Czechoslovak Mathematical Journal

Ladislav Procházka

О $p$-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 12 (1962), No. 1, 3–9,10–43

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100496`

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

# О $p$-РАНГЕ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

(Поступило в редакцию 3/V 1959 г.)

С помощью теории Мальцева (см. [1]) в этой статье сформулировано теоретико-групповое определение $p$-ранга абелевой группы без кручения конечного ранга, и непосредственно из этого определения выведены основные свойства $p$-ранга. Кроме того, здесь определен еще другой инвариант группы без кручения конечного ранга (также зависящий от простого числа $p$), описывающий некоторые структурные свойства такой группы, и одновременно найдена его связь с теорией Мальцева.

Словом группа будем всюду в этой статье разуметь аддитивно записанную абелеву группу с нулевым элементом $0$. Если $G$ — некоторая периодическая группа, то символом $G^{(p)}$ будем обозначать $p$-примарное слагаемое группы $G$. Для обозначения конечной циклической группы порядка $p^k$, или полной $p$-примарной группы Прюфера мы будем пользоваться соответственно знаками $\mathscr{C}(p^k)$ и $\mathscr{C}(p^\infty)$; порядок элемента $g$ будем обозначать через $O(g)$. В заключение отметим, что $\sum_{\iota \in I} {}_d G_\iota$ (соотв. $G_1 \dotplus G_2 \dotplus \ldots \dotplus G_n$) будет всегда обозначать прямую сумму групп $G_\iota$ $(\iota \in I)$ (соотв. $G_1, G_2, \ldots, G_n$). Если $G$ — некоторая операторная группа с областью операторов $\Phi$, если $\Omega$ — некоторое непустое подмножество множества $\Phi$, и $H$ — произвольный непустой комплекс элементов из $G$, то положим

$$\Omega H = E(g; g \in G, g = \omega h, \omega \in \Omega, h \in H) .$$

**1.** В этом отделе мы определим некоторые основные понятия, которыми будем в дальнейшем постоянно пользоваться. Притом все эти определения и утверждения можно без исключения найти в статье А. Мальцева [1].

Если $p$ — некоторое простое (положительное) число, то $p$-числами будем называть бесконечные последовательности $\mathfrak{a} = (a^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ целых (рациональных) чисел, когда между ними определены равенство, сумма и произведение следующим образом: Если $\mathfrak{a} = (a^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ и $\mathfrak{b} = (b^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ — две такие последовательности, то полагаем

1. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \Leftrightarrow a^{(\alpha)} \equiv b^{(\alpha)} \pmod{p^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$,

2. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \left(a^{(\alpha)} + b^{(\alpha)}\right)_{\alpha=1}^{\infty}$, 3. $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b} = \left(a^{(\alpha)} \,.\, b^{(\alpha)}\right)_{\alpha=1}^{\infty}$.

Множество всех $p$-чисел с только что определенными операциями является кольцом, которое мы будем обозначать символом $\Omega_p$. Элементы кольца $\Omega_p$ мы будем большой частью обозначать маленькими готическими буквами $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{i}$, …, или иногда также $\mathfrak{a}(p)$, $\mathfrak{b}(p)$, $\mathfrak{i}(p)$, …, для обозначения их зависимости от простого числа $p$.

Из определения алгебраических операций в кольце $\Omega_p$ непосредственно видно, что каждое $p$-число вида $\mathfrak{a} = (a, a, a, \ldots)$ можно отождествить с целым рациональным числом $a$. Итак, можно предполагать, что кольцо $\Omega_p$ содержит в качестве подкольца область целостности целых рациональных чисел. Тогда вместо $p$-числа $\mathfrak{a} = (a, a, a, \ldots)$ будем просто писать $a$.

Как хорошо известно, каждое целое $p$-адическое число можно представить в виде бесконечной последовательности целых рациональных чисел $\left(a^{(\alpha)}\right)_{\alpha=1}^{\infty}$, где числа $a^{(\alpha)}$ удовлетворяют соотношениям

$$(1{,}1) \qquad a^{(\alpha)} \equiv a^{(\alpha+1)} \pmod{p^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots),$$

или, в виде некоторого элемента $\mathfrak{a}$ из $\Omega_p$. Притом равенству, сумме и произведению целых $p$-адических чисел соответствует только что определенное равенство, сумма и произведение в кольце $\Omega_p$; итак, область целостности целых $p$-адических чисел $\mathfrak{J}_p$ можно считать подкольцом кольца всех $p$-чисел $\Omega_p$.

Еще отметим, что если $\mathfrak{a}$ – некоторое целое $p$-адическое число, то символу $\mathfrak{a}$ будем присуждать различные значения. Во-первых, символ $\mathfrak{a}$ будет представлять некоторую последовательность $\left(a^{(\alpha)}\right)_{\alpha=1}^{\infty}$ целых рациональных чисел, удовлетворяющих соотношениям (1,1), или $\mathfrak{a} = \left(a^{(\alpha)}\right)_{\alpha=1}^{\infty}$, во-вторых, символом $\mathfrak{a}$ будем обозначать целое $p$-адическое число, являющееся $p$-адическим пределом такой последовательности $\left(a^{(\alpha)}\right)_{\alpha=1}^{\infty}$, или будем писать

$$(1{,}2) \qquad \mathfrak{a} = \lim_{\alpha\to\infty}{}_p\, a^{(\alpha)}.$$

(Здесь, как мы уже отметили, символом $\lim_{\alpha\to\infty}{}_p\, a^{(\alpha)}$обозначаем $p$-адической предел последовательности $\left(a^{(\alpha)}\right)_{\alpha=1}^{\infty}$. Этим обозначением мы будем пользоваться на протяжении всей статьи.) В заключение отметим, что под символом $\mathfrak{a}$ мы будем иногда понимать сумму $p$-адически сходящегося ряда типа $\sum_{k=0}^{\infty} s_k p^k$, илиже будет

$$(1{,}3) \qquad \mathfrak{a} = \sum_{k=0}^{\infty} s_k p^k.$$

Легко видеть, в каком отношении находится формула (1,3) к формуле (1,2).

Для упрощения записи введем еще следующие обозначения: Если $\alpha$ – натуральное число, то положим

$$(1{,}4) \qquad \mathfrak{p}_\alpha(p) = \mathfrak{p}_\alpha = (1, 1, \ldots, 1, p, p^2, p^3, \ldots);$$

в последовательности в правой части последнего равенства находится число 1 на первых $\alpha$ местах. Кроме того, положим

$$\mathfrak{p}_0(p) = \mathfrak{p}_0 = (0, 0, 0, \ldots) = (p, p^2, p^3, \ldots), \qquad (1,5)$$
$$\mathfrak{p}_\infty(p) = \mathfrak{p}_\infty = (1, 1, 1, \ldots).$$

Вводить эти последние символы (1,5) нам не нужно было, так как $\mathfrak{p}_0 = 0$ и $\mathfrak{p}_\infty = 1$, но полезность этих обозначений укажется позже.

Матрицу, элементы которой принадлежат кольцу $\Omega_p$, будем называть $p$-матрицей. Если $\mathfrak{A}$ — некоторая $p$-матрица (вообще типа $m$, $n$),

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{a}_{12}, & \ldots, \mathfrak{a}_{1n} \\ \mathfrak{a}_{21}, & \mathfrak{a}_{22}, & \ldots, \mathfrak{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{a}_{m1}, & \mathfrak{a}_{m2}, & \ldots\, \mathfrak{a}_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1,6)$$

где элементы $\mathfrak{a}_{ik}$ являются $p$-числами, представленными в виде последовательностей $\mathfrak{a}_{ik} = (a_{ik}^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$, то для каждого натурального числа $\alpha$ определена целочисленная матрица

$$A^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(\alpha)}, & a_{12}^{(\alpha)}, & \ldots, a_{1n}^{(\alpha)} \\ a_{21}^{(\alpha)}, & a_{22}^{(\alpha)}, & \ldots, a_{2n}^{(\alpha)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}^{(\alpha)}, & a_{m2}^{(\alpha)}, & \ldots, a_{mn}^{(\alpha)} \end{pmatrix}, \qquad (1,7)$$

которую будем называть $\alpha$-той компонентой $p$-матрицы $\mathfrak{A}$. В дальнейшем будем записывать в символическом виде $\mathfrak{A} = (A^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$.

Квадратную $p$-матрицу $\mathfrak{K}^{(p)}$ $r$-той степени вида (где $r = m + n$)

$$\mathfrak{K}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\infty, & 0, & \ldots, 0, & \mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{a}_{12}, & \ldots, \mathfrak{a}_{1n} \\ 0, & \mathfrak{p}_\infty, & \ldots, 0, & \mathfrak{a}_{21}, & \mathfrak{a}_{22}, & \ldots, \mathfrak{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, \mathfrak{p}_\infty, & \mathfrak{a}_{m1}, & \mathfrak{a}_{m2}, & \ldots, \mathfrak{a}_{mn} \\ 0, & 0, & \ldots, 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_1}, & \mathfrak{p}_{\alpha_1} b_{12}, & \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_1} b_{1n} \\ 0, & 0, & \ldots, 0, & 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_2}, & \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_2} b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, 0, & 0, & 0, & \ldots, \mathfrak{p}_{\alpha_n} \end{pmatrix}, \qquad (1,8)$$

где $\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ — целые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqq \alpha_n \leqq \ldots \leqq \alpha_1 < \infty$, $b_{ik}$ $(i < k;\ k = 2, \ldots, n)$ — также целые рациональные числа, и где $p$-числа $\mathfrak{a}_{ik} = (a_{ik}^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ $i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$ являются целыми $p$-адическими числами, будем называть канонической $p$-матрицей. Если $\mathfrak{K}^{(p)}$ — некоторая $p$-матрица $r$-той степени вида (1,8), то для каждого натурального числа $\alpha$ имеет $\alpha$-тая компонента $K^{(\alpha,p)}$ $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$ в точности вид

$$(1,9)\qquad K^{(\alpha,p)} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & \dots, & 0, & a_{11}^{(\alpha)}, & a_{12}^{(\alpha)}, & \dots, & a_{1n}^{(\alpha)} \\ 0, & 1, & \dots, & 0, & a_{21}^{(\alpha)}, & a_{22}^{(\alpha)}, & \dots, & a_{2n}^{(\alpha)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 1, & a_{m1}^{(\alpha)}, & a_{m2}^{(\alpha)}, & \dots, & a_{mn}^{(\alpha)} \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & p^{\lambda_1}, & p^{\lambda_1} b_{12}, & \dots, & p^{\lambda_1} b_{1n} \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & p^{\lambda_2}, & \dots, & p^{\lambda_2} b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 0, & \dots, & p^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

притом, в силу соотношений (1,4) и (1,5), целые рациональные числа $\lambda_i = \lambda_i(\alpha, p)$ $(i = 1, \dots, n)$ из матрицы (1,9) удовлетворяют формулам

$$(1,10)\qquad \lambda_i = \lambda_i(\alpha, p) = \max(0, \alpha - \alpha_i) \quad (i = 1, \dots, n),$$

где $\alpha_i$ $(i = 1, \dots, n)$ – целые неотрицательные числа, определенные $p$-матрицей (1,8).

Пусть $G$ – произвольная группа без кручения; базисом группы $G$ будем называть любое максимальное множество линейно независимых элементов из $G$. Как хорошо известно, все базисы группы $G$ обладают равными мощностями, и мы будем эту общую мощность называть рангом группы $G$ и обозначать символом $r(G)$.

Пусть $G$ – группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть $B = (x_1, x_2, \dots, \dots, x_r)$ – произвольный, но твердо определенный базис группы $G$. Если $g$ – элемент группы $G$, $g \neq 0$, то имеет место некоторое соотношение вида

$$(1,11)\qquad ng = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r,$$

где $n$, $a_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ – такие целые рациональные числа, что $n \neq 0$ и $\sum_{i=1}^{r} a_i^2 > 0$. Если построим дроби $a_i/n$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, то эти рациональные числа будут элементом $g$ определены однозначно, и наоборот, существует по крайней мере один элемент $g \in G$, удовлетворяющий соотношению (1,11). Итак, если запишем элемент $g$, удовлетворяющий формуле (1,11), формально в виде

$$g = \frac{a_1}{n} x_1 + \frac{a_2}{n} x_2 + \dots + \frac{a_r}{n} x_r = \frac{1}{n}(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r),$$

и если еще положим $0 = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_r$, то каждый элемент $g$ из группы $G$ можно выразить в точности единственным образом в виде

$$g = \varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \dots + \varrho_r x_r,$$

где $\varrho_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ – удобные рациональные числа. Притом, если $g_1, g_2$ – два произвольных элемента группы $G$,

$$g_i = \varrho_1^{(i)} x_1 + \varrho_2^{(i)} x_2 + \dots + \varrho_r^{(i)} x_r \quad (i = 1, 2),$$

то, очевидно, должно быть

$$g_1 + g_2 = \left(\varrho_1^{(1)} + \varrho_1^{(2)}\right) x_1 + \left(\varrho_2^{(1)} + \varrho_2^{(2)}\right) x_2 + \ldots + \left(\varrho_r^{(1)} + \varrho_r^{(2)}\right) x_r \,.$$

Итак, если $\mathscr{R}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел и если символ $\mathscr{R}^{(r)}$ представляет группу всех линейных форм вида $\varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \ldots + \varrho_r x_r$, где $\varrho_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — произвольные рациональные числа, или группу

$$\mathscr{R}^{(r)} = \sum_{i=1}^{r}{}_d \mathscr{R} x_i \,,$$

то группу $G$ можно считать подгруппой полной группы $\mathscr{R}^{(r)}$. Только что описанное погружение группы без кручения $G$ конечного ранга $r \geqq 1$ в группу $\mathscr{R}^{(r)}$ будем называть погружением группы $G$ в полную группу $\mathscr{R}^{(r)}$ при помощи базиса $B$.

Символом $\overset{*}{\Gamma}{}^{(p)}(B)$ обозначим множество всех элементов $g \in G$, представимых в виде

$$g = \frac{a_1}{p^k} x_1 + \frac{a_2}{p^k} x_2 + \ldots + \frac{a_r}{p^k} x_r \,,$$

где $p$ — некоторое простое число, и $k$ — произвольное неотрицательное целое рациональное число. Множество $\Gamma^{(p)}(B)$ является, очевидно, подгруппой группы $G$, которую будем называть $p$-примитивной подгруппой группы $G$ по отношению к базису $B$.

Если $\alpha$ — натуральное число, то символом $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$ обозначим множество всех элементов $g \in G$, представимых в виде

$$g = \frac{a_1}{p^\alpha} x_1 + \frac{a_2}{p^\alpha} x_2 + \ldots + \frac{a_r}{p^\alpha} x_r \,,$$

где $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — удобные целые рациональные числа. Для каждого натурального числа $\alpha$ множество $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$ будет подгруппой группы $\Gamma^{(p)}(B)$; эту подгруппу назовем $\alpha$-тым слоем группы $\Gamma^{(p)}(B)$. Из определения непосредственно следует, что

(1,12) $$\Gamma_\alpha^{(p)}(B) \subseteq \Gamma_{\alpha+1}^{(p)}(B) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots) \,,$$

и в то же время легко видеть, что

(1,13) $$\Gamma^{(p)}(B) = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \Gamma_\alpha^{(p)}(B) \,.$$

Легко можно убедиться в том, что каждый слой $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$ обладает конечным числом образующих; итак, можно высказать следующее определение: Пусть $\alpha$ — натуральное число; квадратную целочисленную матрицу $r$-той степени

(1,14) $$A^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(\alpha)}, & a_{12}^{(\alpha)}, & \ldots, & a_{1r}^{(\alpha)} \\ a_{21}^{(\alpha)}, & a_{22}^{(\alpha)}, & \ldots, & a_{2r}^{(\alpha)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1}^{(\alpha)}, & a_{r2}^{(\alpha)}, & \ldots, & a_{rr}^{(\alpha)} \end{pmatrix}$$

назовем матрицей слоя $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$, если в группе $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$ существуют элементы $g_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $$g_i^{(\alpha)} = \frac{a_{i1}^{(\alpha)}}{p^\alpha} x_1 + \frac{a_{i2}^{(\alpha)}}{p^\alpha} x_2 + \ldots + \frac{a_{ir}^{(\alpha)}}{p^\alpha} x_r \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

2. $$\Gamma_\alpha^{(p)}(B) = \{g_i^{(\alpha)}, x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\}.$$

Так как можно показать, что существуют системы образующих группы $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$, содержащие в точности $r$ элементов, то отсюда уже следует, что существует по крайней мере одна матрица слоя $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$. Если матрица (1,14) является матрицей слоя $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$, то элементы $g_i^{(\alpha)} \in \Gamma_\alpha^{(p)}(B)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, где

$$g_i^{(\alpha)} = \frac{a_{i1}^{(\alpha)}}{p^\alpha} x_1 + \frac{a_{i2}^{(\alpha)}}{p^\alpha} x_2 + \ldots + \frac{a_{ir}^{(\alpha)}}{p^\alpha} x_r \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

будем называть образующими элементами слоя $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$, соответствующими матрице (1,14).

**Лемма 1.1.** *Пусть $M^{(\alpha)}$ — матрица некоторого слоя $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$ группы без кручения $G$, имеющая особый вид*

$$(1,15) \qquad M^{(\alpha)} + \begin{pmatrix} p^{\lambda_1}, & m_{12}^{(\alpha)}, & m_{13}^{(\alpha)}, & \ldots, & m_{1r-1}^{(\alpha)}, & m_{1r}^{(\alpha)} \\ 0, & p^{\lambda_2}, & m_{23}^{(\alpha)}, & \ldots, & m_{2r-1}^{(\alpha)}, & m_{2r}^{(\alpha)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & p^{\lambda r-1}, & m_{r-1r}^{(\alpha)} \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, 0, & & p^{\lambda_r} \end{pmatrix},$$

*и пусть $g_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — образующие элементы слоя $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$, соответствующие матрице $M^{(\alpha)}$. Тогда элементы $g_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ служат образующими элементами группы $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$ в обычном смысле слова, или, имеет место соотношение*

$$\Gamma_\alpha^{(p)}(B) = \{g_i^{(\alpha)} \ (i = 1, 2, \ldots, r)\}.$$

(Смотри [1], § 3, замечание 1.)

Пусть $\mathfrak{A} = (A^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ — некоторая квадратная $p$-матрица $r$-той степени. Скажем, что $p$-матрица $\mathfrak{A}$ является $p$-матрицей $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы без кручения $G$, если каждая ее компонента $A^{(\alpha)}$ будет матрицей слоя $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$. Так как существует для каждого натурального числа $\alpha$ по крайней мере одна матрица $A^{(\alpha)}$ слоя $\Gamma_\alpha^{(p)}(B)$, то существует по крайней мере одна $p$-матрица $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$. В статье [1] доказана следующая очень важная теорема (см. [1], § 9, теорема 5).

**Теорема.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — произвольный ее базис и пусть $p$ — некоторое простое число. Тогда существует такая каноническая $p$-матрица $\mathfrak{K}^{(p)}$ вида* (1,8), *что для удобной перестановки индексов* 1, 2, …, $r$ *элементов базиса $B$ $p$-матрица $\mathfrak{K}^{(p)}$ будет $p$-матрицей $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы $G$.*

В заключение введем еще одно обозначение, которым будем пользоваться позже. Пусть $\mathfrak{K}^{(p)}$ — каноническая $p$-матрица $r$-той степени вида (1,8). Тогда число $m$, находящееся в $p$-матрице (1,8) и определяющее число $p$-чисел $\mathfrak{p}_\infty$ в ее главной диагонали, будем обозначать символом $m = m(\mathfrak{K}^{(p)})$; притом, очевидно, полагаем $m(\mathfrak{K}^{(p)}) = 0$, если таких $p$-чисел $\mathfrak{p}_\infty$ в главной диагонали $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$ нет.

**2.** Пусть $P$ — периодическая группа, являющаяся прямой суммой конечного числа групп типа $\mathscr{C}(p^k)$ $(1 \leqq k \leqq \infty)$, в общем случае для различных простых чисел $p$. Тогда число $s$ всех таких прямых слагаемых некоторого такого прямого разложения является инвариантом группы $P$, так как все прямые разложения группы $P$ описанного типа изоморфны; число $s$ будем называть $D$-рангом группы $P$.[1]) Для обозначения $D$-ранга такой группы будем пользоваться символом $r_D(P)$; итак, $s = r_D(P)$. Притом для полноты положим еще $r_D((0)) = 0$. В заключение условимся называть только что описанные группы группами конечного $D$-ранга.

**Орпеделение 1.** Если $P$ — такая периодическая группа, что каждое ее $p$-примарное слагаемое $P^{(p)}$ является группой конечного $D$-ранга, то группу $P$ будем называть группой локально конечного $D$-ранга.

Для формулировки следующих лемм напомним, что под **нижним** слоем $P[p]$ периодической $p$-примарной группы $P$ понимаем множество всех таких элементов $g \in P$, для которых $pg = 0$.

**Лемма 2.1.** *Пусть $P$ — периодическая $p$-примарная группа конечного $D$-ранга и пусть $P[p]$ — ее нижний слой. Тогда подгруппа $P[p]$ тоже обладает конечным $D$-рангом и справедливо равенство*

$$r_D(P[p]) = r_D(P)\,.$$

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из определения $D$-ранга.

**Лемма 2.2.** *Пусть $P$ — периодическая $p$-примарная группа конечного $D$-ранга и пусть $U$ — наименьшая полная группа, содержащая $P$ в качестве подгруппы. Тогда группа $U$ является также $p$-примарной, и $U[p] = P[p]$.*

Доказательство. Легко видеть, что группа $U$ должна быть $p$-примарной и что $P[p] \subseteq U[p]$. Предположим, что $P[p] \neq U[p]$, или что существует элемент $g \in U[p]$, $g \notin P[p]$. Пусть $Z$ — такая подгруппа группы $U$, что $g \in Z$ и $Z \cong \mathscr{C}(p^\infty)$ (подгруппа, обладающая этими свойствами, существует); тогда, очевидно, будет $Z[p] = \{g\}$. Так как

$$Z[p] \cap P[p] = \{g\} \cap P[p] = (0)\,,$$

[1]) С понятием $D$-ранга произвольной абелевой группы можно познакомиться в статье V. Dlab: $D$-hodnost Abelovy grupy, Čas. pro pěst. mat. *82* (1957), 314—330.

то должно быть одновременно $Z \cap P = (0)$. Тогда группа $Z$, будучи полной группой, служит прямым слагаемым для группы $U$, и даже абсолютным прямым слагаемым для $U$ (см, [4], § 22, теорема 22.2). Следовательно, так как $Z \cap P = (0)$, существует такая подгруппа $U_1$ группы $U$, что $U = Z \dotplus U_1$ и $P \subseteq U_1$. Так как группа $U_1$ должна быть полной и $U_1 \subsetneqq U$, то мы пришли к противоречию.

Этим лемма полностью доказана.

**Лемма 2.3.** *Пусть $P$ — периодическая $p$-примарная группа конечного $D$-ранга и пусть $U$ — наименьшая полная группа, содержащая $P$ в качестве подгруппы. Тогда группа $U$ обладает конечным $D$-рангом и*

$$r_D(P) = r_D(U) .$$

Доказательство. Лемма является простым следствием лемм 2.2 и 2.1.

Замечание. Из предшествующей леммы можно легко вывести следующее утверждение: Если $P$ — периодическая группа конечного $D$-ранга и если $Q$ — произвольная ее подгруппа, то подгруппа $Q$ также обладает конечным $D$-рангом и имеет место неравенство $r_D(Q) \leqq r_D(P)$.

**Лемма 2.4.** *Пусть $U$ — полная периодическая группа конечного $D$-ранга и пусть $V$ — произвольная ее подгруппа. Тогда группа $U/V$ также обладает конечным $D$-рангом и имеет место неравенство*

$$r_D(U/V) \leqq r_D(U) .$$

Доказательство. Подгруппу $V$ представим в виде $V = W \dotplus K$, где $W$ — максимальная полная подгруппа группы $V$, и $K$ — группа редуцированная. Группа $K$, будучи подгруппой группы конечного $D$-ранга, сама должна обладать конечным $D$-рангом (смотри замечание за леммой 2.3), и так как она является редуцированной (и периодической), то она будет конечной. Полная подгруппа $W$ будет опять абсолютным прямым слагаемым группы $U$, следовательно, из соотношения $W \cap K = (0)$ получим существование такой подгруппы $U_1$ группы $U$, что $U = W \dotplus U_1$ и $K \subseteq U_1$. Значит, имеет место изоморфизм

$$U/V = (W \dotplus U_1)/(W \dotplus K) \cong U_1/K . \tag{2,1}$$

Группа $U_1$, являющаяся прямым слагаемым полной группы, сама будет полной группой, и так как группа $K$ конечна, то должно быть (см. (2,1))

$$U/V \cong U_1/K \cong U_1 . \tag{2,2}$$

Очевидно, $r_D(U_1) \leqq r_D(U)$; итак, отсюда и из (2,2) уже следует утверждение леммы.

**Лемма 2.5.** *Пусть $P$ — периодическая $p$-примарная группа конечного $D$-ранга и пусть $Q$ — произвольная ее подгруппа. Тогда группа $P/Q$ обладает конечным $D$-рангом и имеет место неравенство*

$$r_D(P/Q) \leqq r_D(P) .$$

Доказательство. Если $U$ – наименьшая полная группа, содержащая $P$ в качестве подгруппы, то по лемме 2.3 будет $r_D(U) = r_D(P)$. По лемме 2.4 группа $U/Q$ обладает конечным $D$-рангом и

$$(2,3) \qquad r_D(U/Q) \leqq r_D(U) = r_D(P) .$$

Так как группа $P/Q$ является подгруппой группы $U/Q$, то по замечанию за леммой 2.3 будет обладать конечным $D$-рангом, и даже будет $r_D(P/Q) \leqq r_D(U/Q)$. Отсюда и из (2,3) уже следует утверждение леммы.

**Лемма 2.6.** *Пусть $P$ – периодическая группа локально конечного $D$-ранга и пусть $Q$ – произвольная ее подгруппа. Тогда группа $P/Q$ является также группой локально конечного $D$-ранга и для каждого простого числа $p$ имеет место неравенство*

$$(2,4) \qquad r_D(\tilde{P}^{(p)}) \leqq r_D(P^{(p)}) ,$$

*где символ $\tilde{P}^{(p)}$ (соотв. $P^{(p)}$) представляет $p$-примарное слагаемое группы $\tilde{P} = P/Q$ (соотв. $P$).*

Доказательство. Если воспользуемся обозначениями, введенными в лемме, то, очевидно, будет $\tilde{P}^{(p)} = \{P^{(p)}, Q\}/Q$. Итак, по первой теореме об изоморфизме имеем

$$\tilde{P}^{(p)} = \{P^{(p)}, Q\}/Q \cong P^{(p)}/(P^{(p)} \cap Q) .$$

Так как по предположению группа $P^{(p)}$ обладает конечным $D$-рангом, то из последнего соотношения в силу леммы 2.5 следует неравенство (2,4). Но этим уже лемма полностью доказана.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ – группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть $H$ – произвольная ее подгруппа того же ранга $r$. Тогда фактор-группа $G/H$ является периодической группой локально конечного $D$-ранга, и если обозначим символом $\tilde{G}^{(p)}$ $p$-примарное слагаемое группы $G/H$, то будет*

$$(2,5) \qquad r_D(\tilde{G}^{(p)}) \leqq r(G) = r .$$

Доказательство. В подгруппе $H$ найдем произвольный базис $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$. Так как по предположению $r(H) = r(G)$, то система элементов $B$ служит базисом и для всей группы $G$. Теперь погрузим группу $G$ при помощи базиса $B$ в полную группу $\mathscr{R}^{(r)}$ ранга $r$, как было показано в предшествующем отделе. Группа $\mathscr{R}^{(r)}$ имеет вид

$$(2,6) \qquad \mathscr{R}^{(r)} = \sum_{i=1}^{r}{}_d \mathscr{R} x_i .$$

Далее, символом $C$ обозначим свободную подгруппу группы $G$, определенную формулой

$$(2,7) \qquad C = \sum_{i=1}^{r}{}_d \{x_i\} ;$$

группа $C$ является одновременно подгруппой группы $H$. По второй теореме об изоморфизме будет

$$G/H \cong (G/C)/(H/C)\,. \tag{2,8}$$

Так как $\{x_i\} \subseteq \mathscr{R}x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, то из формул (2,6) и (2,7) получим изоморфизм

$$\mathscr{R}^{(r)}/C \cong \sum_{i=1}^{r}{}_d(\mathscr{R}x_i/\{x_i\})\,. \tag{2,9}$$

Каждая группа $\mathscr{R}x_i/\{x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ является по существу фактор-группой аддитивной группы рациональных чисел $\mathscr{R}$ по подгруппе целых чисел, т.е. имеем

$$\mathscr{R}x_i/\{x_i\} \cong \sum_p{}_d\mathscr{C}(p^\infty)\ \ (i = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{2,10}$$

Из формул (2,9) и (2,10) непосредственно следует, что фактор-группа $\mathscr{R}^{(r)}/C$ является периодической группой локально конечного $D$-ранга и что для каждого $p$-примарного слагаемого $(\mathscr{R}^{(r)}/C)^{(p)}$ группы $\mathscr{R}^{(r)}/C$ имеет место соотношение

$$r_D[(\mathscr{R}^{(r)}/C)^{(p)}] = r = r(G)\,. \tag{2,11}$$

Периодическая группа $G/C$, будучи подгруппой группы $\mathscr{R}^{(r)}/C$, является также группой локально конечного $D$-ранга, и в силу (2,11) для каждого $p$-примарного слагаемого $(G/C)^{(p)}$ имеет место неравенство

$$r_D[(G/C)^{(p)}] \leqq r\,. \tag{2,12}$$

Если применим к группе $G/C$ и подгруппе $H/C$ лемму 2.6, то из (2,8) и (2,12) непосредственно получим неравенство (2,5).

Теорема полностью доказана.

**3.** В дальнейшем будем пользоваться символами и понятиями, введенными в отделе 1.

Прежде всего докажем несколько элементарных лемм.

**Лемма 3.1.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — произвольный ее базис. Если $\Pi$ — множество всех простых (положительных) чисел, то имеет место равенство*

$$G = \{\Gamma^{(p)}(B)\,(p \in \Pi)\}\,. \tag{3,1}$$

Доказательство. Пусть $g$ — произвольный элемент группы $G$ и пусть

$$g = \frac{a_1}{n}\,x_1 + \frac{a_2}{n}\,x_2 + \ldots + \frac{a_r}{n}\,x_r\,, \tag{3,2}$$

где $a_i\,(i = 1, 2, \ldots, r)$ — удобные целые рациональные числа и $p$ — натуральное число. Если $n = 1$, то элемент $g$ вида (3,2) содержится в каждой $p$-примитивной подгруппе $\Gamma^{(p)}(B)$ группы $G$, значит,

$$g \in \{\Gamma^{(p)}(B)\,(p \in \Pi)\}\,. \tag{3,3}$$

Итак, будем предполагать, что $n > 1$. Тогда число $n$ можно представить в виде произведения степеней простых чисел

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}, \quad e_j \geqq 1 \quad (j = 1, \ldots, k) ;$$

притом $p_j$ $(i = 1, \ldots, k)$ – уже различные простые числа. Если положим

$$n_j = \frac{n}{p_j^{e_j}} \quad (j = 1, \ldots, k),$$

то все числа $n_1, \ldots, n_k$ взаимно просты, или, существуют целые числа $l_j$ $(j = 1, \ldots, k)$, удовлетворяющие соотношению

$$(3,4) \qquad l_1 n_1 + l_2 n_2 + \ldots + l_k n_k = 1 .$$

Если положим $g_j = n_j g$ $(j = 1, \ldots, k)$, то будет

$$g_j = \frac{a_1}{p_j^{e_j}} x_1 + \frac{a_2}{p_j^{e_j}} x_2 + \ldots + \frac{a_r}{p_j^{e_j}} x_r \quad (j = 1, \ldots, k),$$

и поэтому $l_j g_j \in \Gamma^{(p_j)}(B)$ $(j = 1, \ldots, k)$. По (3,4) имеем $g = l_1 g_1 + l_2 g_2 + \ldots + l_k g_k$, итак, в этом случае также имеет место соотношение (3,3). Этим мы доказали включение

$$G \subseteq \{\Gamma^{(p)}(B) \, (p \in \Pi)\} ,$$

или также равенство (3,1), так как обратное включение тривиально. Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** *Пусть $G$ – группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ – произвольный ее базис и пусть*

$$C = \sum_{i=1}^{r}{}_d \{x_i\} .$$

*Если для каждого простого числа $p$ символ $(G/C)^{(p)}$ представляет $p$-примарное слагаемое периодической группы $G/C$, то справедливо равенство*

$$(G/C)^{(p)} = \Gamma^{(p)}(B)/C .$$

Доказательство. По лемме 3.1 можно группу $G$ представить в виде (3,1). Следовательно, если положим

$$\tilde{G}^{(p)} = \Gamma^{(p)}(B)/C \quad (p \in \Pi) ,$$

то будет в точности

$$(3,5) \qquad G/C = \{\tilde{G}^{(p)} \, (p \in \Pi)\} .$$

Так как каждая группа $\tilde{G}^{(p)}$ является периодической и $p$-примарной, то вместо (3,5) можно даже писать

$$G/C = \sum_{p \in \Pi}{}_d \tilde{G}^{(p)} ;$$

но это последнее соотношение является прямым разложением группы $G/C$

в $p$-примарные слагаемые. Из единственности такого разложения уже следует равенство

$$(G/C)^{(p)} = \tilde{G}^{(p)} = \Gamma^{(p)}(B)/C$$

для каждого простого числа $p$, и лемма полностью доказана.

**Определение 2.** Пусть $P$ — периодическая группа локально конечного $D$-ранга и пусть $P^{(p)}$ — $p$-примарное слагаемое группы $P$. Если $U^{(p)}$ — максимальная полная подгруппа группы $P^{(p)}$, то число $r_D(U^{(p)})$ является инвариантом группы $P$, и мы будем называть его $p$-рангом группы $P$. Для обозначения $p$-ранга такой периодической группы $P$ мы будем пользоваться символом $r_p^*(P)$.

**Лемма 3.3.** *Пусть $P$ — периодическая $p$-примарная группа конечного $D$-ранга и пусть $Q$ — произвольная ее подгруппа. Тогда имеет место соотношение*

$$r_p^*(P) = r_p^*(P/Q) + r_p^*(Q)\,. \tag{3,6}$$

Доказательство. Подгруппу $Q$ представим в виде прямой суммы $Q = U \dotplus Q'$, где $U$ — максимальная полная подгруппа группы $Q$ и $Q'$ — редуцированная группа. Подгруппа $U$, будучи полной группой, служит абсолютным прямым слагаемым для группы $P$. Следовательно, так как $U \cap Q' = (0)$, существует такая подгруппа $P'$ группы $P$, что $P = U \dotplus P'$ и $Q' \subseteq P'$. Это значит, что $P/Q \cong P'/Q'$, или

$$r_p^*(P/Q) = r_p^*(P'/Q')\,. \tag{3,7}$$

Если символ $U'$ представляет максимальную полную подгруппу группы $P'$, то $U'$ будет прямым слагаемым группы $P'$, или $P' = U' \dotplus R'$; подгруппа $R'$ должна быть редуцированной. Итак, группу $P$ можно представить в виде прямой суммы $P = U \dotplus U' \dotplus R'$. Но из редуцированности группы $R'$ уже следует, что группа $U \dotplus U'$ является максимальной полной подгруппой группы $P$, или, по определению 2 будет $r_p^*(P) = r_D(U) + r_D(U')$. В то же время имеем $r_p^*(Q) = r_D(U)$, иликже получаем равенство

$$r_p^*(P) = r_p^*(Q) + r_D(U')\,. \tag{3,8}$$

Легко можно убедиться в том, что группа $\{U', Q'\}/Q'$ является максимальной полной подгруппой группы $P'/Q'$, или, что имеет место равенство

$$r_p^*(P'/Q') = r_D(\{U', Q'\}/Q')\,. \tag{3,9}$$

По первой теореме об изоморфизме будет

$$\{U', Q'\}/Q' \cong U'/(U' \cap Q')\,. \tag{3,10}$$

Так как группа $Q'$ является редуцированной группой конечного $D$-ранга, то она должна быть уже конечной, и такой же будет ее подгруппа $U' \cap Q'$. Отсюда и из полноты группы $U'$ следует изоморфизм $U'/(U' \cap Q') \cong U'$. Итак, сравнением с (3,10) получим формулу

$$\{U', Q'\}/Q' \cong U'\,. \tag{3,11}$$

Из соотношений (3,11), (3,9) и (3,7) вытекает равенство $r_D(U') = r_p^*(P/Q)$, или, по (3,8), имеет место соотношение (3,6).

Этим лемма полностью доказана.

**Лемма 3.4.** *Пусть $P$ — периодическая группа локально конечного $D$-ранга и пусть $Q$ — произвольная ее подгруппа. Тогда для каждого простого числа $p$ имеет место соотношение*

$$r_p^*(P) = r_p^*(P/Q) + r_p^*(Q)\,. \tag{3,12}$$

Доказательство. Если символы $P^{(p)}$, $Q^{(p)}$, $\tilde{P}^{(p)}$ обозначают постепенно $p$-примарные слагаемые групп $P$, $Q$ и $P/Q$, то из определения 2 непосредственно следует, что

$$r_p^*(P) = r_p^*(P^{(p)})\,, \quad r_p^*(Q) = r_p^*(Q^{(p)})\,, \quad r_p^*(P/Q) = r_p^*(\tilde{P}^{(p)})\,.$$

Но тогда вместо (3,12) можно писать

$$r_p^*(P^{(p)}) = r_p^*(\tilde{P}^{(p)}) + (Q^{(p)})\,. \tag{3,13}$$

Равенство (3,13) получим сейчасже, если применим лемму 3.3 к группе $P^{(p)}$ и ее подгруппе $Q^{(p)}$, и если воспользуемся изоморфизмом

$$\tilde{P}^{(p)} = \{P^{(p)}, Q\}/Q \cong P^{(p)}/Q^{(p)}\,.$$

Этим лемма доказана.

Теперь мы уже в состоянии доказать следующую теорему.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — произвольный ее базис и пусть $C$ — подгруппа вида*

$$C = \sum_{i=1}^{r}{}_d\{x_i\}\,.$$

*Если $p$ — простое число и $\mathfrak{K}^{(p)}$ — некоторая каноническая $p$-матрица $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы $G$, то будет в точности*

$$r_p^*(G/C) = m(\mathfrak{K}^{(p)})\,. \tag{3,14}$$

(Смотри конец отдела 1, где определен символ $m(\mathfrak{K}^{(p)})$).

Доказательство. Если $p$ — данное простое число, то $p$-примитивную подгруппу $\Gamma^{(p)}(B)$ группы $G$ будем для простоты обозначать символом $\Gamma$ и аналогично $\alpha$-той слой подгруппы $\Gamma$ просто обозначим символом $\Gamma_\alpha$. Если $\tilde{G}^{(p)}$ представляет $p$-примарное слагаемое периодической группы $G/C$, то по лемме 3.2 будет в точности

$$\tilde{G}^{(p)} = \Gamma/C\,. \tag{*}$$

Пусть теперь $\mathfrak{K}^{(p)} = (K^{(\alpha,p)})_{\alpha=1}^{\infty}$ — данная каноническая $p$-матрица $p$-примитивной подгруппы $\Gamma$ группы $G$ вида (1,8). Следовательно, $\alpha$-тая компонента $K^{(\alpha,p)}$ $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$ имеет вид (1,9), служит, по определению, матрицей слоя

$\Gamma_\alpha$, и целые рациональные числа $\lambda_i = \lambda_i(\alpha, p)$ $(i = 1, \ldots, n = r - m(\mathfrak{K}^{(p)}))$ удовлетворяют соотношениям (1,10). Если для каждого натурального числа $\alpha$ положим

$$(3{,}15) \qquad g_i^{(\alpha)} = \frac{1}{p^\alpha}\left(x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} x_{m+j}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, m = m(\mathfrak{K}^{(p)}))$$

и подобным способом

$$(3{,}16) \qquad g_{m+i}^{(\alpha)} = \frac{p^{\lambda_i(\alpha,p)}}{p^\alpha}\left(x_{m+i} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_{m+j}\right)$$

$$(i = 1, \ldots, n = r - m),$$

то элементы $g_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, определенные формулами (3,15) и (3,16), станут образующими элементами слоя $\Gamma_\alpha$, соответствующими матрице $K^{(\alpha,p)}$. Так как матрица $K^{(\alpha,p)}$ из соотношения (1,9) имеет диагональной вид, требуемый в лемме 1.1 (см. формулу (1,15)), то по этой лемме элементы $g_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ будут образующими группы $\Gamma_\alpha$, или

$$(3{,}17) \qquad \Gamma_\alpha = \{g_i^{(\alpha)}\,(i = 1, 2, \ldots, r)\} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Из соотношений (1,13) и (3,17) вытекает, что

$$(3{,}18) \qquad \Gamma = \{g_i^{(\alpha)}\ (i = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha = 1, 2, \ldots)\}.$$

Имея ввиду соотношение (3,18), формулу (*) можем записать в виде

$$(3{,}19) \qquad \tilde{G}^{(p)} = \{g_i^{(\alpha)}\,(i = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha = 1, 2, \ldots)\}/C.$$

Если положим

$$(3{,}20) \qquad \tilde{G}_1^{(p)} = \{C, g_i^{(\alpha)}\,(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, 2, \ldots)\}/C,$$

и подобным образом

$$(3{,}21) \qquad \tilde{G}_2^{(p)} = \{C, g_i^{(\alpha)}\,(i = m + 1, \ldots, r;\ \alpha = 1, 2, \ldots)\}/C,$$

то по (3,19) будет

$$(3{,}22) \qquad \tilde{G}^{(p)} = \{\tilde{G}_1^{(p)}, \tilde{G}_2^{(p)}\}.$$

В дальнейшем будем группы $\tilde{G}_i^{(p)}$ $(i = 1, 2)$ рассматривать отдельно.

Прежде всего определим структуру группы $\tilde{G}_1^{(p)}$. Итак, если положим

$$\tilde{g}_i^{(\alpha)} = g_i^{(\alpha)} + C \in \Gamma/C \quad (i = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, 2, \ldots),$$

то в силу определения группы $\tilde{G}_1^{(p)}$ формулой (3,20) также дожлно быть

$$(3{,}23) \qquad \tilde{G}_1^{(p)} = \{\tilde{g}_i^{(\alpha)}\ (i = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, 2, \ldots)\}.$$

Пусть $i$ – некоторый из индексов $1, \ldots, m$. Так как $p$-числа $\mathfrak{a}_{ij} = (a_{ij}^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ $(j = 1, \ldots, n)$ из $i$-той строки $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$ являются целыми $p$-адическими числами, то для каждого натурального числа $\alpha$ имеют место сравнения

$$a_{ij}^{(\alpha)} \equiv a_{ij}^{(\alpha+1)} \pmod{p^\alpha} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Это значит, что существуют такие целые рациональные числа $r_{ij}^{(\alpha)}$, что будет

$$(3{,}24)\qquad a_{ij}^{(\alpha+1)} = a_{ij}^{(\alpha)} + r_{ij}^{(\alpha)}p^{\alpha} \quad (j = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, по (3,15) и (3,24) имеем

$$pg_i^{(\alpha+1)} = \frac{1}{p^{\alpha}}\left(x_i + \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^{(\alpha)} + r_{ij}^{(\alpha)}p^{\alpha}\right)x_{m+j}\right),$$

или, как легко видеть,

$$(3{,}25)\qquad pg_i^{(\alpha+1)} = g_i^{(\alpha)} + \sum_{j=1}^{n} r_{ij}^{(\alpha)}x_{m+j} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Так как, очевидно,

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}^{(\alpha)}x_{m+j} \in \sum_{j=1}^{r}{}_{d}\{x_j\} = C,$$

то из формулы (3,25) следуют соотношения

$$(3{,}26)\qquad p\tilde{g}_i^{(\alpha+1)} = \tilde{g}_i^{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Но индекс $i$ мы выбрали произвольно среди чисел $1, \ldots, m$, значит, соотношения (3,26) справедливы для всех индексов $i = 1, \ldots, m$.

Теперь покажем, что никакой из элементов $\tilde{g}_i^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ не является нулевым, или, что $g_i^{(1)} \notin C$ $(i = 1, \ldots, m)$. Если бы было $g_i^{(1)} \in C$ (для некоторого $i$, $1 \leqq i \leqq m$), то существовали бы такие целые рациональнае числа $a_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, что $g_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{r} a_j x_j$, или, $pg_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{r} pa_j x_j$. Но последнее равенство можно тоже записать в виде

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}x_{m+j} = \sum_{j=1}^{r} pa_j x_j,$$

и мы получаем противоречие, так как должно было бы быть $pa_i = 1$. Итак, в самом деле, $\tilde{g}_i^{(1)} \neq \mathit{0}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Так как уже справедливы соотношения

$$pg_i^{(1)} = x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)}x_{m+j} \in C \quad (i = 1, \ldots, m),$$

то $p\tilde{g}_i^{(1)} = \mathit{0}$, или, $O(\tilde{g}_i^{(1)}) = p$ $(i = 1, \ldots, m)$. Отсюда и из соотношений (3,23) и (3,26) следует, что группа $\tilde{G}_1^{(p)}$ является полной $p$-примарной группой конечного $D$-ранга, и притом

$$(3{,}27)\qquad r_D(\tilde{G}_i^{(p)}) \leqq m = m(\mathfrak{R}^{(p)}).$$

Неравенство (3,27) следует из того, что если бы между элементами $\tilde{g}_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, 2, \ldots)$ не было никаких других соотношений, кроме тех, которые мы сейчас нашли, и кроме соотношений из них вытекающих, то группа $\tilde{G}_1^{(p)}$ являлась бы прямой суммой $m$ полных групп Прюфера типа $\mathscr{C}(p^{\infty})$, значит, группой $D$-ранга $m$. Но в общем случае группа $\tilde{G}_1^{(p)}$ изоморфна некоторой фактор-группе только что описанной группы, т. е. имеет место неравенство (3,27) (см. лемму 2.5).

Теперь докажем, что в формуле (3,27) имеет всегда место равенство. Для этого, в силу (3,27), достаточно только доказать, что

$$(**)\qquad \{\tilde{g}_i^{(1)}\,(i = 1, \dots, m)\} = \sum_{i=1}^{m}{}_d\{\tilde{g}_i^{(1)}\}\,,$$

так как, очевидно, $\{\tilde{g}_i^{(1)}(i = 1, \dots, m)\} \subseteq \tilde{G}_1^{(p)}[p]$ (смотри лемму 2.1).

Пусть $k_i\,(i = 1, \dots, m)$ – целые рациональные числа,

$$(3{,}28)\qquad 0 \leqq k_i < p \quad (i = 1, \dots, m)\,,$$

удовлетворяющие соотношению

$$(3{,}29)\qquad \sum_{i=1}^{m} k_i\tilde{g}_i^{(1)} = \mathit{0}\,.$$

Из последнего равенства (3,29) прежде всего вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{m} k_i g_i^{(1)} = g \in C\,,$$

иначе имеет место соотношение

$$(3{,}30)\qquad \sum_{i=1}^{m} k_i g_i^{(1)} = g = \sum_{j=1}^{r} a_j x_j\,,$$

где $a_j\,(j = 1, 2, \dots, r)$ – некоторые целые рациональные числа. Из соотношений (3,15) и (3,30) имеем

$$(3{,}31)\qquad pg = \sum_{j=1}^{r}(pa_j)\,x_j = \sum_{i=1}^{m} k_i(pg_i^{(1)}) = \sum_{j=1}^{m} k_j x_j + \sum_{j=m+1}^{r} h_j x_j\,,$$

где полагаем

$$h_{m+i} = \sum_{j=1}^{m} k_j a_{ji}^{(1)} \quad (i = 1, \dots, n = r - m)\,.$$

Из соотношения (3,31), сравнением коэффициентов при элементах $x_j$ $(j = 1, \dots, m)$, следует, что должно быть

$$(3{,}32)\qquad k_j = pa_j \quad (j = 1, \dots, m)\,.$$

Но соотношения (3,28) и (3,32) будут выполнены одновременно только тогда, если $k_j = 0$ $(j = 1, \dots, m)$. Следовательно, мы доказали, что формула (3,29) (при исполнении соотношений (3,28)) имеет место только тогда, если $k_j = 0$ $(j = 1, \dots, m)$, или, справедлива формула (**). Но этим, как мы уже заметили, доказано равенство

$$(3{,}33)\qquad r_D(\tilde{G}_1^{(p)}) = m = m(\mathfrak{K}^{(p)})\,.$$

Теперь будем заниматься описанием структуры группы $\tilde{G}_2^{(p)}$, определенной формулой (3,21).

Как следует из (3,16) и из соотношений (1,10), определяющих числа $\lambda_i(\alpha, p)$ $(i = 1, \dots, n = r - m;\ \alpha = 1, 2, \dots)$, для каждого индекса $i$ $(i = 1, \dots, n)$ и для каждого натурального числа $\alpha > \alpha_i$ будет

$$(3,34) \qquad g^{(\alpha)}_{m+i} = \frac{1}{p^{\alpha_i}}\left(x_{m+i} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}x_{m+j}\right) = g^{(\alpha_i)}_{m+i}.$$

С другой стороны, для каждого натурального $\alpha \leqq \alpha_i$ имеем

$$(3,35) \qquad p^{\alpha_i - \alpha} g^{(\alpha_i)}_{m+i} = \frac{1}{p^{\alpha}}\left(x_{m+i} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}x_{m+j}\right) = g^{(\alpha)}_{m+i}.$$

Имея ввиду соотношения (3,34) и (3,35) и определение группы $\tilde{G}_2^{(p)}$ формулой (3,21), можем группу $\tilde{G}_2^{(p)}$ представить в виде

$$\tilde{G}_2^{(p)} = \{C, g^{(\alpha_i)}_{m+i}\,(i = 1, \dots, n)\}/C,$$

или, если положим

$$\tilde{y}_{m+i} = g^{(\alpha_i)}_{m+i} + C \in \Gamma/C \quad (i = 1, \dots, n),$$

можем просто писать

$$(3,36) \qquad \tilde{G}_2^{(p)} = \{\tilde{y}_{m+i}\,(i = 1, \dots, n)\}.$$

Из формулы (3,36) следует, что $\tilde{G}_2^{(p)}$ является группой с $n$ образующими, или, как известно, изоморфна некоторой фактор-группе свободной абелевой группы ранга $n$. Так как группа $\tilde{G}_2^{(p)}$ $p$-примарна, то отсюда, в силу теоремы 1, уже следует, что

$$(3,37) \qquad r_D(\tilde{G}_2^{(p)}) \leqq n = r - m.$$

Кроме того напомним, что из формулы (3,36) и периодичности группы $\tilde{G}_2^{(p)}$ непосредственно следует ее конечность.

Как мы доказали, подгруппа $\tilde{G}_1^{(p)}$ является полной группой, значит, служит прямым слагаемым для группы $\tilde{G}^{(p)}$. Следовательно, существует некоторое прямое разложение вида

$$(3,38) \qquad \tilde{G}^{(p)} = \tilde{G}_1^{(p)} \dotplus \tilde{K}.$$

Тогда для группы $\tilde{K}$ имеет место изоморфизм

$$\tilde{K} \cong \tilde{G}^{(p)}/\tilde{G}_1^{(p)}.$$

По (3,22) в силу первой теоремы об изоморфизме имеем

$$\tilde{G}^{(p)}/\tilde{G}_1^{(p)} = \{\tilde{G}_1^{(p)}, \tilde{G}_2^{(p)}\}/\tilde{G}_1^{(p)} \cong \tilde{G}_2^{(p)}/(\tilde{G}_1^{(p)} \cap \tilde{G}_2^{(p)}),$$

или, наконец,

$$(3,39) \qquad \tilde{K} \cong \tilde{G}_2^{(p)}/(\tilde{G}_1^{(p)} \cap \tilde{G}_2^{(p)}).$$

Так как группа $\tilde{G}_2^{(p)}$ является конечной, то из изоморфизма (3,39) следует, что конечной должна быть и группа $\tilde{K}$. Но тогда группа $\tilde{K}$ является также редуцированной группой, или, как следует из прямого разложения (3,38), подгруппа $\tilde{G}_1^{(p)}$ будет максимальной полной подгруппой группы $\tilde{G}^{(p)}$. Тогда в силу определения 2 имеем

$$r_p^*(G/C) = r_D(\tilde{G}_1^{(p)}),$$

или, по формуле (3,33)

$$r_p^*(G/C) = m(\mathfrak{K}^{(p)}),$$

и теорема полностью доказана.

Замечание. Теоремой Мальцева, сформулированной в отделе 1, мы до сих пор нигде не пользовались, так как существование канонической $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$ в течение доказательства предшествующей теоремы мы наперед предполагали.

**4.** В отличие от предшествующего отдела, где мы ввели понятие $p$-ранга некоторых периодических групп, в этом отделе определим понятие $p$-ранга и для некоторых групп без кручения, а именно для групп конечного ранга. Притом $p$-ранг такой группы определим тем же образом, как А. Г. Курош в [2], § 40.

Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_r)$ — произвольный ее базис. Пусть $p$ — некоторое простое (положительное) число. Если $\mathfrak{P}_p$ — аддитивная группа поля всех $p$-адических чисел и если символ $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ представляет аддитивную группу всех линейных форм вида $\mathfrak{p}_1 x_1 + \mathfrak{p}_2 x_2 + \ldots + \mathfrak{p}_r x_r$, где $\mathfrak{p}_i \in \mathfrak{P}_p$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, или же группу вида

$$\mathfrak{P}_p^{(r)} = \sum_{i=1}^{r}{}_d \mathfrak{P}_p x_i,$$

то группу $G$ можно по тем же причинам как в отделе 1, считать подгруппой группы $\mathfrak{P}_p^{(r)}$. Притом группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ будем принимать всегда за операторную группу, областью операторов которой является область целостности целых $p$-адических чисел $\mathfrak{J}_p$. Умножение элемента $g \in \mathfrak{P}_p^{(r)}$, $g = \mathfrak{p}_1 x_1 + \mathfrak{p}_2 x_2 + \ldots + \mathfrak{p}_r x_r$, на целое $p$-адическое число $\mathfrak{a}$ определено формулой

$$\mathfrak{a} g = \mathfrak{a}\mathfrak{p}_1 x_1 + \mathfrak{a}\mathfrak{p}_2 x_2 + \ldots + \mathfrak{a}\mathfrak{p}_r x_r.$$

Легко видеть, что группа $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ является полной группой в отношении к области операторов $\mathfrak{J}_p$, или, как будем говорить, $\mathfrak{J}_p$-полной. Только что описанное погружение группы $G$ в группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ будем называть погружением группы $G$ в $\mathfrak{J}_p$-полную группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ при помощи базиса $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$.

В заключение отметим, что если погрузим группу без кручения $G$ конечного ранга $r \geqq 1$ при помощи некоторого ее базиса $B$ в полную группу $\mathscr{R}^{(r)}$ и при помощи того же базиса $B$ в $\mathfrak{J}_p$-полную группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$, то $\mathscr{R}^{(r)}$ можно считать подгруппой группы $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ (но не операторной подгруппой), или, $G \subseteq \mathscr{R}^{(r)} \subseteq \mathfrak{P}_p^{(r)}$.

В группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ введем топологию общепринятым образом, а именно так, что сходимость в ней определим как сходимость „по координатам“: Элемент

$g = \mathfrak{p}_1 x_1 + \mathfrak{p}_2 x_2 + \ldots + \mathfrak{p}_r x_r \in \mathfrak{P}_p^{(r)}$ точно тогда служит пределом последовательности элементов $g_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ из $\mathfrak{P}_p^{(r)}$,

$$g_n = \mathfrak{p}_{n1} x_1 + \mathfrak{p}_{n2} x_2 + \ldots + \mathfrak{p}_{nr} x_r \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

если

$$\lim_{n \to \infty} {}_p\, \mathfrak{p}_{ni} = \mathfrak{p}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Теперь символом $\mathscr{R}_{(p)}$ будем обозначать аддитивную группу всех рациональных чисел, знаменатель которых, если представлены в виде несократимой дроби, взаимно прост с простым числом $p$; значит, $\mathscr{R}_{(p)} \subseteq \mathfrak{J}_p$. Если группа без кручения $G$ конечного ранга $r \geqq 1$ погружена при помощи некоторого своего базиса $B$ в $\mathfrak{J}_p$-полную группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$, или $G \subseteq \mathfrak{P}_p^{(r)}$, то положим

$$(4,1) \qquad G_{(p)} = \mathscr{R}_{(p)} G \subseteq \mathfrak{P}_p^{(r)}.$$

Если $\bar{G}_{(p)}$ представляет замыкание множества $G_{(p)}$ в $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ (по отношению к введенной топологии), то $\bar{G}_{(p)}$ является замкнутой (операторной) подгруппой операторной группы $\mathfrak{P}_p^{(r)}$. Как известно (см. [2], § 40), замкнутую подгруппу $\bar{G}_{(p)}$ группы $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ можно представить в виде прямой суммы

$$(4,2) \qquad \bar{G}_{(p)} = \mathfrak{P}_p y_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{P}_p y_k \dotplus \mathfrak{J}_p y_{k+1} \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{J}_p y_r,$$

где $y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ – удобные элементы из $\bar{G}_{(p)}$. Число $k$, выступающее в правой части равенства (4,2), является инвариантом группы $G$, зависящим только от группы $G$ и от простого числа $p$.

**Определение 3.** Только что определенное число $k$ будем называть $p$-рангом группы без кручения $G$ и будем его обозначать символом $r_p(G)$.

В дальнейшем мы будем заниматься соотношением между инвариантом $r_p(G)$ группы без кручения $G$ и $p$-матрицами Мальцева из отдела 1.

**Лемма 4.1.** *Пусть $G$ – группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ – произвольный ее базис и пусть группа $G$ погружена при помощи базиса $B$ в $\mathfrak{J}_p$-полную группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$. Если символом $\bar{M}$ обозначим замыкание множества $M$ в $\mathfrak{P}_p^{(r)}$, то имеет место равенство*

$$(4,3) \qquad \overline{G_{(p)}} = \overline{\mathscr{R}_{(p)} \Gamma^{(p)}(B)}.$$

Доказательство. Для доказательства справедливости равенства (4,3) достаточно убедиться в том, что имеет место даже равенство

$$(4,4) \qquad G_{(p)} = \mathscr{R}_{(p)} \Gamma^{(p)}(B).$$

Пусть $\Pi$ – множество всех простых (положительных) чисел и пусть $p$ – данное простое число. По лемме 3.1 имеем

$$G = \{\Gamma^{(q)}(B) \quad (q \in \Pi)\}$$

и отсюда, очевидно, следует соотношение

$$(4,5) \qquad G_{(p)} = \mathscr{R}_{(p)} G = \{\mathscr{R}_{(p)} \Gamma^{(q)}(B) \quad (q \in \Pi)\}.$$

Каждая $q$-примитивная подгруппа $\Gamma^{(q)}(B)$ группы $G$ содержит, очевидно, все элементы $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, и поэтому будет

$$(4,6) \qquad \sum_{i=1}^{r}{}_d \mathscr{R}_{(p)} x_i \subseteq \mathscr{R}_{(p)} \Gamma^{(q)}(B) \quad (q \in \Pi) .$$

Но легко убедиться в том, что для $q \neq p$ $(q \in \Pi)$ имеет место и обратное включение

$$\mathscr{R}_{(p)} \Gamma^{(q)}(B) \subseteq \sum_{i=1}^{r}{}_d \mathscr{R}_{(p)} x_i ,$$

значит, можем писать

$$(4,7) \qquad \mathscr{R}_{(p)} \Gamma^{(q)}(B) = \sum_{i=1}^{r}{}_d \mathscr{R}_{(p)} x_i \quad (q \in \Pi,\, q \neq p) .$$

По (4,6) имеем в частности

$$\sum_{i=1}^{r}{}_d \mathscr{R}_{(p)} x_i \subseteq \mathscr{R}_{(p)} \Gamma^{(p)}(B) ,$$

значит, из (4,7) следуют соотношения

$$(4,8) \qquad \mathscr{R}_{(p)} \Gamma^{(q)}(B) \subseteq \mathscr{R}_{(p)} \Gamma^{(p)}(B) \quad (q \neq p) .$$

Если сравним соотношения (4,5) и (4,8), то непосредственно получим равенство (4,4), и этим лемма полностью доказана.

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — произвольный ее базис. Если $\mathfrak{K}^{(p)}$ — каноническая $p$-матрица $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы $G$ и если символ $r_p(G)$ обозначает $p$-ранг группы $G$, то имеет место равенство*

$$(4,9) \qquad r_p(G) = m(\mathfrak{K}^{(p)}) .$$

Доказательство. В течение всего доказательства будем предполагать, что группа $G$ погружена при помощи базиса $B$ в $\mathfrak{J}_p$-полную группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$, или, группу $G$, и остальные группы будем считать подгруппами (неявляющимися необходимо операторными) группы $\mathfrak{P}_p^{(r)}$.

Пусть $\mathfrak{K}^{(p)} = (K^{(\alpha,p)})_{\alpha=1}^{\infty}$ — данная каноническая $p$-матрица $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы $G$ вида (1,8). Для каждого натурального числа $\alpha$ имеет $\alpha$-тая компонента $K^{(\alpha,p)}$ вид (1,9), где целые рациональные числа $\lambda_i = \lambda_i(\alpha, p)$ $(i = 1, \ldots, n = r - m(\mathfrak{K}^{(p)}))$ определены формулами (1,10). Если положим, подобно как в предшествующем отделе, для каждого натурального числа $\alpha$

$$(4,10) \qquad g_i^{(\alpha)} = \frac{1}{p^\alpha}\left(x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)} x_{m+j}\right) \quad (i = 1, \ldots, m = m(\mathfrak{K}^{(p)})$$

(см. формулу (3,15)), и также

$$(4,11) \qquad g_{m+i}^{(\alpha)} = \frac{p^{\lambda_i(\alpha,p)}}{p^\alpha}\left(x_{m+i} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_{m+j}\right) \quad (i = 1, \ldots, n = r - m)$$

(см. формулу (3,16)), то элементы $g_i^{(\alpha)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha = 1, 2, \ldots)$ станут образующими для $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)} = \Gamma^{(p)}(B)$, иліже будет

$$(4{,}12) \qquad \Gamma^{(p)} = \{g_i^{(\alpha)}\,(i = 1, 2, \ldots, r;\ \alpha = 1, 2, \ldots)\}\,.$$

(Сравни с (3,18)). Из соотношений (4,11) и (1,10) следует для каждого натурального числа $\alpha > \alpha_i$

$$(4{,}13) \qquad g_{m+i}^{(\alpha)} = \frac{1}{p^{\alpha_i}}\left(x_{m+i} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}x_{m+j}\right) = g_{m+i}^{(\alpha_i)} \quad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

и для натуральных чисел $\alpha \leqq \alpha_i$ опять имеем

$$(4{,}14) \qquad p^{\alpha_i-\alpha}g_{m+i}^{(\alpha_i)} = \frac{1}{p^{\alpha}}\left(x_{m+i} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}x_{m+j}\right) = g_{m+i}^{(\alpha)} \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Итак, если положим

$$(4{,}15) \qquad y_{m+i} = g_{m+i}^{(\alpha_i)} = \frac{1}{p^{\alpha_i}}\left(x_{m+i} + \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij}x_{m+j}\right) \quad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

то в силу соотношений (4,12), (4,13), (4,14) и (4,15) можно группу $\Gamma^{(p)}$ представить в виде

$$(4{,}16) \qquad \Gamma^{(p)} = \{g_i^{(\alpha)}\,(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, 2, \ldots),\ y_{m+i}\,(i = 1, \ldots, n)\}\,.$$

Если $g$ – произвольный элемент группы $\mathscr{R}_{(p)}\Gamma^{(p)}$, то по (4,16) можно элемент $g$ записать в виде

$$(4{,}17) \qquad g = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{\alpha\in A_i} \varrho_i^{(\alpha)} g_i^{(\alpha)}\right) + \sum_{i=m+1}^{r} \varrho_i y_i\,,$$

где $A_i\,(i = 1, \ldots, m)$ – некоторые конечные (может быть и пустые) множества натуральных чисел и $\varrho_j$, $\varrho_i^{(\alpha)}$ $(\alpha \in A_i;\ i = 1, \ldots, m;\ j = m + 1, \ldots, r)$ – удобные рациональные числа из $\mathscr{R}_{(p)}$.

Теперь положим

$$(4{,}18) \qquad y_i^{(\alpha)} = p^{\alpha}g_i^{(\alpha)} = x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)}x_{m+j} \quad (i = 1, \ldots, m\,;\ \alpha = 1, 2, \ldots)\,;$$

очевидно, будет $y_i^{(\alpha)} \in \Gamma^{(p)} \subseteq \mathscr{R}_{(p)}\Gamma^{(p)}\,(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, 2, \ldots)$. Для каждого индекса $i\,(1 \leqq i \leqq m)$ последовательность элементов $(y_i^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ сходится в группе $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ к некоторому элементу $y_i \in \mathfrak{P}_p^{(r)}$,

$$y_i = \lim_{\alpha\to\infty} y_i^{(\alpha)}\ (\text{в } \mathfrak{P}_p^{(r)}) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

и это будет в точности к элементу

$$(4{,}19) \qquad y_i = x_i + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_{ij}x_{m+j} \quad (i = 1, \ldots, m)\,;$$

притом мы пользуемся здесь символами $\mathfrak{a}_{ij}$ так, как мы условились в отделе 1, т. е. полагаем

$$\mathfrak{a}_{ij} = \lim_{\alpha\to\infty}{}_p\, a_{ij}^{(\alpha)} \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)\,.$$

Так как $y_i^{(\alpha)} \in \mathscr{R}_{(p,}\Gamma^{(p)}$ $(i = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, 2, \ldots)$, то об элементах $y_i$ можно уже утверждать, что $y_i \in \overline{\mathscr{R}_{(p)}\Gamma^{(p)}}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Но одновременно также $y_i \in \Gamma^{(p)} \subseteq \overline{\mathscr{R}_{(p)}\Gamma^{(p)}}$ $(i = m + 1, \ldots, r)$ (см. соотношение (4,16)), илиже имеем

$$y_i \in \overline{\mathscr{R}_{(p)}\Gamma^{(p)}} \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,.$$

Из соотношений (4,15) и (4,19) непосредственно видно, что элементы $y_i$ $(i = = 1, 2, \ldots, r)$ линейно независимы (даже над $\mathfrak{J}_p$).

Пусть теперь $s/t$ — произвольное ненулевое рациональное число, где $s$, $t$ — уже целые рациональные числа. Число $s/t$ представим в виде $s/t = s/(t' \,.\, p^\alpha)$, где $(t', p) = 1$ и $\alpha \geqq 0$. Тогда в силу (4,18) для каждого натурального числа $\beta > \alpha$ будет

$$\frac{s}{t}\, y_i^{(\beta)} = \frac{s \,.\, p^{\beta - \alpha}}{t'} \,.\, \frac{1}{p^\beta} \,.\, p^\beta g_i^{(\beta)} = \frac{s \,.\, p^{\beta - \alpha}}{t'}\, g_i^{(\beta)} \quad (i = 1, \ldots, m)\,;$$

но притом $(s \,.\, p^{\beta - \alpha})/t' \in \mathscr{R}_{(p)}$, $g_i^{(\beta)} \in \Gamma^{(p)}$, или, для $\beta > \alpha$ имеем

$$\frac{s}{t}\, y_i^{(\beta)} \in \mathscr{R}_{(p)}\Gamma^{(p)} \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

Отсюда уже непосредственно следует, что

$$\lim_{\beta \to \infty} \left(\frac{s}{t}\, y_i^{(\beta)}\right) = \frac{s}{t}\, y_i \in \overline{\mathscr{R}_{(p)}\Gamma^{(p)}} \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

Так как ненулевое рациональное число $s/t$ было выбрано произвольно, то этим мы доказали, что имеют место соотношения

$$\mathscr{R} y_i \subseteq \overline{\mathscr{R}_{(p)}\Gamma^{(p)}} \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

В силу леммы 4.1 можно последнее включение еще записать в виде

(4,20) $$\mathscr{R} y_i \subseteq \bar{G}_{(p)} \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

Так как подгруппа $\bar{G}_{(p)}$ является замкнутой подгруппой группы $\mathfrak{P}_p^{(r)}$, из соотношений (4,20) следуют также включения

(4,21) $$\overline{\mathscr{R} y_i} = \mathfrak{P}_p y_i \subseteq \bar{G}_{(p)} \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

Из замкнутости подгруппы $\bar{G}_{(p)}$ в группе $\mathfrak{P}_\beta^{(r)}$ (как мы уже заметили, это значит, что $\bar{G}_{(p)}$ является операторной подгруппой группы $\mathfrak{P}_r^{(r)}$) следует, что если $y \in \in \bar{G}_{(p)}$, то уже будет $\mathfrak{J}_p y \subseteq \bar{G}_{(p)}$. Следовательно, справедливы соотношения

(4,22) $$\mathfrak{J}_p y_i \subseteq \bar{G}_{(p)} \quad (i = m + 1, \ldots, r)\,.$$

Из соотношений (4,21) и (4,22) и из линейной независимости (над $\mathfrak{J}_p$) элементов $y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ вытекает, что подгруппа (операторная) $\mathscr{U}$ группы $\mathfrak{P}_p^{(r)}$, определенная формулой

(4,23) $$\mathscr{U} = \mathfrak{P}_p y_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{P}_p y_m \dotplus \mathfrak{J}_p y_{m+1} \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{J}_p y_r\,,$$

будет уже подгруппой группы $\bar{G}_{(p)}$:

$$(4,24) \qquad \mathscr{U} \subseteq \bar{G}_{(p)} .$$

Теперь докажем, что имеет место и обратное включение, т. е. включение

$$(4,25) \qquad \bar{G}_{(p)} \subseteq \mathscr{U} .$$

Но прежде чем перейти к доказательству справедливости соотношения (4,25), нужно напомнить одно свойство целых $p$-адических чисел. Докажем именно справедливость следующего вспомогательного утверждения: Пусть $\mathfrak{a} = (a^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ — некоторое целое $p$-адическое число и пусть $\alpha$ — некоторое натуральное число. Тогда целое $p$-адическое число $\mathfrak{a} - a^{(\alpha)}$ разделимо (в $\mathfrak{J}_p$) на число $p^\alpha$, или, существует целое число $\mathfrak{b} \in \mathfrak{J}_p$ так, что $\mathfrak{a} - a^{(\alpha)} = p^\alpha \mathfrak{b}$.

Утверждение получим, если представим число $\mathfrak{a} = (a^{(\beta)})_{\beta=1}^{\infty}$ в виде суммы бесконечного $p$-адически сходящегося ряда $\sum_{k=0}^{\infty} s_k p^k$, частными суммами которого будут в точности целые рациональные числа $a^{(\beta)}$ $(\beta = 1, 2, \ldots)$, или, точнее

$$a^{(\beta)} = \sum_{k=0}^{\beta-1} s_k p^k \quad (\beta = 1, 2, \ldots) .$$

Следовательно, тогда будет

$$\mathfrak{a} - a^{(\alpha)} = \sum_{k=\alpha}^{\infty} s_k p^k = p^\alpha \sum_{k=\alpha}^{\infty} s_k p^{k-\alpha} ;$$

притом, очевидно, $\sum_{k=\alpha}^{\infty} s_k p^{k-\alpha}$ является целым $p$-адическим числом, или, искомым числом $\mathfrak{b}$, и утверждение доказано.

Из определения элементов $y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ формулами (4,19) и (4,15) и из определения группы $\mathscr{U}$ формулой (4,23) следует, что $x_i \in \mathscr{U}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, или, должно быть

$$(4,26) \qquad \sum_{i=1}^{r}{}_{d} \mathfrak{J}_p x_i \subseteq \mathscr{U} .$$

Так как $\mathfrak{a}_{ij} = (a_{ij}^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ — целые $p$-адические числа, то по только что доказанному вспомогательному утверждению существуют такие целые $p$-адические числа $\mathfrak{b}_{ij}^{(\alpha)}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2, \ldots)$, что справедливы равенства $\mathfrak{a}_{ij} - a_{ij}^{(\alpha)} = p^\alpha \mathfrak{b}_{ij}^{(\alpha)}$, или

$$(4,27) \qquad \frac{1}{p^\alpha} \mathfrak{a}_{ij} - \frac{1}{p^\alpha} a_{ij}^{(\alpha)} = \mathfrak{b}_{ij}^{(\alpha)} \in \mathfrak{J}_p .$$

Если теперь $i$ — некоторое из чисел $1, \ldots, m$, то из соотношений (4,19), (4,10) и (4,27) следует

$$\frac{1}{p^\alpha} y_i - g_i^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{b}_{ij}^{(\alpha)} x_{m+j} \in \sum_{j=1}^{r}{}_{d} \mathfrak{J}_p x_j \quad (\alpha = 1, 2, \ldots) ,$$

значит, по (4,26) имеем

$$(4,28) \qquad \frac{1}{p^\alpha} y_i - g_i^{(\alpha)} \in \mathscr{U} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Так как $\mathfrak{P}_p y_i \subseteq \mathscr{U}$, то в частности будет $(1/p^\alpha)\, y_i \in \mathscr{U}$ для $\alpha = 1, 2, \ldots$, итак, из (4,28) вытекает, что также $g_i^{(\alpha)} \in \mathscr{U}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$. Но число $i$ выбрано произвольно, $1 \leqq i \leqq m$, следовательно,

$$(4,29) \qquad g_i^{(\alpha)} \in \mathscr{U} \quad (i = 1, \ldots, m;\ \alpha = 1, 2, \ldots).$$

Далее, так как $y_{m+i} \in \mathscr{U}$ $(i = 1, \ldots, n)$, то из соотношений (4,15), (4,13) и (4,14) получаем, что

$$(4,30) \qquad g_i^{(\alpha)} \in \mathscr{U} \quad (i = m + 1, \ldots, r;\ \alpha = 1, 2, \ldots).$$

Соединением соотношений (4,29) и (4,30) получим включение $\Gamma^{(p)} \subseteq \mathscr{U}$, и так как $\mathscr{R}_{(p)} \subseteq \mathfrak{J}_p$, то приходим к соотношению

$$\mathscr{R}_{(p)}\Gamma^{(p)} \subseteq \mathfrak{J}_p\mathscr{U} = \mathscr{U}.$$

Подгруппа $\mathscr{U}$ является замкнутой подгруппой группы $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ и поэтому будет (см. (4,3))

$$\bar{G}_{(p)} = \overline{\mathscr{R}_{(p)}\Gamma^{(p)}} \subseteq \mathscr{U},$$

и так, справедливо соотношение (4,25). Сравнением соотношений (4,24) и (4,25) получим, наконец, равенство $\bar{G}_{(p)} = \mathscr{U}$, или, по (4,23)

$$\bar{G}_{(p)} = \mathfrak{P}_p y_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{P}_p y_m \dotplus \mathfrak{J}_p y_{m+1} \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{J}_p y_r.$$

Если напомним, что $m = m(\mathfrak{K}^{(p)})$, то из последнего равенства и из определения 3 уже следует формула (4,9).

Теорема полностью доказана.

**Теорема 4.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — произвольный ее базис и пусть $C$ — подгруппа группы $G$ вида*

$$C = \{x_1\} \dotplus \{x_2\} \dotplus \ldots \dotplus \{x_r\}.$$

*Тогда для $p$-ранга $r_p(G)$ справедлива формула*

$$(4,31) \qquad r_p(G) = r_p^*(G/C).$$

Доказательство. Из теоремы Мальцева, сформулированной в отделе 1, следует существование некоторой канонической $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$ $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$. (Если нужно, то мы переставим элементы базиса $B$.) Теперь, доказываемая теорема является уже непосредственным следствием теорем 2 и 3.

Замечание. Главное значение теоремы 4 в том, что открывает связи между $p$-рангом группы без кручения $G$ и ее структурой. Кроме того, формулой (4,31) дана абстрактно-групповая характеристика инварианта $r_p(G)$, который был первоначально определен при помощи топологических средств.

**5.** В этом отделе докажем несколько основных теорем о $p$-ранге групп без кручения конечного ранга. Доказательства этих теорем, если бы мы пользовались определением 3, являлись бы очень трудными. Но если воспользоваться формулой (4,31), то эти доказательства станут совсем простыми.

**Теорема 5.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть $H$ — произвольная ее подгруппа того же ранга $r$. Тогда для каждого простого числа $p$ имеет место формула*

$$r_p(G) = r_p(H) + r_p^*(G/H). \tag{5,1}$$

Доказательство. Пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — произвольный базис подгруппы $H$ и пусть $C$ — подгруппа, определенная формулой $C = \sum_{i=1}^{r}{}_d\{x_i\}$. Так как $r(G) = r(H) = r$, служит $B$ базисом и для всей группы $G$, то по теореме 4 будет

$$r_p(G) = r_p^*(G/C), \quad r_p(H) = r_p^*(H/C). \tag{5,2}$$

Пользуясь второй теоремой об изоморфизме, получим соотношение

$$G/H \cong (G/C)/(H/C). \tag{5,3}$$

Как следует из теоремы 1, фактор-группа $G/C$ является периодической группой локально конечного $D$-ранга, или, к группе $G/C$ и ее подгруппе $H/C$ можно применить лемму 3.4. Тогда, в силу формулы (3,12), из (5,3) следует соотношение

$$r_p^*(G/H) = r_p^*(G/C) - r_p^*(H/C).$$

Если в последнюю формулу подставим по (5,2), то получим равенство

$$r_p^*(G/H) = r_p(G) - r_p(H).$$

Но это уже равенство (5,1), и теорема полностью доказана.

Очень важным понятием в теории абелевых групп является понятие сервантной подгруппы. Как известно, подгруппа $H$ группы без кручения $G$ является сервантной подгруппой в $G$ тогда и только тогда, если фактор-группа $G/H$ будет группой без кручения. (Притом нулевую группу считаем также группой без кручения.) Если $M$ — произвольное непустое множество элементов такой группы без кручения $G$, то наименьшую сервантную подгруппу (такая существует и однозначно определена множеством $M$) группы $G$, содержащую множество $M$, будем называть сервантной оболочкой множества $M$ в группе $G$ и обозначать символом $\mathscr{S}(M)$.

**Теорема 6.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть $H$ — произвольная сервантная подгруппа группы $G$. Тогда для каждого простого числа $p$ имеет место формула*

$$r_p(G) = r_p(H) + r_p(G/H). \tag{5,4}$$

Доказательство. Символом $s$ обозначим ранг подгруппы $H$, $s = r(H)$. Если $s = 0$, или $s = r$, т. е. если $H = (0)$, или же $H = G$, то формула (5,4) будет тривиально выполнена. Следовательно, в дальнейшем будем предполагать, что $1 \leqq s \leqq r - 1$.

В группе $G$ выберем базис $x_1, x_2, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_r$ так, чтобы элементы $x_1, x_2, \ldots, x_s$ представляли базис подгруппы $H$, и определим подгруппы

$$C = \sum_{i=1}^{r}{}_d\{x_i\}\,, \quad D = \sum_{i=1}^{s}{}_d\{x_i\}\,, \quad D' = \sum_{i=s+1}^{r}{}_d\,\{x_i\}\,.$$

Если $p$ — некоторое простое число, то по теореме 4 будет

$$r_p(G) = r_p^*(G/C)\,, \quad r_p(H) = r_p^*(H/D)\,. \tag{5,5}$$

Очевидно, в фактор-группе $\tilde{G} = G/H$ представляют элементы

$$\tilde{x}_i = x_i + H \in \tilde{G} = G/H \quad (i = s + 1, \ldots, r)$$

некоторый базис, и поэтому, если положим

$$\tilde{C} = \sum_{i=s+1}^{r}{}_d\,\{\tilde{x}_i\}\,, \tag{5,6}$$

то по теореме 4 также будет

$$r_p(G) = r_p(G/H) = r_p^*(\tilde{G}/\tilde{C})\,. \tag{5,7}$$

Легко видеть, что группу $\tilde{C}$, определенную формулой (5,6), можно представить в виде

$$\tilde{C} = \{x_{s+1}, \ldots, x_r, H\}/H = (D' \dotplus H)/H\,.$$

Отсюда, применением второй теоремы об изоморфизме получим

$$\tilde{G}/\tilde{C} = (G/H)/((D' \dotplus H)/H) \cong G/(D' \dotplus H)\,,$$

или, в силу (5,7) будет

$$r_p(\tilde{G}) = r_p^*(G/(D' \dotplus H))\,. \tag{5,8}$$

По второй теореме об изморфизме также имеем

$$G/(D' \dotplus H) \cong (G/C)/((D' \dotplus H)/C)\,,$$

значит, применением леммы 3.4 к группе $G/C$ и ее подгруппе $(D' \dotplus H)/C$ прилем к формуле

$$r_p^*(G/(D' \dotplus H)) = r_p^*(G/C) - r_p^*((D' \dotplus H)/C)\,. \tag{5,9}$$

Имея ввиду соотношения (5,5) и (5,8), можем формулу (5,9) записать в виде

$$r_p(\tilde{G}) = r_p(G) - r_p^*((D' \dotplus H)/C)\,. \tag{5,10}$$

Так как, очевидно, $D' \dotplus H = \{C, H\}$ и $D = C \cap H$, то в силу первой теоремы об изоморфизме имеют место соотношения

$$(D' \dotplus H)/C = \{C, H\}/C \cong H/(C \cap H) = H/D\,.$$

Отсюда и из соотношений (5,5) уже следует

$$r_p^*((D' \dotplus H)/C) = r_p^*(H/D) = r_p(H) . \tag{5,11}$$

Если напомним, что мы положили $\tilde{G} = G/H$, и если учтем к (5,11), то из соотношения (5,10) непосредственно следует формула (5,4), и теорема доказана.

Замечание. Если $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 2$ и если $G = G_1 \dotplus G_2$ — некоторое ее прямое разложение, то для каждого простого числа $p$ имеет место формула

$$r_p(G) = r_p(G_1) + r_p(G_2) .$$

Легко видеть, что это утверждение является простым следствием предшествующей теоремы 6.

Теоремы 5 и 6 касались особенного выбора подгруппы $H$ в группе $G$: В теореме 5 была выбрана подгруппа $H$ так, что фактор-группа $G/H$ являлась группой периодической, между тем как в теореме 6 фактор-группа $G/H$ являлась группой без кручения. Но если выбрать подгруппу $H$ в группе $G$ произвольно, то в общем случае будет фактор-группа $G/H$ смешанной группой. Этим общим случаем занимается следующая теорема.

**Теорема 7.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть $H$ — произвольная ее подгруппа. Если символ $\tilde{P}$ обозначает периодическую часть фактор-группы $\tilde{G} = G/H$, то для каждого простого числа $p$ имеет место формула*

$$r_p(G) = r_p(\tilde{G}/\tilde{P}) + r_p(H) + r_p^*(\tilde{P}) . \tag{5,12}$$

Доказательство. Если $\mathscr{S}(H)$ — сервантная оболочка подгруппы $H$ в группе $G$, то по теореме 6 будет

$$r_p(G) = r_p(\mathscr{S}(H)) + r_p(G/\mathscr{S}(H)) . \tag{5,13}$$

Так как группа $\mathscr{S}(H)$ является в точности множеством всех элементов из $G$, зависящих линейно от $H$, то должно быть

$$\tilde{P} = \mathscr{S}(H)/H . \tag{5,14}$$

Итак, в силу второй теоремы об изоморфизме имеем

$$\tilde{G}/\tilde{P} = (G/H)/(\mathscr{S}(H)/H) \cong G/\mathscr{S}(H) ,$$

или, для $p$-рангов имеет место соотношение

$$r_p(\tilde{G}/\tilde{P}) = r_p(G/\mathscr{S}(H)) . \tag{5,15}$$

Так как, очевидно, имеет место равенство $r(H) = r(\mathscr{S}(H))$, то можно к группе $\mathscr{S}(H)$ и ее подгруппе $H$ применить теорему 5, и получим формулу

$$r_p(\mathscr{S}(H)) = r_p(H) + r_p^*(\mathscr{S}(H)/H) ,$$

которую можем ввиду (5,14) переписать в виде

$$(5,16) \qquad r_p(\mathscr{S}(H)) = r_p(H) + r_p^*(\tilde{P})\,.$$

Если в правую часть формулы (5,13) подставим по (5,15) и (5,16), то получим в точности формулу (5,12), и этим теорема доказана.

**6.** Пусть $G$ — группа без кручения, $p$ — простое число и $g$ — произвольный элемент из $G$. Если уравнение

$$(6,1) \qquad p^k x = g$$

обладает в группе $G$ решением для каждого целого рационального числа $k \geqq 0$, то будем писать $\chi(g; p, G) = \infty$; если уравнение (6,1) обладает в группе $G$ решением для некоторого целого $k = n$, но не обладает уже решением для $k = n + 1$, то положим $\chi(g; p, G) = n$. Выражение $\chi(g; p, G)$ будем называть $p$-высотой элемента $g$ в группе $G$. Из определения $p$-высоты следует, что если $H$ — подгруппа группы $G$, то для $g \in H$ всегда будет $\chi(g; p, H) \leqq \chi(g; p, G)$; притом, если $H$ — сервантная подгруппа группы $G$, то имеет место равенство $\chi(g; p, H) = \chi(g; p, G)$.

**Лемма 6.1.** *Пусть $G$ — группа без кручения ранга $r = 1$ и пусть $x$ — произвольный ненулевой элемент из $G$. Если $p$ — простое число, то $r_p(G) = 1$ тогда и только тогда, если $\chi(x; p, G) = \infty$.*

Доказательство. По предположению $x \neq 0$, итак, множество $(x) = B$ является базисом группы $G$. Тогда каноническая $p$-матрица $\mathfrak{K}^{(p)}$ $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы $G$ имеет вид $\mathfrak{K}^{(p)} = (\mathfrak{p}_\alpha(p))$ (см. (1,8)), где $0 \leqq \alpha \leqq \infty$. Притом, из определения понятия $p$-матрицы подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ (см. § 1) следует, что $\alpha = \infty$ тогда и только тогда, если $\chi(x; p, G) = \infty$. Но по теореме 3 будет $\alpha = \infty$ тогда и только тогда, если $r_p(G) = 1$, и этим лемма доказана.

Пусть $M$ — некоторое конечное множество элементов группы без кручения $G$ и пусть $p$ — простое число. Символом $h_p(M; G)$ обозначим число элементов множества $M$, обладающих в $G$ бесконечной $p$-высотой.

**Теорема 8.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — произвольный ее базис. Если положим*

$$(6,2) \qquad D = \{\mathscr{S}(x_i)\,(i = 1, 2, \ldots, r)\} = \sum_{i=1}^{r}{}_d\,\mathscr{S}(x_i)\,,$$

*где $\mathscr{S}(x_i)$ представляет сервантную оболочку множества $(x_i)$ в группе $G$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), то для каждого простого числа $p$ будет*

$$(6,3) \qquad r_p(G) = h_p(B; G) + r_p^*(G/D)\,.$$

Доказательство. В силу замечания, следующего за теоремой 6, и в силу соотношения (6,2) имеет место равенство

$$r_p(D) = \sum_{i=1}^{r} r_p(\mathscr{S}(x_i))\,.$$

Если к группам $\mathscr{S}(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ применим лемму 6.1 и если напомним, что

$$\chi(x_i; p, \mathscr{S}(x_i)) = \chi(x_i; p, G) \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

так как $\mathscr{S}(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — сервантные подгруппы группы $G$, то получим равенство

$$h_p(B; G) = \sum_{i=1}^{r} r_p(\mathscr{S}(x_i)) = r_p(D). \tag{6,4}$$

Теперь остается применить к группе $G$ и ее подгруппе $D$ теорему 5 (смотри формулу (5,1)) и воспользоваться формулой (6,4), и получим формулу (6,3). Этим теорема доказана.

Замечание. Если $G$ — некоторая группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, то в силу теоремы 8 (см. формулу (6,3)) для каждого базиса $B$ группы $G$ имеет место неравенство

$$h_p(B; G) \leqq r_p(G). \tag{6,5}$$

Но возникает вопрос, нельзя ли найти базис $B$ группы $G$ такой, что вместо неравенства (6,5) имеет место уже равенство $h_p(B; G) = r_p(G)$ (для некоторого заданного простого числа $p$). Решению этого вопроса посвящен весь остаток настоящего отдела.

Пусть $G$ — произвольная группа без кручения и пусть $p$ — некоторое простое число. Символом $G[p^\infty]$ обозначим множество всех элементов из $G$, обладающих в $G$ бесконечной $p$-высотой:

$$G[p^\infty] = E(g; g \in G, \chi(g; p, G) = \infty). \tag{6,6}$$

**Лемма 6.2.** *Пусть $G$ — группа без кручения и пусть $p$ — простое число. Тогда множество $G[p^\infty]$, определенное формулой* (6,6), *является сервантной подгруппой группы $G$.*

Доказательство. Очевидно, множество $G[p^\infty]$ является подгруппой группы $G$, итак, остается только убедиться в том, что это сервантная подгруппа. Для этого достаточно доказать следующее предложение: Если $g \in G$ и если для некоторого натурального числа $n$ будет $ng \in G[p^\infty]$, то уже $g \in G[p^\infty]$.

а) Пусть натуральное число $n$ вида $n = p^h$ и пусть $p^h g = g_1 \in G[p^\infty]$. Так как по предположению для каждого целого неотрицательного числа $k$ уравнение $p^k x = g_1 = p^h g$ обладает в группе $G$ решением, то в группе $G$ должно обладать решением и каждое уравнение вида $p^k x = g$, или, $g \in G[p^\infty]$.

б) Пусть натуральное число $n$ взаимно просто с $p$ и пусть $ng = g_1 \in G[p^\infty]$ для некоторого $g \in G$. Следовательно, для каждого целого неотрицательного числа $k$ существуют такие целые рациональные числа $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, что

$$u_1^{(k)} p^k + u_2^{(k)} n = 1,$$

и одновременно существуют такие элементы $g_1^{(k)} \in G$, для которых справедливы равенства

$$p^k g_1^{(k)} = g_1 = ng .$$

Таким образом, для каждого такого числа $k$ будет

$$g = \left(u_1^{(k)} p^k + u_2^{(k)} n\right) g = u_1^{(k)} p^k g + u_2^{(k)} p^k g_1^{(k)} ,$$

или, также

$$g = p^k\left(u_1^{(k)} g + u_2^{(k)} g_1^{(k)}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Но это значит, что $g \in G[p^\infty]$.

в) Пусть теперь $n$ — произвольное натуральное число, представленное в виде $n = p^h \,.\, n'$, где $(n', p) = 1$, и пусть $ng \in G[p^\infty]$ для некоторого $g \in G$. Так как $ng = p^h(n'g) \in G[p^\infty]$, то по а) будет $n'g \in G[p^\infty]$, или, по б) должно уже быть $g \in G\,[p^\infty]$.

Этим лемма полностью доказана.

Пусть теперь $G$ — опять группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — некоторый ее базис. Группу $G$ погрузим при помощи базиса $B$ в $\mathfrak{J}_p$-полную группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ (смотри начало § 4), построим погрдуппу $G_{(p)} = \mathscr{R}_{(p)} G$ и определим замыкание $\bar{G}_{(p)}$ множества $G_{(p)}$ в группе $\mathfrak{P}_p^{(r)}$. Подгруппу $\bar{G}_{(p)}$ группы $\mathfrak{P}_p^{(r)}$ можно представить в виде (4,2). Если положим для простоты

$$(6,7) \qquad \mathscr{V} = \mathfrak{P}_p y_1 \dotplus \mathfrak{P}_p y_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{P}_p y_k ,$$

где $k = r_p(G)$, то только что определенная подгруппа $\mathscr{V}$ группы $\bar{G}_{(p)}$ не зависит никаким образом от выбора элементов $y_i \in \bar{G}_{(p)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, так как это в точности максимальная $\mathfrak{J}_p$-полная подгруппа группы $\bar{G}_{(p)}$, которая однозначно определена группой $\bar{G}_{(p)}$.

Пользуясь только что введенным обозначением, докажем следующую лемму.

**Лемма 6.3.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, погруженная при помощи некоторого своего базиса $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ в $\mathfrak{J}_p$-полную группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$. Пусть $\mathscr{V}$ — максимальная $\mathfrak{J}_p$-полная подгруппа группы $\bar{G}_{(p)}$ определенная формулой* (6,7). *Тогда имеет место равенство*

$$(6,8) \qquad G[p^\infty] = \mathscr{V} \cap G .$$

Доказательство. Пусть $g$ — произвольный элемент из группы $G[p^\infty]$. Это значит, что для каждого целого неотрицательного числа $k$ будет $(1/p^k)\, g \in G$ (вычисляется в $\mathfrak{P}_p^{(r)}$). Значит, если $s/t$ — произвольное рациональное число, то

$$\frac{s}{t}\, g \in \mathscr{R}_{(p)} G = G_{(p)} ,$$

или, $\mathscr{R} g \subseteq G_{(p)}$. Если обозначим символом $\overline{\mathscr{R} g}$ замыкание погдруппы $\mathscr{R} g$ в груп. пе $\mathfrak{P}_p^{(r)}$, то необходимо будет $\overline{\mathscr{R} g} = \mathfrak{P}_p g$, и мы получаем включение $\mathfrak{P}_p g \subseteq \bar{G}_{(p)}$-

Так как $\mathfrak{P}_p g$ является $\mathfrak{J}_p$-полной подгруппой группы $\bar{G}_{(p)}$ и $\mathscr{V}$ — максимальная $\mathfrak{J}_p$-полная подгруппа группы $\bar{G}_{(p)}$, то должно быть $\mathfrak{P}_p g \subseteq \mathscr{V}$, или, в частности $g \in \mathscr{V} \cap G$. Таким образом мы доказали справедливость включения

$$G[p^\infty] \subseteq \mathscr{V} \cap G\,. \tag{6,9}$$

Пусть теперь, наоборот, $g \in \mathscr{V} \cap G$. Так как $g \in \mathscr{V}$, то для каждого $p$-адического числа $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_p$ также будет $\mathfrak{p} g \in \mathscr{V}$, или, в частности

$$\frac{1}{p^\alpha}\, g \in \mathscr{V} \subseteq \bar{G}_{(p)} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{6,10}$$

Но так как одновременно $g \in G$ и $(1/p^\alpha) \in \mathscr{R}$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$, то также имеем

$$\frac{1}{p^\alpha}\, g \in \mathscr{R}G = \mathscr{R}^{(r)} = \sum_{i=1}^{r}{}_d \mathscr{R}x_i \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots)\,. \tag{6,11}$$

Пусть, далее, $\alpha$ — произвольное, но фиксированное натуральное число. В силу $(6,11)$ будет

$$\frac{1}{p^\alpha}\, g = \varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \ldots + \varrho_r x_r\,, \tag{6,12}$$

где $\varrho_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — удобные рациональные числа. Далее, из соотношения $(6,10)$ следует, что существуют элементы $g_n \in G_{(p)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которых имеем

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \frac{1}{p^\alpha}\, g \quad \left(\text{в } \mathfrak{P}_p^{(r)}\right). \tag{6,13}$$

Так как

$$G_{(p)} = \mathscr{R}_{(p)}G \subseteq \mathscr{R}^{(r)} = \sum_{i=1}^{r}{}_d \mathscr{R}x_i\,,$$

то можно каждый элемент $g_n \in G_{(p)}$ представить в виде

$$g_n = \varrho_{n1}x_1 + \varrho_{n2}x_2 + \ldots + \varrho_{nr}x_r \quad (n = 1, 2, \ldots)\,, \tag{6,14}$$

где $\varrho_{ni} \in \mathscr{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, r;\ n = 1, 2, \ldots)$. Из соотношений $(6,12)$, $(6,13)$ и $(6,14)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}{}_p \left(\varrho_{ni} - \varrho_i\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{6,15}$$

Но так как имеет место соотношение $(6,15)$, то существует такое натуральное число $N$, что для $n \geqq N$ будет

$$\varrho_{ni} - \varrho_i \in \mathscr{R}_{(p)} \quad (i = 1, 2, \ldots, r)\,. \tag{6,16}$$

По формулам $(6,12)$ и $(6,14)$ можем писать

$$\frac{1}{p^\alpha}\, g - g_n = \sum_{i=1}^{r} \left(\varrho_i - \varrho_{ni}\right) x_i\,,$$

или, в силу (6,16) для $n \geqq N$ имеем

$$(6,17) \qquad \frac{1}{p^\alpha} g - g_n \in \mathscr{R}_{(p)} G = G_{(p)} \quad (n \geqq N).$$

По преположению $g_n \in G_{(p)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; итак, из (6,17) следует, что также $(1/p^\alpha)\, g \in \mathscr{R}_{(p)} G = G_{(p)}$. Но это значит, что элемент $(1/p^\alpha)\, g$ можно представить в виде

$$(6,18) \qquad \frac{1}{p^\alpha} g = \frac{s}{t} g_1, \quad \frac{s}{t} \in \mathscr{R}_{(p)}, \quad g_1 \in G;$$

притом будем предполагать, что $s$, $t$ — взаимно простые целые рациональные числа. Так как $(s/t) \in \mathscr{R}_{(p)}$ и $(s, t) = 1$, то, очевидно, должно также быть $(t, p^\alpha) = 1$, т. е. существуют такие целые рациональные числа $u_1$, $u_2$, что $u_1 p^\alpha + u_2 t = 1$. Отсюда следует равенство

$$(6,19) \qquad \frac{1}{p^\alpha} g = \frac{1}{p^\alpha} (u_1 p^\alpha + u_2 t)\, g = u_1 g + u_2 t \left(\frac{1}{p^\alpha} g\right).$$

Если подставим в правую часть равенства (6,19) вместо элемента $(1/p^\alpha)\, g$ элемент $(s/t)\, g_1$ (см. формулу (6,18)), то получим наконец

$$\frac{1}{p^\alpha} g = u_1 g + u_2 s g_1 \in G.$$

Так как натуральное число $\alpha$ было выбрано произвольно, то мы доказали, что $(1/p^\alpha)\, g \in G$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$, или, $\chi(g; p, G) = \infty$ и $g \in G[p^\infty]$. Но элемент $g$ был произвольный элемент из $\mathscr{V} \cap G$, значит, мы доказали включение

$$(6,20) \qquad \mathscr{V} \cap G \subseteq G[p^\infty].$$

Из соотношений (6,9) и (6,20) уже следует равенство (6,8), и лемма полностью доказана.

Если $n$ — некоторое натуральное число, то символом $\mathfrak{J}_p^{(n)}$ обозначим $\mathfrak{J}_p$-модуль, векторами которого являются всевозможные системы $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ целых $p$-адических чисел. Кроме того, символом $C^{(n)}$ обозначим множетсво всех систем вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — целые рациональные числа.

**Определение 4.** Пусть $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_s$ — некоторые векторы из модуля $\mathfrak{J}_p^{(n)}$. Векторы $\mathfrak{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ назовем $C$-зависимыми, если существуют целые рациональные числа $c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, не все равные нулю, для которых имеет место соотношение

$$c_1 \mathfrak{v}_1 + c_2 \mathfrak{v}_2 + \ldots + c_s \mathfrak{v}_s \in C^{(n)}.$$

Если таких целых чисел нет, то векторы $\mathfrak{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ будем называть $C$-независимыми.

Пусть теперь $\mathfrak{B}$ — некоторая $p$-матрица типа $m$, $n$ вида

$$(6,21)\qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{b}_{11}, & \mathfrak{b}_{12}, & \dots, & \mathfrak{b}_{1n} \\ \mathfrak{b}_{21}, & \mathfrak{b}_{22}, & \dots, & \mathfrak{b}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{b}_{m1}, & \mathfrak{b}_{m2}, & \dots, & \mathfrak{b}_{mn} \end{pmatrix},$$

элементами которой являются целые $p$-адические числа. Каждую строчку $p$-матрицы (6,21) можно считать вектором из модуля $\mathfrak{J}_p^{(n)}$, следовательно, можно говорить о $C$-зависимых и $C$-независимых строчках $p$-матрицы $\mathfrak{B}$. Среди всех строчек $p$-матрицы $\mathfrak{B}$ найдем произвольное максимальное семейство (это может быть и пустое множество) $C$-независимых строчек; позже докажем, что число строчек такого максимального $C$-независимого семейства является инвариантом $p$-матрицы $\mathfrak{B}$, и будем его обозначать символом $l_p(\mathfrak{B})$.

**Определение 5.** Пусть $\mathfrak{K}^{(p)}$ — произвольная каноническая $p$-матрица вида (1,8), для которой имеет место неравенство $1 \leqq m = m(\mathfrak{K}^{(p)}) \leqq r - 1$. Тогда частичную $p$-матрицу $\mathfrak{A}$,

$$(6,22)\qquad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_{11}, & \mathfrak{a}_{12}, & \dots, & \mathfrak{a}_{1n} \\ \mathfrak{a}_{21}, & \mathfrak{a}_{22}, & \dots, & \mathfrak{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{a}_{m1}, & \mathfrak{a}_{m2}, & \dots, & \mathfrak{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

элементами которой являются целые $p$-адические числа, будем называть $p$-адической клеткой канонической $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$. Если $m(\mathfrak{K}^{(p)}) = 0$, или если $m(\mathfrak{K}^{(p)}) = r$, то в качестве $p$-адической клетки $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$ берем произвольную нулевую матрицу.

**Теорема 9.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, пусть $B = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ — произвольный ее базис и пусть $\mathfrak{K}^{(p)}$ — некоторая каноническая $p$-матрица $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы $G$. Если $p$-матрица $\mathfrak{A}$ является $p$-адической клеткой канонической $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$, то для $p$-ранга $r_p(G)$ группы $G$ имеет место формула*

$$(6,23)\qquad r_p(G) = r(G[p^\infty]) + l_p(\mathfrak{A}).$$

Доказательство. Предположим сначала, что $m(\mathfrak{K}^{(p)}) = 0$. Так как в этом случае будет (по определению) $p$-матрица $\mathfrak{A}$ нулевой матрицей, то будет $l_p(\mathfrak{A}) = 0$. Из равенства $m(\mathfrak{K}^{(p)}) = 0$ в силу теоремы 3 также следует равенство $r_p(G) = 0$. Но отсюда и из теоремы 8 вытекает, что в группе $G$ нет ненулевых элементов, обладающих в $G$ бесконечной $p$-высотой, или, $G[p^\infty] = (0)$. Это значит, что в таком случае соотношение (6,23) выполнено тривиально, так как

$$r_p(G) = r(G[p^\infty]) = l_p(\mathfrak{A}) = 0.$$

Пусть теперь $m(\mathfrak{K}^{(p)}) = r$; в этом случае матрица $\mathfrak{A}$ будет по определению также матрицей нулевой, или, $l_p(\mathfrak{A}) = 0$. По теореме 3 будет $m(\mathfrak{K}^{(p)}) = r =$

$= r_p(G)$, значит, если погрузим группу $G$ при помощи базиса $B$ в $\mathfrak{J}_p$-полную группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$, то в точности имеем

$$\bar{G}_{(p)} = \mathfrak{P}_p y_1 \dotplus \mathfrak{P}_p y_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{P}_p y_r = \mathfrak{P}_p^{(r)}.$$

Но тогда подгруппой $\mathscr{V}$ группы $\bar{G}_{(p)}$, определенной формулой (6,7), служит в этом случае сама группа $\bar{G}_{(p)}$, следовательно, по лемме 6.3 (см. формулу (6,8)) будет

$$G[p^\infty] = \bar{G}_{(p)} \cap G = G,$$

или также

$$r_p(G) = r = r(G[p^\infty]).$$

Итак, опять имеет место равенство (6,23).

В дальнейшем мы будем уже предполагать, что $1 \leqq m = m(\mathfrak{K}^{(p)}) \leqq r - 1$, или что $p$-матрица $\mathfrak{A}$, являющаяся по предположению $p$-адической клеткой канонической $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$, имеет вид (6,22). Для простоты положим $l_p(\mathfrak{A}) = l$, $m - l = s$ и предположим, что это в точности последних $l$ строк матрицы $\mathfrak{A}$, образующих максимальное $C$-независимое семейство строк $p$-матрицы $\mathfrak{A}$. Как увидим, этим последним предположением не теряет доказательство на общности.

Теперь символом $\mathfrak{v}_i$ обозначим $i$-тую строчку $p$-матрицы $\mathfrak{A}$ вида (6.2), т. е. полагаем

$$\mathfrak{v}_i = (\mathfrak{a}_{i1}, \mathfrak{a}_{i2}, \ldots, \mathfrak{a}_{in}) \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{6,24}$$

По предположению векторы $\mathfrak{v}_i$ $(i = s + 1, \ldots, m)$ являются $C$-независимыми, между тем как каждое семейство векторов

$$\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{v}_m \quad (i = 1, \ldots, s)$$

должно уже быть $C$-зависимо. Следовательно, для каждого индекса $i$ $(i = 1, \ldots, s)$, существуют целые рациональные числа $a_{ii}$ $(a_{ii} \neq 0)$, $a_{is+1}, \ldots, a_{in}$ такие, что

$$a_{ii}\mathfrak{v}_i + \sum_{j=s+1}^{m} a_{ij}\mathfrak{v}_j = \mathfrak{w}_i \in C^{(n)} \quad (i = 1, \ldots, s). \tag{6,25}$$

Притом векторы $\mathfrak{w}_i \in C^{(n)}$ будем записывать в виде

$$\mathfrak{w}_i = (a_{im+1}, \ldots, a_{ir}) \in C^{(n)} \quad (i = 1, \ldots, s). \tag{6,26}$$

В дальнейшем будем предполагать, что группа $G$ погружена при помощи базиса $B$ в $\mathfrak{J}_p$-полную группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$. Символом $\mathscr{V}$ обозначим опять максимальную $\mathfrak{J}_p$-полную подгруппу группы $\bar{G}_{(p)}$, определенную также формулой (6,7). Как следует из доказательства теоремы 3 (см. соотношения (4,19)), если положим

$$y_i = x_i + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_{ij} x_{m+j} \quad (i = 1, \ldots, m = m(\mathfrak{K}^{(p)})), \tag{6,27}$$

где $\mathfrak{a}_{ij}$ $(j = 1, \ldots, n)$ — элементы $i$-той строчки $p$-матрицы $\mathfrak{A}$, то в точности будет

(6,28) $$\mathscr{V} = \sum_{i=1}^{m}{}_d \mathfrak{P}_p y_i .$$

Если теперь определим элементы $z_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ формулами

(6,29) $$z_i = a_{ii} y_i + \sum_{j=s+1}^{m} a_{ij} y_j \quad (i = 1, \ldots, s),$$

то в силу (6,28) будет $z_i \in \mathscr{V}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Если подставим в формулы (6,29) вместо $y_i$ по (6,27) и если воспользуемся формулами (6,24), (6,25) и (6,26), то для элементов $z_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ получим представление

(6,30) $$z_i = a_{ii} x_i + \sum_{j=m+1}^{r} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Но из формул (6,30) следует, что $z_i \in G$, или, $z_i \in \mathscr{V} \cap G$ $(i = 1, \ldots, s)$. Так как по лемме 6.3 имеем $\mathscr{V} \cap G = G[p^\infty]$, то приходим к соотношениям

(6,31) $$z_i \in G[p^\infty] \quad (i = 1, \ldots s).$$

В силу того, что $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \ldots, s)$, из формул (6,30) и (6,27) непосредственно следует, что элементы $z_1, \ldots, z_s, y_{s+1}, \ldots, y_m$ представляют систему линейно независимых элементов группы $\mathscr{V}$. Отсюда, во-первых, следует, что

(6,32) $$\mathscr{V} = \sum_{i=1}^{s}{}_d \mathfrak{P}_p z_i \dotplus \sum_{i=s+1}^{m}{}_d \mathfrak{P}_p y_i ,$$

и, во-вторых, из линейной независимости элементов $z_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ и из со- отно шений (6,31) получим неравенство

(6,33) $$m - l = s \leqq r(G[p^\infty]).$$

Пусть теперь $z$ — произвольный элемент группы $G[p^\infty]$. Из леммы 6.3 вытекает, что также $z \in \mathscr{V}$, или, по (6.32) существуют такие $p$-адические числа $\mathfrak{p}_i \in \mathfrak{P}_p$ $(i = 1, \ldots, m)$, что

(6,34) $$z = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i z_i + \sum_{i=s+1}^{m} \mathfrak{p}_i y_i .$$

Если воспользуемся формулами (6,30) и (6,27), то последнее равенство (6,34) можем записать в виде

(6,35) $$z = \mathfrak{p}_1 a_{11} x_1 + \ldots + \mathfrak{p}_s a_{ss} x_s + \mathfrak{p}_{s+1} x_{s+1} + \ldots + \mathfrak{p}_m x_m + \sum_{j=m+1}^{r} \mathfrak{r}_j x_j ,$$

где $\mathfrak{r}_j$ $(j = m + 1, \ldots, r)$ — $p$-адические числа,

$$\mathfrak{r}_j = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i a_{ij} + \sum_{i=s+1}^{m} \mathfrak{p}_i \mathfrak{a}_{ij-m} \quad (j = m + 1, \ldots, r).$$

Так как, очевидно,

$$G[p^\infty] \subseteq G \subseteq \mathscr{R}^{(r)} = \sum_{i=1}^{r}{}_d \mathscr{R} x_i \subseteq \mathfrak{P}_p^{(r)} ,$$

то для того, чтобы элемент $z \in \mathfrak{P}_p^{(r)}$ вида (6,35) принадлежал подгруппе $G[p^\infty]$, необходимо, чтобы все числа $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ являлись рациональными числами. Следовательно, существует такое целое рациональное число $q$, $q \neq 0$, что числа $q\mathfrak{p}_i = c_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ — уже целые рациональные числа. Но тогда отсюда и из (6,34) следует равенство

$$qz - \sum_{i=1}^{s} c_i z_i = \sum_{i=s+1}^{m} c_i y_i \,. \tag{6,36}$$

Так как $qz - \sum_{i=1}^{s} c_i z_i \in G[p^\infty]$, то по формуле (6,36) должно также быть

$$\sum_{i=s+1}^{m} c_i y_i \in G[p^\infty] \subseteq \sum_{i=1}^{r}{}_d \mathscr{R} x_i \,. \tag{6,37}$$

Из соотношений (6,27), (6,37) и (6,24) вытекает, что вектор

$$\mathfrak{w} = \sum_{i=s+1}^{m} c_i \mathfrak{v}_i$$

обладает рациональными компонентами. Но отсюда и из $C$-независимости векторов $\mathfrak{v}_i$ $(i = s + 1, \ldots, m)$ уже следует, что необходимо $c_i = 0$ $(i = s + 1, \ldots, m)$. Таким образом из (6,36) получаем равенство $qz = \sum_{i=1}^{s} c_i z_i$, и это значит, что элемент $z$ линейно зависит от элементов $z_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Так как элемент $z$ был произвольным элементом группы $G[p^\infty]$, мы этим полностью доказали, что имеет место неравенство

$$r(G[p^\infty]) \leqq s \,. \tag{6,38}$$

Из неравенств (6,33) и (6,38) уже следует равенство

$$r(G[p^\infty]) = s = m - l \,.$$

Если в последнее равенство подставим $l = l_p(\mathfrak{A})$ и $m = m(\mathfrak{K}^{(p)}) = r_p(G)$, то получим формулу (6,23), и теорема полностью доказана.

Замечание. Если $\mathfrak{A}$ — произвольная $p$-матрица вида (6,22), элементами которой являются целые $p$-адические числа, то $p$-матрицу $\mathfrak{A}$ можно всегда считать $p$-адической клеткой некоторой канонической $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$ $r$-той степени, где $r = m + n$. Как было доказано в [1], § 7 и § 9, существует группа без кручения $G$ конечного ранга $r$, для которой будет $p$-матрица $\mathfrak{K}^{(p)}$ канонической $p$-матрицей $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы $G$, где $B$ — некоторый удобно выбранный базис группы $G$. Если символ $l_p(\mathfrak{A})$ обозначает число строк некоторой максимальной $C$-независимой системы строк $p$-матрицы $\mathfrak{A}$, то по только что доказанной теореме 9 будет

$$l_p(\mathfrak{A}) = r_p(G) - r(G[p^\infty]) \,.$$

Но это значит, что число $l_p(\mathfrak{A})$ является в самом деле инвариантом $p$-матрицы $\mathfrak{A}$ и не зависит от выбора такой максимальной $C$-независимой системы строк $p$-матрицы $\mathfrak{A}$.

Так как можно найти $p$-матрицу $\mathfrak{A}$ так, чтобы было $l_p(\mathfrak{A}) > 0$, следует отсюда, что существуют группы без кручения $G$ конечного ранга такие, что имеет место неравенство

$$(6{,}39) \qquad r(G[p^\infty]) < r_p(G)\,.$$

Если $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и если $B$ — некоторый ее базис, то, очевидно, имеет место неравенство $h_p(B; G) \leqq r(G[p^\infty])$. Итак, если группа без кручения $G$ выбрана так, что для некоторого простого числа $p$ справедливо неравенство (6,39), то для каждого базиса $B$ группы $G$ будет

$$h_p(B; G) < r_p(G)\,.$$

Таким образом отрицательно решен вопрос, не существует ли всегда такой базис $B$, что имеет место равенство $h_p(B; G) = r_p(G)$.

Замечание. Из формулы (6,23) следует, что число $l_p(\mathfrak{A})$, зависящее вообще от выбора базиса $B$ в группе $G$ и от выбора канонической $p$-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$ $p$-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$, от этих выборов действительно не зависит, и что оно уже определено группой $G$ и простым числом $p$. Это число, являющееся инвариантом группы $G$, будем обозначать символом $l_p(G)$. Следовательно,

$$(6{,}40) \qquad l_p(G) = r_p(G) - r(G[p^\infty])\,.$$

Инвариант $l_p(G)$ можно определить еще следующим группово-теоретическим образом: По теореме 8 должно быть $r_p(G[p^\infty]) = r(G[p^\infty])$, и так как $G[p^\infty]$ является сервантной подгруппой группы $G$ (см. лемму 6.2), то в силу теоремы 6 имеем

$$r_p(G) - r_p(G[p^\infty]) = r_p(G/G[p^\infty])\,;$$

значит, из (6,40) следует равенство

$$l_p(G) = r_p(G/G[p^\infty])\,.$$

**7.** В этом отделе будет доказана теорема, являющаяся простым применением только что определенного инварианта $l_p(G)$ группы без кручения $G$. Эта теорема находится в связи с построением группы без кручения конечного ранга, неразложимой в прямую сумму (см. [2], § 40).

**Лемма 7.1.** *Если $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, то равенство*

$$(7{,}1) \qquad r_p(G) = r(G) = r$$

*наступит тогда и только тогда, если справедливо равенство $G = G[p^\infty]$.*

Доказательство. Пусть сначала имеет место равенство (7,1). Если погрузим группу $G$ при помощи некоторого базиса $B$ в $\mathfrak{J}_p$-полную группу $\mathfrak{P}_p^{(r)}$, то в силу равенства (7,1) (см. определение 3) будет

$$\bar{G}_{(p)} = \mathfrak{P}_p y_1 \dotplus \mathfrak{P}_p y_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{P}_p y_r = \mathfrak{P}_p^{(r)}\,.$$

Если символ $\mathscr{V}$ представляет максимальную $\mathfrak{J}_p$-полную подгруппу группы

$\bar{G}_{(p)}$, то по лемме 6.3 имеем $G[p^\infty] = \mathscr{V} \cap G = \mathfrak{P}_p^{(r)} \cap G = G$, так как в этом случае $\mathscr{V} = \mathfrak{P}_p^{(r)}$.

Пусть теперь наоборот $G = G[p^\infty]$. Но это значит, что для каждого базиса $B$ группы $G$ будет $h_p(B; G) \doteq r$, иликe по теореме 8 имеет место неравенство $r_p(G) \geqq r$. Так как всегда справедливо обратное неравенство $r_p(G) \leqq r$, то получаем равенство (7,1).

Этим лемма полностью доказана.

**Лемма 7.2.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r > 1$ и пусть $l_p(G) = r - 1$. Тогда имеет место равенство $G[p^\infty] = (0)$.*

Доказательство. Так как $r - 1 = l_p(G) \leqq r_p(G) \leqq r$, то для $p$-ранга $r_p(G)$ имеем только две возможности: или $r_p(G) = r = r(G)$, или же $r_p(G) = r - 1 = l_p(G)$. Но если бы было $r_p(G) = r = r(G)$, то по лемме 7.1 должно было бы быть $G = G[p^\infty]$, и, следовательно, из соотношения (6,40) мы имели бы $l_p(G) = 0$, что противоречит предположению $l_p(G) = r - 1 > 0$. Это значит, что остается единственная возможность

$$r_p(G) = r - 1 = l_p(G)\,.$$

Тогда в силу (6,40) имеем

$$r(G[p^\infty]) = r_p(G) - l_p(G) = 0\,,$$

или, необходимо, $G[p^\infty] = (0)$, и лемма доказана.

**Теорема 10.** *Пусть $G$ — группа без кручения конечного ранга $r \geqq 1$ и пусть для некоторого простого числа $p$ имеет место равенство $l_p(G) = r - 1$. Тогда группа $G$ неразложима в прямую сумму.*

Доказательство. Если $r = 1$, то утверждение тривиально, так как каждая группа без кручения ранга 1 является неразложимой в прямую сумму.

Итак, пусть $r > 1$. Тогда в силу леммы 7.2 должно быть $r(G[p^\infty]) = 0$, или, по формуле (6,40) будет

$$r_p(G) = l_p(G) = r - 1\,. \tag{7,2}$$

Теперь предположим, что группа $G$ разложима в прямую сумму и что $G = G_1 \dotplus G_2$ — некоторое ее прямое разложение. Тогда по (7,2) должно быть

$$r_p(G) = r_p(G_1) + r_p(G_2) = r - 1\,. \tag{7,3}$$

Одновременно должно также быть

$$r(G_1) + r(G_2) = r\,, \quad r_p(G_i) \leqq r(G_i) \quad (i = 1, 2)\,. \tag{7,4}$$

Но для того, чтобы имели место соотношения (7,3) и (7,4), необходимо, чтобы для некоторого индекса $i$ $(1 \leqq i \leqq 2)$ имело место равенство $r_p(G\,) = r(G_i)$. В таком случае по лемме 7.1 будет $G_i[p^\infty] = G_i \neq (0)$. Но в то же время имеем $G_i[p^\infty] \subseteq G[p^\infty] = (0)$ (см. лемму 7.2), итак, мы приходим к противоречию. Это значит, что группа $G$ в самом деле неразложима, и теорема полностью доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Мальцев:* Абелевы группы конечного ранга без кручения. Мат. сб. *4* (*46*), 1938, 45—68.
[2] *A. G. Kurosch:* Gruppentheorie. Berlin 1953.
[3] *А. Г. Курош:* Теория групп. 2-ое изд., Москва 1953.
[4] *L. Fuchs:* Abelian groups. Budapest 1958.

Zusammenfassung

# ÜBER DEN $p$-RANG TORSIONSFREIER ABELSCHER GRUPPEN VON ENDLICHEM RANGE

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

Es sei zuerst bemerkt, dass in der ganzen Arbeit mit dem Wort „Gruppe“ eine additiv geschriebene abelsche Gruppe gemeint ist; das Symbol $p$ wird immer eine Primzahl bedeuten. Weiter, mit dem Symbol $\mathscr{C}(p^k)$ bezeichnen wir entweder eine zyklische Gruppe von Ordnung $p^k$, wenn $k$ endlich ist, oder eine vollständige $p$-primäre Prüfersche Gruppe.

Es sei $P$ eine periodische Gruppe, die als direkte Summe von $s$ Summanden (wobei $s$ eine endliche Zahl ist) von der Gestalt $\mathscr{C}(p^k)$ (für verschiedene Primzahlen $p$) dargestellt werden kann; die Zahl $s$ heisst $D$-Rang der Gruppe $P$ und wird mit dem Symbol $r_D(P)$ bezeichnet.

**Definition 1.** Ist $P$ eine periodische Gruppe, deren jeder $p$-primäre Summand $P^{(p)}$ von endlichem $D$-Range ist, so sagen wir, dass $P$ eine Gruppe von lokal endlichem $D$-Range ist.

**Satz 1.** *G sei eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges $r \geqq 1$, und $H$ sei beliebige ihre Untergruppe desselben Ranges $r$. Dann ist die Faktorgruppe $G/H$ periodisch und von lokal endlichem $D$-Range, und für jede Primzahl $p$ besteht die Relation*

$$r_D(\tilde{G}^{(p)}) \leqq r(G) = r,$$

*wobei mit $\tilde{G}^{(p)}$ der $p$-primäre Summand der Gruppe $G/H$ bezeichnet wurde.*

Es sei $\Omega_p$ der Ring aller $p$-Zahlen (vergl. mit [1]), d. h. die Menge aller unendlichen Folgen $(a^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ ganzer rationaler Zahlen, in welcher die Gleichheit, Addition und Multiplikation folgendermassen definiert sind: Sind $\mathfrak{a} = (a^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ und $\mathfrak{b} = (b^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ zwei solche Folgen, dann

1. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \Leftrightarrow a^{(\alpha)} \equiv b^{(\alpha)} \pmod{p^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$,
2. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a^{(\alpha)} + b^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$,
3. $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (a^{(\alpha)} \cdot b^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$.

Der Ring $\Omega_p$ enthält als Unterring den Integritätsbereich $\mathfrak{J}_p$ der ganzen $p$-adischen Zahlen.

Der Einfachheit halber setzen wir noch

$$\mathfrak{p}_\infty = (1, 1, 1, \ldots), \quad \mathfrak{p}_0 = (0, 0, 0, \ldots),$$

und falls $\alpha$ eine natürliche Zahl ist, schreiben wir

$$\mathfrak{p}_\alpha(p) = \mathfrak{p}_\alpha = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1,}_{\alpha x} p, p^2, p^3, \ldots).$$

Eine Matrix, deren Elemente dem Ringe $\Omega_p$ angehören, nennen wir eine $p$-Matrix (vergl. mit [1]). Eine quadratische $p$-Matrix $\mathfrak{K}^{(p)}$ der Form (1,8), wo $a_{ij}$ $(i = 1, \ldots, m;$ $j = 1, \ldots, n)$ ganze $p$-adische Zahlen und $b_{ij}$ $(i = 1, \ldots, n;$ $j = i + 1, \ldots, n)$ ganze rationale Zahlen sind, soll kanonische $p$-Matrix genannt werden. Die in der $p$-Matrix $\mathfrak{K}^{(p)}$ auftretende Zahl $m$ bezeichnen wir mit $m(\mathfrak{K}^{(p)})$.

Es sei $G$ eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges $r \geqq 1$; von jedem System $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ $r$ linear unabhängiger Elemente der Gruppe $G$ sagen wir, dass es eine Basis der Gruppe $G$ bildet. Die Menge aller Elemente $g \in G$, für die, bei geeignet gewählter natürlichen Zahl $\alpha$, die Relation $p^\alpha g \in \sum_{i=1}^{r}{}_d\{x_i\}$ besteht, heisst $p$-primitive Untergruppe von $G$ (bezüglich der Basis $B$), und wird mit $\Gamma^{(p)}(B)$ bezeichnet. Einer solchen Untergruppe $\Gamma^{(p)}(B)$ kann auf eine ganz bestimmte Weise (vergl. mit [1]) eine kanonische $p$-Matrix $\mathfrak{K}^{(p)}$ zugeordnet werden, welche die kanonische $p$-Matrix der $p$-primitiven Untergruppe $\Gamma^{(p)}(B)$ von $G$ genannt wird.

**Definition 2.** Es sei $P$ eine periodische Gruppe lokal endlichen $D$-Ranges und sei $P^{(p)}$ ihr $p$-primärer Summand. Ist $U^{(p)}$ die maximale vollständige Untergruppe von $P^{(p)}$, dann wird die Zahl $r_D(U^{(p)})$ der $p$-Rang der Gruppe $P$ genannt und mit dem Symbol $r_p^*(P)$ bezeichnet.

**Satz 2.** *Es sei $G$ eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges $r \geqq 1$, $B = (x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_r)$ sei ganz beliebige ihre Basis und $C$ sei die durch*

$$C = \sum_{i=1}^{r}{}_d\{x_i\}$$

*definierte Untergruppe von $G$. Falls $\mathfrak{K}^{(p)}$ eine kanonische $p$-Matrix der $p$-primitiven Untergruppe $\Gamma^{(p)}(B)$ ist, so gilt die Relation*

$$r_p^*(G/C) = m(\mathfrak{K}^{(p)}).$$

Für eine torsionsfreie Gruppe $G$ endlichen Ranges wird mit dem Symbol $r_p(G)$ der $p$-Rang von $G$ bezeichnet. Diese Invariante ist hier auf dieselbe Weise wie in [2], § 40 definiert. (Eingehend in § 4 der vorliegenden Abhandlung.)

**Satz 3.** *Es sei $G$ eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges $r \geqq 1$ und $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ irgendeine ihre Basis. Ist $\mathfrak{K}^{(p)}$ eine kanonische $p$-Matrix der $p$-primitiven Untergruppe $\Gamma^{(p)}(B)$ von $G$, so gilt*

$$r_p(G) = m(\mathfrak{K}^{(p)}).$$

Als direkte Folgerung der Sätze 2, 3 und des Satzes von Malcev (vergl. mit § 1) ergibt sich der folgende Satz:

**Satz 4.** *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges* $r \geqq 1$, $B = (x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_r)$ *irgendeine ihre Basis und* $C = \sum_{i=1}^{r} {}_d\{x_i\}$. *Dann besteht die Relation*

$$(1) \qquad r_p(G) = r_p^*(G/C)\,.$$

Die Bedeutung des Satzes 4 besteht darin, dass er den Zusammenhang zwischen der Invariante $r_p(G)$ und der algebraischen Struktur von $G$ klärt. Die Beziehung (1) kann auch als neue Definition des $p$-Ranges von Gruppe $G$ angesehen werden, die sich nicht mehr auf topologische Methoden stützt.

Die durch die folgenden zwei Sätze ausgedrückten Eigenschaften des $p$-Ranges ergeben sich als eine einfache Folgerung aus (1).

**Satz 5.** *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges* $r \geqq 1$ *und H eine beliebige ihre Untergruppe desselben Ranges r. Dann gilt für jede Primzahl p die Formel*

$$r_p(G) = r_p(H) + r_p^*(G/H)\,.$$

**Satz 6.** *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges* $r \geqq 1$ *und H eine beliebige ihre Servanzuntergruppe. Dann gilt für jede Primzahl p die Formel*

$$r_p(G) = r_p(H) + r_p(G/H)\,.$$

Es sei $G$ eine torsionsfreie Gruppe und $g$ ein beliebiges Element von $G$. Mit $\chi(g;\, p, G)$ bezeichnen wir die obere Grenze aller nichtnegativen ganzen Zahlen $k$, für welche die Gleichung $p^k x = g$ in $G$ lösbar ist; $\chi(g;\, p, G)$ heisst die $p$-Höhe des Elementes $g$ in $G$. Für jede nichtleere endliche Menge $M$ von Elementen der Gruppe $G$ bezeichnen wir mit $h_p(M;\, G)$ die Anzahl aller solcher Elemente von $M$, deren $p$-Höhe in $G$ unendlich wird. Weiter, ist $g \in G$, $g \neq 0$, so bezeichnen wir mit $\mathscr{S}(g)$ die minimale Servanzuntergruppe von $G$, die das Element $g$ enthält.

**Satz 8.** *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe endlichen Ranges* $r \geqq 1$ *und sei* $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *irgendeine ihre Basis. Weiter sei D die durch*

$$D = \{\mathscr{S}(x_i) \quad (i = 1, \ldots, r)\} = \sum_{i=1}^{r} {}_d\mathscr{S}(x_i)$$

*bestimmte Untergruppe von G. Dann besteht für jede Primzahl p die Relation*

$$(2) \qquad r_p(G) = h_p(B;\, G) + r_p^*(G/D)\,.$$

Aus der Relation (2) folgt unmittelbar, dass für jede Basis $B$ einer torsionsfreien Gruppe $G$ endlichen Ranges $r \geqq 1$ die folgende Ungleichung gilt:

$$(3) \qquad h_p(B;\, G) \leqq r_p(G)\,.$$

Nun kann man sich aber die Frage stellen, ob man (bei gegebenem $p$) immer eine Basis so wählen kann, dass in (3) das Gleichheitszeichen gilt. Auf diese Frage wirdin § 6 eine negative Antwort hergeleitet (vergl. mit Satz 9 und nachfolgenden Bemerkung).

Abschliessend wird noch eine weitere (von $p$ abhängende) Invariante torsionsfreier Gruppen endlichen Ranges eingeführt. Mit Hilfe dieser Invariante wird eine Bedingung aufgestellt, welche für die direkte Unzerlegbarkeit einer solchen torsionsfreien Gruppe hinreichend ist (vergl. mit Satz 10).