Czechoslovak Mathematical Journal

Tiberiu Mihăilescu

Les surfaces R_0

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 4, 573–582

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100331

LES SURFACES R_0

TIBERIU MIHĂILESCU, Cluj, Roumanie

(Reçu le 15 mai 1958)

Après une exposition des propriétés connues des surfaces projectivement déformables appartenant à la classe R_0, l'A. présente deux propriétés caractéristiques de ces surfaces qui font intervenir certains réseaux conjugués nommés respectivement réseaux R'_0 et R''_0.

1

Le problème de l'applicabilité projective de deux surfaces de l'espace projectif S_3 posé par G. Fubini a été résolu d'une manière complète par E. Cartan [1] à l'aide de la théorie du repère mobile.

Les surfaces non réglées projectivement applicables se groupent en deux classes.

A la première classe appartiennent les surfaces appelées *surfaces R*. Leur ensemble dépend de six fonctions arbitraires d'un argument, les courbes caractéristiques du système de Pfaff qui admet comme solution ces surfaces étant les lignes asymptotiques et les courbes d'un réseau conjugué, nommé par Cartan *réseau de déformation projective*. Les tangentes aux courbes de ce réseau forment des congruences W, donc c'est un réseau R de Tzitzéïca.

Les surfaces de la deuxième classe dépendent de cinq fonctions arbitraires d'un argument, les courbes caractéristiques du système de Pfaff respectif étant les lignes asymptotiques de l'une des familles comptées cinq fois.

Ces surfaces, nommées *surfaces R_0*, sont caractérisées par Cartan d'une manière analytique à l'aide des invariants projectifs associés au repère mobile attaché aux points de la surface.

Pour les surfaces R_0 un des invariants projectifs μ, ν [1] a la valeur $\frac{1}{2}$

$$\mu = \tfrac{1}{2} \quad (\text{ou } \nu = \tfrac{1}{2})\,.$$

Les propriétés géométriques caractéristiques de ces surfaces sont nombreuses.

On doit a JOYO KANITANI une propriété caractéristique des surfaces R_0 mentionnée par G. FUBINI et E. ČECH [2], propriété dont le caractère géométrique n'apparaît pas d'une manière claire.

Dernièrement, dans son ouvrage [3], G. BOL donne trois propriétés caractéristiques:

a) Une des congruences formées par les droites de Sullivan associées aux points d'une surface non réglée est conjuguée à la surface si et seulement si la surface est R_0 ([3], II, p. 40).

b) Pour une surface R_0, le conjugué harmonique d'un point de la surface par rapport aux deux points focaux d'une des droites de Sullivan est situé sur celle des quadriques de Darboux qui est la duale de la quadrique de Wilczynski, et cette propriété appartient aux surfaces R_0 seulement ([3], II, p. 100).

c) Une surface est R_0 si et seulement si les deux tangentes asymptotiques, la deuxième tangente canonique et la tangente de Bol forment un faisceau dont le birapport a la valeur 2 ou $\frac{1}{2}$ ([3], II, p. 101).

Rappelons que le lieu des points de Koenigs qui sont les conjugués harmoniques d'un point de la surface par rapport aux deux poins focaux des droites qui sont projectivement fixes par rapport au repère formé par les tangentes asymptotiques, la droite de Wilczynski et la droite de Green, est une quadrique — la quadrique de Bol — dont la conique commune avec la quadrique de Wilczynski est située dans un plan qui coupe le plan tangent suivant la tangente de Bol.

Dans un ouvrage sur la géométrie différentielle projective, traitée par la méthode du repère mobile, qui va paraître prochaînement[1]) nous avons ajouté à ces théorèmes deux nouvelles propriétés que nous présentons ici sans en donner la démonstration.

1. On établit entre les droites du faisceau canonique une correspondance projective, qui n'est pas une involution, déterminée par les conditions suivantes:

a) les droites doubles de la projectivité sont la tangente canonique et la normale projective;

b) à la droite de Wilczynski correspond la conjuguée harmonique de la normale projective par rapport à la tangente canonique et la droite de Wilczynski.

Le plan déterminé par une des tangentes asymptotiques et une droite canonique arbitraire D, qui ne se confond ni avec la normale projective ni avec la droite de Wilczynski, et le plan déterminé par l'autre tangente asymptotique et

[1]) Dans les Editions de l'Académie de la République Populaire Roumaine.

la droite canonique D' qui correspond à D dans la projectivité décrite ci-dessus, ont en commun une droite Δ qui engendre une congruence (Δ). La condition nécessaire et suffisante pour que la surface soit une surface R_0 est que la congruence (Δ) soit conjuguée à la surface et, dans ce cas, il existe un ensemble infini de congruences (Δ) obtenues de la manière indiquée en faisant varier la droite canonique D.

2. Soit A_0 un point d'une surface non réglée (S), A_3 un point arbitraire, extérieur au plan tangent en A_0 à (S), A_1, A_2 les points d'intersection des tangentes asymptotiques en A_0 avec la polaire réciproque de la droite $[A_0A_3]$ par rapport aux quadriques de Darboux en A_0.

Les cônes du second ordre ayant les sommets au point A_3 et qui ont un contact réglé du second ordre respectivement avec les deux cônes Γ_1, Γ_2 qui projettent du point A_3 les lignes asymptotiques (C_1), (C_2) sur le plan tangent, forment deux familles (Γ_1'), (Γ_2'), à deux paramètres chacune.

Chaque famille contient un seul cône (γ_1), (γ_2) tangent au plan $[A_1, A_2, A_3]$ le long de la génératrice $[A_3, A_2]$ respectivement $[A_3, A_1]$, et ces deux cônes coupent le plan tangent suivant deux coniques qui, outre A_0, ont encore trois points communs P_i $(i = 1, 2, 3)$, situés sur les trois tangentes de Segre.

Si P_i est un de ces points, les droites A_1P_i, A_2P_i et les tangentes asymptotiques ont en commun les points A_1, A_2 et deux autres points P_{1i}, P_{2i}, la droite $[P_{1i}, P_{2i}]$ coupant la tangente de Segre $[A_0, P_i]$ au point Q_i.

La quadrique de Darboux qui passe par le point arbitraire A_3 coupe la droite $[A_3Q_i]$ au point T_i.

Les trois points T_i $(i = 1, 2, 3)$ ainsi obtenus sont situés dans un plan qui passe par la droite $[A_1, A_2]$. Aux points T_i on associe respectivement les points T_i' définis par les relations

$$(A_3, T_i, T_i', Q_i) = -1$$

et qui déterminent un plan qui passe aussi par la droite $[A_1, A_2]$.

En choisissant comme point A_3 le point commun à la droite de Wilczynski et à la quadrique de Lie, le plan des trois points respectifs T_i coupe la droite de Wilczynski au point T.

Si M est le point d'intersection de la droite de Wilczynski et du plan tangent en A_1 à la surface décrite par ce point, les points A_0, M, A_3, T forment un système harmonique si et seulement si la surface est une surface R_0.

On énonce sans peine la propriété duale.

Dans la présente note nous donnons deux autres propriétés caractéristiques de ces surfaces remarquables, propriétés qui font intervenir des réseaux conjugués. Nous employons dans ce qui suit la méthode du repère mobile.

Associons à chaque point M d'une surface (S) non réglée un tétraèdre $A_0A_1A_2A_3$ de la manière suivante. Le point A_0 coïncide avec le point M, les droites $[A_0, A_1]$, $[A_0, A_2]$ sont les tangentes asymptotiques distinctes en A_0 et $[A_0, A_3]$, $[A_1, A_2]$ sont les directrices de Wilczynski.

Le point A_3 est le deuxième point d'intersection de la droite de Wilczynski avec la quadrique de Lie du point A_0.

Avec ce tétraèdre on peut former un repère projectif si l'on fixe le point unité.

Nous laisserons ce point indéterminé parce que dans ce cas les formules ont un caractère d'homogénéité qui rend facile le contrôle des calculs.

D'ailleurs un théorème général garantit l'indépendance des résultats par rapport aux paramètres indéterminés du point unité.

De cette manière à chaque point A_0 de la surface correspond une famille à trois paramètres de repères projectifs. On passe d'une repère de cette famille à un autre repère de la même famille par une transformation projective et l'ensemble de ces transformations forme un sous-groupe projectif à trois paramètres.

Ces repères sont des repères de troisième classe et nous dénoterons par (R_3) la famille formée par eux.

Les composantes du déplacement projectif d'un repère de la famille (R_3) satisfont aux équations du système de Pfaff:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{03} = 0\,, \quad \omega_{13} = b_2\omega_{02}\,, \quad \omega_{23} = b_2\omega_{01}\,,\\
&\mathrm{d}b_2 + b_2(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}) = 0\,,\\
&\omega_{12} = a_3\omega_{01}\,, \quad \omega_{21} = c_3\omega_{02}\,,\\
&\mathrm{d}a_3 + a_3(\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22}) = a_4\omega_{01}\,,\\
&\mathrm{d}c_3 + c_3(\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22}) = c_4\omega_{02}\,,\\
&\omega_{10} - b_2\omega_{32} = 0\,, \quad \omega_{20} - b_2\omega_{31} = 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

les coefficients étant des fonctions des paramètres de position du point A_0 — paramètres principaux — et des paramètres de position du point unité — paramètres secondaires.

Leur ordre différentiel est égal à l'indice respectif.

Du système extérieur, déduit du système (1),

$$\left.\begin{gathered}
[\varDelta a_4, \omega_{01}] + 4b_2a_3[\omega_{32}, \omega_{01}] - 2b_2a_3[\omega_{31}, \omega_{02}] = 0\,,\\
a_3[\omega_{31}, \omega_{01}] + [\omega_{30}, \omega_{02}] = 0\,,\\
[\omega_{30}, \omega_{01}] + c_3[\omega_{32}, \omega_{02}] = 0\,,\\
2b_2c_3[\omega_{32}, \omega_{01}] - 4b_2c_3[\omega_{31}, \omega_{02}] - [\varDelta c_4, \omega_{02}] = 0
\end{gathered}\right\} \tag{2}$$

où

$$\Delta a_4 = da_4 + a_4(2\omega_{00} - 3\omega_{11} + \omega_{22}) - 3a_3^2 c_3 \omega_{02} ,$$
$$\Delta c_4 = dc_4 + c_4(2\omega_{00} + \omega_{11} - 3\omega_{22}) - 3a_3 c_3^2 \omega_{01} ,$$

on déduit les équations

$$\left.\begin{aligned} \Delta a_4 &= a_5\omega_{01} - 2b_2 a_3(2\mu + \nu)\,\omega_{02} , \\ \omega_{31} &= \nu\omega_{01} + \varrho\omega_{02} , \\ \omega_{30} &= a_3\varrho\omega_{01} + c_3\lambda\omega_{02} , \\ \omega_{32} &= \lambda\omega_{01} + \mu\omega_{02} , \\ \Delta c_4 &= -\,2b_2 c_3(2\nu + \mu)\,\omega_{01} + c_5\omega_{02} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

qui prolongent le système (1), l'ordre différentiel des coefficients λ, μ, ν, ϱ étant égal à 5.

Dans l'ouvrage dont l'apparition a été signalée ci-dessus, nous avons établi l'existence des invariants infinitésimaux du troisième ordre. Ces fonctions, attachées à la figure formée par un point de la surface et un point infiniment voisin, sont des fonctions de deux invariants fondamentaux indépendants, par ex. de

$$\varphi_1 = \frac{a_3\omega_{01}^2}{\omega_{02}} , \quad \varphi_2 = \frac{c_3\omega_{02}^2}{\omega_{01}} , \qquad (4)$$

que nous nommerons *invariants fondamentaux de Bompiani*.

Le problème variationnel du type simple — à extrémités fixes — attaché au premier invariant admet comme extrémales les courbes intégrales de l'équation différentielle du second ordre

$$\omega_{01}\,d\omega_{02} - \omega_{02}\,d\omega_{01} + \omega_{01}\omega_{02}(\omega_{22} - \omega_{11}) - \frac{a_4\omega_{01}^2\omega_{02}}{2a_3} = 0 . \qquad (5)$$

Les extrémales relatives au deuxième invariant sont les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$\omega_{01}\,d\omega_{02} - \omega_{02}\,d\omega_{01} + \omega_{01}\omega_{02}(\omega_{22} - \omega_{11}) + \frac{c_4\omega_{01}\omega_{02}^2}{2c_3} = 0 . \qquad (6)$$

3

Un réseau conjugué de la surface (S) est défini par rapport à un repère (R_3) par une équation

$$\omega_{02}^2 - \sigma^2\omega_{01}^2 = 0 \qquad (7)$$

où σ est une fonction des paramètres principaux et secondaires qui satisfait à une équation de Pfaff de la forme

$$d\sigma + \sigma(\omega_{22} - \omega_{11}) = \beta_1\omega_{01} + \gamma_1\omega_{02} , \qquad (8)$$

β_1, γ_1 étant des coefficients du premier ordre différentiel.

Un réseau arbitraire peut être considéré comme le réseau de base d'un faisceau de réseaux conjugués

$$\omega_{02}^2 - k^2\sigma^2\omega_{01}^2 = 0 \quad (k = \text{const})\,. \tag{9}$$

Les coordonnées des plans osculateurs à une des courbes de ce faisceau sont

$$\left.\begin{array}{l} \eta u_0 = 2b_2k^2\sigma^2\,, \quad \eta u_2 = -\,2b_2k\sigma\,, \\ \eta u_3 = a_3 + k\beta_1 + k^2\gamma_1\sigma - c_3k^3\sigma^3 \end{array}\right\} \tag{10}$$

et les plans osculateurs de toutes les courbes (9) sont tangents à un cône de troisième classe dont les plans tangents stationnaires passent par une même droite

$$[A_0, \gamma_1A_1 - \beta_1A_2 - 2b_2\sigma A_3] \tag{11}$$

l'axe cuspidal du faisceau (9).

La congruence formée par ces droites est conjuguée à la surface (S) s'il existe la relation

$$b_2(\mu - \nu)\,\sigma^2 + \beta_2'\sigma - \beta_1\gamma_1 = 0 \tag{12}$$

et seulement dans ce cas.

Le nouveau coefficient β_2' qui y figure apparaît dans les équations

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{d}\beta_1 + \beta_1(\omega_{00} - 2\omega_{11} + \omega_{22}) = \beta_2\omega_{01} + (\beta_2' - \frac{1}{2}a_3c_3\sigma K)\,\omega_{02}\,, \\ \mathrm{d}\gamma_1 + \gamma_1(\omega_{00} - \omega_{11}) = (\beta_2' + \frac{1}{2}a_3c_3\sigma K)\,\omega_{01} + \gamma_2\omega_{02} \end{array}\right\} \tag{13}$$

qui prolongent l'équation (8) et où $K = \dfrac{2[b_2(\mu + \nu) - a_3c_3]}{a_3c_3}$ est la courbure de la forme asymptotique $\varphi = \varphi_1\varphi_2 = a_3c_3\omega_{01}\omega_{02}$.

Les réseaux conjugués dont l'axe cuspidal engendre une congruence conjuguée à la surface sont les réseaux *isothermes-conjugués.*

En considérant le réseau (7) et les relations (10) on peut remarquer que les équations (5) et (6) peuvent s'écrire respectivement

$$\beta_1 + \gamma_1\sigma - \frac{\sigma a_4}{2a_3} = 0\,, \tag{5'}$$

$$\beta_1 + \gamma_1\sigma + \frac{\sigma^2c_4}{2c_3} = 0\,. \tag{6'}$$

4

F. Marcus a posé [4] le problème de la détermination des réseaux conjugués dont les courbes sont des pangéodésiques, c'est-à-dire des extrémales de l'élément linéaire projectif de G. Fubini et E. Čech

$$\psi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{a_3\omega_{01}^3 + c_3\omega_{02}^3}{\omega_{01}\omega_{02}}\,.$$

Dans le même ordre d'idées on peut envisager la détermination des réseaux conjugués dont les courbes des deux familles sont des extrémales d'un invariant de Bompiani, par ex. de φ_2.

En exprimant le fait que l'équation (6) est vérifiée simultanément par les solutions σ et $-\sigma$ on obtient les relations

$$\beta_1 = 0 , \quad \gamma_1 = -\frac{\sigma c_4}{2c_3} , \tag{14}$$

donc l'équation (8) devient

$$d\sigma + \sigma(\omega_{22} - \omega_{11}) + \frac{\sigma c_4}{2c_3} \omega_{02} = 0 \tag{15}$$

d'où, par différentiation extérieure, résulte la condition d'intégrabilité

$$2b_2\mu - a_3c_3 = 0 . \tag{16}$$

Donc c'est seulement sur les surfaces particulières définies par la relation (16) qu'existent des réseaux conjugués formés par des courbes extrémales de l'invariant de Bompiani φ_2.

Mais si l'on choisit pour point unité le point T_i correspondant à la tangente de Segre réelle, les coefficients b_2, a_3, c_3 prennent les valeurs particulières $b_2 = a_3 = c_3 = 1$ et l'on obtient le repère normal employé par Cartan [1]. Dans ce cas, la relation (16) devient $2\mu - 1 = 0$ et les surfaces définies par (16) sont des surfaces R_0.

Réciproquement, si une surface est R_0, elle admet un faisceau de réseaux conjugués dont les courbes sont les extrémales d'un invariant de Bompiani. En effet, pour ces surfaces, la forme de Pfaff

$$\Omega = \omega_{11} - \omega_{22} - \frac{c_4}{2c_3} \omega_{02} \tag{17}$$

est une différentielle totale exacte $\Omega = du$, puisque sa différentielle extérieure est identiquement nulle si l'on tient compte des équations (1), (3) et de la relation (16).

L'équation (15) admet une intégrale de la forme $\sigma = ku$ ($k =$ const) qui définit un faisceau admettant comme réseau de base le réseau defini par la fonction u, pour laquelle les coefficients β_1, γ_1 prennent les valeurs $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = -\dfrac{\sigma c_4}{2c_3}$. Il s'ensuit que le réseau ainsi défini, que nous nommerons réseau R'_0, est formé par des extrémales de l'invariant de Bompiani φ_2.

Pour les valeurs (14), les équations (13) donnent

$$\beta'_2 = -b_2\sigma(\mu - \nu) , \tag{18}$$

donc la relation (12) est vérifiée.

Les réseaux (14) sont donc des réseaux isothermes-conjugués.

L'axe cuspidal (11) du faisceau trouvé coïncide avec la droite de Sullivan

$$[A_0, c_4A_1 + 4b_2c_3A_3] \, . \tag{19}$$

Réciproquement, si l'axe cuspidal associé à un réseau coïncide avec une des droites de Sullivan, le réseau est adhérent à une surface R_0, comme il résulte des relations

$$\frac{\gamma_1}{c_4} = \frac{-\beta_1}{0} = \frac{-2b_2\sigma}{4b_2c_3} \, . \tag{20}$$

5

Les surfaces R_0 sont caractérisées par l'existence d'un autre faisceau de réseaux conjugués.

En effet, si l'on cherche à déterminer les surfaces qui contiennent un réseau isotherme-conjugué dont l'axe cuspidal soit différent de la droite de Wilczynski $[A_0, A_3]$ et qui soit contenu dans un des plans déterminés par cette droite et par l'une des tangentes asymptotiques, par ex. le plan $[A_0, A_1, A_3]$, on est conduit aux relations

$$b_2(\mu - \nu)\, \sigma^2 + \beta_2'\sigma - \beta_1\gamma_1 = 0 \, , \quad \beta_1 = 0 \, . \tag{21}$$

En tenant compte de la dernière de ces relations, des équations (13) on déduit $\beta_2 = 0$, $\beta_2' = \frac{1}{2}a_3c_3\sigma K$, donc, les relations (21) deviennent $\beta_1 = 0$, $2b_2\mu - - a_3c_3 = 0$.

Seules les surfaces R_0 possèdent des réseaux isothermes-conjugués ayant l'axe cuspidal dans un des plans $[A_0, A_1, A_3]$, $[A_0, A_2, A_3]$ et ne coincidant pas avec la directrice de Wilczynski $[A_0, A_3]$.

Puisque γ_1 n'est soumis à aucune condition, l'équation (8) devient

$$d\sigma + \sigma(\omega_{22} - \omega_{11}) = \gamma_1\omega_{02}$$

et est en involution avec $s_1 = 1$.

Sur une surface R_0 il existe donc un ensemble infini de tels réseaux conjugués, que nous appellons réseaux R_0'' et qui forment une famille dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument.

Ainsi que nous l'avons répété, l'axe cuspidal ne doit pas se confondre avec la droite de Wilczynski $[A_0, A_3]$.

Les réseaux conjugués pour lesquels se réalise la coïncidence de ces deux droites sont situés sur les surfaces dont la forme asymptotique a une courbure nulle, ainsi que nous l'avons établi dans un autre travail.[2])

---

[2]) En cours de publication dans le Bulletin de l'Université „V. Babeş" de Cluj.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *E. Cartan*: Sur la déformation projective des surfaces. Annales de l'Ecole Normale Sup. (*3*), *37*, 1920, 259—356.

[2] *G. Fubini* et *Ed. Čech*: Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces. Paris 1931.

[3] *G. Bol*: Projektive Differentialgeometrie. Göttingen, I. Teil, 1950; II. Teil, 1954.

[4] *F. Marcus*: Une nouvelle caractérisation des réseaux et surfaces E de Cartan. Czechoslovak Mathematical Journal *7* (*82*), 1957, 308—313.

Резюме

ПОВЕРХНОСТИ R_0

ТИБЕРИУ МИХАИЛЕСКУ (Tiberiu Mihăilescu), Клюй, Румыния

(Поступило в редакцию 15/V 1958 г.)

В работе прежде всего припоминаются четыре известных характеристических свойства проективно изгибаемых поверхностей, принадлежащих классу R_0, одно из которых было открыто Джойо Канитани, а остальные Г. Болем. Далее приводятся без доказательства открытые автором дальнейшие два характеристических свойства поверхностей R_0. Автором подготовляется к печати работа, в которой даются доказательства по методу подвижного репера.

Целью настоящей работы является формулировка новых двух характеристических свойств поверхностей R_0.

Пользуясь методом подвижного репера и асимптотического репера (R_3) третьего класса, образованного асимптотическими касательными и прямыми Вильчинского, причем единичная точка остается неопределенной, автор рассматривает инвариантные дифференциальные формы третьего дифференциального порядка, связанные с рассматриваемым семейством реперов. Каждую можно выразить при помощи двух из них, которые называются основными инвариантами Бомпиани.

Эти два инварианта могут быть предметом вариационных проблем с заданными значениями на границе области.

Данная поверхность является поверхностью R_0 тогда и только тогда, если на ней существует связка сопряженных сетей, кривые которых являются экстремалями одного из инвариантов Бомпиани.

Эти сети, называемые сетями R_0', являются изотермо-сопряженными сетями, ребро возврата которых совпадает с одной из кривых Сюлливана.

Далее можно сформулировать следующую более общую теорему:

Данная поверхность является поверхностью R_0 *тогда и только тогда, если на ней существует изотермо-сопряженная сеть, ребро возврата которой, отличающееся от прямой Вильчинского, лежит в одной из плоскостей, определяемых прямой Вильчинского и одной из двух асимптотических касательных.*

На такой поверхности существует бесконечное количество таких сетей, называемых сетями R_0'' *и зависящих от одной функции одного переменного.*