Jindřich Nečas

Решение задачи Дирихле для эллиптического дифференциального уравнения с частными производными второго порядка

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 3, 467–469

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100371

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(*Предварительное сообщение*)

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

(Поступило в редакцию 5/III 1959 г.)

1. Пусть E_n — n-мерное евклидово пространство и пусть Ω — ограниченная область в E_n. Точку в E_n обозначим через $[x_1, \ldots, x_n]$. Мы предполагаем, что граница $\dot{\Omega}$ представима в окрестности каждой точки границы при помощи непрерывной функции $n - 1$ переменных, первые обобщенные производные которой ограничены фиксированной постоянной. Далее предполагаем существование областей Ω_k, $\Omega_k \subset \overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$, границы которых представимы в окрестности каждой точки границы бесконечно дифференцируемой функцией. Предполагается еще некоторое „метрическое" свойство сходимости областей Ω_k к Ω. В E_2 такой областью является, напр., каждый многоугольник, в E_3, напр., конус и т. п.

2. Пусть Du есть самосопряженный эллиптический оператор второго порядка $Du = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) - cu$, где $a^{ij} = a^{ji}$ непрерывны в $\overline{\Omega}$ и обладают первыми производными непрерывными в $\overline{\Omega}$; пусть c — неотрицательная непрерывная функция в $\overline{\Omega}$. Предполагаем, что существует положительная постоянная $d > 0$ так, что $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}\xi_i\xi_j \geqq d \sum\limits_{i=1}^{u} \xi_i^2$.

Пусть теперь $W_2^{(1)}(\Omega)$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом, первые обобщенные производные которых также интегрируемы с квадратом. Положим

$$\|u\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] \mathrm{d}\Omega}\,.$$

Можно показать, что существует „граничное значение“ функции в $W_2^{(1)}(\Omega)$, интегрируемое с квадратом на границе $\dot{\Omega}$ области Ω. Такую функцию мы будем называть *следом функции u*. Символом $W(\dot{\Omega})$ мы будем обозначать пространство следов и символом $L_2(\dot{\Omega})$ — пространство функций, определенных на границе и интегрируемых там с квадратом.

Пусть теперь $h \in W(\dot{\Omega})$. Мы будем искать $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ так, чтобы $Du = 0$ слабо, и чтобы след u был равен h. (Задача Iа.)

Известным методом ортогональных проекций можно доказать, что существует решение задачи Iа.

3. *Пусть теперь $f \in L_2(\Omega)$, т. е. она интегрируема с квадратом в Ω. Мы будем искать $v \in W_{20}^{(1)}(\Omega)$ так, чтобы $Dv = f$ слабо.* (Задача II.) Здесь $W_{20}^{(1)}(\Omega)$ есть замыкание в норме $W_2^{(1)}(\Omega)$ пространства функций, бесконечно дифференцируемых в E_n, отличных от нуля только на замкнутых множествах, содержащихся в Ω.

Известным вариационным методом можно доказать, что существует одно и только одно решение задачи II.

Теперь можно дать определение *обобщенной производной по внешней конормали $\frac{\partial v}{\partial \nu}$, лежащей в $L_2(\dot{\Omega})$.* Притом $\frac{\partial v}{\partial \nu} = T(f)$, где T — *линейное непрерывное отображение $L_2(\Omega)$ в $L_2(\dot{\Omega})$.* Например, если v лежит в пространстве $W_2^{(2)}(\Omega)$ (которое является пространством функций, интегрируемых с квадратом в Ω и имеющих там обобщенные производные второго порядка, интегрируемые с квадратом), то $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} n_j$, где $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ — следы первых производных, а n_j — координаты внешней нормали.

4. Пусть теперь u — наше решение задачи Iа, v — решение задачи II. *Тогда имеет место формула Грина*

$$\int_{\Omega} u\, Dv\, \mathrm{d}\Omega = \int_{\dot{\Omega}} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, \mathrm{d}S\,. \tag{*}$$

В качестве первого следствия из формулы Грина вытекает, что *задача* Iа *имеет одно и только одно решение.* Равенство (*) определяет u как линейный функционал в $L_2(\Omega)$. Из (*) далее следует, что этот функционал определяется для всех $h \in L_2(\dot{\Omega})$ соотношением

$$\int_{\Omega} uf\, \mathrm{d}\Omega = \int_{\dot{\Omega}} hT\,(f)\, \mathrm{d}S\,. \tag{**}$$

Этим мы дали определение *решения задачи* Iб, отличающейся от задачи

Ia тем, что *вместо функции* $h \in W(\dot{\Omega})$ *мы берем, вообще, функцию* h *из* $L_2(\dot{\Omega})$.

Неравенству $\left\|\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right\|_{L_2(\dot{\Omega})} \leqq R\|f\|_{L_2(\Omega)}$ соответствует двойственное неравенство $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqq R\|h\|_{L_2(\dot{\Omega})}$, выражающее непрерывную зависимость решения от граничных условий.

Résumé

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES ÉQUATIONS ELLIPTIQUE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

(*Communication préalable*)

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 5 mars 1959)

Soit Ω un domaine borné dans E_n et soit $\mathrm{D}u$ un opérateur elliptique autoadjoint de second ordre. Alors, sous certaines conditions imposées à Ω et à $\mathrm{D}u$, on peut définir la dérivée généralisée $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ par rapport à la conormale extérieure pour la fonction v qui satisfait à l'équation $\mathrm{D}v = f$ et qui s'annule sur la frontière $\dot{\Omega}$. La fonction f est de carré sommable dans Ω. On a $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = T(f)$ où T est une transformation linéaire continue de l'espace des fonctions de carré sommable dans Ω dans l'espace des fonctions de carré sommable sur la frontière $\dot{\Omega}$. En s'appuyant sur la formule de Green $\int_\Omega u \,\mathrm{D}v = \int_{\dot{\Omega}} u \dfrac{\partial v}{\partial \nu}\,\mathrm{d}s$ où u vérifie $\mathrm{D}u = 0$, on peut définir la solution de l'équation $\mathrm{D}u = 0$ avec la condition $u = h$ vérifée sur la frontière. Ici h est une fonction de carré sommable sur la frontière $\dot{\Omega}$, d'ailleur quelconque.