Ladislav Procházka

К проблеме расщепления некоторых абелевских расширений расщепляемых абелевых групп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 3, 365–380

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100465

Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961, Прага

К ПРОБЛЕМЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ АБЕЛЕВСКИХ РАСШИРЕНИЙ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

(Поступило в редакцию 3/III 1960 г.)

В общем случае абелевское расширение расщепляемой абелевой группы не должно быть уже расщепляемой группой. В этой статье занимаемся прежде всего вопросом, когда абелевское расширение расщепляемой группы при помощи периодической абелевой группы с ограниченными в совокупности порядками элементов опять будет группой расщепляемой. В этом направлении здесь найдены некоторые достаточные условия.

Как мы уже заметили, во всей этой статье будем заниматься только абелевыми группами и поэтому условимся понимать под словом „группа" аддитивно записанную группу абелеву. Кроме того мы будем пользоваться следующей записью: Пусть m, n — целые рациональные числа, $n \neq 0$, и пусть g — элемент какой-то группы G. Если уравнение $nx = mg$ обладает в точности одним решением g_1 в группе G, то будем просто писать $g_1 = (m/n)\, g$.

Мы начнем со следующего определения.

Определение. Группу без кручения G назовём тотально разложимой, если можно её выразить в виде прямой суммы групп ранга 1[1]):

$$G = \sum_{\iota \in \mathbf{I}}{}_d I_\iota\,, \quad r(I_\iota) = 1 \quad (\iota \in \mathbf{I})\,.$$

Если все типы групп I_ι $(\iota \in \mathbf{I})$ из прямого разложения группы G образуют цепь (по отношению к частичному упорядочению множества всех типов групп ранга 1 без кручения), то группу G будем называть тотально $\mathfrak{K}$-разложимой.

Лемма 1. *Пусть G — смешанная группа, периодическая часть P которой является p-примарной группой, и пусть H — подгруппа группы G, удовлетворяющая следующим условиям:*

a) *Фактор-группа G/H является циклической группой порядка p, $G/H \cong C(p)$;*

[1]) Если G — группа без кручения, то символом $r(G)$ будем обозначать её ранг.

б) *подгруппа H является расщепляемой группой, содержащей всю периодическую группу P, $H = A \dotplus P$, и притом A — тотально $\mathfrak{K}$-разложима.*

Тогда сама группа G также расщепляема, $G = A_1 \dotplus P$, где A_1 — тотально $\mathfrak{K}$ - разложимая группа, и имеет место даже соотношение $A_1 \cong A$.

Доказательство. То, что группа G расщепляема, это было уже в общем виде доказано в [3] (смотри теорему 3). Но здесь мы кроме предшествующего утверждаем, что при выпольнении наших условий справедливо соотношение $A_1 \cong A$, или также $G \cong H$. Это последнее утверждение будем теперь доказывать.

По предположению группа A тотально $\mathfrak{K}$-разложима, и отсюда следует прежде всего существование прямого разложения вида

$$A = \sum_{\iota \in I}{}_d I_\iota\,, \quad r(I_\iota) = 1 \quad (\iota \in I)\,.$$

В силу условия б) можно таким образом писать

$$H = \sum_{\iota \in I}{}_d I_\iota \dotplus P\,. \tag{1}$$

Пусть y — произвольный элемент группы G непринадлежающий подгруппе H; $y \in G \dot{-} H$. Но тогда в силу условия а) должно быть уже $py \in H$, или по (1)

$$py = a_1 + a_2 + \ldots + a_r + b\,,$$

где $a_i \in I_{\iota_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ и $b \in P$.

Если бы все уравнения $px = a_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ обладали решениями в подгруппе H, $pa'_i = a_i$, $a'_i \in H$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, то

$$p(y - \sum_{i=1}^{r} a'_i) = b \in P\,,$$

или элемент $y - \sum_{i=1}^{r} a'_i$ обладал бы конечным порядком. Так как P — периодическая часть группы G, то отсюда следовало бы соотношение

$$y - \sum_{i=1}^{r} a'_i \in P \subset H\,.$$

Но $\sum_{i=1}^{r} a'_i \in H$, итак, из последнего соотнюшения вытекает, что $y \in H$, и это противоречит выбору элемента y. Таким образом мы доказали, что существует по крайней мере один индекс i $(1 \leqq i \leqq r)$ такой, что уравнение $px = a_i$ не имеет решения в подгруппе H. Пусть элементы a_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ занумерованы уже так, что a_i $(i = 1, \ldots, s;\ s \leqq r)$ — в точности все те элементы, для которых уравнение $px = a_i$ неразрешимо в подгруппе H и пусть одновременно $pa'_i = a_i$, $a'_i \in H$ $(s < i \leqq r)$. Если положим $y' = y - \sum_{i=s+1}^{r} a'_i$, то, очевидно, будет $y' \in G \dot{-} H$

и в то же время

$$(2)\qquad py' = \sum_{i=1}^{s} a_i + b\,.$$

Конечно можно ещё предполагать, что уже

$$(3)\qquad \operatorname{typ} I_{\iota_i} \leqq \operatorname{typ} I_{\iota_{i+1}} \quad (i = 1\,, \ldots, s-1)\,.$$

Если выберем в каждой из подгрупп I_{ι_i} $(i = 1, \ldots, s)$ ненулевой элемент x_i, то должны существовать такие подгруппы $\mathscr{R}_i$ аддитивной группы рациональных чисел, что $\mathscr{R}_i \cong I_{\iota_i}$ и даже $I_{\iota_i} = \mathscr{R}_i x_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Притом, очевидно, можно элементы $x_i \in I_{\iota_i}$ выбрать таким образом, чтобы уравнения $px = x_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ не обладали решениями в подгруппе H и чтобы в то же время было $\mathscr{R}_i \subseteq \mathscr{R}_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, s-1)$ (смотри соотношения (3)). Из только что описанного выбора элемента $x_i \in I_{\iota_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$ непосредственно вытекает, что знаменатель произвольного ненулевого рационального числа $\rho_i \in \mathscr{R}_i$ $(1 \leqq i \leqq s)$, записанного в несократимом виде будет взаимно прост с простым числом p.

В силу предшествующего существуют ненулевые рациональные числа $\rho_i \in \mathscr{R}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ такие, что $a_i = \rho_i x_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, или по соотношению (2)

$$(4)\qquad py' = \sum_{i=1}^{s} \rho_i x_i + b\,.$$

Имея в виду только что сказанное о группах $\mathscr{R}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, рациональные числа ρ_i можно записать в виде $\rho_i = m_i/n$ $(i = 1, \ldots, s)$, где n, m_i $(i = 1, \ldots, s)$ – целые ненулевые числа и $(n, p) = 1$. Так как уравнения $px = a_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ неразрешимы в подгруппе $I_{\iota_i}(i = 1, \ldots, s)$, то также будет $(p, m_i) = 1$ $(i = 1, \ldots, s)$. Итак, существуют такие целые числа u, v, что $um_1 + vp = 1$; в частности должно быть $(u, p) = 1$. Умножением соотношения (4) на число n получим равенство

$$p(ny') = \sum_{i=1}^{s} m_i x_i + nb$$

и наконец дойдем до формулы

$$p(uny' + vx_1) = x_1 + \sum_{i=2}^{s} um_i x_i + unb\,.$$

Теперь положим $y_1 = uny' + vx_1$; так как $p \nmid un$, $x_1 \in H$ и $y' \in G \dot{-} H$, то также будет $y_1 \in G \dot{-} H$. Отсюда следует прежде всего, что $H \subsetneqq \{H, y_1\}$, или должно быть

$$(5)\qquad G = \{H, y_1\}\,.$$

Если обозначим ещё $um_i = u_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ и в то же время $unb = b_1 \in P$, то можно писать

$$(6)\qquad py_1 = x_1 + \sum_{i=2}^{s} u_i x_i + b_1\,.$$

Теперь докажем следующее утверждение: Если $\rho = m/n$ — произвольное рациональное число из группы $\mathscr{R}_1$, записанное в несократимом виде, то существует в точности один элемент $g_1 \in G$, удовлетворяющий соотношению $ng_1 = my_1$; итак, по нашему обозначению будет $g_1 = (m/n)\, y_1 = \rho y_1$.

Так как $(m, n) = 1$, то существуют целые числа k, l такие, что $km + ln = 1$. По предположению $m/n \in \mathscr{R}_1$, но одновременно $1 = n/n \in \mathscr{R}_1$, значит, также будет

$$\frac{1}{n} = k\,\frac{m}{n} + l\,\frac{n}{n} \in \mathscr{R}_1 .$$

В силу того, что выполнены соотношения $\mathscr{R}_i \subseteq \mathscr{R}_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, s-1)$, то $\mathscr{R}_1 \subseteq \mathscr{R}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, или $1/n \in \mathscr{R}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Но это значит, что существуют элементы

$$\frac{1}{n}\, x_i \in \mathscr{R}_i x_i = I_{\iota_i} \quad (i = 1, \ldots, s) .$$

Так как периодическая часть P группы G является p-примарной группой и так как $(n, p) = 1$, то существует в точности одно решение уравнения $nx = b_1$ в подгруппе P (и таким образом и во всей группе G), или существует в G элемент $(1/n)\, b_1$. Этим мы доказали, что в группе G можно найти элемент g, удовлетворяющий уравнению $py_1 = nx$; это, очевидно, элемент

$$g = \frac{1}{n}\, x_1 + \sum_{i=2}^{s} \frac{u_i}{n}\, x_i + \frac{1}{n}\, b_1 .$$

Если опять u', v' — целые числа, удовлетворяющие соотношению $u'n + v'p = 1$, то

$$y_1 = (u'n + v'p)\, y_1 = u'ny_1 + v'ng = n(u'y_1 + v'g) ,$$

или, наконец, можно писать

$$my_1 = n[m(u'y_1 + v'g)] = ng_1 ,$$

если положим $g_1 = m(u'y_1 + v'g) \in G$. Итак существование элемента g_1 уже полностью доказано; единственность элемента g_1 следует из того, что $(n, p) = 1$, и из того обстоятельства, что периодическая часть P группы G является p-примарной группой.

В силу только что доказанного вспомогательного утверждения соответствует каждому рациональному числу $\rho \in \mathscr{R}_1$ однозначно определенный элемент ρy_1 группы G. Как легко видеть, множество $\mathscr{R}_1 y_1$ всех элементов вида ρy_1, где $\rho \in \mathscr{R}_1$, представляет группу и притом $\mathscr{R}_1 y_1 \cong \mathscr{R}_1 \cong I_{\iota_1}$. Из предшествующего видно, что для каждого $\rho \in \mathscr{R}_1$ будет в точности

(7) $$p\rho y_1 = \rho x_1 + \sum_{i=2}^{s} u_i \rho x_i + \rho b_1 .$$

Теперь символом I_1^* обозначим только что построенную группу $\mathscr{R}_1 y_1$; итак, $I_1^* = \mathscr{R}_1 y_1$. Кроме того положим

$$A_1^* = \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}_1} {}_d I_\iota\,, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I} \dot{-} (\iota_1)\,.$$

Наконец ещё построим группу $\{I_1^*, A_1^* \dotplus P\} = G^*$. Так как для каждого $\rho \in \mathscr{R}_1$ также $p\rho \in \mathscr{R}_1$, то $p\rho y_1 \in \mathscr{R}_1 y_1 = I_1^*$, следовательно в силу соотношения (7) и определения групп A_1^* и G^* имеет место включение $I_{\iota_1} = \mathscr{R}_1 x_1 \subseteq G^*$, или также

$$I_{\iota_1} \dotplus A_1^* \dotplus P = A \dotplus P = H \subseteq G^*\,.$$

Но так как $y_1 \in I_1^* \subseteq G^*$, то должно быть $\{y_1, H\} \subseteq G^* \subseteq G$, или по (5)

(8)
$$G = G^* = \{I_1^*, A_1^* \dotplus P\}\,.$$

Теперь определим пересечение $I_1^* \cap A_1^*$.

Пусть $g \in I_1^* \cap A_1^*$. Это значит, что

$$g = \rho y_1 = a^* \in A_1^*\,,$$

где $\rho \in \mathscr{R}_1$, $\rho = m/n$. Если умножим последнее равенство на целое ненулевое число np и если воспользуемся формулой (6), то придем к соотношению

$$m x_1 + \sum_{i=2}^{s} m u_i x_i + m b_1 = n p a^*\,,$$

которое можно ещё записать в виде

$$m x_1 = n p a^* - \sum_{i=2}^{s} m u_i x_i - m b_1\,.$$

Элемент содержащийся в правой части последнего равенства принадлежит, очевидно, к группе $A_1^* \dotplus P$, тогда как элемент $m x_1$ принадлежит к группе I_{ι_1}. Но это в силу прямого разложения $H = I_{\iota_1} \dotplus (A_1^* \dotplus P)$ возможно только тогда, когда $m x_1 = \boldsymbol{0}$, или $m = 0$, или же

$$g = \rho y_1 = \frac{m}{n} y_1 = \boldsymbol{0}\,.$$

Этим мы доказали, что $I_1^* \cap A_1^* = (\boldsymbol{0})$, или

(9)
$$A_1 = \{A_1^*, I_1^*\} = A_1^* \dotplus I_1^*\,.$$

Так как A_1 – группа без кручения, то должно быть $A_1 \cap P = (\boldsymbol{0})$, итак, $\{A_1, P\} = A_1 \dotplus P$. Но отсюда по (8) получаем, что

(10)
$$G = \{I_1^*, A_1^*, P\} = \{A_1, P\} = A_1 \dotplus P\,.$$

Как мы уже показали $I_1^* \cong I_1$, значит, по (9)

$$A_1 = A_1^* \dotplus I_1^* \cong A_1^* \dotplus I_{\iota_1} = A\,.$$

Из последнего соотношения и из (10) следует уже утверждение нашей леммы.

Замечание. Только что доказанную лемму мы будем применять при доказательстве следующей леммы 2. Но как мы увидим в течение самого доказательства, мы не будем пользоваться только утверждением леммы 1, но прежде всего конструкцией, содержащейся в её доказательстве. Можно было бы сказать, что лемму 2 мы могли бы доказывать, не зная леммы 1, только надо было бы осуществить всю предшествующую конструкцию в течение доказательства самой леммы 2, которое является уже достаточно сложным.

Лемма 2. *Пусть G — смешанная группа, периодическая часть P которой является p-примарной группой, и пусть H — подгруппа группы G, удовлетворяющая следующим условиям*:

а) *Фактор-группа G/H является прямой суммой циклических групп порядка p;*

б) *подгруппа H является расщепляемой группой содержащей всю периодическую группу P, $H = A \dotplus P$, и притом A — тотально $\mathfrak{K}$-разложима.*

Тогда сама группа G также расщепляема, $G = A' \dotplus P$, где A' — тотально $\mathfrak{K}$-разложимая группа, и даже имеет место соотношение $A' \cong A$.

Доказательство. Лемму будем доказывать методом конструкции при помощи трансфинитной индукции. Притом будем строить определенные подгпуппы G_α (где α — порядковое число) группы G, таким образом, чтобы для каждого α было $H \subseteq G_\alpha \subsetneqq G_{\alpha+1}$. Группу A, являющуюся по предположению тотально $\mathfrak{K}$-разложимой, будем записывать в виде

$$A = \sum_{\iota \in \mathbf{I}}{}_{\alpha} I_\iota\,, \quad \text{где} \quad r(I_\iota) = 1 \quad (\iota \in \mathbf{I})\,.$$

Подгруппой G_0 изберём саму подгруппу H: $G_0 = H$. Пусть теперь y — произвольный элемент, $y \in G \dot{-} G_0$; положим $G_1 = \{y, G_0\}$. Как следует из доказательства леммы 1, существуют индекс $\iota_0 \in \mathbf{I}$, элемент $y_0 \in G_1 \dot{-} G_0$ и подгруппа $\mathscr{R}_0$ аддитивной группы рациональных чисел так, что имеет место соотношение

$$G_1 = \mathscr{R}_0 y_0 \dotplus \sum_{\iota \in \mathbf{I}_1}{}_{d} I_\iota \dotplus P\,,$$

где $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I} \dot{-} (\iota_0)$; в то же время справедливо соотношение $\mathscr{R}_0 y_0 \cong I_{\iota_0}$, или должно быть $G_1 \cong H$.

Пусть α — порядковое число, $\alpha > 1$. Для простоты введём ещё следующее обозначение: Если существует $\alpha - 1$, то положим $[\alpha] = \alpha - 1$; в противном случае положим $[\alpha] = \alpha$. Теперь сделаем следующие индуктивные предположения:

1. Для всех порядковых чисел $\beta < \alpha$ уже выбраны такие подгруппы G_β группы G, что если $0 \leqq \gamma < \beta$, то $H \subseteq G_\gamma$ и $G_\gamma \subsetneqq G_\beta$.

2. Для всех порядковых чисел $\beta < [\alpha]$ уже найдены элементы $y_\beta \in G_{\beta+1} \dot{-} G_\beta$, индексы $\iota_\beta \in \mathbf{I}$ и подгруппы $\mathscr{R}_\beta$ аддитивной группы рациональных чисел, подчиненные следующим условиям:

a) если $\beta < [\alpha]$, то для каждого $\rho \in \mathscr{R}_\beta$ существует в G (единственный) элемент ρy_β и имеет место изоморфизм $\mathscr{R}_\beta y_\beta \cong I_{\iota_\beta}$;

b) если $\beta_1 < [\alpha]$, $\beta_2 < [\alpha]$ и $\beta_1 \neq \beta_2$, то также $\iota_{\beta_1} \neq \iota_{\beta_2}$;

c) для каждого $\beta < \alpha$ имеем в точности

$$G_\beta = \sum_{\gamma<\beta}{}_d \mathscr{R}_\gamma y_\gamma \dotplus \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}_\beta}{}_d I_\iota \dotplus P\,, \tag{11}$$

где полагаем $\boldsymbol{I}_\beta = \boldsymbol{I} \dot{-} (\iota_\gamma;\, \gamma < \beta)$.

Теперь построим подгруппу G_α; притом нужно различать два случая.

I. Пусть α – предельное порядковое число. Итак, в этом случае $[\alpha] = \alpha$, и по индуктивному предположению найдены уже для всех $\beta < \alpha$ индексы $\iota_\beta \in \boldsymbol{I}$, подгруппы $\mathscr{R}_\beta$, G_β и элементы $y_\beta \in G_{\beta+1} \dot{-} G_\beta$ так, что для каждого такого $\beta < \alpha$ имеет место формула (11). Но это значит, что если положим $\boldsymbol{I}_\alpha = \boldsymbol{I} \dot{-} (\iota_\beta;\, \beta < \alpha)$, то необходимо будет

$$\{\mathscr{R}_\gamma y_\gamma\, (\gamma < \alpha)\,,\ \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}_\alpha}{}_d I_\iota\} = \sum_{\gamma<\alpha}{}_d \mathscr{R}_\gamma y_\gamma \dotplus \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}_\alpha}{}_d I_\iota\,;$$

в то же время видно, что определенная таким образом группа является группой без кручения. Итак, в этом случае определяем G_α формулой

$$G_\alpha = \sum_{\gamma<\alpha}{}_d \mathscr{R}_\gamma y_\gamma \dotplus \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}_\alpha}{}_d I_\iota \dotplus P\,. \tag{12}$$

Непосредственно из формулы (12) следует, что группа G_α обладает разложением вида (11), если положить $\beta = \alpha$; кроме того легко видеть, что все индуктивные условия будут выполнены, если всюду заменить число α числом $\alpha + 1$.

II. Пусть α – изолированное порядковое число. Но тогда прежде всего $[\alpha] = \alpha - 1$. По индуктивному предположению для всех $\gamma < [\alpha] = \alpha - 1$ существуют $\iota_\gamma \in \boldsymbol{I}$, $y_\gamma \in G_{\gamma+1} \dot{-} G_\gamma$ и группы $\mathscr{R}_\gamma$ так, что

$$G_{\alpha-1} = \sum_{\gamma<\alpha-1}{}_d \mathscr{R}_\gamma y_\gamma \dotplus \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}_{\alpha-1}}{}_d I_\iota \dotplus P\,, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{I}_{\alpha-1} = \boldsymbol{I} \dot{-} (\iota_\gamma;\, \gamma < \alpha - 1)$. Если уже $G_{\alpha-1} = G$, то конструкция, очевидно, закончена; итак, будем предполагать, что $G_{\alpha-1} \subsetneqq G$.

Прежде чем перейти к дальнейшей части этого доказательства, нужно напомнить, что в силу предположения о фактор-группе G/H p-кратное любого элемента группы G содержится уже в подгруппе H. Это значит, что для каждого элемента $g \in G \dot{-} H$ уравнение $px = g$ не имеет в группе G решения. Так как $y_\gamma \in G \dot{-} H$ для каждого $\gamma < \alpha - 1$, то отсюда следует, что всякое рациональное число произвольной группы $\mathscr{R}_\gamma$ $(\gamma < \alpha - 1)$, записанное в виде несократимой дроби, обладает знаменателем взаимно простым с простым числом p.

Пусть $y \in G \dot{-} G_{\alpha-1}$. Тогда уже будет $py \in H \subseteq G_{\alpha-1}$ и в силу (13)

$$py = \sum_{i=1}^{r} \rho_i y_{\gamma_i} + \sum_{j=1}^{s} a_j + b\,,$$

где $\rho_i \in \mathscr{R}_{\gamma_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$, $a_j \in I_{\lambda_j}$ $(\lambda_j \in \boldsymbol{I}_{\alpha-1};\ j = 1, \ldots, s)$, $b \in P$. В силу того, что мы сказали об элементах групп $\mathscr{R}_\gamma$ $(\gamma < \alpha - 1)$, существует целое ненулевое число n, являющееся взаимно простым с p, и такое, что имеет место соотношение

$$pny = \sum_{i=1}^{r} m_i y_{\gamma_i} + \sum_{j=1}^{s} na_j + nb \,, \tag{14}$$

где m_i $(i = 1, \ldots, r)$ – целые числа. Прежде всего мы убедимся в том, что $p \mid m_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Из соотношения (14) следует, что

$$\sum_{i=1}^{r} m_i y_{\gamma_i} + \sum_{j=1}^{s} na_j + nb \in H \,;$$

но так как уже $\sum_{j=1}^{s} na_j + nb \in H$, то из последней формулы получим формулу

$$\sum_{i=1}^{r} m_i y_{\gamma_i} \in H \,. \tag{15}$$

Пусть индексы γ_i $(i = 1, \ldots, r)$ занумерованы так, что $\gamma_i < \gamma_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, r - 1)$ и пусть m_t $(1 \leqq t \leqq r)$ – число с наибольшим индексом, для которого $(p, m_t) = 1$ (будем предполагать, что такое число существует). Но так как $p|m_i$ $(t < i \leqq r)$, то будет

$$\sum_{i=t+1}^{r} m_i y_{\gamma_i} \in H \,,$$

или по (15) должно также быть

$$\sum_{i=1}^{t} m_i y_{\gamma_i} \in H \,,$$

или

$$\sum_{i=1}^{t} m_i y_{\gamma_i} \in G_{\gamma_t} \,. \tag{16}$$

Если $i < t$, то $\gamma_i < \gamma_t$ и также $\gamma_i + 1 \leqq \gamma_t$, или

$$G_{\gamma_i + 1} \subseteq G_{\gamma_t} \quad (i = 1, \ldots, t - 1) \,.$$

Таким образом для каждого i $(1 \leqq i \leqq t - 1)$ имеем

$$y_{\gamma_i} \in G_{\gamma_i + 1} \subseteq G_{\gamma_t} \,;$$

но это значит, что

$$\sum_{i=1}^{t-1} m_i y_{\gamma_i} \in G_{\gamma_t} \,. \tag{17}$$

Из соотношений (16) и (17) непосредственно следует, что $m_t y_{\gamma_t} \in G_{\gamma_t}$. Но тогда, если k, l – такие целые числа, что $km_t + lp = 1$, должно быть

$$y_{\gamma_t} = km_t y_{\gamma_t} + lpy_{\gamma_t} \in G_{\gamma_t} \,,$$

так как

$$py_{\gamma_t} \in H \subseteq G_{\gamma_t} \,.$$

Последнее соотношение противоречит выбору элемента y_{γ_t}, или же мы полностью доказали, что $p|m_i$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Пусть $m_i = pm'_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Символом y' обозначим елемент

$$y' = ny - \sum_{i=1}^{r} m'_i y_{\gamma_i}$$

и кроме того положим

$$na_j = a'_j \in I_{\lambda_j} \quad (j = 1, \ldots, s), \; nb = b' \in P \; ;$$

так как

$$(n, p) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{r} m'_i y_{\gamma_i} \in G_{\alpha-1} \, ,$$

то также будет $y' \in G \dot{-} G_{\alpha-1}$. Теперь определим

$$G_\alpha = \{y', G_{\alpha-1}\} \, .$$

Как легко видеть, имеет место соотношение

$$py' = \sum_{j=1}^{s} a'_j + b' \; ;$$

начиная с этой последней формулы, можно продолжать доказательство тем же образом, как это было сделано в доказательстве леммы 1, начиная с формулы (2). Этим методом можно доказать следующее утверждение: Существует индекс $\iota_{\alpha-1} \in \boldsymbol{I} \dot{-} \boldsymbol{I}_{\alpha-1}$ (это будет некоторый из индексов λ_j $(j = 1, \ldots, s)$), элемент $y_{\alpha-1} \in G_\alpha \dot{-} G_{\alpha-1}$ и подгруппа $\mathscr{R}_{\alpha-1}$ аддитивной группы рациональных чисел так, что

$$G_\alpha = \sum_{\gamma < \alpha - 1}{}_d \, \mathscr{R}_\gamma y_\gamma \dotplus \mathscr{R}_{\alpha-1} y_{\alpha-1} \dotplus \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}_\alpha}{}_d I_\iota \dotplus P \, ,$$

где опять полагаем $\boldsymbol{I}_\alpha = \boldsymbol{I} \dot{-} (\iota_\gamma; \, \gamma < \alpha)$. Кроме того можно утверждать, что $\mathscr{R}_{\alpha-1} y_{\alpha-1} \cong I_{\iota_{\alpha-1}}$.

Таким образом и для изолированного порядкового числа α мы построили подгруппу G_α группы G, обладающую прямым разложением вида (12), и кроме того нашли индекс $\iota_{\alpha-1}$, элемент $y_{\alpha-1}$ и группу $\mathscr{R}_{\alpha-1}$ так, что будут опять выполнены все индуктивные условия, если заменим порядковое число α числом $\alpha + 1$.

Эта трансфинитная последовательность подгрупп должна окончиться с каким-то порядковым числом τ, т. е. будет уже $G_\tau = G$. Но так как все построенные подгруппы G_α обладают тем свойством, что $G_\alpha \cong H$, то также будет $G = G_\tau \cong \cong H = A \dotplus P$, или $G = A' \dotplus P$, где $A' \cong A$.

Этим лемма полностью доказана.

Пусть P — периодическая группа и пусть $P^{(p)}$ — её p-примарное слагаемое. Тогда прямую сумму всех примарных слагаемых группы P, отличных от $P^{(p)}$ будем обозначать символом $P^{(p)}_*$. Итак, группу P можно выразить в виде прямой суммы $P = P^{(p)} \dotplus P^{(p)}_*$.

Пусть G — группа с периодической частью P и H — её подгруппа с периодической частью Q. Если фактор-группа G/H является периодической p-примарной группой, то необходимо $Q_*^{(p)} = P_*^{(p)}$. Это утверждение вместе со следующей леммой можно найти в [3].

Лемма. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P и пусть H — её подгруппа с периодической частью Q. Если фактор-группа G/H является периодической p-примарной группой, то подгруппа $P_*^{(p)} = Q_*^{(p)}$ служит прямым слагаемым для группы G тогда и только тогда, когда служит прямым слагаемым для подгруппы H.*

Лемма 3. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P и пусть H — подгруппа группы G, удовлетворяющая условиям* а), б) *леммы* 2. *Тогда группа G расщепляема, $G = A' \dotplus P$, группа A' является опять тотально $\mathfrak{K}$-разложимой группой и $A' \cong A$.*

Доказательство. Воспользовавшись только что введеным обозначением, подгруппу H выразим в виде прямой суммы

$$H = A \dotplus P^{(p)} \dotplus P_*^{(p)} . \tag{18}$$

По лемме из [3] подгруппа $P_*^{(p)}$ служит прямым слагаемым для всей группы G, или

$$G = G_1 \dotplus P_*^{(p)} . \tag{19}$$

Но тогда можно записать подгруппу H в виде прямой суммы

$$H = H_1 \dotplus P_*^{(p)} , \quad \text{где} \quad H_1 = H \cap G_1 \subseteq G_1 . \tag{20}$$

Сравнением формул (18) и (20) получим непосредственно изоморфизм $H_1 \cong \cong A \dotplus P^{(p)}$. Кроме того, из соотношений (19) и (20) следует изоморфизм

$$G/H = (G_1 \dotplus P_*^{(p)})/(H_1 \dotplus P_*^{(p)}) \cong G_1/H_1$$

или фактор-группа G_1/H_1 является также прямой суммой циклических групп порядка p. Очевидно, что периодической частью подгруппы G_1 служит p-примарная подгруппа $P^{(p)}$, итак, к группе G_1 и её подгруппе H_1 можно применить лемму 2. По этой лемме должно бить $G_1 = A' \dotplus P^{(p)}$, и притом $A' \cong A$. Если теперь подставим последнюю прямую сумму в формулу (19), то получим прямое разложение группы G, обладающее всеми требуемыми свойствами, чем лемма полностью доказана.

Лемма 4. *Пусть G — смешанная группа и пусть H — её подгруппа, обладающая следующими свойствами*:

а) *Фактор-группа G/H является прямой суммой циклических групп порядка p*;

б) *подгруппа H расщепляема, $H = A \dotplus Q$, где Q — периодическая часть группы H и A — тотально $\mathfrak{K}$-разложимая группа.*

Тогда вся группа G также расщепляема, $G = A' \dotplus P$ (P — периодическая часть группы G) и опять $A' \cong A$.

Доказательство. Символом H_1 обозначим подгруппу группы G, определенную формулой $H_1 = \{A, P\}$. Так как A — группа без кручения и P — периодическая группа, то $H_1 = \{A, P\} = A \dotplus P$; притом $H \subseteq H_1$. По второй теореме об изоморфизме будет

$$G/H_1 \cong (G/H)/(H_1/H),$$

или фактор-группа G/H_1 также должна быть прямой суммой циклических групп порядка p. Применением леммы 3 к группе G и её подгруппе H_1 получим прямое разложение $G = A' \dotplus P$, и притом $A' \cong A$, чем доказательство леммы завершено.

Теперь введём ещё следующее обозначение: Если G — периодическая группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, то символом $\mathcal{O}(G)$ обозначим наименьшее натуральное число n, для которого уже будет $nG = (\mathbf{0})$.

Теорема 1. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P и пусть H — её подгруппа с периодической частью Q, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) *Фактор-группа G/H является периодической группой с ограниченными в совокупности порядками элементов,*

б) *подгруппа H расщепляема, $H = A \dotplus Q$, где A тотально $\mathfrak{R}$-разложима. Тогда вся группа G также расщепляема, $G = A' \dotplus P$, и притом $A' \cong A$.*

Доказательство. Теорему докажем методом полной индукции по натуральному числу $\mathcal{O}(G/H)$.

Если $\mathcal{O}(G/H) = 1$, то справедливость теоремы тривиальна, так как в этом случае $G = H$.

Итак пусть $n = \mathcal{O}(G/H) > 1$ и пусть теорема справедлива уже для каждой группы G_1, для которой $\mathcal{O}(G_1/H) < n$. Докажем, что теорема справедлива и для группы G.

Пусть p — произвольное простое (положительное) число, на которое делится натуральное число n: $n = pn_1$. Символом $\tilde{G}_1$ обозначим подгруппу группы $\tilde{G} = G/H$, определенную формулой $\tilde{G}_1 = p\tilde{G}$. Но тогда, очевидно, $n_1\tilde{G}_1 = n_1 . (p\tilde{G}) = n\tilde{G} = (\mathbf{0})$, или имеет место неравенство $\mathcal{O}(\tilde{G}_1) \leqq n_1 < n$. Если теперь G_1 — такая подгруппа группы G, что $H \subseteq G_1$ и в точности $G_1/H = \tilde{G}_1$, то в силу индуктивного предположения группа G_1 должна быть расщепляемой, $G_1 = A_1 \dotplus P_1$ (P_1 — периодическая часть группы G_1) и притом $A_1 \cong A$. По второй теореме об изоморфизме имеем

$$G/G_1 \cong (G/H)/(G_1/H) = \tilde{G}/\tilde{G}_1,$$

или в силу определения группы $\tilde{G}_1$ будет

$$\mathcal{O}(G/G_1) = \mathcal{O}(\tilde{G}/\tilde{G}_1) = \mathcal{O}(\tilde{G}/p\tilde{G}) = p.$$

Это значит, что фактор-группа G/G_1 является прямой суммой циклических групп порядка p; итак, по лемме 4 должно быть $G = A' \dotplus P$, где $A' \cong A_1 \cong A$.

Этим доказательство теоремы методом полной индукции завершено.

Воспользовавшись понятием расширения группы, выскажем предшествующую теорему ещё следующим образом.

Теорема 1.* *Пусть H — расщепляемая группа вида $H = A \dotplus Q$, где A — тотально $\mathfrak{R}$-разложимая группа без кручения и Q — группа периодическая. Тогда каждое абелевское расширение G группы H при помощи периодической группы с ограниченными в совокупности порядками элементов будет расщепляемой группой вида $G = A' \dotplus P$, где $A' \cong A$ и P — периодическая группа.*

Своего рода обращением и в то же время и применением теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — расщепляемая группа вида $G = A \dotplus P$, где A — тотально $\mathfrak{R}$-разложимая группа без кручения и P — периодическая группа. Если H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является периодической группой с ограниченными в совокупности порядками, то подгруппа H также будет расщепляемой группой, $H = A' \dotplus Q$, где $A' \cong A$ и Q — периодическая группа.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{O}(G/H) = n$. Но это значит, что для каждого элемента $g \in G$ должно быть $ng \in H$, или $nG \subseteq H$. Очевидно, фактор-группа G/nG является периодической группой с ограниченными в совокупности элементами, и такой же должна быть и её подгруппа H/nG. Но так как $nG = nA \dotplus nP$ и в то же время $nA \cong A$, то по теореме 1 будет подгруппа H расщепляемой, $H = A' \dotplus Q$, где $A' \cong nA \cong A$ и Q — периодическая группа. Итак, и эта теорема доказана.

В дальнейшем обратим наше внимание к рассуждениям другого рода.

Лемма 5. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P и пусть H — подгруппа группы G, содержащая всю периодическую подгруппу P. Пусть, далее, фактор-группа H/P, будучи группой без кручения, является группой конечного ранга: $r(H/P) < \infty$. Если фактор-группа G/H является периодической группой с ограниченными в совокупности порядками элементов, то она должна быть уже конечной группой.*

Доказательство. Для простоты обозначим $G/P = \tilde{G}$ и подобным образом $H/P = \tilde{H}$. Тогда по второй теореме об изоморфизме имеем

$$(21) \qquad G/H \cong \tilde{G}/\tilde{H}\,,$$

или в силу предположения леммы будет фактор-группа $\tilde{G}/\tilde{H}$ периодической группой с ограниченными в совокупности порядками. Если теперь символом $\mathcal{S}(\tilde{H})$ обозначим сервантную оболочку подгруппы $\tilde{H}$ в группе $\tilde{G}$, т. е. $\mathcal{S}(\tilde{H})$ является наименьшей сервантной подгруппой группы $\tilde{G}$, содержащей всю подгруппу $\tilde{H}$, то, как известно, будет $r(\mathcal{S}(\tilde{H})) = r(\tilde{H})$. Но так как

$$\tilde{G}/\mathcal{S}(\tilde{H}) \cong (\tilde{G}/\tilde{H})/(\mathcal{S}(\tilde{H})/(\tilde{H}))\,,$$

то фактор-группа $\tilde{G}/\mathscr{S}(\tilde{H})$ должна быть периодической группой (даже с ограниченными в совокупности порядками элементов). Однако фактор-группа группы без кручения по сервантной подгруппе всегда является группой без кручения или группой нулевой, значит, группа $\tilde{G}/\mathscr{S}(\tilde{H})$ необходимо является нулевой, или $\tilde{G} = \mathscr{S}(\tilde{H})$. Это значит, что

$$r(\tilde{G}) = r(\mathscr{S}(\tilde{H})) = r(\tilde{H}) < \infty .$$

Но тогда, как было доказано в [4] (смотри теорему 1), фактор-группа $\tilde{G}/\tilde{H}$ является периодической группой локально конечного D-ранга, или каждое её p-примарное слагаемое можно выразить в виде прямой суммы конечного числа групп типа $C(p^\infty)$ и конечной группы. Так как она является одновременно периодической группой с ограниченными в совокупности порядками, то она будет уже конечной группой. Из конечности группы $\tilde{G}/\tilde{H}$ и из изоморфизма (21) следует, наконец, конечность группы G/H, чем лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G — смешанная группа и пусть H — подгруппа группы G, обладающая следующими свойствами:*

а) *Фактор-группа G/H является периодической группой с ограниченными в совокупности порядками элементов;*

б) *подгруппа H расщепляема, $H = A \dotplus Q$, где Q — периодическая группа и A — группа конечного ранга без кручения.*

Тогда будет группа G также расщепляемой.

Доказательство. Пусть P — периодическая часть группы G. Символом G_1 обозначим подгруппу группы G, определенную формулой $G_1 = \{A, P\} = A \dotplus P$. Так как $Q \subseteq P$, то $H = A \dotplus Q \subseteq G_1$ и по второй теореме об изоморфизме имеем

$$G/G_1 \cong (G/H)/(G_1/H) . \tag{22}$$

Но группа G/H является периодической группой с ограниченными в совокупности порядками элементов, и такой-же будет в силу (22) и группа G/G_1. Применением леммы 5 к группе G и её подгруппе G_1 получим, что G/G_1 должна быть конечной. Но в работе [3] доказана теорема, утверждающая, что каждое абелевское расширение расщепляемой группы при помощи конечной группы будет опять группой расщепляемой. Итак, из расщепляемости группы G_1 и конечности фактор-группы G/G_1 уже следует расщепляемость группы G. Этим теорема доказана.

Замечание. В предшествующей теореме мы могли высказать о группе G ещё немножко больше: Если $G = A' \dotplus P$ — какое-то прямое разложение группы G, где P — периодическая часть группы G, то, с одной стороны, $r(A') = r(A)$ и, с другой стороны, для каждого простого числа p имеет место равенство $r_p(A') = r_p(A)$; притом символом $r_p(A')$ (соотв. $r_p(A)$) обозначаем p-ранг группы A' (соотв. группы A).

В самом деле, если опять положим $G_1 = A \dotplus P$ (смотри доказательство теоремы 3), то группа G/G_1 будет конечной. По второй теореме об изоморфизме имеем

$$G/G_1 \cong (G/P)/(G_1/P)\,. \tag{23}$$

Отсюда для группы без кручения G/P и её подгруппы G_1/P следует равенство $r(G/P) = r(G_1/P)$ (смотри доказательство леммы 5). Но, воспользовавшись теоремой 5 из [4], из конечности группы G/G_1 и изоморфизма (23) получим равенство $r_p(G/P) = r_p(G_1/P)$ для каждого простого числа p. Так как $G/P \cong A'$, $G_1/P \cong A$, то наше утверждение уже полностью доказано.

Пользуясь понятием расширения группы, выскажем теорему 3 ещё в следующем виде.

Теорема 3.* *Если группа H является прямой суммой периодической группы и группы конечного ранга без кручения, то каждое абелевское расширение G группы H при помощи периодической группы с ограниченными в совокупности порядками элементов будет расщепляемой группой.*

Теорему 3 можно опять определенным образом обратить. Так получим следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть группа G является прямой суммой периодической группы и группы конечного ранга без кручения. Если H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является периодической группой с ограниченными в совокупности порядками элементов, то подгруппа H также будет расщепляемой группой.*

Доказательство. Если $n = \mathcal{O}(G/H)$, то необходимо $nG \subseteq H$. Фактор-группа G/nG является периодической группой с ограниченными в совокупности порядками элементов, значит, такой же будет и её подгруппа H/nG. Но если $G = A \dotplus P$, где A — группа конечного ранга без кручения и P — периодическая группа, то $nG = nA \dotplus nP$ и притом опять $r(nA) < \infty$, итак, по теореме 3 подгруппа H должна быть расщепляемой группой, как утверждает теорема.

В заключение отметим, что теорему 3 и теорему 4 можно высказать в виде единственной теоремы:

Теорема 5. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P и пусть фактор-группа G/P (которая должна быть группой без кручения) является группой конечного ранга. Если H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является периодической группой с ограниченными в совокупности элементами, то группа G будет расщепляемой тогда и только тогда, когда будет расщепляемой подгруппа H.*

Доказательство: Если группа G расшепляема, то такой же будет по теореме 4 и подгруппа H.

Пусть теперь расщепляема подгруппа H, $H = A \dotplus Q$, где Q — периодическая часть подгруппы H. Если положим $G_1 = A \dotplus P$, то G_1/P будет подгруппой группы G/P, и мы имеем

$$r(A) = r(G_1/P) \leqq r(G/P) < \infty ,$$

или A является группой конечного ранга без кручения. Но тогда расщепляемость группы G следует из расщепляемости подгруппы H в силу теоремы 3.

Этим и эта последняя теорема полностью доказана.

Литература

[1] *А. Г. Курош:* Теория групп, 2-ое изд., Москва, 1953.
[2] *L. Fuchs*: Abelian groups, Budapest, 1958.
[3] *Л. Прохазка:* Заметка о расщепляемости смешанных абелевых групп. Чех. мат. ж. *10* (85),
[4] *Л. Прохазка:* О p-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга.Чех. мат. ж. (потготовляется к печати).

Zusammenfassung

ZUR SPALTBARKEIT VON GEWISSEN ABELSCHEN ERWEITERUNGEN DER SPALTBAREN ABELSCHEN GRUPPEN

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

In dieser Arbeit sind vor allem die Bedingungen gesucht, unter welchen eine abelsche Erweiterung einer spaltbaren abelschen Gruppe mit ordnungsbeschränkter Gruppe wieder eine spaltbare Gruppe ist. In dieser Beziehung sind hier einige hinreichende Bedingungen gegeben.

Es sei noch bemerkt, dass in der ganzen Arbeit mit dem Wort „Gruppe“ immer eine aditiv geschriebene abelsche Gruppe gemeint ist.

Definition. Eine torsionsfreie Gruppe G heisst total reduzibel, wenn sie als direkte Summe von Untergruppen vom Range 1 ausgedrückt werden kann:

$$G = \sum_{\iota \in \boldsymbol{I}} {}_d I_\iota , \quad r(I_\iota) = 1 \quad (\iota \in \boldsymbol{I}) .$$

Wenn alle Type von Gruppen I_ι $(\iota \in \boldsymbol{I})$ eine Kette bilden (hinsichtlich der Halbordnung der Menge aller Typen der torsionsfreien Gruppen vom Range 1), dann werden wir die Gruppe G als total $\mathfrak{K}$-reduzibel nennen.

Satz 1*. *H sei eine spaltbare Gruppe von der Gestalt $H = A \dotplus Q$, wo A eine torsionsfreie total $\mathfrak{K}$-reduzible Gruppe und Q eine periodische Gruppe ist. Dann muss* *jede abelsche Erweiterung G der Gruppe H mit ordnungsbeschränkter Gruppe wieder eine spaltbare Gruppe von der Gestalt $G = A' \dotplus P$ sein, wobei $A' \cong A$ und P eine periodische Gruppe ist.*

Diesen Satz kann man folgendermassen umkehren.

Satz 2. *G sei eine spaltbare Gruppe von der Gestalt $G = A \dotplus P$, wo A eine total $\mathfrak{K}$-reduzible torsionsfreie Gruppe und P eine periodische Gruppe ist. Ist H eine Untergruppe der Gruppe G, deren Faktorgruppe G/H eine periodische ordnungsbeschränkte Gruppe ist, dann muss die Untergruppe H auch spaltbar sein, $H = A' \dotplus Q$, wo $A' \cong A$ und Q eine periodische Gruppe bedeutet.*

Weiter sind folgende Sätze bewiesen.

Satz 3*. *Ist H eine Gruppe, die als direkte Summe einer torsionsfreien Gruppe vom endlichen Range und einer periodischen Gruppe ausgedrückt werden kann, dann ist jede abelsche Erweiterung G der Gruppe H mit ordnungsbeschränkter Gruppe eine spaltbare Gruppe.*

Satz 4. *G sei eine direkte Summe einer torsionsfreien Gruppe vom endlichen Range und einer periodischen Gruppe. Ist H eine Untergruppe der Gruppe G, deren Faktorgruppe G/H eine periodische ordnungsbeschränkte Gruppe ist, dann ist die Untergruppe H spaltbar.*

Diese zwei letzte Sätze kann man noch in folgender Form ausdrücken:

Satz 5. *G sei eine gemischte abelsche Gruppe mit der maximalen periodischen Untergruppe P, deren Faktorgruppe G/P (die eine torsionsfreie Gruppe ist) vom endlichen Range ist. Ist H eine Untergruppe der Gruppe G, für die die Faktorgruppe G/H eine ordnungsbeschränkte periodische Gruppe ist, so ist die Gruppe G genau dann spaltbar, falls die Untergruppe H spaltbar ist.*