Pavel Čihák

О критерии относительной компактности подмножеств в пространстве $L_p(T)$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 3, 334–338

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100361

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

О КРИТЕРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ КОМПАКТНОСТИ ПОДМНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(T)$

ПАВЕЛ ЧИГАК (Pavel Čihák), Прага

(Поступило в редакцию 30/IX 1958)

В этой работе приведены необходимые и достаточные условия для относительной компактности подмножеств пространства $L_p(T)$, которые имеют место и в случае, когда множество T неограничено и $p = 1$.

Прежде всего приведем некоторые понятия и обозначения, которыми будем в дальнейшем пользоваться.

Пусть m — мера Лебега на евклидовом ν-мерном пространстве E_ν, число $p \geqq 1$, пусть $T \subset E_\nu$ — m-измеримое множество, $0 < m(T) \leqq \infty$, и $L_p(T)$ — вещественное линейное пространство классов измеримых m-эквивалентных функций на евклидовом пространстве E_ν, которые на множестве $E_\nu \dot{-} T$ достигают нуля почти всюду и для которых $\int_{E_\nu} |f(t)|^p \, \mathrm{d}m < \infty$. Норма элемента $x \in L_p(T)$ введена обыкновенным способом и мы обозначим ее символом $\|x\|$. Если для некоторой функции $f \in x \in L_p(T)$ и для некоторой функции $g \in y \in L_p(T)$ имеет место $f(t) \geqq g(t)$ для почти всех $t \in E_\nu$, будем писать $x \geqq y$.

Очевидно, что $f_1 \in x$, $g_1 \in y$, $x \geqq y \Rightarrow f_1(t) \geqq g_1(t)$ для почти всех $t \in E_\nu$. L_p будет обозначать пространство $L_p(E_\nu)$. Очевидно, $L_p(T) \subset L_p$.

Каждому $x \in L_p$ и числу $r > 0$ поставим в соответствие $x_r \in L_p$ по следующему правилу:

$$x_r(t) = \frac{1}{m(S_r)} \int_{S_r} x(t + s) \, \mathrm{d}m_s \, ,$$

где $S_r \subset E_\nu$ обозначает шар радиуса r с центром в начале координат $0 \in E_\nu$. Для $X \subset L_p$ будет $X_r = \{x_r | x \in X\}$, $X_{rr} = \{x_{rr} | x \in X\}$, где $x_{rr} = (x_r)_r$.

Имеют место (см. [1]) соотношения:

$$\|x_r\| \leqq \|x\| , \tag{1}$$

$$\lim_{r \to 0_+} \|x_r - x\| = 0 , \tag{2}$$

$$(x + y)_r = x_r + y_r ; \quad x \leqq y \Rightarrow x_r \leqq y_r . \tag{3}$$

Определение. *Множество $X \subset L_p(T)$ называется относительно компактным, если из каждой последовательности $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots$, можно выбрать последовательность x_{k_i}, $i = 1, 2, \ldots$, таким образом, что $\lim\limits_{i \to \infty} \|x_{k_i} - x\| = 0$ для некоторого $x \in L_p(T)$.*

Справедливо утверждение (см. [2], 198—199): Множество $X \subset L_p(T)$ относительно компактно в пространстве $L_p(T)$ тогда и только тогда, если ко всякому $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $Z \subset L_p$ такое, что $\min\limits_{z \in Z} \|x - z\| < \varepsilon$ для произвольного $x \in X$.

Теорема. *Множество $X \subset L_p(T)$ относительно компактно в пространстве $L_p(T)$ тогда и только тогда, если выполнены оба следующих условия:*

1. *Для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $r > 0$ такое, что $\|x - x_r\| < \varepsilon$ для всех $x \in X$.*

2. *Для каждого бесконечного множества $Y \subset X$ существует бесконечное множество $Y_1 \subset Y$ и элемент $w \in L_p(T)$ таким образом, что $|x| \leqq w$ для всех $x \in Y_1$.*

Заметка. В отличие от критерия относительной компактности Колмогорова [1], этот критерий имеет место тоже в случае, если множество T неограничено, и докажем его правильность тоже для $p = 1$.

И. Д. Тамаркин (см. [15]) расширил применение критерия относительной компактности Колмогорова для того случая, когда множество T неограничено, тем, что к первоначальным двум условиям Колмогорова прибавил следующие условие.

Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$ такое, что $\|x_N - x\| < \varepsilon$ для всех $x \in X$ (где $x_N(t) = x(t)$ для $t \in S_N$ и $x(t) = 0$ для $t \in E_\nu \dot{-} S_N$).

Доказательство необходимости обоих условий приведенной теоремы: Пусть множество X компактно. Тогда имеет место:

Условие 1. Для $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $Z \subset X$ такое, что $\min\limits_{z \in Z} \|x - z\| < \frac{1}{3}\varepsilon$ для всякого $x \in X$. Согласно (2) существует число $r > 0$ такое, что $\max\limits_{z \in Z} \|z - z_r\| < \frac{1}{3}\varepsilon$. К каждому $x \in X$ существует, следовательно, $z \in Z$ такое, что $\|x - z\| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Следовательно, выполняется неравенство

$$\|x - x_r\| \leqq \|x - z\| + \|z - z_r\| + \|z_r - x_r\| < \varepsilon$$

и условие 1 удовлетворено.

Условие 2. Для бесконечного множества $Y \subset X$ существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in Y$, в которой все члены различны, стремящаяся к некоторому $x \in L_p(T)$. Из последовательности $\{x_n - x\}_{n=1}^{\infty}$ выберем последовательность

$$x_{k_n} - x = z_n\,, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{такую, что} \quad \int\limits_{E_\nu} |z_n(t)|^p \,\mathrm{d}m \leqq \frac{1}{2^n}\,.$$

Положим

$$y_n(t) = \max_{i=1,2,\ldots n} (|z_i(t)|^p)\,, \quad z(t) = \sup_{k=1,2,\ldots} |z_k(t)|$$

для $n = 1, 2, \ldots, t \in E_\nu$. Имеем

$$\int\limits_{E_\nu} y_n(t)\,\mathrm{d}m \leqq \int\limits_{E_\nu} (|z_1(t)|^p + \ldots + |z_n(t)|^p)\,\mathrm{d}m \leqq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \leqq 1\,,$$

$$y_i \leqq y_{i+1} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, \ldots, \lim_{n\to\infty} y_n(t) = z^p(t) \quad \text{для} \quad t \in E_\nu\,.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{E_\nu} z^p(t)\,\mathrm{d}m \leqq 1\,, \quad z + |x| \in L_p(T)\,, \quad z + |x| \geqq |x_{k_n}|$$

для $n = 1, 2, \ldots$ (см. [3]). Теперь положим $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} = Y_1$, $z + |x| = w$. Итак, имеет место условие 2.

Доказательство достаточности обоих условий приведенной теоремы: Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда справедливы утверждения:

а) *Множество X ограничено в пространстве L_p.*

Доказательство. Если бы существовала последовательность $x_n \in X$, $\|x_n\| > n$, то мы положили бы $Y = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и получили бы противоречие с условием 2 и импликацией: $|x| \leqq w \Rightarrow \|x\| \leqq \|w\|$.

б) *Функции множества X_{rr} равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.*

Доказательство. Пусть $\|x\| \leqq M$ для $x \in X$. Тогда имеем

$$|x_r| \leqq \frac{M}{m^{1/p}(S_r)}\,, \quad |x_{rr}| \leqq \frac{M}{m^{1/p}(S_r)}\,,$$

$$|x_{rr}(t) - x_{rr}(t')| = \frac{1}{m(S_r)} \left| \int\limits_{S_r} x_r(t+s)\,\mathrm{d}m_s - \int\limits_{S_M} x_r(t'+s)\,\mathrm{d}m_s \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{m(S_r)} \int\limits_{A} |x_r(s)|\,\mathrm{d}m_s \leqq \frac{M}{m^{1+1/p}(S_r)}\,m(A) = \frac{M}{m^{1+1/p}(S_r)}\,v(d)\,,$$

где $A = (S_r + t) \div (S_r + t')$,*) $S_r + t$ — множество всех точек вида $\tau + t$ для $\tau \in S_r$ и $d = \|t - t'\|_{E_\nu}$, $v(d) = m(A)$. Утверждение б) верно, так как

$$v(d) = m[(S_r + t) \div (S_r + t')] = m[(S_r + \mathrm{d}t_0) \div S_r] \quad \text{и} \quad \lim_{d \to 0_+} v(d) = 0\,,$$

где $t_0 \in E_\nu$ — произвольный единичный вектор

в) *Из каждой последовательности равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций на сепарабельном пространстве можно выбрать точечно сходящуюся последовательность функций.*

Докажется аналогично, как теорема Арзела (см. [4], 315—317).

г) *Множество X_{rr} относительно компактно в пространстве L_p для произвольного $r > 0$.*

Доказательство. Пусть $Y \subset X$ — бесконечное множество. По предположению 2 существует $w \in L_p$ и последовательность $x_n \in Y$, в которой все члены различны, такая, что $|x_n| \leqq w$ для $n = 1, 2, \ldots$ Вследствие того, что функции из X_{rr} равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на сепарабельном пространстве E_ν, можно из последовательности $(x_n)_{rr} = y_n$ выбрать точечно сходящуюся последовательность функций y_{k_n}, $n = 1, 2, \ldots$ Обозначим $\lim\limits_{n \to \infty} y_{k_n}(t) = y(t)$ для $t \in E_\nu$. Имеем

$$|(x_{k_n})_{rr}| = |y_{k_n}| \leqq w_{rr} \in L_p \text{ (вытекает из (3))}, \quad |y| \leqq w_{rr}\,,$$

$$\lim_{n \to \infty} |y_{k_n}(t) - y(t)| = 0 \quad \text{для} \quad t \in E_\nu, \quad |y_{k_n} - y|^p \leqq 2^{p+1} |w_{rr}|^p\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_\nu} |y_{k_n}(t) - y(t)|^p \,\mathrm{d}m = 0\,, \quad \lim_{n \to \infty} \|y_{k_n} - y\| = 0\,.$$

Таким образом мы выбрали из множества Y_{rr} простую последовательность $\{y_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся в пространстве L_p.

е) Наконец докажем, что *множество X также относительно компактно.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует $r > 0$ такое, что $\|x - x_r\| < \frac{1}{3}\varepsilon$ для каждого $x \in X$ (вытекает из условия 1). Следовательно, тоже $\|x_r - x_{rr}\| < \frac{1}{3}\varepsilon$ (согласно (1) и (3)).

Для числа $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $Z \subset L_p$ такое, что $\min\limits_{z \in Z} \|x_{rr} - z\| < \frac{1}{3}\varepsilon$ для каждого $x \in X$ (так как X_{rr} компактное в L_p), т. е. для каждого $x \in X$ существует $z \in Z$ такое, что $\|x_{rr} - z\| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

Для $\varepsilon > 0$ мы нашли конечное множество z такое, что $\min\limits_{z \in Z} \|x - z\| < \varepsilon$ для произвольного $x \in X$.

*) Знак $\div$ выражает симметрическую разность множеств.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *A. Kolmogoroff*: Über Kompaktheit der Funktionmengen bei der Konvergenz im Mittel, Göt. Nachr. 1931, 60—63.
[2] *J. L. Kelley*: General Topology, New York 1955.
[3] *J. Mařík*: Lebesgueův integrál v abstraktních prostorech, Časopis pro pěstování mat. *76* (1951), 175—194.
[4] *V. Jarník*: Diferenciální počet II, Praha 1953.
[5] *J. D. Tamarkin*: On the compactness of the space, Bull. of the Amer. Math. Soc. *38* (1932), 79—82.

Summary

ON THE RELATIVE COMPACTNESS OF SUBSETS OF THE SPACE $L_p(T)$

PAVEL ČIHÁK, Praha

(Received September 30, 1958)

In this paper necessary and sufficient conditions for the relative compactness of subsets of the space $L_p(T)$ are stated which hold even in the case when the set T is not bounded and when $p = 1$.

Let m be Lebesque measure in the euclidean space E_ν, $T \subset E_\nu$, $0 < m(T) \leqq \infty$, $p \geqq 1$, S_r the sphere in the space E_ν with a radius $r > 0$ and with the centre in the origin,

$$x_r(t) = \frac{1}{m(S_r)} \int_{Sr} x(t + s) \, \mathrm{d}m_s \quad \text{for} \quad x \in L_p(T) \, .$$

The our theorem states:

The set $X \subset L_p(T)$ is relatively compact in the space $L_p(T)$ if and only if both the following conditions are fulfilled:

1. *For each number $\varepsilon > 0$ there exists a number $r > 0$ such that $\|x - x_r\| < \varepsilon$ for all $x \in X$.*

2. *For each infinite set $Y \subset X$ there is an infinite set $Y_1 \subset Y$ and a member $w \in L_p(T)$ such that $|x| \leqq w$ for all $x \in Y_1$.*