(r)$. Soit d'abord cl $k_1(\sigma_2) = r + 1$, c'est-à-dire cl $\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}\sigma_2 = r$ et cl $\mathrm{d}m/\mathrm{d}\sigma_2 = r$. Vu que cl $T_2(\sigma_2) = r + 2$, on a cl $g(\sigma_2) = r + 1$. Evidemment cl $g(s) \geqq r + 1$, cl $g(\sigma_1) \geqq r + 1$. Tout comme ci-dessus, on montre que cl $g(t) \leqq r + 1$ pour tout paramètre t, de sorte que cl $g(s) =$ cl $g(\sigma_1) = \max$ cl $g(t) = r + 1$. Soit ensuite cl $k_1(\sigma_2) \geqq r + 2$. Alors on a cl $m(\sigma_2) \geqq r + 2$, cl $T_2(\sigma_2) = r + 2$, donc cl $g(\sigma_2) = r + 2$. De cl $T_2(t) \leqq$ cl $T_2(\sigma_2)$ il résulte max cl $g(t) = r + 2$. Vu que cl $T_2(s) =$ cl $T_2(\sigma_1) = r + 1$ on a également cl $g(s) =$ cl $g(\sigma_1) = r + 1$.

2. Passons maintenant à l'étude de la classe différentielle des sphères osculatrices h de rayon R et de centre p, donc du nombre

(VI,4) $$\mathrm{cl}\, h = \min(\mathrm{cl}\, p, \mathrm{cl}\, R)\,.$$

Nous avons

(VI,5) $$R^2 = \varrho^2\left[1 + \left(\frac{\mathrm{dlog}\, k_1}{\mathrm{d}\sigma_2}\right)^2\right] = \varrho^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\sigma_2}\right)^2,$$

(VI,6) $$p = X + \varrho e_2 + \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\sigma_2} e_3\,,$$

(VI,7) $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\sigma_2} = \left(\varrho + \frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}\sigma_2^2}\right) e_3\,.$$

Si C est une courbe sphérique, on a bien entendu, cl $h = \infty$. Si C n'est pas sphérique, mais $k_1 =$ const., nous pouvons supposer sans restreindre la généralité de nos raisonnements que $k_1 = R = 1$ de sorte que

(VI,8) $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\sigma_2} = e_3\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}\sigma_2} = -\,e_2\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}\sigma_2} = e_3 - \frac{1}{k_2} e_1\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}\sigma_2} = \frac{1}{k_2} e_2$$

et le point p décrit une courbe régulière (p), qui a l'arc σ_2, première courbure -1 et seconde courbure $-1/k_2$. On a évidemment cl $h(\sigma_2) =$ cl $p(\sigma_2) =$ cl $k_2(\sigma_2) + 3 = r + 3$, car pour la courbe (p), c'est le cas $D_2(\mathrm{cl}\, k_2(\sigma_2))$ qui se réalise. Pour tout t nous avons, bien entendu, cl $h(t) \leqq$ cl $h(\sigma_2)$, de sorte que max cl $h(t) = r + 3$. Il découle de (VI,6) que l'on a $\mathrm{d}p/\mathrm{d}s = k_2(s)\, e_3$, $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\sigma_1 = k_2(\sigma_1)\, e_3$, et comme cl $k_2(s) =$ cl $k_2(\sigma_1) = r$, nous avons aussi cl $p(s) =$ cl $p(\sigma_1) = r + 1$, et enfin cl $h(s) =$ cl $h(\sigma_1) = r + 1$.

Passons enfin au cas de $k_1 \neq$ const. Pour la courbe (p) nous avons

(VI,9) $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\sigma_2} = \left(\varrho + \frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}\sigma_2^2}\right) e_3\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}\sigma_2} = -\,e_2\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}\sigma_2} = e_3 - \frac{k_1}{k_2} e_1\,, \quad \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}\sigma_2} = \frac{k_1}{k_2} e_3$$

de sorte que la courbe (p) a l'arc et la première et la seconde courbure déterminés par les expressions (toutes les expressions associées à (p) sont marquées par un astérisque):

$$s^* = \int\left(\varrho + \frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}\sigma_2^2}\right)\mathrm{d}\sigma_2\,, \quad k_1^* = -\left(\varrho + \frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}\sigma_2^2}\right)^{-1}, \quad k = -\frac{k_1}{k_2}\left(\varrho + \frac{\mathrm{d}^2\varrho}{\mathrm{d}\sigma_2^2}\right)^{-1}.$$

Nous avonc donc

$$\text{(VI,10)} \qquad \mathrm{cl}\, k_1^*(\sigma_2) = \mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) - 2\,, \quad \mathrm{cl}\, s^*(\sigma_2) = \mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) - 1\,,$$
$$\mathrm{cl}\, \frac{k_1^*(\sigma_2)}{k_2^*(\sigma_2)} = \mathrm{cl}\, \frac{k_1(\sigma_2)}{k_2(\sigma_2)}\,.$$

Le paramètre σ_2 est manifestement l'arc de l'indicatrice sphérique des tangentes à la courbe (p), c'est-à-dire $\sigma_1^* = \sigma_2$.

Soit d'abord $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) = \infty$. Si nous ne considérons pas le cas banal de $\mathrm{cl}\, k_2(\sigma_2) = \infty$, nous avons $\mathrm{cl}\, k_1^*(\sigma_2) = \mathrm{cl}\, s^*(\sigma_2) = \infty$, $\mathrm{cl}\, k_2^*(\sigma_2) = \mathrm{cl}\, k_2(\sigma_2) = r$; et puis $\mathrm{cl}\, R(\sigma_2) = \infty$. Nous avons donc $\mathrm{cl}\, k_1^*(s^*) = \infty$, $\mathrm{cl}\, k_2^*(s^*) = r$ et pour la courbe (p) le cas $D_2(r)$ a lieu, donc $\mathrm{cl}\, p(s^*) = r + 3$, $\mathrm{cl}\, p(t) \leqq r + 3$ pour tout t. Mais on a $\mathrm{cl}\, p(s^*) = \mathrm{cl}\, p(\sigma_2) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_2)$. Ensuite

$$\mathrm{cl}\, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\sigma_2} = \mathrm{cl}\, \frac{1}{k_2(\sigma_2)} = r\,, \quad \mathrm{cl}\, \frac{\mathrm{d}\sigma_1}{\mathrm{d}\sigma_2} = \mathrm{cl}\, \frac{k_1(\sigma_2)}{k_2(\sigma_2)} = r$$

de sorte que $\mathrm{cl}\, p(s) = \mathrm{cl}\, p(\sigma_1) = \mathrm{cl}\, h(s) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_1) = r + 1$.

3. Il nous reste donc le cas de $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) < \infty$. Soit d'abord

$$\text{(VI,11)} \qquad \mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) = r_1 \geqq 2\,, \quad \mathrm{cl}\, k_2(\sigma_2) \geqq r_1 - 1\,.$$

Alors nous avons en vertu de (VI,10)

$$\text{(VI,12)} \quad \mathrm{cl}\, k_1^*(\sigma_2) = r_1 - 2\,, \quad \mathrm{cl}\, \frac{k_1^*(\sigma_2)}{k_1^*(\sigma_2)} \geqq r_1 - 1\,, \quad \mathrm{cl}\, k_2^*(\sigma_2) = r_1 - 2$$

et puis $\mathrm{cl}\, R(\sigma_2) = r_1 - 1$. Si c'est le cas de

$$\text{(VI,13)} \qquad \mathrm{cl}\, \frac{k_1(\sigma_2)}{k_2(\sigma_2)} \geqq r$$

qui a lieu, c'est-à-dire si l'on a (en posant $r_1 = r, \sigma_2 = \sigma_1^*$)

$$\mathrm{cl}\, k_1^*(\sigma_1^*) = \mathrm{cl}\, k_2^*(\sigma_1^*) = r - 2\,, \quad \mathrm{cl}\, \frac{k_1^*(\sigma_1^*)}{k_2^*(\sigma_1^*)} \geqq r\,,$$

alors pour la courbe (p) nous avons le cas $D_1(r - 2)$. Nous avons donc $\mathrm{cl}\, p(\sigma_1^*) = \mathrm{cl}\, p(\sigma_2) = r - 1$ et $\mathrm{cl}\, h(\sigma_2) = r - 1$, car $\mathrm{cl}\, R(\sigma_2) = r - 1$. Comme il s'ensuit de nos hypothèses que nous avons $\mathrm{cl}\, \sigma_2(s) \geqq r$, $\mathrm{cl}\, \sigma_2(\sigma_1) \geqq r + 1$, nous avons aussi $\mathrm{cl}\, h(s) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_1) = r - 1$. Montrons enfin que $\max \mathrm{cl}\, h(t) = r$; il suffit pour cela de faire voir que $\mathrm{cl}\, h(s^*) = r$. Comme c'est le cas $D_1(r - 2)$ qui a lieu pour (p), nous avons $\mathrm{cl}\, p(s^*) = r$, nous voyons donc seulement que $\mathrm{cl}\, R^2(s^*) \geqq r$. On a

$$\text{(VI,14)} \qquad \frac{\mathrm{d}(R^2)}{\mathrm{d}s^*} = \frac{\mathrm{d}(R^2)}{\mathrm{d}\sigma_2}\frac{\mathrm{d}\sigma_2}{\mathrm{d}s^*} = 2\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\sigma_2}\,.$$

Comme $\mathrm{cl}\, s^*(\sigma_2) = r - 1$ et d'après (VI,11) aussi $\mathrm{cl}\, \mathrm{d}\varrho(\sigma_2)/\mathrm{d}\sigma_2 = r - 1$, on a $\mathrm{cl}\, \mathrm{d}(R^2)/\mathrm{d}s^* \geqq r - 1$, c. q. f. d.

Si (VI,11) a lieu et que le cas (VI,13) ne se réalise pas, nous avons

(VI,15) $$\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) = r + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, k_2(\sigma_2) = r\,.$$

Alors en vertu de (VI,10) nous avons

$$\mathrm{cl}\, k_1^*(\sigma_1^*) = r - 1\,, \quad \mathrm{cl}\, k_2^*(\sigma_1^*) = r - 1\,, \quad \mathrm{cl}\, \frac{k_1^*(\sigma_1^*)}{k_2^*(\sigma_1^*)} = r$$

et $\mathrm{cl}\, R(\sigma_2) = r$. Pour la courbe (p) nous avons le cas $C_1(r-1)$, donc $\mathrm{cl}\, p(s^*) = r + 1$, $\mathrm{cl}\, p(\sigma_2) = r$. Il s'en ensuit $\mathrm{cl}\, h(\sigma_2) = r$, et enfin $\mathrm{cl}\, h(s) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_1) = r$. Nous avons $\mathrm{cl}\, \mathrm{d}\varrho(\sigma_2)/\mathrm{d}\sigma_2 = r$, $\mathrm{cl}\, s^*(\sigma_2) = r$ de sorte que compte tenu de (VI,14), $\mathrm{cl}\, \mathrm{d}(R^2)/\mathrm{d}s^* \geqq r$ et enfin $\mathrm{cl}\, h(s^*) = \max \mathrm{cl}\, h(t) = r + 1$. Cela achève l'analyse du cas (VI,11).

4. Considérons le cas où

(VI,16) $$\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) \geqq r + 3\,, \quad \mathrm{cl}\, k_2(\sigma_2) = r\,.$$

Alors nous avons

(VI,17) $$\mathrm{cl}\, k_1^*(\sigma_1^*) \geqq r + 1\,, \quad \mathrm{cl}\, k_2^*(\sigma_1^*) = r\,.$$

Pour la courbe (p), nous avons ou bien le cas $C_2(r)$ si $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) = r + 3$, ou bien le cas $D_2(r)$ si $\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) \geqq r + 4$. Dans le premier cas, nous avons $\mathrm{cl}\, p(\sigma_2) = r + 2$ et $\mathrm{cl}\, R(\sigma_2) = r + 2$; dans le deuxième cas, nous avons $\mathrm{cl}\, p(\sigma_2) = r + 3$ et $\mathrm{cl}\, R(\sigma_2) \geqq r + 3$. Donc, dans le premier cas, $\mathrm{cl}\, h(\sigma_2) = r + 2$, dans le deuxième $\mathrm{cl}\, h(\sigma_2) = r + 3$. De plus, $\mathrm{cl}\, s(\sigma_2) = \mathrm{cl}\, \sigma_1(\sigma_2) = r + 1$, de sorte que dans les deux cas $\mathrm{cl}\, h(s) = \mathrm{cl}\, h(\sigma_1) = r + 1$. Dans les deux cas, nous avons $\mathrm{cl}\, p(s^*) = r + 3$, dans le deuxième cas, nous avons en outre $\mathrm{cl}\, h(s^*) = r + 3$. Or, dans le premier cas, $\mathrm{cl}\, \mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}\sigma_2 = r + 2$, $\mathrm{cl}\, s^*(\sigma_2) = r + 2$, donc, compte tenu de (VI,14), $\mathrm{cl}\, \mathrm{d}(R^2)/\mathrm{d}s^* \geqq r + 2$. Dans les deux cas nous avons enfin $\max \mathrm{cl}\, h(t) = r + 3$.

Reste donc à étudier le cas où

(VI,18) $$\mathrm{cl}\, k_1(\sigma_2) = r + 2\,, \quad \mathrm{cl}\, k_2(\sigma_2) = r\,,$$

nous avons alors

(VI,19) $$\mathrm{cl}\, k_1^*(\sigma_1^*) = r\,, \quad \mathrm{cl}\, k_2^*(\sigma_1^*) \geqq r\,, \quad \mathrm{cl}\, \frac{k_1^*(\sigma_1^*)}{k_2^*(\sigma_1^*)} = r\,.$$

Pour la courbe (p), c'est le cas $A(r)$ qui a lieu (si $\mathrm{cl}\, k_2^*(\sigma_2) = r$), ou bien le cas $B(r)$, (si $\mathrm{cl}\, k_2^*(\sigma_2) \geqq r + 1$). Dans les deux cas $\mathrm{cl}\, p(\sigma_2) = r + 1$, $\mathrm{cl}\, R(\sigma_2) = r + 1$, donc $\mathrm{cl}\, h(\sigma_2) = r + 1$. Ensuite, nous avons $\mathrm{cl}\, p(s^*) = r + 2$, $\mathrm{cl}\, s^*(\sigma_2) = r + 1$, $\mathrm{cl}\, \mathrm{d}\varrho(\sigma_2)/\mathrm{d}\sigma_2 = r + 1$, de sorte que, en vertu de (VI,14), on a $\mathrm{cl}\, R^2(s^*) \geqq r + 2$, et en somme $\mathrm{cl}\, h(s^*) = \max \mathrm{cl}\, h(t) = r + 2$. Ensuite, $\mathrm{cl}\, \sigma_2(\sigma_1) = r + 1$, $\mathrm{cl}\, s(\sigma_1) \geqq r + 2$. Dans le cas $A(r)$, on a $\mathrm{cl}\, p(\sigma_1) = \mathrm{cl}\, p(\sigma_2^*) = r + 1$, $\mathrm{cl}\, h(\sigma_1) = \mathrm{cl}\, h(s) = r + 1$. Dans le cas $B(r)$, on a $\mathrm{cl}\, p(\sigma_1) = \mathrm{cl}\, p(\sigma_2^*) = r + 2$; en vertu de l'égalité $\mathrm{cl}\, h(s^*) = r + 2$ démontrée ci-dessus, nous avons $\mathrm{cl}\, \sigma_1(s^*) \geqq r + 2$, donc $\mathrm{cl}\, R^2(\sigma_1) \geqq$

$\geqq r + 2$ et enfin cl $h(\sigma_1) =$ cl $h(s) = r + 2$. Comme nous avons cl $k_1(\sigma_2) = r + 2$, la condition cl $k_2^*(\sigma_2) \geqq r + 1$ est équivalente à

$$\mathrm{cl}\, f(\sigma_2) \geqq r + 1 \quad \text{où} \quad f(\sigma_2) = k_2(\sigma_2)\left[\varrho(\sigma_2) + \frac{\mathrm{d}^2\varrho(\sigma_2)}{\mathrm{d}\sigma_2^2}\right].$$

Dans l'article publié dans Bull. Inst. Politech. Iasi, il faut écrire $f(\sigma_2)$ – mentionné ci-dessus – au lieu de

$$f(\sigma_2) = k_2(\sigma_2)\left[1 + \varrho(\sigma_2) + \frac{\mathrm{d}^2\varrho(\sigma_2)}{\mathrm{d}\sigma_2^2}\right].$$

Резюме

НЕКОТОРЫЕ РАБОТЫ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ЭДУАРД ЧЕХ (Eduard Čech) и АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

В наследстве академика Эдуарда Чеха был найден ряд рукописей и вычислений, относящихся к дифференциальной геометрии. Большею частью оно содержит лишь вычисления без связующего текста или неполные и незаконченные работы. Из остальной части, которая потребовала значительной стилистической обработки, А. Швец подготовил к публикации шесть работ с соответствующими резюме.

I. ПОЛОСЫ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть в аффинном пространстве A_{n+1} дана гиперповерхность P (I.1). Если ее касательная гиперплоскость имеет вид (I.4) и если образовать выражения (I.6), (I.9), то ковектор (I.12) и вектор X, определенный уравнениями (I.15), будут инвариантны. Пусть знак ε дан уравнением (I.11); допустим, что $\varepsilon = 1$ для четного n.

Пусть в A_{n+1} даны две гиперповерхности P, P', имеющие общее $(n-1)$-мерное многообразие Q. Пусть Q – асимптотически неособое многообразие на P, т. е. форма $\eta \,.\, d^2x$ является на Q неособой. Справедливо утверждение: Гиперповерхности P и P' имеют вдоль Q соприкосновение второго (соотв. третьего) порядка, если и только если $\varepsilon = \varepsilon'$, $\zeta = \zeta'$ (соотв. $\varepsilon = \varepsilon'$, $\zeta = \zeta'$, $X = X'$) вдоль Q. В общем случае достаточно для соприкосновения третьего порядка предположить лишь $\varepsilon = \varepsilon'$, $X = X'$. Далее характеризуется случай, когда последнее утверждение не имеет места, и исследуется касание вдоль асимптотически особого многообразия Q.

*

II. КВАДРИКИ ЛИ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТИ

В S_3, соответственно в S'_3, даны поверхности (x), (y), находящиеся в асимптотическом соответствии C. Геометрически определяется единственная касательная коллинеация $K_1: S_3 \to S'_3$, которая — в предположении (II.9) — определяется соотношениями (II.10). Если поверхность (y) является дуализацией поверхности (x), то эта коллинеация становится поляритетом относительно квадрики Ли.

*

III. СПЕЦИАЛЬНОЕ ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ АНГОЛОНОМНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Доказывается несуществование соответствия C между двумя трехмерными проективными пространствами S_3 и S'_3 следующего типа: Для каждой пары соответствующих друг другу точек A и A' можно найти касательную коллинеацию $K: S_3 \to S'_3$ соответствия C так, что в пучке A существует плоскость α с тем свойством, что каждая прямая, проходящая через точку A и лежащая в α, является K-главной прямой и что K-линеаризующая прямая каждой другой прямой, проходящей через точку A лежит в α; соответствие $A \to \alpha$ образует в S_3 анголономную поверхность.

*

V. ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КОНГРУЭНЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ КРИВОЙ

Пусть L — параболическая прямолинейная конгруэнция с направляющей кривой в проективном пространстве S_3, являющаяся таким образом системой ∞^1 связок прямых (A, E) с центром A и плоскостью E. Пусть мы имеем, помимо конгруэнции L, дальнейшую конгруэнцию L'; пусть эти две конгруэнции связаны проективным изгибанием T (T сопоставляет каждому лучу конгруэнции L луч конгруэнции L'). Изгибанием T индуцируется некоторое соответствие t между связками, образующими эти две конгруэнции (лучи соответственных связок находятся в проективном соответствии), а, следовательно, и между кривыми (A) и (A'). Пусть, наоборот, даны две конгруэнции L и L' и некоторое соответствие t между кривыми (A), (A'); возникает вопрос, можно ли надлежащим подбором проективных соответствий между соответственными связками (A, E), $(A', E') \equiv (tA, tE)$ расширить t на проективное изгибание T конгруэнций L и L'.

1. Исследуем прежде всего случай, когда (A) не является прямой, (E) не является связкой плоскостей, а плоскости E — касательные (но не сорпикасающиеся) плоскости кривой (A). Тогда каждое соответствие t можно расширить на проективное изгибание, причем проективное соответствие между прямыми соответственных связок (A, E), (A', E') подчиняется лишь тому условию, чтобы друг другу соответствовали только касательные к кривым (A), (A') и характеристики систем плоскостей $(E), (E')$. Для каждой пары соответственных прямых существует ∞^1 соприкасающихся коллинеаций.

Решение будет более сложным, если потребовать, чтобы для каждой пары соответственных связок (A, E), (A', E') существовала одна единственная коллинеация H, являющаяся для всех пар соответственных прямых этих связок соприкасающейся коллинеацией. В этом случае для данной кривой (A) можно найти — со свободой выбора двух функций одного переменного — кривую (A') и соответствие t между ними, допускающее расширение требуемого рода. Если выбрать t согласно требованиям, то T зависит еще от одного постоянного. Геометрическая характеризация таких t состоит в том, что соприкасающаяся коллинеация H осуществляет аналитическое касание не только соответствий $A \to A'$, $E \to E'$, но и $\alpha \to \alpha'$, $B \to B'$, где α — соприкасающаяся плоскость кривой (A), а точка B лежит в двойственном пространстве, проходящем через соприкасающуюся плоскость кривой (E).

Аналогично исследуются и случаи совпадения коллинеаций, осуществляющих точечное и плоскостное изгибание этих двух конгруэнций, с соприкасающейся коллинеацией.

2. Рассмотрим далее случай, когда (A) не является прямой, но (E) образована ее соприкасающимися плоскостями. Наиболее общее проективное изгибание конгруэнции этого типа мы получим так, что исходя из двух произвольных кривых (A), (A'), связанных соответствием t, мы поставим в проективное соответствие лучи конгруэнций, лежащие в соответственных соприкасающихся плоскостях; это проективное соответствие должно перевести касательную к кривой (A) в касательную к кривой (A'). Для каждой пары соответственных прямых существует ∞^1 соприкасающихся коллинеаций.

3. В случае, когда (A) — прямая, для данного соответствия t между (A), (A') в явном виде найдено расширение T, являющееся проективным изгибанием конгруэнций L, L'. Для каждой пары соответственных прямых существует ∞^1 соприкасающихся коллинеаций. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы существовала коллинеация, являющаяся соприкасающейся одновременно для всех прямых двух соответственных связок, имеет вид: сумма проективных линейных элементов соответствий $A \to A'$, $E \to E'$ равна нулю.

*

V. ПРОЕКТИВНАЯ НОРМАЛИЗАЦИЯ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ДВОЙСТВЕННЫМИ КРИВЫМИ

Пусть в проективном трехмерном пространстве P_3, соотв. $\bar{P}_3$, дана двойственная кривая γ, соотв. $\bar{\gamma}$; под двойственной кривой мы подразумеваем однопараметрическое семейство плоскостей. Пусть эти две кривые связаны соответствием C. С обеими кривыми можно соединить реперы так, что если γ образована соприкасающимися плоскостями R_3 кривой (A_0) (аналогично и для $\bar{\gamma}$), то справедливы уравнения (V.50), (V.51), (V.60), (V.61) после выполнения нормализации четвертого порядка. Коллинеация (V.62) осуществляет аналитическое касание четвертого порядка между кривыми $\gamma(R_3)$ и $\bar{\gamma}(S_3)$, а между кривыми (A_0), (B_0) – аналитическое касание второго порядка, в случае же $v_2 = 0$ (соотв. $v_1 = v_2 = 0$) – аналитическое касание третьего (соотв. четвертого) порядка.

Соответствие между γ и $\bar{\gamma}$ мы расширим на соответствие (L) между пространствами P_3 и $\bar{P}'_3$ так, что между каждой парой соответственных плоскостей R_3, R'_3 мы выберем коллинеацию $\mathscr{L}$ (V.68). Локальная коллинеация $\mathscr{H}$ соответствия (L) для пары соответственных точек (V.64), (V.65) имеет вид (V.71). Для того, чтобы та часть коллинеации $\mathscr{H}$, которая относится (α) к соприкасающейся плоскости кривой (A_0), (β) к связке плоскостей с осью в касательной к кривой (A_0), (γ) к торсу с центром в A_0, была независимой от положения точки A, необходимо и достаточно, (α) чтобы образом касательной к кривой (A_0) в $\mathscr{L}$ была касательная к кривой (B_0), (β) чтобы было $\mathscr{L}A_0 = B_0$ и чтобы из связки прямых (A_0, R_3) имела при $\mathscr{L}$ тот же образ, как и при K, или каждая прямая или только касательная к кривой (A_0), (γ) чтобы из всех точек плоскости R_3 имела при $\mathscr{L}$ тот же образ как и при K, или только одна точка A_0 или каждая точка из R_3, далее, чтобы из всех прямых связки (A_0, R_3) имела при $\mathscr{L}$ тот же образ, как и при K, или каждая прямая или только касательная к (A_0).

Если же вся $\mathscr{H}$ не зависит от A, то получаем (V.85) и (V.86). Пусть K^* – коллинеация, осуществляющая аналитическое касание четвертого порядка кривых (A_0), (B_0); тогда коллинеацию $\mathscr{L}$ мы построим при помощи соотношения (V.96). Соответствие (L) является огибающей однопараметрического семейства $(\mathscr{H})$ соответствующих локальных коллинеаций.

*

VI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС КРИВЫХ. СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ОКРУЖНОСТЬ И СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ СФЕРА

Работа содержит доказательство утверждений из одноименной статьи в *Bul. Inst. Pol. din Iași*, 5 (9) 1959, 1–4. На странице 2 нужно читать

$$f(\sigma_2) = k_2(\sigma_2)\left[\varrho(\sigma_2) + \frac{\mathrm{d}^2\varrho(\sigma_2)}{\mathrm{d}\sigma_2^2}\right]$$

вместо

$$f(\sigma_2) = k_2(\sigma_2)\left[1 + \varrho(\sigma_2) + \frac{\mathrm{d}^2\varrho(\sigma_2)}{\mathrm{d}\sigma_2^2}\right].$$