Czechoslovak Mathematical Journal

Petr Mandl

Die Diffusionsprozesse mit klassischen Randbedingungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 2, 226–236

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100456

Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961, Прага

DIE DIFFUSIONSPROZESSE MIT KLASSISCHEN RANDBEDINGUNGEN

PETR MANDL, Praha

(Eingelangt am 8. Jänner 1960)

In der vorgelegten Arbeit wird gezeigt, dass die unbeschränkten und einseitig beschränkten Diffusionsprozesse, welche durch Halbgruppen charakterisiert werden, deren Generator ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist, (eventuell seine Verengung durch klassische Randbedingung), eine Übergangswahrscheinlichkeitsdichte besitzen, die den Kolmogorowschen Differentialgleichungen genügt.

Es sei Ω_0 ein Differentialoperator zweiter Ordnung

$$\Omega_0 = a(x) \frac{d^2}{dx^2} + b(x) \frac{d}{dx} \text{ und } \Omega_0^{\wedge} = \frac{d^2}{dx^2} a(x) - \frac{d}{dx} b(x)$$

der zu ihm adjungierte Operator. Der Einfachheit halber setzen wir voraus, dass die Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ auf der ganzen Geraden definiert sind. Die Funktion $a(x)$ sei positiv und besitze eine stetige Ableitung, $b(x)$ sei stetig. Wir setzen

$$W(x) = \exp\{- \int_0^x b(s)\, a(s)^{-1}\, ds\}$$

und die Funktionen

$$W(x) \int_0^x a(s)^{-1}\, W(s)^{-1}\, ds \text{ und } a(x)^{-1}\, W(x)^{-1} \int_0^x W(s)\, ds$$

seien in der Umgebung von $+\infty$ und in der Umgebung von $-\infty$ nicht integrierbar, (d. h. diese Punkte bilden die natürlichen Grenzen in der Fellerschen Terminologie):

Bedingung (1). W. FELLER hat bewiesen ([2]), dass Ω_0 der Generator einer Halbgruppe im Raume stetiger Funktionen auf dem (abgeschlossenen) Intervalle $\langle -\infty, \infty \rangle$ ist und $\Omega_0^{\wedge}$ der Generator einer Halbgruppe im Raume intergrierbarer Funktionen ist. Dasselbe gilt für ein beliebiges Intervall $\langle a, \infty \rangle$, wenn wir den Operator Ω_0 durch die Randbedingung

$$pu' = (1-p)\, u \,|_{x=a}\,, \quad 0 \leqq p \leqq 1 \tag{2}$$

und den Operator $\Omega_0^{\wedge}$ durch die Randbedingung

$$p((au)' - bu) = (1-p)\, au \,|_{x=a} \tag{3}$$

verengen. (Im Falle $p = 0$ soll die erste Halbgruppe im Raume stetiger Funktionen die in der Null verschwinden betrachtet werden.)

Jede Halbgruppe von einem solchen Paare charakterisiert die Übergangswahrscheinlichkeiten eines Markowschen Prozesses. Wie Feller bemerkt hatte, (siehe [3]), wäre es für die Vereinfachung von Formulationen zweckmässig zu beweisen, dass diese Prozesse durch Dichten von Übergangswahrscheinlichkeiten beschrieben sind, die den Kolmogorowschen Differentialgleichungen und eventuell auch den entsprechenden Randbedingungen genügen. In der vorliegenden Arbeit ist diese Behauptung unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Koefizienten $a(x)$ und $b(x)$ um eine stetige Ableitung mehr besitzen als für den Beweis derselben Behauptung im Falle eines beschränkten Intervalles notwendig ist.

Satz 1. *Besitzt $a(x)$ drei stetige Ableitungen, besitzt $b(x)$ zwei stetige Ableitungen und ist die Bedingung (1) erfüllt, so entspricht dem Prozesse, welcher durch den Operator Ω_0 und die Randbedingung (2) definiert ist (oder durch den Operator $\Omega_0^\wedge$ mit der Randbedingung (3)), eine Übergangswahrscheinlichkeitsdichte und es gilt*

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(t)}(x, y) = a(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f^{(t)}(x, y) + b(x) \frac{\partial}{\partial x} f^{(t)}(x, y) \tag{4}$$

mit der Randbedingung (2) und

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(t)}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [a(y) f^{(t)}(x, y)] - \frac{\partial}{\partial y} [b(y) f^{(t)}(x, y)] \tag{5}$$

mit der Randbedingung (3).

Denselben Gleichungen genügt auch die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte des Prozesses, der durch den Operator Ω_0 (resp. $\Omega_0^\wedge$) auf der ganzen Geraden definiert ist.

Satz 1 wird mit Hilfe von Satz 2 bewiesen. Zum Beweis des Satzes 2 werden wir aber einige Hilfssätze brauchen. Zuerst werden diese Hilfssätze eingeführt.

Die Menge der (x, t), für welche $0 \leqq x \leqq R$, $0 \leqq t \leqq T$ ist, wird mit I bezeichnet. Unter der Lösung einer Differentialgleichung in I wird immer eine Funktion gemeint, welche in I stetig ist und im Innern die Gleichung erfüllt. Die Koeffizienten in den Gleichungen werden als stetig in I vorausgesetzt, wenn nicht anderes bestimmt wird.

Hilfssatz 1. (S. N. Bernstein). *Die Funktion v erfülle in I die Gleichung*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial v}{\partial x} + c(x, t) v$$

($a(x, t) > 0$) *und es sei $|v| \leqq K$. Es existiert eine (unabhängige vom v) Konstante M derart, dass*

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \leqq \frac{M \cdot K}{x(R - x) \sqrt{t}} \quad \textit{ist.}^{1})$$

---

[1]) I. Babuška machte mich auf diesen Satz aufmerksam. Ihm verdanke ich auch andere wertvolle Anregungen.

Beweis. Für den Beweis siehe [1].

Die folgenden Hilfssätze werden zuerst für die Wärmeleitungsgleichung bewiesen und dann gehen wir zu den Gleichungen der Form (4) und (5) über. Das ermöglicht uns die Quellenfunktion der Wärmeleitungsgleichung zu benutzen. Die Eigenschaften dieser Funktion, welche im Folgenden benutzt werden, werden in ihrer expliziten Form sichtbar. Es wäre schwierig, diese Eigenschaften der Quellenfunktion für den allgemeinen Fall abzuleiten.

Es sei

$$\phi(\xi, x, s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \exp - \frac{(x-\xi)^2}{4s}.$$

Ferner sei

$$g_r(\xi, x; s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(\xi + 2nr, x; s) - \phi(2nr - \xi, x; s) =$$

$$= \frac{2}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \exp - \frac{n^2\pi^2 s}{r^2} \,.\, \sin \frac{\pi n x}{r} \,.\, \sin \frac{\pi n \xi}{r}.$$

(Siehe [5] Seite 469.)

g_r ist die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte der Brownschen Bewegung mit einer absorbierenden Grenze in 0 und im r. Diese Funktion wird in den Beweisen benutzt.

Hilfssatz 2. *Es sei v_n eine Folge von Funktionen die in I der Gleichung*

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial t} v_n = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_n - Q(x)\, v_n$$

genügen. $Q(x)$ habe eine Ableitung, die in I stetig ist. $v_n(x, t)$ konvergiere zu $v(x, t)$ gleichmässig auf jedem zu I innerem Intervalle. Ferner sei $|v_n(x, t)| \leqq M$,

$$(7) \qquad \alpha \frac{\partial}{\partial x} v_n = \beta v_n \,|_{x=0} \quad (\alpha^2 + \beta^2 > 0)$$

und $\frac{\partial^3}{\partial x^3} v_n$ sei stetig in I. Es ist dann

$$\lim_{x\to 0+} \alpha \frac{\partial}{\partial x} v - \beta v = 0 \quad \textit{für} \quad 0 < t < T.$$

Beweis. Es sei zuerst bemerkt, dass aus den Abschätzungen in Hilfssatz 1 die in inneren Intervallen von I gleichmässige Konvergenz von $\frac{\partial}{\partial x} v_n$ zu $\frac{\partial}{\partial x} v$ folgt. Wenn $\alpha \neq 0$ ist, so setzen wir $\gamma = \beta\alpha^{-1}$ und finden die Lösung der Gleichung $q^2 + \frac{d}{dx} q =$

$= Q$, welche $q(0) = \gamma$ erfüllt. Wir setzen $w_n = \frac{\partial}{\partial x} v_n - q v_n$. Wenn $\alpha = 0$ ist, so sei $w_n = v_n$. w_n genügt der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} w_n = \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_n - Q_1 w_n \quad \text{mit} \quad Q_1 = Q - 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} q \quad \text{oder} \quad Q_1 \equiv Q\,.$$

und es ist $w_n(0, t) = 0$.

Wir wählen ein r derart, dass $0 < r < R$ ist und dass die Lösung $q(x)$ auf dem Intervalle $\langle 0, r \rangle$ existiert. Aus der Greenschen Formel bekommen wir folgende Relation:

$$(8) \qquad w_n(x, t) = \int_0^t \int_0^r g_r(\xi, x; t - \tau)\, Q_1(\xi) w_n(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau + \\ + \int_0^r g_r(\xi, x; t)\, w_n(\xi, 0)\, \mathrm{d}\xi - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} g_r(r, x; t - \tau)\, w_n(r, \tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Mit Hilfe partieller Integration bekommen wir

$$(9) \quad \int_0^r g_r(\xi, x; t - \tau)\, Q_1(\xi)\, w_n(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi = - \int_0^r g_r(\xi, x; t - \tau)\, Q_1(\xi)\, q(\xi)\, v_n(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi - \\ - \int_0^r \frac{\partial}{\partial \xi} g_r(\xi, x; t - \tau)\, Q_1(\xi)\, v_n(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi - \int_0^r g_r(\xi, x; t - \tau)\, Q_1'(\xi)\, v_n(\xi, \tau)\, \mathrm{d}\xi\,.$$

Es gilt

$$\int_0^r \left| \frac{\partial}{\partial \xi} g_r(\xi, x; t - \tau) \right| \mathrm{d}\xi \leqq \frac{M}{\sqrt{t - \tau}}\,.$$

Mit Hilfe von (9) und dieser Abschätzung sehen wir, wenn wir die Beschränkheit von v_n benutzen, dass im ersten Glied der rechten Seite von (8) der Grenzübergang nach dem Integralzeichen berechtigt ist. Analog sehen wir, dass der Grenzübergang auch im zweiten Gliede berechtigt ist. Zur Analyse des dritten Gliedes kann man Hilfssatz 1 anwenden.

Mit Hilfe einer Untersuchung der Relation, welche man für w durch den Grenzübergang in (8) bekommt, überzeugen wir uns, dass $\lim_{x \to 0+} w(x, t) = 0$ gilt. Dabei kann man einige Glieder auf dieselbe Weise wie in (9) umformen. Die Relation $\lim_{x \to 0+} w(x, t) = 0$ ist der Relation

$$\lim_{x \to 0+} \alpha \frac{\partial}{\partial x} v - \beta v = 0$$

gleichwertig.

Hilfssatz 3. *Die Funktion $v(x, t)$ genüge in I der Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} v = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v - Q(x)\, v$$

und es sei $\int_0^R |v(x, t)|\, \mathrm{d}x \leqq M$. Dann gilt für jedes zu I inneres Intervall J die Ungleichung $|v(x, t)| \leqq C_J M$ (Die Konstante C_J ist von v unabhängig).

Beweis. Es sei $r < R$ so gewählt, dass das Intervall J in der Region $0 < x < r$, $0 < t < T$ enthalten ist. Die Funktion v sei jetzt mit Hilfe der Greenschen Formel ausgedrückt

$$(10)\quad v(x, t) = \int_0^t \int_0^r g_r(\xi, x, t - \tau)\, Q(\xi)\, v(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau + \int_0^r g_r(\xi, x; t)\, v(\xi, 0)\, d\xi + \\ + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} g_r(0, x; t - \tau)\, v(0, \tau)\, d\tau - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} g_r(r, r; t - \tau)\, v(r, \tau)\, d\tau\,.$$

Mit Hilfe von (10) schätzen wir jetzt v in der Menge J ab. Schwierigkeiten können nur die zwei letzten Glieder bereiten. Betrachten wir zum Beispiel das Letzte. Wir wählen $r_1 < r_2 < R$ derart, dass das Intervall J ganz in der Menge $0 < x < r_1$, $0 < t < T$ enthalten ist. Aus der Ungleichung

$$\int_0^T \int_{r_1}^{r_2} |v(x, t)|\, dx\, dt \leqq M\,.\,T$$

folgt, dass ein solches $r \in (r_1, r_2)$ existiert, dass

$$\int_0^T |\, v(r, t)\, |\, dt \leqq \frac{M\,.\,T}{r_2 - r_1}$$

ist. Wir können voraussetzen, dass dieses r in Formel (10) gewählt ist. Daraus bekommen wir die Abschätzung des letzten Gliedes. Auf dieselbe Weise könnte man zur Abschätzung des vorletzten Gliedes die zweite Grenze wenn notwendig nicht in der Null, sondern in deren Umgebung wählen.

Hilfssatz 4. *Die Funktionen $v_n(x, t)$ genügen in I der Gleichung (6) und es sei $v_n(x, t) \leqq M$, $v_n(x, 0) = g(x)$. Ferner sei $v(x, t) = \lim_{n \to \infty} v_n(x, t)$. Es ist dann $\lim_{t \to 0+} v(x, t) = g(x)$ für jedes x, $0 < x < R$.*

Beweis. Die Behauptung folgt einfach aus Relation (10), welche man für $v(x, t)$ durch den Grenzübergang bekommt. Das zweite Glied auf der rechten Seite ist in diesem Falle $\int_0^r g_r(\xi, x; t)\, g(\xi)\, d\xi$, was für $t \to 0$ bekanntlich gegen $g(x)$ konvergiert. Die übrigen Glieder konvergieren gegen Null.

Bemerkung. Die Hilfssätze 2–4 gelten nicht nur für die Gleichungen der Form, für welche sie ausgesprochen waren, sondern auch für die Gleichungen

$$(11)\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} v + b(x) \frac{\partial}{\partial x} v$$

und

$$(12)\qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} a(x)\, v - \frac{\partial}{\partial x} b(x)\, v\,.$$

Man kann nämlich in diesen Gleichungen durch die Variablentransformation $X = \int^x [a(s)]^{-\frac{1}{2}}\, ds$ erreichen, dass der Koeffizient bei der zweiten Ableitung identisch gleich 1 ist. Der Koefizient bei der ersten Ableitung ist dann $\beta = (b - \frac{1}{2}a')/\sqrt{a}$. Setzen wir jetzt $B(x) = \int^x \beta(s)\, ds$, so können wir die erste Gleichung durch die Substitution

$v = e^{-\frac{1}{2}B}y$ und die zweite Gleichung durch die Substitution $v = e^{\frac{1}{2}B}y$ auf die Form

$$\frac{\partial}{\partial t} y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} y - Q(x) y \,, \text{ mit } Q(x) = \frac{1}{4} \beta^2(x) + \frac{1}{2} \beta'(x)$$

überführen. Wir können also die Hilfssätze 2–4 auch im Falle der Gleichungen (11), (12) benutzen.

Hilfssatz 5. *Es seien v und u zwei Lösungen der Gleichung* (11) *in I. v sei nichtnegativ und genüge der Bedingung $\frac{\partial}{\partial x} v = 0 \,|_{x=0}$, u genüge der Bedingung* (1). *Ist $v \geqq u$ für $0 \leqq x \leqq R$, $t = 0$ und für $x = R$, $0 \leqq t \leqq T$, so ist $v \geqq u$ in I.*

Beweis. Die Differenz $v - u$ bezeichnen wir mit w. So w genügt der Gleichung (11) und nimmt deshalb seinen kleinsten Wert in I auf den Seiten an, die $t = 0$, oder $x = 0$, oder $x = R$ entsprechen. Wenn $\min w = \alpha$ kleiner als Null wäre, so sollte mit Rücksicht auf die Nichtnegativität von w auf zwei Seiten von dem Rechteck ein solches t_0 existieren, $0 < t_0 \leqq T$, dass $w(0, t_0) = \alpha$ und folglich $u(0, t_0) > 0$ ist. Das ist unmöglich, wenn $p = 0$ ist. Wenn $0 < p < 1$, so folgt aus der Bedingung (2) $u_x(0, t_0) > 0$. Es soll also $w_x(0, t_0) < 0$ sein, was der Relation $w(0, t_0) = \min w$ widerspricht. Es sei jetzt $p = 1$. Dann genügt w der Gleichung (11) mit der Randbedingung $\frac{\partial}{\partial x} w = 0 \,|_{x=0}$. Jetzt folgt die Behauptung des Hilfssatzes aus der Tatsache, dass eine, für $t = 0$ und $x = r$ nichtnegative, Lösung der Gleichung (11) mit der Randbedingung (2) nichtnegativ in I ist.

Bei dem Beweis vom Satz 2 werden wir die Dichten der Übergangswahrscheinlichkeiten der Prozesse auf den beschränkten Intervallen $\langle a, b \rangle$ benutzen, welche den Gleichungen (4) und (5) mit den Randbedingungen (2), (3) für $x = a$ (event. $y = a$ und einer weiteren Ranbedingung für $x = b$ (event. $y = b$) genügen. Solche Dichten sind durch die Entwicklung in Eigenfunktionen in der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k t} X_k(x) \; Y_k(y)$$

gegeben. Für die im weiteren benutzten Eigenschaften der Eigenfunktionen und Eigenwerte siehe z. B. [4].

Es gelten für $\lambda_k > 0$ folgende Abschätzungen:

$$\lambda_k = O(k^2) \,, \; |X_k| < M_1 \,, \; |X'_k| < \sqrt{\lambda_k} \, M_2 \,, \; |X''_k| < \lambda_k M_3 \,.$$

Wir werden auch mit den dritten Ableitungen arbeiten. Die Gleichung

$$a X''_k + b X'_k + \lambda_k X_k = 0$$

kann man mit Rücksicht auf unsere im Satze 1 gemachten Voraussetzungen über die Koeffizienten a und b differenzieren. Daraus sehen wir, dass X'''_k existiert und gleichzeitig bekommen wir die Abschätzung $|X_k'''| < \lambda_k^{\frac{3}{2}} M_4$. Dassel begilt von Y_k. Als eine Folgerung unserer Betrachtungen bekommen wir, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_k t} X_k(x)\, Y_k(y)$$

für $t > 0$ eine im $\langle a, b\rangle$ stetige dritte Ableitung nach x (event. nach y) hat.

In Satz 2 machen wir über die Koeffizienten $a(x)$ und $b(x)$ dieselben Voraussetzungen wie in Satz 1; es ist aber nicht notwendig, dass die Bedingung (1) erfüllt wird.

Satz 2. *Es existiert für jede stetige und beschränkte Funktion auf dem Intervalle $\langle a, \infty)$ eine Lösung $v(x, t)$ der Gleichung (11), für welche gilt:*

1. $p \dfrac{\partial}{\partial x} v = (1 - p)\, v\,|_{x=a}$, 2. $\lim_{t\to 0+} v(x, t) = g(x)$ *für* $x > a$, 3. $|v(x, t)| \leqq \sup_x |g(x)|$.

Diese Lösung ist in der Form

$$v(x, t) = \int_a^\infty f^{(t)}(x, y)\, g(y)\, \mathrm{d}y\,,$$

gegeben, wo $f^{(t)}(x, y)$ der Gleichung (4) mit der Randbedingung (2) und der Gleichung (5) mit der Randbedingung (3) genügt.

Es existiert für jede stetige und beschränkte Funktion auf dem Intervalle $(-\infty, \infty)$ eine Lösung $v(x, t)$ der Gleichung (11) die 2. und 3. erfüllt. Es gilt

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(t)}(x, y)\, g(y)\, \mathrm{d}y\,,$$

wo $f^{(t)}(x, y)$ den Gleichungen (4) und (5) genügt.

Beweis. Intervall $\langle a, \infty)$. Es sei $g(x)$ eine nichtnegative Funktion, welche die Bedingungen des Satzes 2 erfüllt. Mit $v_b(x, t)$ sei die Lösung der Gleichung (11) in dem Gebiete $a \leqq x \leqq b$, $t \geqq 0$ bezeichnet, für welche $\lim_{t\to 0+} v_b(x, t) = g(x)$ für $x \in (a, b)$ ist und welche die Randbedingung (2) und die Bedingung

$$v_b = 0\,|_{x=b} \quad (t > 0) \tag{13}$$

erfüllt. Diese Lösung kann in der Form

$$v_b(x, t) = \int_a^b f_b^{(t)}(x, y)\, g(y)\, \mathrm{d}y$$

geschrieben werden. Die Funktion $f_b^{(t)}(x, y)$ ist nichtnegativ und erfüllt als Funktion von (x, t) die Gleichung (11) mit den Bedingungen (2) und (13) und als Funktion von (y, t) die Gleichung (12) mit den Bedingungen (3) und (13). Einige Eigenschaften dieser Funktion, welche aus ihrer Darstellung mit Hilfe von Eigenfunktionen folgen, waren schon erwähnt.

Es sei $b_1 < b_2$. Dann ist $v_{b_1}(x, t) \leqq v_{b_2}(x, t)$ für $x \in \langle a_1, b_1\rangle$. Das folgt daraus, dass die Lösung der Gleichung (11) mit der Randbedingung (2) nichtnegativ für $x \in \langle a, b_1\rangle$, $t \geqq 0$ ist, wenn sie für $t = 0$ und $x = b_1$ nichtnegativ ist. Es folgt aus der Beliebigheit in der Wahl der Funktion g, dass

$$f_{b_1}^{(t)}(x, y) \leqq f_{b_2}^{(t)}(x, y)$$

ist.

Wir bezeichnen

$$f^{(t)}(x, y) = \lim_{b \to \infty} f_b^{(t)}(x, y)$$

und beweisen, dass $f^{(t)}(x, y)$ die im Satze ausgesprochene Eigenschaften hat. Aus der Ungleichung

$$\int_a^b f_b^{(t)}(x, y)\,\mathrm{d}y \leqq 1$$

folgt, dass

$$\int_a^\infty f^{(t)}(x, y)\,\mathrm{d}y \leqq 1$$

ist. Es folgt aus dem Hilfssatz 3, dass in jedem beschränkten, geschlossenen Intervalle J, welches sich in dem Gebiete $y > a$, $t > 0$ befindet,

$$f_b^{(t)}(x, y) \leqq M_J$$

ist. (Unabhängig von x und b.) Dann folgt aber aus Hilfssatz 1, dass in jedem J die Funktionen $f_b^t(x, y)$ beschränkte (wieder unabhängig vom b) erste Ableitungen nach x, y und t haben. (Was die Ableitung nach t betrifft, so siehe die analogen Überlegungen im nächsten Absatze.) Daraus folgt einfacherweise, dass die Grenzfunktion $f^{(t)}(x, y)$ in (t, x, y) in dem Gebiete $x > a$, $y > a$, $t > 0$ stetig ist. Die Funktion $f_b^{(t)}(x,y)$ hängt auf eine monotone Weise von b ab und die Grenzfunktion ist stetig. Die Konvergenz ist also auf jedem J gleichmässig. Dann können wir aber aus Hilfssatz 1 folgern, dass auch die in den Gleichungen (4) und (5) sich befindende Ableitungen in jedem J gleichmässig konvergieren.

(Unmittelbar aus Hilfssatz 1 folgt die gleichmässige Konvergenz der ersten Ableitungen nach x (event. nach y). Da die ersten Ableitungen eine Gleichung vom ähnlichen Typus, welche man durch differenzieren nach x (event. nach y) bekommt, erfüllen (hier verwenden wir im Falle der Gleichung (5) unsere Voraussetzungen über die Koeffizienten), so können wir aus dem Hilfssatz auch auf die Konvergenz der zweiten Ableitungen schliessen. Die Ableitung nach t ist mit Hilfe von (4) event. (5) durch die Ableitungen nach x (event. nach y) ausgedrückt.)

Aus dem, was gesagt war, sehen wir, dass $f^{(t)}(x, y)$ in dem gegeben Gebiete die Gleichungen (4) und (5) erfüllt. Es bleibt noch die Randbedingungen zu verifizieren Es sei $d > a$, $r > 0$ und $g_d^{(t)}(x, y)$ sei die Übergangsdichte, welche den Gleichungen (4) und (5) mit den Bedingungen (2), (3) und

$$\frac{\partial}{\partial x}\, g_d^{(t)}(x, y) = 0\,|_{x=d}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\, a(y)\, g_d^{(t)}(x, y) - b(y)\, g_d^{(t)}(x, y) = 0\,|_{y=d}$$

genügt. Aus der Greenschen Formel bekommen wir, dass man für $b > d$, $t > r$, $y < d$

$$f_b^{(t)}(x, y) = \int_a^d g_d^{(t-r)}(z, y)\, f_b^{(r)}(x, z)\,\mathrm{d}z + \int_r^t g_d^{(t-\tau)}(d, y)\,\frac{\partial}{\partial z} f_b^{(\tau)}(x, d)\,\mathrm{d}\tau$$

schreiben kann.

Gehen wir in dieser Formel mit $b \to \infty$ zur Grenze, so bekommen wir

$$(14) \qquad f^{(t)}(x, y) = \int_a^d g_d^{(t-r)}(z, y) \, f^{(r)}(x, z) \, \mathrm{d}z + \int_r^t g_d^{(t-\tau)}(d, y) \frac{\partial}{\partial z} f^{(\tau)}(x, d) \, \mathrm{d}\tau \, ;$$

aus den Abschätzungen

$$g_d \leqq N \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_k(t-\tau)}, \; \lambda_k = O(k^2)$$

und

$$\textstyle\int_a^d f^{(r)}(x, z) \, \mathrm{d}z \leqq 1$$

sehen wir, dass $f^{(t)}(x, z) \leqq M_J$ ist, und zwar nicht nur für J im Gebiete $y > a$, $t > 0$, wie aus Hilfssatze 3 folgte, aber auch für J in der Menge $y \geqq a$, $t > 0$. Die schwächere Behauptung des Hilfssatzes hat uns zum Beweise der Beschränkheit von $\dfrac{\partial}{\partial z} f^{(\tau)}(x, d)$ gedient.

Eine Untersuchung der Formel (14) gibt die Stetigkeit von $f^{(t)}(x, y)$ in den Punkten der Grenze $y = a$, $t > 0$. Mit Hilfe einer analogen Formel, welche man für $f^{(t)}(x, y)$ als Funktion von (x, t) ableitet, bekommen wir die Stetigkeit in den Punkten der Grenze $x = a$, $t > 0$.

Die Beschränkheit, welche im Hilfssatze 2 gefordert wird war gerade bewiesen. Aus den schon erwähnten Eigenschaften der Funktion $f_b^{(t)}(x, y)$ sehen wir, dass der Hilfssatz 2 sich auf

$$f^{(t)} = \lim_{b \to \infty} f_b^{(t)}(x, y)$$

anwenden lässt. Daraus folgt, dass $f^{(t)}(x, y)$ die Bedingungen (2) und (3) erfüllt. Damit ist die Behauptung des Satzes, welche $f^{(t)}(x, y)$ betrifft bewiesen.

Wir setzen

$$v(x, t) = \textstyle\int_a^\infty f^{(t)}(x, y) \, g(y) \, \mathrm{d}y \, .$$

Wir haben

$$v(x, t) = \lim_{b \to \infty} v_b(x, t) \, .$$

Auf dieselbe Wiese wie im Vorgehenden sehen wir, dass v die Gleichung (11) und die Bedingung 1. des Satzes 2 erfüllt. Es war am Anfang vorausgesetzt, dass $g(x) \geqq 0$ ist, so $v_b(x, t)$ ist nichtabnehmend in b. Der allgemeine Fall wird mit Hilfe der Zerlegung von g auf den positiven und den negativen Teil untersucht. Aus der Beziehung

$$|v_b(x, t)| \leqq \sup_x |g(x)|$$

sehen wir, dass v die Bedingung 3. erfüllt. Der Hilfssatz 4 gibt die Erfüllung der Bedingung 2.

Die Behauptungen des Satzes, welche das Intervall $(-\infty, \infty)$ betreffen, werden durch die Methoden bewiesen, welche wir im Falle des Intervalls $\langle a, \infty)$ verwendeten.

Die behilflichen Dichten $f_b^{(t)}(x, y)$ werden jetzt auf dem Intervalle $\langle - b, b \rangle$ definiert und durch die Randbedingungen $f_b^{(t)}(x, y) = 0$ für $x = \pm b$, $y = \pm b$ bestimmt.

Bemerkung. Mit den Methoden des Beweises des Satzes 2 kann man ableiten, dass für eine beliebige beschränkte messbare Funktion g die Funktion

$$v(x, t) = \int_a^\infty f^{(t)}(x, y)\, g(y)\, dy$$

der Gleichung (11) mit der Bedingung (2) genügt. Auf dieselbe Weise konnte bewiesen werden, dass für eine Funktion $G(x)$ mit der beschränkten Variation auf dem Intervalle $\langle a, \infty)$ die Funktion

$$v(y, t) = \int_a^\infty f^{(t)}(x, y)\, dG(x)$$

eine Lösung der Gleichung (12) mit der Bedingungung (3) ist.

Der Beweis des Satzes 1. Intervall $\langle a, \infty)$. In Bezug auf die Halbgruppe deren Generator der durch die Bedingung (2) verengte Operator Ω_0 ist, werden wir folgende Bezeichnung benutzen: $u(x, t; g)$ als Funktion von x stellt das Element des Raumes stetiger Funktionen dar, welches zu dem Elemente g durch die zu $t \geqq 0$ entsprechende Transformation zugeordnet ist. $\bar{u}(x, t; g)$ habe eine analoge Bedeutung in Bezug auf die Halbgruppe deren Generator durch die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial x}\bar{u} = 0 \,|_{x=a} \tag{15}$$

charakterisiert ist. Die Funktion

$$v(x, t; g) = \int_a^\infty f^{(t)}(x, y)\, g(y)\, dy$$

war schon in Satz 2 definiert.

Es sei g eine zweimal stetig differenziarbare nichtnegative Funktion, welche in einer Umgebung von a und Unendlich verschwindet. Eine solche Funktion gehört in den Definitionsbereich des Generators wie der Halbgruppe $\{u\}$, so auch der Halbgruppe $\{\bar{u}\}$. Aus der Theorie der Halbgruppen (oder als eine unmittelbare Folgerung der Definition des infinitesimalen Operators) folgt jetzt, dass $u(x, t; g)$, $\bar{u}(x, t; g)$ die Gleichung (11) mit der Bedingung (2) event. (15) erfüllen. Es ist weiter bekannt (siehe [2], Seite 490), dass unter den Bedingungen (1)

$$\lim_{x \to \infty} \bar{u}(x, t; g) = \lim_{x \to \infty} u(x, t; g) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

ist. Es folgt aus der Stetigkeit der Halbgruppen im Sinne der gleichmässigen Metrik, dass diese Beziehung gleichmässig auf den beschränkten Mengen von t gilt. Wir wollen beweisen dass $u(x, t; g) = v(x, t; g)$ ist. Wenn wir die Tatsache benutzen, dass

$$v_b(x, t; g) = \int_a^b f_b^{(t)}(x, y)\, g(y)\, dy$$

die Gleichung (11) mit den Randbedingungen (2) und $v_b = 0 \,|_{x=b}$ erfüllt, so bekommen wir aus dem Hilfssatz 5 die Ungleichung $v_b(x, t; g) \leqq \bar{u}(x, t; g)$. Es ist also auch $v(x, t; g) \leqq \bar{u}(x, t; g)$.

Da die beiden Funktionen $v(x, t; g)$, $u(x, t; g)$ die Gleichung (11) mit der Randbedingung (2) und mit derselben Anfangsbedingung erfüllen (es gilt nämlich $v_b(x, t; g) \leqq v(x, t; g) \leqq \bar{u}(x, t; g)$ mit $\lim_{t \to 0+} v(x, t; g) = \lim_{t \to 0+} \bar{u}(x, t; g) = g(x)$) und beide gleichmässig auf den beschränkten Mengen von t für grosse Werte von x verschwinden, so sind sie einander gleich und wir haben

$$u(x, t; g) = v(x, t; g) = \int_a^\infty f^{(t)}(x, y)\, g(y)\, \mathrm{d}y \,.$$

Aus der Beliebigkeit von g folgt, dass $f^{(t)}(x, y)$ eine Dichte der Übergangswahrscheinlichkeit des Prozesses ist, von welchem der Satz 1 spricht. Die in Satze 1 gegebenen Eigenschaften dieser Dichte sind in Satz 2 enthalten.

Der Fall des Intervalles $(-\infty, \infty)$ wird auf dieselbe Weise betrachtet.

Literatur

[1] *S. Bernstein:* Limitation des modules des dérivées successives des solutions des équations du type parabolique. C. R. de l'Acad. des Sc. de l'URSS, 1938 vol. *XVIII*, 385—389.

[2] *W. Feller:* The parabolic differential equation and the associated semigroups of transformations. Annals of Math., *55* (1952), 468—519.

[3] *W. Feller:* Diffusion processes in one dimension. Transactions of the Amer. Math. Soc., *77* (1954), 1—31.

[4] *I. G. Petrowski:* Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Leipzig 1955.

[5] *А. Н. Тихонов- А. А. Самарский:* Уравнения математической физики. Москва-Ленинград 1951.

Резюме

ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ С КЛАССИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

ПЕТР МАНДЛ (Petr Mandl), Прага

В работе изучаются диффузионные процессы на интервале $\langle a, \infty \rangle$ и на интервале $(-\infty, \infty)$, которые охарактеризированы с помощью полугрупп, инфинитезимальный оператор которых является дифференциальным оператором второго порядка в случае интервала $(-\infty, \infty)$ или зужением такого оператора краевым условием (2) или (3) в случае интервала $\langle a, \infty)$. Доказывается, что эти процессы имеют плотности вероятности перехода, удовлетворяющие уравнениям Колмогорова. (В случае интервала $\langle a, \infty)$ с соответствующими краевыми условиями.)