Michal Greguš

Oszillatorische Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + 2Ay' + (A' + b)y = 0$, wo $A = A(x) \leqq 0$ ist

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 3, 416–428

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100365`

OSZILLATORISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG DRITTER ORDNUNG $y''' + 2Ay' + (A' + b)\,y = 0$, WO $A = A(x) \leqq 0$ IST

MICHAL GREGUŠ, Bratislava

(Eingelangt am 7. Oktober 1958)

In der Arbeit sind zwei genügende Bedingungen dazu bewiesen, damit jede Lösung der Differentialgleichung $y''' + 2Ay' + (A' + b)\,y = 0$, wo $A \leqq 0$, $A', b \geqq 0$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ sind, höchstens zwei oder eine doppelte Nullstelle habe, weiter eine genügende Bedingung dazu, damit jede Lösung y der angeführten Gleichung mit der Eigenschaft $y(a) = 0$, $a \in (-\infty, \infty)$, unendlich viele Nullstellen habe und weiter der sogenannte Vergleichungs- und Oszillationssatz und deren Anwendung bei der Lösung von Randwertaufgaben.

Einleitung. In der Arbeit untersuchen wir die Eigenschaften der Lösungen der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung von der Form

$$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0\,, \tag{a}$$

wobei wir von den Koeffizienten $A = A(x)$, $b = b(x)$ voraussetzen, dass $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $b(x) \geqq 0$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ sind.

Gründlich untersucht wurden bis jetzt die Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung (a) für den Fall $A(x) > 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ und der Fall $A(x) \leqq 0$ wurde grösstenteils nur bei Ergebnissen erwähnt, welche gleichzeitig für $A(x) > 0$ und für $A(x) \leqq 0$ gelten.

G. Sansone [1] führt eine genügende Bedingung dazu an, dass im Falle $A(x) \leqq 0$ jede Lösung der Differentialgleichung (a) höchstens zwei oder eine doppelte Nullstelle habe. Im ersten Teil dieser Arbeit sind zwei genügende Bedingungen dazu bewiesen, damit jede Lösung der Differentialgleichung (a) höchstens zwei Nullstellen oder eine doppelte Nullstelle habe. Die Bedingungen umfassen die Fälle, welche im Satz von G. Sansone [1] nicht enthalten sind.

Ausser weiteren einfachen Ergebnissen über die Eigenschaften der Lösungen der Differentialgleichung (a) ist dann im zweiten Teil der Arbeit eine genügende Bedingung dazu bewiesen, damit jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) der Eigenschaft $y(a) = 0$, $a \in (-\infty, \infty)$ für $x > a$ unendlich viele Nullstellen habe.

Im dritten Teil der vorliegenden Arbeit ist der sogenannte Vergleichungssatz für zwei Differentialgleichungen der Form (a) und mit dessen Hilfe der sogenannte Oszillationssatz für die Differentialgleichung der Form (a), wo die Koeffizienten Funktionen des Parameters λ sind, bewiesen. Am Ende wird die Applikation des Oszillationssatzes auf die Lösung von Randwertaufgaben angeführt.

I. Im Anfang führen wir einige Ergebnisse über die Differentialgleichung (a) an, welche entweder bekannt, oder ersichtlich sind, welche wir im Weiteren brauchen werden.

Die adjungierte Differentialgleichung zur Differentialgleichung (a) ist

$$z''' + 2A(x)\, z' + [A'(x) - b(x)]\, z = 0\,. \tag{b}$$

Für die Lösungen der Differentialgleichung (a) bzw. (b) gelten folgende integrale Identitäten [1]:

$$yy'' - \tfrac{1}{2}y'^2 + Ay^2 + \int_a^x by^2\, \mathrm{d}t = \text{Konst}\,, \tag{1}$$

$$y'' + 2Ay + \int_a^x (b - A')\, y\, \mathrm{d}t = \text{Konst}\,, \tag{2}$$

bezw.

$$zz'' - \tfrac{1}{2}z'^2 + Az^2 - \int_a^x bz^2\, \mathrm{d}t = \text{Konst}\,, \tag{1'}$$

$$z'' + 2Az - \int_a^x (b + A')\, z\, \mathrm{d}t = \text{Konst}\,, \tag{2'}$$

wo $a \in (-\infty, \infty)$ eine fest gewählte und $x \in (-\infty, \infty)$ eine beliebige Zahl ist.

Es sei $a \in (-\infty, \infty)$ eine fest gewählte Zahl. Es seien y_1, y_2 zwei unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (a) mit den Eigenschaften

$$y_1(a) = y_1'(a) = 0\,, \quad y_2(a) = y_2''(a) = 0\,.$$

Es ist bekannt [2], dass die Menge der Lösungen der Differentialgleichung (a) $y = c_1y_1 + c_2y_2$ für $x > a$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$\left[\frac{1}{\omega}\, y'\right]' + \left[\frac{2A}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega^2}\right] y = 0 \tag{c}$$

entspricht, wo $\omega = \omega(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (b) der Eigenschaft $\omega(a) = \omega'(a) = 0$ ist, welche rechts von a keine Nullstellen hat, wie dies aus der integralen Identität (1′) hervorgeht.

Die Menge der Lösungen der Differentialgleichung (a), *welche für $x > a$ der Differentialgleichung* (c) *entspricht, werden wir im Weiteren ein Büschel von Lösungen der Differentialgleichung* (a) *im Punkt a nennen.*

Aus der integralen Identität (1) folgt, dass die Lösung y_1 der Differentialgleichung (a) und im Falle, dass $b(x) \equiv 0$ in keinem Intervall ist, auch deren Derivation y_1' links von a keine Nullstelle hat.

Die erste Behauptung ist offenbar. Beweisen wir die zweite Behauptung.

Die integrale Identität (1) für die Lösung y_1 ist

$$y_1 y_1'' - \tfrac{1}{2} y_1'^2 + A y_1^2 + \int_a^x b y_1^2 \, \mathrm{d}t = 0 \, .$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, dass $y_1''(a) > 0$, d. h. $y_1(x)$ hat im Punkte a das Minimum. Setzen wir voraus, dass $y_1'(x_1) = 0$, wo $x_1 < a$ die erste Nullstelle von $y_1'(x)$ links von a ist. Dann aber ist im Punkte x_1 $y_1''(x_1) \leqq 0$ und deshalb ist

$$y_1(x_1)\, y_1''(x_1) + A(x_1)\, y_1^2(x_1) + \int_a^{x_1} b(t)\, y_1^2(t) \, \mathrm{d}t < 0 \, ,$$

was jedoch ein Widerspruch ist. Also ist $y_1'(x_1) \neq 0$.

Bemerkung 1. Wenn wir voraussetzen, dass $b(x) \leqq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ist, dann entspricht die Menge der Lösungen $c_1 y_1 + c_2 y_2$ der Differentialgleichung (c) für $x < a$ und die Lösung y_1 und deren Derivation y_1' hat keine Nullstelle für $x > a$.

G. Sansone [1] bewies folgenden Satz: *Es seien $A'(x)$, $b(x)$ stetige Funktionen für $x \in \langle a, b \rangle$ und $A(x) \leqq 0$. Es sei weiter $b(x) \leqq 0$, oder $b(x) \geqq 0$ für $x \in \langle a, b \rangle$, dabei sei $b(x)$ nicht gleich Null im ganzen $\langle a, b \rangle$. Es gelte weiter*

$$|A(x)| \geqq \int_a^x |b(t)| \, \mathrm{d}t \, , \quad (a \leqq x \leqq b) \, . \tag{3}$$

Dann hat jede Lösung der Differentialgleichung (a) *im $\langle a, b \rangle$ höchstens zwei Nullstellen, oder eine doppelte Nullstelle.*

Wenn die im Satz angeführten Voraussetzungen im ganzen Intervall $(-\infty, \infty)$ erfüllt sind und die Ungleichheit (3) für ein beliebiges a und $x > a$ gilt, stellen wir leicht fest, dass der Satz im ganzen Intervall $(-\infty, \infty)$ gilt.

Jetzt beweisen wir zwei Sätze, welche den Satz von G. Sansone entsprechend ergänzen, da ihre Behauptungen für eine andere Gruppe der Funktionen $A(x)$, $b(x)$ gelten.

Satz 1. *Es seien $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $b(x) \geqq 0$ $[b(x) \leqq 0]$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ und zwar solche, dass $b - A' \leqq 0$ $[b - A' \geqq 0]$. Dann hat jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *im Intervall $(-\infty, \infty)$ höchstens zwei Nullstellen, oder eine doppelte Nullstelle.*

Beweis. Beweisen wir den Satz für den Fall $b(x) \geqq 0$. Im Falle $b(x) \leqq 0$ ist der Beweis ähnlich.

Es sei $a \in (-\infty, \infty)$ ein beliebiger, aber fester Punkt. $y(x)$ sei die Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$. Es genügt wenn wir zeigen, dass $y(x)$ keine Nullstelle für $x > a$ hat (für $x < a$ hat $y(x)$ keine Nullstelle wie aus der integralen Identität (1) hervorgeht), da jede andere Lösung $\bar{y}(x)$ der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $\bar{y}(a) = 0$ derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fom (c) entspricht.

Im Falle, dass $\bar{y}(x)$ rechts von a wenigstens zwei Nullstellen hat, müsste zwischen ihnen auch $y(x)$ eine Nullstelle haben, weil die Nullstellen der Lösungen der Differentialgleichung (c) sich rechts vom Punkte a abteilen. Falls $\bar{y}(x)$ wenigstens zwei Nullstellen links von a hat, oder wenigstens eine links und eine rechts von a, dann genügt es $y(x)$ so zu wählen, damit eine doppelte Nullstelle in der zweiten oder in der ersten Nullstelle der Lösung $\bar{y}(x)$ links von a sei. Ein so gewähltes $y(x)$ müsste ausser der doppelten Nullstelle noch eine weitere Nullstelle haben.

Zeigen wir deshalb, dass $y(x)$ mit der Eigenschaft $y(a) = y'(a) = 0, y''(a) > 0$ rechts von a keine Nullstelle hat.

Offenbar gilt $(yy')' = yy'' + y'^2$. Aus der integralen Identität (2) für $y(x)$ ist

$$y'' = y''(a) - 2Ay - \int_a^x (b - A')\, y \,\mathrm{d}t$$

und deshalb

$$(yy')' = y''(a)\, y - 2Ay^2 - y\int_a^x (b - A')\, y \,\mathrm{d}t + y'^2\,. \tag{4}$$

Es sei $x_1 > a$ die erste Nullstelle der Lösung $y(x)$.

Nach der Integration der Identität (4) in den Grenzen von a zu x_1, bekommen wir einen Widerspruch. Also hat $y(x)$ keine weitere Nullstelle.

Bemerkung 2. Aus der Identität (4) folgt weiter

a) Die Derivation der Lösung $y(x)$ mit der Eigenschaft $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$ hat rechts von a keine Nullstelle.

b) Jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = 0, y'(a) > 0, y''(a) \geqq 0$ hat rechts von a weder eine Nullstelle, noch eine Nullstelle der ersten Derivation.

Hilfssatz 1. *Es seien $a < b \in (-\infty, \infty)$. Wenn σ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung*

$$\sigma''' + 2A\sigma' = 0 \tag{d}$$

und y eine beliebige Lösung der Differentialgleichung (a) *ist, dann gilt für diese Lösungen die Identität*

$$\sigma'(b)\, y''(b) - \sigma'(a)\, y''(a) - \sigma''(b)\, y'(b) + \sigma''(a)\, y'(a) + \int_a^b (A' + b)\, y\sigma' \,\mathrm{d}t = 0\,. \tag{5}$$

Beweis. Multiplizieren wir die Differentialgleichung (a) mit σ' und integrieren wir Glied nach Glied im Intervall $\langle a, b\rangle$. Wenn

$$\int_a^b \sigma' y''' \,\mathrm{d}t = \sigma'(b)\, y''(b) - \sigma'(a)\, y''(a) - \sigma''(b)\, y'(b) + \sigma''(a)\, y'(a) + \int_a^b \sigma''' y' \,\mathrm{d}t$$

ist, bekommen wir

$$\sigma'(b)\,y''(b) - \sigma'(a)\,y''(a) - \sigma''(b)\,y'(b) + \sigma''(a)\,y'(a) +$$
$$+ \int_a^b (A' + b)\,y\sigma'\,dt + \int_a^b (\sigma''' + 2A\sigma')\,y'\,dt = 0\,,$$

daraus folgt die Identität (5).

Hilfsatz 2. *Es sei* $A(x) \leqq 0$ *für* $x \in (-\infty, \infty)$. *Dann hat jede Lösung* σ *der Differentialgleichung* (d) *mit der Eigenschaft* $\sigma(a) = \sigma'(a) = 0$, $\sigma''(a) \neq 0$, *oder mit der Eigenschaft* $\sigma(a) = \sigma''(a) = 0$, $\sigma'(a) \neq 0$, *wo* $a \in (-\infty, \infty)$ *ist, keine Nullstelle der ersten Derivation.*

Beweis. Es sei $u(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung $u'' + 2Au = 0$ mit der Eigenschaft $u(a) = 0$, $u'(a) \neq 0$. Zeigen wir, dass $u(x)$ keine weitere Nullstelle hat. Es ist ersichtlich, dass $(uu')' = uu'' + u'^2 = - 2Au^2 + u'^2 > 0$ gilt.

Setzen wir voraus, dass $u(x_1) = 0$, $x_1 \neq a$ ist. Wenn wir die letzte Identität von a zu x_1 integrieren, dann erhalten wir einen Widerspruch. Also hat $u(x)$ keine Nullstelle verschieden von a. Ähnlich würden wir dies für die Lösung $\bar{u}(x)$ beweisen, die die Eigenschaft $\bar{u}(a) \neq 0$, $\bar{u}'(a) = 0$ hat.

Da die Lösung σ der Differentialgleichung (d) mit der Eigenschaft $\sigma(a) = \sigma'(a) = 0$, $\sigma''(a) \neq 0$ von der Form $\sigma = k\int_a^x u(t)\,dt$, $k =$ Konst, ist, hat sie keine Nullstelle und keine Nullstelle der ersten Derivation verschieden von a. Ähnlich ist die Lösung σ der Differentialgleichung (d) mit der Eigenschaft $\sigma(a) = \sigma''(a) = 0$, $\sigma'(a) \neq 0$ von der Form $\sigma = k\int_a^x \bar{u}(t)\,dt$, woraus die zweite Behauptung des Hilfssatzes folgt.

Satz 2. *Es seien* $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $b(x) \leqq 0$ $[b(x) \geqq 0]$ *stetige Funktionen von* $x \in (-\infty, \infty)$ *und es sei* $A'(x) + b(x) \geqq 0$ $[A'(x) + b(x) \leqq 0]$ *für* $x \in (-\infty, \infty)$.

Dann hat jede Lösung der Differentialgleichung (a) *höchstens zwei Nullstellen, oder eine doppelte Nullstelle.*

Beweis. Beweisen wir den Satz für den Fall $b(x) \leqq 0$. Im Falle $b(x) \geqq 0$ ist der Beweis ähnlich. Es genügt wieder zu beweisen, dass die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$, $a \in (-\infty, \infty)$ ist eine feste Zahl, links von a keine Nullstelle hat. Setzen wir das Gegenteil voraus, es sei daher $y(x_1) = 0$, wo $x_1 < a$ ist. Im Intervalle $\langle x_1, a\rangle$ wenden wir die Identität (5) aus dem Hilfssatze 1 an, dabei sei σ eine Lösung der Differentialgleichung (d) mit der Eigenschaft $\sigma(x_1) = \sigma'(x_1) = 0$, $\sigma''(x_1) > 0$, also $\sigma'(x) > 0$ für $x > x_1$. Aus der Identität (5) folgt

$$\sigma'(a)\,y''(a) + \sigma''(x_1)\,y'(x_1) + \int_{x_1}^a (A' + b)\,y\sigma'\,dt = 0\,.$$

Das ist aber ein Widerspruch, da auf der linken Seite der Ausdruck positiv ist.

Bemerkung 3. Im Satze 1 der Fall $b(x) \leqq 0$ und im Satze 2 der Fall $b(x) \geqq 0$ sind spezielle Fälle des Satzes von G. Sansone, wovon wir uns leicht überzeugen, wenn wir im ersten Falle die Bedingung $b - A' \geqq 0$ und im zweiten Falle die Bedingung $A' + b \leqq 0$ im Intervalle $\langle a, x \rangle$ für beliebige $a \in (-\infty, \infty)$ und $x > a \in (-\infty, \infty)$ integrieren.

II. Im Weiteren werden wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die Lösungen der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = 0$ unendlich viele Nullstellen rechts von a haben, d. h. unter welchen Voraussetzungen sie oszillatorisch sind.

Hilfssatz 3. *Es seien $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $b(x) \geqq 0$ stetige Funktionen von $x \in \in (-\infty, \infty)$ und es sei $A'(x) + b(x) > 0$. Es sei $a \in (-\infty, \infty)$ ein beliebiger, aber fester Punkt. Dann ist jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung* (a) *mit der Eigenschaft $y(a) = 0$, $y'(a) > 0$, oder mit der Eigenschaft $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$, entweder steigend für $x > a$, oder sie hat eine weitere Nullstelle rechts von a.*

Beweis. Es sei $y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (a) der vorausgesetzten Eigenschaften. Setzen wir voraus, dass $y(x) > 0$ für $x > a$ und dabei nicht steigend ist. Dann sind zwei Fälle möglich. Entweder hat $y'(x)$ rechts von a eine Nullstelle $\bar{x}$ und für $x > \bar{x}$ ist $y(x)$ fallend, oder $y'(x)$ hat wenigstens ein Paar von Nullstellen $x_1 < x_2$ rechts von a, zwsichen welchen $y(x)$ liegt.

Zeigen wir, dass im ersten Falle $y(x)$ wenigstens eine Nullstelle rechts von a hat. Aus der Differentialgleichung (a) geht nämlich hervor, dass $y''' = = -2Ay' - (A' + b)\, y < 0$ für $x > \bar{x}$ ist, deshalb ist

$$y'''(x) < 0 \tag{6}$$

für $x > \bar{x}$. Es ist ersichtlich $y''(\bar{x}) \leqq 0$ und so wenn $\bar{x}_1 > \bar{x}$ genügend nahe vom Punkt x liegt, ist $y''(\bar{x}_1) < 0$. Wenn wir jetzt die Ungleichheit (6) zwischen $\bar{x}_1$ und $x > \bar{x}_1$ integrieren, erhalten wir $y''(x) - y''(z_1) < 0$, woraus $y'(x) < < y'(x_1) + y''(\bar{x}_1)(x - x_1)$ folgt d. h. $y'(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$ und so muss $y(x)$ eine Nullstelle rechts von a haben. Im zweiten Falle ist es notwendig zu bedenken, dass $y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (c) ist, wo $\omega(x) \neq 0$ für $x > a$ ist. Zeigen wir, dass $\omega'' + 2A\omega \neq 0$ für $x > a$ ist. Es sei z. B. $\omega''(a) > > 0$, dann ist ersichtlich $\omega(x) > 0$ für $x > a$ und aus der Identität (2′) für ω bekommen wir

$$\omega'' + 2A\omega = \omega''(a) + \int_a^x (A' + b)\, \omega \,\mathrm{d}t > 0\,.$$

Wenn wir jetzt die Gleichung (c) zwischen x_1 und x_2 integrieren, bekommen wir

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\omega'' + 2A\omega}{\omega^2}\, y \,\mathrm{d}t = 0\,,$$

was jedoch ein Widerspruch ist. Also muss $y(x)$ zwischen x_1 und x_2 eine Nullstelle haben.

Satz 3. *Es sei $f(x) < 0$ eine solche stetige Funktion von $x \in (-\infty, \infty)$, dass die Gleichung $y'' - f(x)\, y = 0$ im Intervall $(-\infty, \infty)$ eine oszillatorische Lösung hat und die Entfernung jeder drei aufeinander folgenden Nullstellen jeder ihrer Lösungen kleiner als $d > 0$ sei. Es seien weiter $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $b(x)$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ und zwar solche, dass $A'(x) + b(x) > 0$, $b(x) - A'(x) > k > 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ ist, wo k eine Konstante ist und die Funktion*

$$F(x) = [f(x) + 2A(x)]\, e^{-\int\limits_{x_1}^{x}[\int\limits_{a}^{u} 2A(t) \mathrm{d}t] \mathrm{d}u} + \int\limits_{x_1}^{x} [b(t) - A'(t)]\, \mathrm{d}t$$

positiv bei jedem $a \in (-\infty, \infty)$ und bei jedem $x_1 > a$ in irgendeinem Intervalle $I \subset (x_1, \infty)$ ist, dessen Länge grösser als d ist. Dann ist jede Lösung y der Differentialgleichung (a) *mit der Eigenschaft $y(a) = 0$ oszillatorisch rechts von a.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Lösung y der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) > 0$ rechts von a wenigstens eine Nullstelle für jedes $a \in (-\infty, \infty)$ hat.

Es sei nämlich $\bar{x} > a$ die erste Nullstelle der Lösung y rechts von a. Es ist bekannt [2], dass jede Lösung der Differentialgleichng (a), welche im Punkte a eine Nullstelle hat die Lösung der Differentialgleichung (c) für $x > a$ ist und wenn sie verschieden von $y(x)$ ist, hat sie zwischen a und $\bar{x}$ eine weitere Nullstelle. Wenn jetzt $\bar{y}(x)$ die Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $\bar{y}(\bar{x}) = \bar{y}'(\bar{x}) = 0$ ist, hat sie eine weitere Nullstelle $\bar{x}_1$ rechts von $\bar{x}$ und so hat auch $y(x)$ nach [2] eine weitere Nullstelle zwischen $\bar{x}$ und $\bar{x}_1$, da $y(\bar{x}) = 0$ ist. Indem wir so vorgehen, stellen wir leicht fest, dass $y(x)$ unendlich viele Nullstellen rechts von a hat. Da sie die Nullstellen der Lösungen der Differentialgleichung (c) rechts von a abteilen, ist jede Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Nullstelle im Punkte a rechts von a oszillatorisch.

Setzen wir also voraus, dass $y(x)$ rechts von a keine Nullstelle hat. Nach Hilfssatz 3 ist $y(x)$ eine steigende Funktion für $x > a$. Die integrale Identität (1) für die Lösung $y(x)$ ist

$$yy'' - \tfrac{1}{2}y'^2 + Ay^2 + \int\limits_a^x by^2\, \mathrm{d}t = 0\,,$$

daraus folgt $2yy'' - y'^2 + 2Ay^2 < 0$ für $x > a$ und also $y^2 \left[2\left(\dfrac{y'}{y}\right)' + \dfrac{y'^2}{y^2} + 2A\right] < 0$ für $x > a$. Dies ist möglich nur wenn $\left(\dfrac{y'}{y}\right)' + A < 0$ ist. Wenn $x_1 > a$ ist, dann erhalten wir nach Integration der letzten Ungleichheit

$$\frac{y'(x)}{y(x)} < \frac{y'(x_1)}{y(x_1)} - \int\limits_{x_1}^{x} A\, \mathrm{d}t\,, \quad x > x_1\,,$$

daher

$$y(x) < y(x_1)\, e^{\int\limits_{x_1}^{x}\left[\frac{y'(x_1)}{y(x_1)} - \int\limits_{x}^{u} A\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u} . \tag{7}$$

Die integrale Identität (2) für die Lösung $y(x)$ ist

$$y'' + 2Ay + \int\limits_a^x (b - A')\, y\, \mathrm{d}t = y''(a) .$$

Also ist $y'' + 2Ay$ eine fallende Funktion und von einem bestimmten $x > a$ negativ. Wählen wir in (7) $x_1 > a$ so, dass

$$\int\limits_a^{x_1} [y'' + 2Ay]\, \mathrm{d}t \leqq 0 \text{ ist} . \tag{8}$$

Nach Durchführung der Integration erhalten wir

$$y'(x_1) \leqq - \int\limits_a^{x_1} 2Ay\, \mathrm{d}t \leqq - y(x_1) \int\limits_a^{x_1} 2A\, \mathrm{d}t ,$$

daher ist

$$\frac{y'(x_1)}{y(x_1)} \leqq - \int\limits_a^{x_1} 2A\, \mathrm{d}t .$$

Wenn wir dies in (7) einsetzen, erhalten wir für ein genug grosses x_1 und $x > x_1$ die Ungleichung

$$y(x) < y(x_1)\, e^{-\int\limits_{x_1}^{x}\left[\int\limits_{a}^{u} 2A\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u} . \tag{9}$$

Damit schätzen wir die Lösung y von oben ab unter der Voraussetzung, dass sie keine weitere Nullstelle rechts von a hat. Es sei jetzt $z(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $z'' - f(x)\, z = 0$ mit der Eigenschaft $z(a) = 0$. $z(x)$ ist laut Voraussetzung oszillatorisch. Für $x > a$ gilt ersichtlich folgende Identität

$$\begin{aligned} \left[\frac{z}{y}\,(z'y - zy')\right]' &= z'^2 + zz'' - 2zz'\,\frac{y'}{y} - z^2\,\frac{y''}{y} + z^2\,\frac{y'^2}{y^2} = \\ &= \left(z' - z\,\frac{y'}{y}\right)^2 + zz'' - z^2\,\frac{y''}{y} = \left(z' - z\,\frac{y'}{y}\right)^2 + z^2\,\frac{f(x)\, y - y''}{y} , \end{aligned} \tag{10}$$

wo $z'' = f(x)\, z$. Zeigen wir, dass unter der Voraussetzung $y(x) > 0$ für $x > a$, $f(x)\, y - y'' > 0$ im Intervalle I von grösserer Länge als d rechts von x_1 ist, wo x_1 genügend gross ist. Aus der integralen Identität (2) und der Ungleichheit (9) erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x)\, y - y'' &= f(x)\, y - y''(a) + 2Ay + \int\limits_a^{x_1} (b - A')\, y\, \mathrm{d}t + \int\limits_{x_1}^{x} (b - A')\, y\, \mathrm{d}t \geqq \\ &\geqq [(f(x) + 2A)\, e^{-\int\limits_{x_1}^{x}\left[\int\limits_{a}^{u} 2A\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u} + \int\limits_{x_1}^{x} (b - A')\, \mathrm{d}t]\, y(x_1) - y''(a) + \int\limits_a^{x_1} (b - A')\, y\, \mathrm{d}t > 0 \end{aligned}$$

in irgendeinem Intervalle I von einer Länge grösser als d rechts von x_1, wo x_1 so gewählt ist, damit die Beziehung (8) gilt. Dann ist nämlich $-y''(a) + \int\limits_a^{x_1} (b - A')\, y\, \mathrm{d}t > 0$, wie dies aus der Identität (2) hervorgeht. Wenn wir jetzt die Gleichheit (10) zwischen zwei Nullstellen der Lösung $z(x)$, welche in I liegen, integrieren, erhalten wir einen Widerspruch. Also muss $y(x)$ rechts von a eine Nullstelle haben. Damit ist der Satz bewiesen.

III. In diesem Teil werden wir einen Vergleichungssatz zwischen zwei Differentialgleichungen

$$y''' + 2A(x)\; y' + [A'(x) + b(x)]\, y = 0\,, \tag{a}$$

$$z''' + 2A_1(x)\; z' + [A_1'(x) + b_1(x)]\, z = 0 \tag{a_1}$$

und den sogenannten Oszillationssatz für die Lösungen der Differentialgleichung (a) beweisen, deren Koeffizienten ausserdem von einem Parameter λ abhängig sein werden. Wir wenden den Oszillationssatz zum Beweise der Randwertprobleme an.

Hilfssatz 4. *$y(x)$ sei eine beliebige Lösung der Differentialgleichung* (a) *dann kann man sie in der Form*

$$y(x) = z(x) + \int\limits_a^x [2A_1(t) - 2A(t)]\, y'(t)\; W(x, t)\, \mathrm{d}t +$$
$$+ \int\limits_a^x [b_1(t) - b(t) + A_1'(t) - A'(t)]\; y(t)\; W(x, t)\, \mathrm{d}t$$

schreiben, wo $z(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (a_1) *ist, welche im Punkte a dieselben Randbedingungen wie y hat, $W(x, t)$ ist von der Form*

$$W(x, t) = \begin{vmatrix} z_1(x), & z_2(x), & z_3(x) \\ z_1(t), & z_2(t), & z_3(t) \\ z_1'(t), & z_2'(t), & z_3'(t) \end{vmatrix},$$

dabei bilden z_1, z_2, z_3 das Fundamentalsystem der Lösungen der Differentialgleichung (a_1) *deren Wronskian gleich Eins ist.*

Den Beweis kann man einfach durch die Metode der Variation der Konstanten durchführen, welche wir für die Differentialgleichung mit der rechten Seite

$$y''' + 2A_1 y' + (A_1' + b_1)\, y = (2A_1 - 2A)\, y' + (b_1 - b + A_1' - A')\, y$$

anwenden.

Satz 4. (Vergleichungssatz.) *Es seien $A', A_1', b \geqq 0$, $b_1 > 0$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$. Es sei $I \subset (-\infty, \infty)$ ein beliebiges endliches Intervall. Es seien weiter $-k \leqq A \leqq A_1 \leqq 0$, $k > 0$ eine Konstante, $A' \leqq A_1'$, $b < b_1$ für $x \in I$*

dabei sei $b_1 - b \geqq m > 0$ *für* $x \in I$. *Es sei* y *bzw.* z *eine Lösung der Differentialgleichung* (a) *bzw.* (a_1) *mit der Eigenschaft*

$$y(a) = y'(a) = 0\,, \quad y''(a) > 0 \quad \textit{bzw.} \quad z(a) = z'(a) = 0\,, \quad z''(a) = y''(a)\,,$$

oder mit der Eigenschaft $y(a) = 0$, $y'(a) > 0$, $y''(a)$ *bzw.* $z(a) = 0$, $z'(a) = y'(a)$, $z''(a) = y''(a)$, *wo* $a \in I$ *und es seien* $y(x) \neq 0$, $z(x) \neq 0$ *in dem Intervalle* $I_1 \subset I$ *mit dem linken Endpunkt* a. *Dann existiert zu den gegebenen Funktionen* $A(x)$, $b(x)$ *ein solches* $m_0 > 0$, *dass für* $m > m_0$ $y(x) > z(x)$ *für* $x > a \in I_1$ *gilt.*

Beweis. Nach Hilfssatz 4 gilt zwischen $y(x)$ und $z(x)$ die Beziehung

$$y(x) = z(x) + \int_a^x [2A_1(t) - 2A(t)]\, y'(t)\, W(x, t)\, \mathrm{d}t +$$
$$+ \int_a^x [b_1(t) - b(t) + A_1'(t) - A'(t)]\, y(t)\, W(x, t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Es genügt zu zeigen, dass die Summe der Integrale auf der rechten Seite der letzten Gleichheit für jedes $x \in I_1$ positiv ist. Beim festen t ist $W(x, t) = \bar{z}(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (a_1) mit der Eigenschaft $\bar{z}(t) = 0$, $\bar{z}'(t) = 0$, $\bar{z}''(t) = 1$. Also ist $W(x, t) > 0$ für jedes $t < x \in I_1$, da die Lösung der Differentialgleichung (a_1) mit doppelter Nullstelle im Punkte a eine weitere Nullstelle x_1 nicht kleiner als der rechte Endpunkt des Intervalls I_1 hat, dabei ist bekannt [2], dass jede Lösung des Büschels im Punkte a eine weitere Nullstelle zwischen a und x_1 hat und die Nullstellen jedes Büschels der Lösungen teilen sich rechts von dem Punkte des Büschels ab. Im Intervalle $\langle a, \bar{x}\rangle \subset I_1$, in welchem $y'(x) \geqq 0$ ist, ist die Behauptung unseres Satzes ersichtlich. Es ist notwendig zu zeigen, dass

$$\int_{\bar{x}}^x [2A_1(t) - 2A(t)]\, y'(t)\, W(x, t)\, \mathrm{d}t +$$
$$+ \int_{\bar{x}}^x [b_1(t) - b(t) + A_1'(t) - A'(t)]\, y(t)\, W(x, t)\, \mathrm{d}t \geqq 0$$

für jedes $x > \bar{x} \in I_1$. Es genügt zu zeigen, dass

$$\int_{\bar{x}}^x [2A_1(t) - 2A(t)]\, y'(t)\, W(x, t)\, \mathrm{d}t + \int_{\bar{x}}^x [b_1(t) - b(t)]\, y(t)\, W(x, t)\, \mathrm{d}t \geqq 0\,.$$

Die Behauptung folgt aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung und aus den Voraussetzungen unseres Satzes. Es ist nämlich

$$\int_{\bar{x}}^x [2A_1(t) - 2A(t)]\, y'(t)\, W(x, t)\, \mathrm{d}t + \int_{\bar{x}}^x [b_1(t) - b(t)]\, y(t)\, W(x, t)\, \mathrm{d}t =$$
$$= [(2A_1(\xi) - 2A(\xi))\, y'(\xi) + (b_1(\xi) - b(\xi))\, y(\xi)] \int_{\bar{x}}^x W(x, t)\, \mathrm{d}t\,,$$

wo $\xi \in \langle \bar{x}, x\rangle$ ist. Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist offenbar positiv oder Null, wenn $m > 0$ genügend gross ist, da $y'(x)$ und $y(x)$ im Intervalle I begrenzt sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung. *Aus dem Vergleichungssatz folgt, dass, wenn $x_1 > a$ die erste Nullstelle der Lösung $y(x)$ rechts von a ist, $z(x)$ zwischen a und x_1 wenigstens eine Nullstelle hat. Erwägen wir im weiteren die Differentialgleichung*

$$y''' + 2A(x, \lambda)\, y' + [A'(x, \lambda) + b(x, \lambda)]\, y = 0\,. \tag{a}$$

Satz 5 (Oszillationssatz). *Es seien $0 \geqq A(x, \lambda) \geqq -k$, wo $k > 0$ eine Konstante ist, $A'(x, \lambda) \geqq 0$, $b(x, \lambda) > 0$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ und $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ und $\lim_{\lambda \to \Lambda_2} b(x, \lambda) = +\infty$ sei gleichmässig für alle $x \in (-\infty, \infty)$. Es seien $a < b \in (-\infty, \infty)$ fest gewählte Zahlen. Es sei $y(x, \lambda)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung* (a) *mit der Eigenschaft $y(a, \lambda) = 0$. Dann steigt, mit steigendem λ in Λ_2, die Zahl der Nullstellen der Lösung $y(x, \lambda)$ im Intervall $\langle a, b \rangle$ ins Unendliche, wobei die Entfernung von zwei aufeinander folgenden Nullstellen zu Null konvergiert.*

Beweis. Bilden wir eine Folge von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

$$\{z''' - kz' + [(k + 2^n)^3 - k(k + 2^n)]\, z = 0\}\,; \quad \{(\alpha_n)\}\,.$$

Eine Wurzel der charakteristischen Gleichung, die zur Differentialgleichung (α_n) gehört, ist $r_1 = -(k + 2^n)$ und die Gleichung zweiten Grades, welche wir nach der Division der charakteristischen Gleichung mit dem Ausdruck $r - r_1$ erhalten, ist

$$r^2 - (k + 2^n)\, r + (k + 2^n)^2 - k = 0\,.$$

Diese hat von einem gewissen n beginnend komplexe Wurzeln, also sind die Lösungen der entsprechenden Differentialgleichung zweiter Ordnung oszillatorisch und mit den steigenden n konvergiert die Entfernung zweier Nullstellen jeder ihrer Lösungen zu Null.

Aus jedem Punkt der Zahlenachse geht (bis zur linearen Abhängigkeit) eine einzige Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung hervor, welche offenbar eine Lösung der Differentialgleichung (α_n) ist und daher konvergiert die Entfernung zweier Nullstellen jeder Lösung jedes Büschels der Differentialgleichung (α_n) mit steigendem n zu Null rechts vom Punkt des Büschels, weil die Büschel der Lösungen der Differentialgleichung (α_n) rechts vom Punkt des Büschels der Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form (c) entsprechen. Zu jedem n existiert offenbar ein solches $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, dass der Unterschied $b(x, \lambda) - [(k + 2^n)^3 - k(k + 2^n)]$ für jedes $x \in (-\infty, \infty)$ genügend gross ist. Es genügt jetzt die Differentialgleichung (a) mit der Differentialgleichung (α_n) bei einem genügend grossen n und $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ zu vergleichen. Tatsächlich, es ist nämlich bekannt [2], dass jede Lösung des Büschels in jedem Punkte a der Differentialgleichung der Form (a), ihre erste Nullstelle rechts vom Punkte a zwischen a und x_1 hat, wo x_1 die erste Nullstelle der Lösung y_1 der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y_1(a, \lambda) = y_1'(a, \lambda) = 0$, $y_2''(a, \lambda) \neq 0$ rechts von a ist. Dabei folgt aus dem Vergleichungssatz, dass $x_1 < \bar{x}_1$ ist, wo $\bar{x}_1$ die erste Nullstelle der Lösung $z_1(x)$ der Differentialgleichung (α_n) mit der Eigenschaft $z_1(a) = z_1'(a) = 0$, $z_1''(a) \neq 0$ bei einem geeigneten n ist. Daraus folgt die Behauptung unseres Satzes.

Satz 6 (Randwertaufgabe in drei Punkten). *Die Koeffizienten der Differentialgleichung* (a) *sollen die Voraussetzungen des Oszillationssatzes erfüllen.* $a < b < c \in (-\infty, \infty)$ *seien feste Zahlen. Weiter seien* $\alpha(\lambda)$, $\alpha_1(\lambda)$, $\beta(\lambda)$, $\beta_1(\lambda)$ *stetige Funktionen des Parameters* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, *für welche* $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta| + |\beta_1| \neq 0$, *wobei entweder* $\beta(\lambda) \equiv 0$, *oder* $\beta(\lambda) \neq 0$ *für* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ *ist. Dann existieren unendlich viele Werte des Parameters* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$: $\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots$, *zu welchen die Funktionenfolge* $y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_{\nu+p}, \ldots$ *mit einer solchen Eigenschaft gehört, dass* $y_{\nu+p} = y(x, \lambda_{\nu+p})$ *die Lösung der Differentialgleichung* (a) *ist, welche die Randbedingungen*

$$y(a, \lambda_{\nu+p}) = 0\,,$$
$$\alpha_1(\lambda_{\nu+p})\, y(b, \lambda_{\nu+p}) - \alpha(\lambda_{\nu+p})\, y'(b, \lambda_{\nu+p}) = 0\,,$$
$$\beta_1(\lambda_{\nu+p})\, y(c, \lambda_{\nu+p}) - \beta(\lambda_{\nu+p})\, y'(c, \lambda_{\nu+p}) = 0$$

erfüllt und $y(x, \lambda_{\nu+p})$ *hat in* (a, c) *gerade* $\nu + p$ *Nullstellen.*

Der Beweis ist vollkommen derselben wie der Beweis des Satzes 1 [3] für die Differentialgleichung der Form (a), in welcher $A(x, \lambda) > 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ und $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ ist, nur ist anstatt des Oszillationssatzes von G. Sansone der oben angeführte Oszillationssatz zu gebrauchen.

Es ist notwendig das Büschel Lösungen der Differentialgleichung (a) im Punkte a und die stetige Abhängigkeit der Nullstellen jeder Lösung des Büschels von λ rechts von a [4] zu erwägen. Die erste Randbedingung für jede Lösung des Büschels

$$c_1 y_1 + c_2 y_2\,, \quad y_1(a, \lambda) = y_1'(a, \lambda) = 0\,, \quad y_2(a, \lambda) = y_2''(a, \lambda) = 0$$

ist erfüllt und die zweite Bedingung erhalten wir durch entsprechende Wahl der Konstanten c_1, c_2.

Folgerung 1. *Wenn* $a = b$, $\alpha_1(\lambda) \equiv 0$, $\alpha(\lambda) \neq 0$, $\beta(\lambda) \equiv 0$, $\beta_1(\lambda) \neq 0$ *bzw.* $\beta(\lambda) \neq 0$, $\beta_1(\lambda) \equiv 0$ *für jedes* $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$, *dann gehen die Randbedingungen in die Form*

$$y(a, \lambda) = 0\,, \quad y'(a, \lambda) = 0\,, \quad y(c, \lambda) = 0$$

bzw.

$$y(a, \lambda) = 0\,, \quad y'(a, \lambda) = 0\,, \quad y'(c, \lambda) = 0$$

über.

Folgerung 2. *Wenn wir* $\alpha(\lambda)$, $\alpha_1(\lambda)$, $\beta(\lambda)$, $\beta_1(\lambda)$ *entsprechend wählen, dann gehen die Randbedingungen fortschreitend in die Form* $y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0$, $y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y(c, \lambda) = 0$, $y(a, \lambda) = y'(b, \lambda) = y'(c, \lambda) = 0$, $y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = y(c, \lambda) = 0$ *über.*

Bemerkung 4. Die Randwertaufgaben welche zu den, in den Folgerungen 1 und 2 angeführten Randbedingungen gehören, wurden, bis auf die Letzte, für den Fall $A(x, \lambda) > 0$ in der Arbeit [4] gelöst. Die Letzte wurde in der Arbeit [2] gelöst.

LITERATUR

[1] *G. Sansone*: Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale, Revista Matem. y Fisica Teorica, Serie A, 1948, Tucuman, 195—253.

[2] *M. Greguš*: O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice homogennej tretieho rádu, Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *2*, 1955, 73—85.

[3] *M. Greguš*: Homogénny okrajový problém pre integrály lineárnej diferenciálnej rovnice tretieho rádu, Acta facultatis Rerum naturalium U. C. Bratislava, *2*, 1957, 219—227.

[4] *М. Грегуш:* О некоторых новых краевых проблемах дифференциального уравнения третьего порядка, Чехословац. мат. журнал *7*, 1957, 41—47.

Резюме

КОЛЕБЛЮЩИЕСЯ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА $y''' + 2Ay' + (A' + b)\, y = 0$, ГДЕ $A = A(x) \leqq 0$

МИХАЛ ГРЕГУШ (Michal Greguš), Братислава

(Поступило в редакцию 7/X 1958 г.)

В работе рассматриваются свойства решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка

$$y''' + 2A(x)\, y' + [A'(x) + b(x)]\, y = 0\,, \tag{a}$$

где $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $b(x) \geqq 0$ являются непрерывными функциями $x \in \in (-\infty, \infty)$.

В первой части работы доказаны два условия, достаточные для того, чтобы у каждого решения дифференциального уравнения (a) были самое больше две нулевые точки или одна удвоенная.

Во второй части доказано условие, достаточное для того, чтобы у каждого решения $y(x)$ дифференциального уравнения (a) свойства $y(a) = 0$, $a \in (-\infty, \infty)$, было бесконечно много нулевых точек для $x > a$.

В третьей части доказана т. наз. сравнительная теорема для двух дифференциальных уравнений типа (a) и при помощи нее т. наз. осцилляционная теорема для дифференциального уравнения (a), где коэффициенты являются функциями параметра λ. Наконец, приводится применение осцилляционной теоремы для решений краевых задач в трех точках, которые были решены для случая $A(x, \lambda) > 0$ в работе [3] теорема 1, или в работе [4].