Miloslav Jůza

Familles développables d'homologies et de pseudohomologies

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 4, 579–589

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100384

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

FAMILLES DÉVELOPPABLES D'HOMOLOGIES ET DE PSEUDOHOMOLOGIES

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 6 octobre 1958)

Dans cet article, on étudie des familles développables [voir ce Journal, *75*, 1950, p. 135 et *2* (77), 1952, pp. 167—188] d'homologies et de pseudohomologies. Les résultats principaux sont contenus dans les théorèmes 4 et 2.

Soit S_n un espace projectif de dimension $n \geqq 2$. Nous appellerons *pseudohomologie* dans l'espace S_n chaque homographie non-identique H pour laquelle il existe deux sous-espaces linéaires S_k et S_{n-k-1} (de dimension k et $n - k - 1$) de points doubles. On sait bien, que, pour un choix convenable de la base $A_0, \ldots, A_n$ de l'espace S_n, on a pour la pseudohomologie H

$$\begin{aligned} HA_i &= \varrho A_i\,, \quad 0 \leqq i \leqq k\,, \\ HA_i &= \ \ A_i\,, \quad k + 1 \leqq i \leqq n\,, \end{aligned} \tag{1}$$

où $0 \leqq k \leqq n - 2$, $0 \neq \varrho \neq 1$. Le nombre ϱ qui a une signification géometrique, sera appelé *caractéristique* de la pseudohomologie H.[1])

Supposons maintenant que $A_0, \ldots, A_n$, ϱ figurant dans (1) soient des fonctions d'une variable réelle définies sur un intervalle donné,[2]) et que l'on ait $[A_0, \ldots, A_n] \neq 0$, $0 \neq \varrho \neq 1$ partout dans cet intervalle, de sorte que les relations (1) nous définissent un système à un paramètre de pseudohomologies $\{H(t)\}$. Nous nous proposons pour but de trouver les conditions sous lesquelles le système $\{H(t)\}$ a une enveloppe, c'est-à-dire qu'il existe pour chaque t un hyperplan $\xi(t)$ tel que pour tout point $X \in \xi(t)$ on a $H'(t)\, X = \lambda H(t)\, X$, soit $H^{-1}(t)\, H'(t)\, X = \lambda X$, λ étant un nombre réel.[3]) Un tel hyperplan $\xi(t)$ sera appelé *hyperplan de contact* de la pseudohomologie $H(t)$.

---

[1]) Si H est une homologie, sa caractéristique est bien déterminée. Autrement, elle n'est déterminée d'une manière univoque que si la paire des sous-espaces S_k, S_{n-k-1} est ordonnée.

[2]) Nous suppons que toutes les fonctions considérées dans notre article admettent des dérivées de tous les ordres.

[3]) Si K est une homographie de S_n, le point X vérifiant $KX = \lambda X$ sera appelé point double de l'homographie K, même si $\lambda = 0$.

Posons

$$A_i' = \sum_{j=0}^{n} a_i^j A_j\,, \quad i = 0, \ldots, n\,. \tag{2}$$

En différentiant (1) et en y substituant d'après (2) pour $i = 0, \ldots, k$, nous trouvons

$$H'A_i = (HA_i)' - HA_i' = \varrho' A_i + (\varrho - 1) \sum_{j=k+1}^{n} a_i^j A_j\,,$$

ensuite il vient pour $i = k+1, \ldots, n$

$$H'A_i = (HA_i)' - HA_i' = (1-\varrho) \sum_{j=0}^{k} a_i^j A_j\,.$$

En dehors de cela, il découle de (1)

$$A^{-1}A_i = \frac{1}{\varrho} A_i\,, \quad i = 0, \ldots, k\,,$$

$$H^{-1}A_i = A_i\,, \quad i = k+1, \ldots, n$$

de sorte que

$$H^{-1}H'A_i = \frac{\varrho'}{\varrho} A_i + \sum_{j=k+1}^{n} (\varrho - 1)\, a_i^j A_j\,, \quad 0 \leqq i \leqq k\,,$$

$$H^{-1}H'A_i = \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{\varrho} - 1\right) a_i^j A_j\,, \quad k+1 \leqq i \leqq n\,. \tag{3}$$

L'homographie $H^{-1}H'$ a donc la matrice

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\varrho'}{\varrho}\, \mathfrak{J}_{k+1} & \mathfrak{A} \\ \mathfrak{B} & \mathfrak{N}_{n-k,n-k} \end{matrix} \right\|,$$

où

$$\mathfrak{A} = \left\| \begin{matrix} (\varrho - 1)a_0^{k+1} & \ldots & (\varrho - 1)\, a_0^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\varrho - 1)a_k^{k+1} & \ldots & (\varrho - 1)\, a_k^n \end{matrix} \right\|,$$

$$\mathfrak{B} = \left\| \begin{matrix} \left(\dfrac{1}{\varrho} - 1\right) a_{k+1}^0 & \ldots & \left(\dfrac{1}{\varrho} - 1\right) a_{k+1}^k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\dfrac{1}{\varrho} - 1\right) a_n^0 & \ldots & \left(\dfrac{1}{\varrho} - 1\right) a_{k+1}^n \end{matrix} \right\|,$$

$\mathfrak{J}_\alpha$ est la matrice unitaire de degré α, $\mathfrak{N}_{\alpha,\beta}$ est la matrice nulle de type α, β.

Pour qu'il existe un hyperplan de contact de l'homographie H, il faut que la matrice $\mathfrak{M} - \lambda \mathfrak{J}_{n+1}$ soit de rang 1 pour un certain λ. Comme $n \geqq 2$, $k \leqq$

$\leqq n - 2$, cela peut arriver seulement pour $\lambda = 0$; nous cherchons donc les conditions sous lesquelles la matrice $\mathfrak{M}(t)$ est de rang 1 pour tout t dans un certain intervalle.

Nous distinguerons deux cas:

1. $k = 0$, de sorte que les pseudohomologies sont des homologies;
2. $0 < k \leqq n - 2$.[4])

Cas 1. Dans ce cas

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\varrho'}{\varrho} & (\varrho - 1)\, a_0^1 & \ldots & (\varrho - 1)\, a_0^n \\ \left(\dfrac{1}{\varrho} - 1\right) a_1^0 & 0 & \ldots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\dfrac{1}{\varrho} - 1\right) a_n^0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\| .$$

a) Supposons que pour tous les t dans un certain intervalle nous ayons

$$a_1^0(t) = a_2^0(t) = \ldots = a_n^0(t) = 0 . \tag{4}$$

Alors la matrice $\mathfrak{M}(t)$ est de rang 1, quelles que soient les autres fonctions a_i^j. Or, comme nous avons d'après (2)

$$[A_1, \ldots, A_n]' = \sum_{i=1}^{n} ((-1)^{i-1}\, a_i^0 [A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n] + \\ + a_i^i [A_1, \ldots, A_n]) ,$$

la relation (4) a lieu dans tout l'intervalle si et seulement si l'espace $[A_1, \ldots, A_n]$ ne change pas de position.

b) Lorsque à chaque point t d'un intervalle un au moins des nombres $a_1^0(t), \ldots, a_n^0(t)$ est différent de zéro, alors la matrice $\mathfrak{M}(t)$ est de rang 1 si et seulement si

$$a_0^1(t) = a_0^2(t) = \ldots = a_0^n(t) = 0 \tag{5}$$

pour tous les t de cet intervalle-là. Or cela signifie d'après (2) que le point A_0 ne change pas de position.

Les fonctions a_i^j étant continues nous pouvons diviser le domaine où t varie en sous-intervalles à l'intérieur desquels on a soit a) soit b). Nous avons donc le résultat suivant:

Théorème 1. *Un système à un paramètre d'homologies a une enveloppe si et seulement si ou bien la centre ou bien l'axe des homologies reste fixe.*

A présent, nous allons examiner dans les deux cas en question les hyperplans de contact $\xi(t)$ des homologies $H(t)$.

---

[4]) Si $k = 0$, le point A_0 sera appelé *centre* et l'hyperplan $[A_1, \ldots, A_n]$ sera appelé *axe* de l'homologie H définie par (1). Dans le cas général oú $0 \leqq k < n - 1$, les deux sous-espaces $[A_0, \ldots, A_k]$, $[A_{k+1}, \ldots, A_n]$ seront appelés *espaces centraux* de la pseudo-homologie H.

a) Supposons que nous ayons (4). Si le point $X = \sum_{i=0}^{n} x^i A_i(t)$ doit être situé dans l'hyperplan des points doubles de l'homographie $H^{-1}H'(t)$, il faudra que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{n} x^i H^{-1} H'(t)\, A_i(t) = 0$$

de sorte qu'il résulte d'après (3) et (4)

$$x^0 \left(\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)} A_0(t) + \sum_{j=1}^{n} (\varrho(t) - 1)\, a_0^j(t)\, A_j(t) \right) = 0\,.$$

Si pour chaque t on a $\varrho'(t) = 0$, $a_0^j(t) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, alors l'homologie $H(t)$ reste constante. Si ce cas banal ne se présente pas, on doit avoir $x^0 = 0$, de sorte que l'hyperplan de contact de l'homologie $H(t)$ coïncide avec l'hyperplan $[A_1(t), \ldots, A_n(t)]$, c'est-à-dire avec l'axe de cette homologie, donc il reste fixe.

De l'autre côté, il est clair qu'un hyperplan arbitraire fixe ξ peut être l'hyperplan de contact d'un tel système d'homologies, et nous pouvons choisir arbitrairement les centres (pourvu qu'ils ne se trouvent pas dans l'hyperplan ξ) et les caractéristiques de ces homologies. Les axes de ces homologies coïcident alors toujours avec l'hyperplan ξ.

b) Supposons que pour chaque t dans un voisinage d'un certain nombre $\bar{t}$ un au moins des nombres $a_1^0(t), \ldots, a_n^0(t)$ soit différent de zéro, de sorte que (5) a lieu dans ce voisinage et le point $A_0(t)$ reste fixe.

Nous allons remplacer la base $A_0(t), \ldots, A_n(t)$ par une autre, construite de la façon suivante: Le représentant arithmétique $C_0(t) = \overline{C}_0$ du point $A_0(t)$ sera choisi d'une telle façon que l'on ait $C_0' = 0$. Ensuite nous posons $\overline{C}_1 = A_1(\bar{t}), \ldots, \overline{C}_n = A_n(\bar{t})$. Comme les hyperplans $[A_1(t), \ldots, A_n(t)]$ ne passent pas par le point $\overline{C}_0 = A_0(t)$, les points $C_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont déterminés sans ambiguïté comme les points d'intersection des hyperplans $[A_1(t), \ldots, A_n(t)]$ avec la droite $[\overline{C}_0, \overline{C}_i]$. Il est facile de trouver que l'on a $[C_0(t), C_1(t), \ldots C_n(t)] \neq 0$ pour chaque t et que

$$C_0' = 0\,, \quad C_i' = c_i^0 C_0 + c_i^i C_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

En choisissant convenablement les facteurs scalaires auprès de $C_1, \ldots, C_n$, nous pouvons obtenir de plus que l'on ait

$$C_0' = 0\,, \quad C_i' = \gamma_i C_0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{6}$$

Comme C_0 est une combinaison linéaire de A_0 et $C_1, \ldots, C_n$ sont des combinaisons linéaires de $A_1, \ldots, A_n$, nous trouvons d'après (1)

$$\begin{aligned} HC_0 &= \varrho C_0\,, \quad 0 \neq \varrho(t) \neq 1\,, \\ HC_i &= C_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,, \end{aligned} \tag{7}$$

et donc aussi

$$H^{-1}H'C_0 = \frac{\varrho'}{\varrho}\, C_0\,,$$

$$H^{-1}H'C_i = \gamma_i \left(\frac{1}{\varrho} - 1\right) C_0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{8}$$

Comme $C_i(\bar{t}) = \overline{C}_i$, nous obtenons, en intégrant (6),

$$C_0 = \overline{C}_0\,,$$

$$C_i = \overline{C}_i + \delta_i \overline{C}_0\,, \quad \delta_i' = \gamma_i\,, \quad \delta_i(\bar{t}) = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{9}$$

Il en résulte en vertu de (8)

$$H^{-1}H'\overline{C}_0 = \frac{\varrho'}{\varrho}\, \overline{C}_0\,,$$

$$H^{-1}H'\overline{C}_i = \left(\gamma_i \left(\frac{1}{\varrho} - 1\right) - \delta_i \frac{\varrho'}{\varrho}\right) \overline{C}_0\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{10}$$

Si le point $X = \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{C}_i$ doit être situé dans l'hyperplan des points doubles de l'homographie $H^{-1}H'(t)$, alors, la valeur propre correspondante de la matrice $\mathfrak{M}$ étant égale à zéro, on doit avoir

$$H^{-1}H'(t)\, X = \left\{x^0 \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)} + \sum_{i=1}^{n} x^i \left(\gamma_i(t) \left(\frac{1}{\varrho(t)} - 1\right) - \delta_i(t) \frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\right)\right\} \overline{C}_0 = 0\,. \tag{11}$$

L'hyperplan de contact $\xi(t)$ de l'homographie $H(t)$ a donc dans le système de coordonnées $\overline{C}_0, \overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_n$ les coordonnées

$$\xi = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\,, \gamma_1 \left(\frac{1}{\varrho} - 1\right) - \delta_1 \frac{\varrho'}{\varrho}, \ldots, \gamma_n \left(\frac{1}{\varrho} - 1\right) - \delta_n \frac{\varrho'}{\varrho}\right) \tag{12}$$

(on entend par là les valeurs des fonctions en question au point t).

D'où le résultat: Si $\varrho'(t) = 0$, alors l'hyperplan $\xi(t)$ passe par le point $\overline{C}_0$, c'est-à-dire par le centre commun de toutes les homologies. Si $\varrho'(t) \neq 0$, alors l'hyperplan $\xi(t)$ ne passe pas par le point $\overline{C}_0$.

α) Soit d'abord $\varrho'(\bar{t}) \neq 0$. Alors $\{\xi(t)\}$ est un système d'hyperplans dont aucun — pour les valeurs de t proches de $\bar{t}$ du moins — ne passe par le point $\overline{C}_0$.

Par contre, soit $\overline{C}_0, \ldots, \overline{C}_n$ une base fixe dans S_n et soit $\{\xi(t)\}$ un système à un paramètre d'hyperplans. Supposons que les hyperplans $\xi(t)$ aient dans la base $\overline{C}_0, \ldots, \overline{C}_n$ les coordonnées $\xi_0(t), \ldots, \xi_n(t)$ et qu'ils ne passent pas par le point $\overline{C}_0$. Si, de plus, nous choisissons une fonction ϱ telle que $0 \neq \varrho(t) \neq 1$, $\varrho'(t) \neq 0$, alors il existe un et un seul système d'homologies $\{H(t)\}$ défini pour tout t d'un certain voisinage de $\bar{t}$ tel que $\varrho(t)$ sont les caractéristiques des homologies $H(t)$, $\xi(t)$ leurs hyperplans de contact et que pour la valeur originale $\bar{t}$ on a

$$H(\bar{t})\,\overline{C}_0 = \varrho(\bar{t})\,\overline{C}_0\,,$$
$$H(\bar{t})\,\overline{C}_i = \overline{C}_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

En effet, pour que les hyperplans $\xi(t)$ soient les hyperplans de contact des homologies $H(t)$, il faut d'après (12) qu'il existe une fonction ε telle que $\varepsilon(t) \neq 0$ pour tout t et que

$$\varepsilon\xi_0 = \frac{\varrho'}{\varrho}\,,$$
$$\varepsilon\xi_i = \delta_i'\left(\frac{1}{\varrho} - 1\right) - \delta_i\frac{\varrho'}{\varrho}\,, \quad i = 1, \ldots, n\,. \tag{13}$$

Comme d'après nos suppositions les hyperplans $\xi(t)$ ne passent pas par le point $\overline{C}_0$, on a $\xi_0(t) \neq 0$. Puisqu'on a $\varrho'(\bar{t}) \neq 0$ et donc, en vertu de la continuité de ϱ', aussi $\varrho'(t) \neq 0$ dans un certain voisinage de $\bar{t}$, nous pouvons obtenir ε de la première des équations (13), ε sera bien déterminé dans un voisinage de $\bar{t}$ et l'on aura $\varepsilon(t) \neq 0$. Les autres équations (13) permettent alors de déterminer sans ambiguïté les fonctions δ_i dans un voisinage de $\bar{t}$, avec $\delta_i(\bar{t}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Si nous définissons maintenant les fonctions $C_0, \ldots, C_n$ par les équations (9) et le système d'homologies $H(t)$ par les relations (7), alors les hyperplans $\xi(t)$ seront effectivement les hyperplans de contact des homologies $H(t)$.

β) Nous allons examiner encore le cas où $\varrho' = 0$ dans un voisinage du nombre $\bar{t}$ de sorte que ϱ y est constant. Alors d'après (10) chaque hyperplan du système $\{\xi(t)\}$ passe par le point $\overline{C}_0$.

Soit par contre $\overline{C}_0$ un point dans S_n et soit $\{\xi(t)\}$ un système à un paramètre d'hyperplans dont chacune passe par $\overline{C}_0$. Choisissons ensuite un nombre fixe ϱ, $0 \neq \varrho \neq 1$, et un point variable $C_1(t)$ tel que le point $C_1(\bar{t}) = \overline{C}_1$ ne coïncide pas avec $\overline{C}_0$, et qu'il ne soit pas situé dans l'hyperplan $\{\xi(\bar{t})\}$ et que $C_1 = \overline{C}_1 + \delta_1\overline{C}_0$ où $\delta_1(\bar{t}) = 0$, $\delta_1'(\bar{t}) \neq 0$. Enfin, choisissons encore les points fixes $\overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$ tels que $[\overline{C}_0, \overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_n] \neq 0$. Alors il existe un et un seul système d'homologies $\{H(t)\}$ défini pour chaque t d'un certain voisinage de $\bar{t}$ et tel que ϱ est la caractéristique commune de toutes les homologies $H(t)$, que l'hyperplan $\xi(t)$ est l'hyperplan de contact de l'homologie $H(t)$, que pour la valeur initiale $\bar{t}$ on a $H(\bar{t})\,\overline{C}_0 = \varrho\overline{C}_0$, $H(\bar{t})\,\overline{C}_i = \overline{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$, et que l'axe de l'homologie $H(t)$ coupe la droite $[\overline{C}_0, \overline{C}_1]$ au point $C_1(t)$.

En effet, désignons par $\xi_0(t), \ldots, \xi_n(t)$ les coordonnées de l'hyperplan $\xi(t)$ dans la base $\overline{C}_0, \ldots, \overline{C}_n$. Comme tous les hyperplans $\xi(t)$ passent par le point $\overline{C}_0$, on a $\xi_0 = 0$. Comme ensuite l'hyperplan $\xi(\bar{t})$ ne passe pas par le point $\overline{C}_1$, on a $\xi_1(\bar{t}) \neq 0$. Pour que les hyperplans $\xi(t)$ soient les hyperplans de contact des homologies $H(t)$, il doit y avoir une fonction ε vérifiant (13). Or dans le cas considéré la première des équations (13) est vérifiée quel que soit ε, les autres équations deviennent

$$\begin{aligned} \varepsilon\xi_1 &= \delta_1'\left(\frac{1}{\varrho} - 1\right), \\ \varepsilon\xi_2 &= \delta_2'\left(\frac{1}{\varrho} - 1\right), \\ &\vdots \\ \varepsilon\xi_n &= \delta_n'\left(\frac{1}{\varrho} - 1\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Comme $\xi_1(\bar{t}) \neq 0$, $\delta_1'(\bar{t}) \neq 0$, la première des équations (14) permet de déterminer ε dans un voisinage de $\bar{t}$ sans ambiguïté; ε sera aussi différent de zéro. A partir des autres équations (14) nous pouvons déterminer, dans un certain voisinage de $\bar{t}$, les fonctions δ_i à valeur initiales $\delta_i(\bar{t}) = 0$, $i = 2, \ldots, n$. Si nous définissons maintenant les fonctions $C_0, \ldots, C_n$ à l'aide de (9), alors le système d'homologies $\{H(t)\}$ définies par (8) jouit manifestement de toutes les propriétés demandées et c'est le seul système qui existe.

Résumons les résultats obtenus:

Théorème 2. *Soit $\{H(t)\}$ un système d'homologies à enveloppe situé dans S_n. Alors*

I. *Si le centre des homologies se déplace, d'où il résulte en vertu du théorème* 1 *que l'axe des homologies reste fixe, alors l'hyperplan de contact des holologies reste fixe et coïncide avec l'axe commun des homologies.*

Pour construir dans ce cas-là, le système $\{H(t)\}$, nous pouvons choisir arbitrairement un hyperplan de contact fixe, pour chaque t un centre arbitraire (pourvu qu'il ne se trouve pas dans l'hyperplan de contact) et une caractéristique arbitraire de l'homologie $H(t)$. Le système est alors détermité d'une manière univoque.

II. *Si le centre des homologies reste fixe et que leurs caractéristiques $\varrho(t)$ vérifient $\varrho'(t) \neq 0$, alors l'hyperplan de contact $\xi(t)$, en général, se déplace, mais il ne passe jamais par le centre commun des homologies.*

Pour construir, dans ce cas, le système $\{H(t)\}$, nous pouvons choisir arbitrairement: une homologie initiale $H(\bar{t})$ (dont le centre sera le centre commun de toutes les homologies $H(t)$), pour chaque t un hyperplan de contact $\xi(t)$ (ne passant pas par le centre commun des homologies) et une caractéristique $\varrho(t)$ (vérifiant $\varrho'(t) \neq 0$). Le système est alors déterminé d'une manière univoque.

III. *Si le centre des homologies reste fixe et leur caractéristique constante, alors l'hyperplan de contact $\xi(t)$ se déplace, en général, tout en passant toujours par le centre commun des homologies.*

Pour construir le système $\{H(t)\}$ dans ce cas, nous pouvons choisir arbitrairement: une homologie initiale $H(\bar{t})$ (dont le centre sera le centre commun de toutes les homologies $H(t)$), la caractéristique commune de toutes les homologies ϱ, et pour chaque t un hyperplan $\xi(t)$ passant par le centre commun de toutes les homo-

logies et le point d'intersection de l'axe de l'homologie $H(t)$ avec une droite fixe qui passe par le centre commun de toutes les homologies, mais qui n'est pas située dans l'hyperplan $\xi(\bar{t})$; (ce point d'intersection ne doit pas être fixe pour des t différents). Le système est alors déterminé d'une manière univoque.

Cas 2. Si $0 < k \leqq n - 2$, alors la matrice $\mathfrak{M}$ peut être de rang 1 seulement si $\varrho' = 0$. Mais alors

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{N}_{k+1,k+1} & \mathfrak{A} \\ \mathfrak{B} & \mathfrak{N}_{n-k,n-k} \end{matrix} \right\| .$$

Pour que cette matrice soit de rang 1, soit la matrice $\mathfrak{A}$ soit la matrice $\mathfrak{B}$ doivent être nulles. Si nous regardons les matrices $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, nous voyons que l'on doit avoir $a_i^j = 0$ soit pour $0 \leqq i \leqq k$, $k + 1 \leqq j \leqq n$, soit pour $k + 1 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq j \leqq k$. En changeant d'une façon convenable le numérotage des points $A_0, \ldots, A_n$, et en multipliant, si besoin est, les homologies $H(t)$ par les facteurs $[\varrho(t)]^{-1}$, nous pouvons obtenir que $a_i^j = 0$ pour $0 \leqq i \leqq k$, $k + 1 \leqq j \leqq n$.[5]) Mais alors

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{N}_{k+1,k+1} & \mathfrak{N}_{k+1,n-k} \\ \mathfrak{B} & \mathfrak{N}_{n-k,n-k} \end{matrix} \right\| \tag{15}$$

et les formule (2) deviennent

$$A_i' = \sum_{j=0}^{k} a_i^j A_j \,, \quad i = 0, \ldots, k \,,$$

$$A_i' = \sum_{j=0}^{k} a_i^j A_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_i^j A_j \,, \quad i = k + 1, \ldots, n \,. \tag{16}$$

Il en résulte que l'espace linéaire $[A_0(t), \ldots, A_k(t)]$ reste constant. Ensuite, puisque le rang de la matrice $\mathfrak{M}$ et donc aussi celui de la matrice $\mathfrak{B}$ est égal à un, tous les points

$$Y_i(t) = \sum_{j=0}^{k} a_i^j(t)\, A_j(t) \,, \quad i = k + 1, \ldots, n \tag{17}$$

pour t fixe coïncident, donc

$$Y_i(t) = \mu_i Y(t) \,, \quad i = k + 1, \ldots, n \tag{18}$$

(nous excluons le cas banal où le rang de la matrice $\mathfrak{M}$ est zéro donc où les deux sous-espaces de points invariants des homographies $H(t)$ restent fixes).

Si le point $X(t)$ se trouve dans l'espace $[A_{k+1}(t), \ldots, A_n(t)]$, alors $X = \sum_{\lambda=k+1}^{n} x^\lambda A_\lambda$ donc, en vertu de (16), (17) et (18) on a

$$X' = \sum_{j=k+1}^{n} (x^{j\prime} + \sum_{\lambda=k+1}^{n} x^\lambda a_\lambda^j)\, A_j + \sum_{\lambda=k+1}^{n} x^\lambda \mu_\lambda Y \,.$$

D'où le résultat: si $X(t)$ est un point variable qui se déplace tout en restant dans $[A_{k+1}(t), \ldots, A_n(t)]$, alors les projections des points $X'(t)$ des espaces

[5]) Les caractéristiques $\varrho(t)$ sont alors déterminées sans ambiguïté (voir la note [1])).

$[A_{k+1}(t), \ldots, A_n(t)]$ dans l'espace $[A_0(t), \ldots, A_k(t)]$ sont des points $Y(t)$ indépendants du choix des points $X(t)$ dans les espaces $[A_{k+1}(t), \ldots, A_n(t)]$. Il en résulte que toute la tangente $[X(t), X'(t)]$ à la courbe $X(t)$ se projette de l'espace $[A_{k+1}(t), \ldots, A_n(t)]$ dans le seul point $Y(t)$. Cela signifie que la variété W_{n-k} des espaces $[A_{k+1}(t), \ldots, A_n(t)]$ est développable dans ce sens que l'espace tangent de la variété W_{n-k} le long de chaque $[A_{k+1}(t), \ldots, A_n(t)]$ est de dimension $n - k$.

Soit donné maintenant au contraire un système à un paramètre de pseudohomologies $H(t)$ déterminées par les relations (1) où $0 < k < n - 1$, la relation (2) soit satisfaite. Supposons que l'espace $[A_0(t), \ldots, A_k(t)]$ ne change pas de position et que la caractéristique ϱ des pseudohomologies $H(t)$ soit constante. Supposons ensuite que la variété W_{n-k} des espaces $[A_{k+1}(t), \ldots, A_n(t)]$ soit développable au sens décrit ci-dessus. Alors la matrice $\mathfrak{M}$ de l'homographie $H^{-1}H'$ est de rang 1 et donc le système $\{H(t)\}$ a une enveloppe.

En effet, l'espace $[A_0(t), \ldots, A_k(t)]$ et la caractéristique ϱ restant constants, la matrice $\mathfrak{M}$ prend la forme (15). Comme $A_i(t) \in [A_{k+1}(t), \ldots, A_n(t)]$ pour $i = k + 1, \ldots, n$, il découle de ce que W_{n-k} est développable que les projections des points $A_i'(t)$, $k + 1 \leqq i \leqq n$ de $[A_{k+1}(t), \ldots, A_n(t)]$ dans $[A_0(t), \ldots, A_k(t)]$ dépendent de t mais non pas de i, on a donc

$$A_i'(t) = \mu_i Y(t) + \sum_{j=k+1}^{n} a_i^j A_j\,, \quad i = k + 1, \ldots, n\,, \tag{19}$$

où le point $Y(t)$ est une combinaison linéaire des points $A_0(t), \ldots, A_k(t)$. En comparant (19) et (2) et en regardant la matrice $\mathfrak{B}$ dans (15) nous voyons que la matrice $\mathfrak{B}$, est donc aussi la matrice $\mathfrak{M}$, est de rang 1.

Les résultats établis peuvent être formulés comme suit:

Théorème 3. *Soit $\{H(t)\}$ un système à un paramètre de pseudohomologies à espaces centraux $S_k(t)$ et $S_{n-k-1}(t)$, $0 < k < n - 1$. Le système $\{H(t)\}$ a une enveloppe si et seulement s'il jouit des trois propriétés suivantes*:

1. *Un des espaces centraux (soit S_k, pour fixer les idées) reste fixe.*
2. *Toutes les pseudohomologies du système ont la même caractéristique.*
3. *La variété W_{n-k} des espaces $S_{n-k-1}(t)$ est développable dans ce sens que son espace tangent le long de chaque $S_{n-k-1}(t)$ est de dimension $n - k$.*

Si nous nous rendons compte encore de ce qu'une variété formée par un système à un paramètre de points ou d'hyperplans est toujours développable, nous pouvons résumer les théorèmes 1 et 3 de la façon suivante:

Théorème 4. *Soit $\{H(t)\}$ un système à un paramètre de pseudohomologies à espaces centraux $S_k(t)$, $S_{n-k-1}(t)$. Le système $\{H(t)\}$ a une enveloppe si et seulement s'il jouit des propriétés suivantes*:

1. *Un des espaces centraux (soit S_k, pour fixer les idées) reste fixe.*
2. *La variété W_{n-k} des espaces $S_{n-k-1}(t)$ est développable.*

3. *Dans le cas où* $0 < k < n - 1$, *toutes les pseudohomologies ont la même caractéristique.*

Nous allons examiner encore les hyperplans de contact du système $\{H(t)\}$.

Comme la matrice $\mathfrak{M}$ de l'homographie $H^{-1}H'$ a la forme (15), nous pouvons écrire la formule (3) sous la forme simplifiée que voici:

$$H^{-1}H'A_i = 0\,,$$
$$H^{-1}H'A_i = \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{\varrho} - 1\right) a_i^j A_j\,, \quad i = k + 1, \ldots, n\,. \tag{20}$$

Si le point $X = \sum_{i=0}^{n} x^i A_i(t)$ doit être situé dans l'hyperplan des points doubles de l'homographie $H^{-1}H'(t)$, il faut (la valeur propre correspondante de la matrice $\mathfrak{M}$ étant égale à zéro) que l'on ait:

$$H^{-1}H(t)\, X = \sum_{i=0}^{n} x^i H^{-1}H'(t)\, A_i(t) = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=k+1}^{n} x^i \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{\varrho(t)} - 1\right) a_i^j(t)\, A_j = 0\,.$$

On voit de là que tous les points $A_0, \ldots, A_k$ sont situés dans cet hyperplan-là. Cela signifie que tous les hyperplans de contact passent par l'espace central commun de toutes les pseudohomologies $H(t)$.

Ce résultat peut être formulé comme suit:

Théorème 5. *Si un système à un paramètre de pseudohomologies (qui ne sont pas des homologies) a une enveloppe, alors tous les hyperplans de contact passent par l'espace central commun de toutes les pseudohomologies du système.*

Il serait possible encore d'examiner, comme dans le cas 1, dans quelle mesure le système est déterminé par ses hyperplans de contact. Cependant, les résultats étant assez confus, nous ne nous en occuperons pas.

Резюме

РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ СЕМЕЙСТВА ГОМОЛОГИЙ И ПСЕВДОГОМОЛОГИЙ

МИЛОСЛАВ ЮЗА (Miloslav Jůza), Прага

(Поступило в редакцию 6/X 1958 г.)

Пусть S_n — проективное пространство размерности $n \geqq 2$. Псевдогомологией в пространстве S_n мы назовем нетождественную коллинеацию H, при которой существуют два линейных подпространства S_k, S_{n-k-1} (размерностей k, $n - k - 1$) самосопряженных точек (так наз. центральные подпространства). При надлежащем выборе базиса $A_0, \ldots, A_n$ пространства S_n для псевдогомологии H имеет место (1). Число ϱ называем характеристикой псевдогомологии H.

В статье изучаются однопараметрические семейства псевдогомологий $\{H(t)\}$. Определяются условия, при которых семейство $\{H(t)\}$ имеет огибающую, т. е. при которых для любого t существует гиперплоскость $\xi(t)$ такая, что для некоторого действительного числа λ, для каждой точки $X \in \xi(t)$ будет $H'(t)\, X = \lambda H(t)\, X$. Такая гиперплоскость $\xi(t)$ называется гиперплоскостью касания псевдогомологии $H(t)$.

В статье доказывается следующая теорема:

Однопараметрическое семейство псевдогомологий $\{H(t)\}$ с центральными пространствами $S_k(t)$, $S_{n-k-1}(t)$ имеет огибающую тогда и только тогда, если

1. *Одно из центральных пространств фиксировано (пусть это, напр., пространство S_k);*
2. *Многообразие W_{n-k} пространств $S_{n-k-1}(t)$ является развертывающимся в том смысле, что касательное пространство к нему вдоль каждого $S_{n-k-1}(t)$ имеет размерность $n - k$;*
3. *В случае $0 < k < n - 1$ все псевдогомологии семейства имеют одну и ту же характеристику.*

Относительно *гиперплоскостей* семейства далее доказывается:

В случае постоянной характеристики все гиперплоскости касания проходят через общее центральное пространство всех псевдогомологий семейства. В случае, когда для характеристики ϱ имеем $\varrho' \neq 0$, гиперплоскости касания через это фиксированное центральное пространство никогда не проходят.

В случае $k = 0$ (т. е. когда данное семейство $\{H(t)\}$ образуют гомологии с общим центром) далее обнаружено, что для однозначного определения семейства $\{H(t)\}$ необходимо задать характеристики всех гомологий $H(t)$ и кроме того:

α) в случае $\varrho' \neq 0$ нужно задать исходную гомологию $H(\bar{t})$ (центр которой будет общим центром всех гомологий $H(t)$) и для каждого t гиперплоскость касания $\xi(t)$ (так, чтобы она не проходила через общий центр гомологий);

β) в случае же постоянной характеристики — исходную гомологию $H(\bar{t})$ (центр которой будет общим центром всех гомологий $H(t)$), для каждого t гиперплоскость касания $\xi(t)$, проходящую через общий центр всех гомологий, и точку пересечения оси гомологии $H(t)$ с фиксированной прямой, проходящей через общий центр всех гомологий и не лежащей в гиперплоскости $\xi(\bar{t})$ (притом эта точка пересечения не может быть фиксированной для различных t).