František Zítek

К теории ординарных потоков

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 3, 448–459

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100315`

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

К ТЕОРИИ ОРДИНАРНЫХ ПОТОКОВ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

(Поступило в редакцию 25/III 1957 г.)

Первоначально целью этой работы являлось обобщение известной теоремы Королюка (см. [2] и [5]) для случая нестационарных входящих потоков систем массового обслуживания. Но кроме этого вводятся здесь понятия квазистационарности и k-ординарности ($k = 1, 2, 3, \ldots$) и показывается связь этих понятий с теорией стационарных, соотв., ординарных регулярных потоков. Дано тоже упрощенное представление функций $\chi_k(t)$ Хинчина (см. [3]).

1. Введение

На протяжении всей нашей работы мы будем пользоваться непрестанно понятиями, которые были введены в основных работах А. Я. Хинчина [2], [3] и [4]; здесь в случае надобности найдутся все определения и объяснения. Мы сохраним тоже, где это только будет возможно и полезно, все символы и обозначения, употребляемые Хинчиным.

Вся эта работа касается исключительно *финитных потоков без последействия*; это основное предположение мы делаем здесь раз навсегда и не будем уже повторять его в каждом отдельном случае. Кроме того, мы будем почти всегда предполагать, что изучаемые потоки регулярны, но так как мы вводим также понятие строго регулярного потока, то мы не ставим это предположение раз навсегда. Некоторые из полученных результатов невозможно сразу непосредственно обобщить для случая сингулярных потоков; этот случай требует особого изучения.

Из монографии [2] А. Я. Хинчина хорошо известна теорема Королюка, которая была уже дополнена теоремой 3 работы [5] для случая общих стационарных потоков. Эти теоремы показывают связь между ординарнностью потока и равенством $\mu = \lambda$ (μ — интенсивность и λ — параметр потока). В [3] ввел Хинчин понятие ведущей функции потока, которую мы будем обозначать через M, потому что эта функция соответствует интенсивности μ, сохраняя символ Λ для аналогичной функции, соответствующей параметру λ. Значение этих понятий выяснится в нашей теореме 1, которая является прямой аналогией теоремы 3 из [5] и — в области финитных потоков без последействия — тоже ее обобщением.

2. Несколько лемм

В этом параграфе мы докажем четыре леммы из теории интеграла Бэркилла (см. [1]), которые будут нам надобны в последующих рассуждениях. Все интегралы, выступающие в этом параграфе — интегралы Бэркилла. Если I — конечный интервал (на вещественной оси), то $|I|$ обозначает его длину.

Лемма 1. *Пусть I_0 — конечный интервал. Пусть $h(I)$ и $M(I)$ — две конечные, неотрицательные функции от интервала, определенные для $I \subset I_0$; пусть M аддитивна. Пусть $h(I) = o[M(I)]$ для $|I| \to 0$. Тогда для любого интервала $K \subset I_0$*

$$\int_K h(I) = 0 \,. \tag{2.1}$$

Доказательство. Так как h согласно нашим предположениям неотрицательна, то в силу 2.4 из [1] достаточно доказать, что

$$\overline{\int_K} h(I) = 0 \tag{2.2}$$

для любого $K \subset I_0$. Из предположений леммы вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для $I \subset I_0$ справедлива импликация

$$|I| < \delta \Rightarrow h(I) \leqq \varepsilon M(I) \,, \tag{2.3}$$

но, с другой стороны,

$$\overline{\int_K} h(I) = \overline{\lim} \sum_j h(I_j)$$

для $\sum_j I_j = K$, $\max_j |I_j| \to 0$. Теперь, если только $\max_j |I_j| < \delta$, то в силу (2.3)

$$\sum_j h(I_j) \leqq \varepsilon \sum_j M(I_j) = \varepsilon M(K) \,;$$

но так как ε произвольно мало, то отсюда следует и (2.2), ч. и т. д.

Замечание 1. Вместо аддитивности функции M достаточно предполагать существование конечного интеграла $\int_{I_0} M(I)$.

Лемма 2. *Пусть M — аддитивная и неотрицательная функция от интервала, определенная в некотором конечном интервале I_0. Для $I \subset I_0$ мы положим*

$$g(I) = 1 - \exp\left[-M(I)\right] . \tag{2.4}$$

Тогда для любого $K \subset I_0$ справедливо равенство

$$\int_K g(I) = \int_K M(I) = M(K)\,. \tag{2.5}$$

Доказательство. Если положим $h(I) = M(I) - g(I)$, то функция h будет удовлетворять всем условиям нашей леммы 1, значит, $\int_K h(I) = 0$. Но отсюда уже вытекает первое равенство в (2.5); второе равенство является тривиальным следствием аддитивности функции M.

Лемма 3. *Пусть в некотором конечном интервале I_0 даны неотрицательная функция от интервала $g(I)$ и положительная функция от интервала $f(I)$, удовлетворяющие условиям*

$$\int_{I_0} g(I) = 0 \tag{2.6}$$

и

$$\lim_{|I|\to 0} f(I) = 1 \quad \textit{равномерно в } I_0\,. \tag{2.7}$$

Тогда для любого $K \subset I_0$ и для функции p, определенной в I_0 как $p(I) = \dfrac{g(I)}{f(I)}$, будет справедливым равенство

$$\int_K p(I) = 0\,. \tag{2.8}$$

Доказательство. Ввиду неотрицательности функции p достаточно доказать, что

$$\overline{\int_K} p(I) = \overline{\lim} \sum p(I_j) = 0 \tag{2.9}$$

для $\max_j |I_j| \to 0$, $\Sigma I_j = K$. Однако, для достаточно малого $\delta > 0$ мы, с одной стороны, имеем

$$|I| < \delta \Rightarrow f(I) \geqq 1 - \varepsilon\,, \tag{2.10}$$

и — с другой стороны —

$$\max_j |I_j| < \delta \Rightarrow \sum g(I_j) < \varepsilon\,, \tag{2.11}$$

значит, для $\max_j |I_j| < \delta$

$$\sum_j p(I_j) = \sum \frac{g(I_j)}{f(I_j)} < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,. \tag{2.12}$$

При этом, очевидно, ε — произвольно малое, заранее выбранное, положительное число. Из (2.12) вытекает таким образом (2.9); это значит, что справедливо и утверждение нашей леммы.

Лемма 4. *Пусть в конечном интервале I_0 определены две неотрицательных функции от интервала f и g, удовлетворяющие условиям* (2.7) *и*

$$0 < f(I) \leqq 1\,. \tag{2.13}$$

Пусть существует конечный интеграл

$$\int\limits_K \frac{g(I)}{f(I)} < \infty \tag{2.14}$$

для любого интервала $K \subset I_0$. Тогда существует также интеграл от функции g, и справедливо равенство

$$\int\limits_K g(I) = \int\limits_K \frac{g(I)}{f(I)}\,. \tag{2.15}$$

Доказательство. Для достаточно малого $\delta > 0$ справедливо (2.10), так что для $\max\limits_j |I_j| < \delta$ будет

$$\sum_j g(I_j) \leqq \sum \frac{g(I_j)}{f(I_j)} \leqq \frac{1}{1-\varepsilon} \sum g(I_j)\,. \tag{2.16}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\overline{\int\limits_K} g(I) \leqq \frac{1}{1-\varepsilon} \underline{\int\limits_K} g(I)\,, \tag{2.17}$$

значит, интеграл от функции g существует и справедливо также (2.15), ч. и т. д.

3. Регулярные потоки

Пусть $x(t)$ — регулярный входящий поток с ведущей функцией $\mathrm{M}(t)$ и вероятностями

$$v_k(\tau, t) = \mathbf{P}\{x(t+\tau) - x(t) = k\}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

Пусть, как обыкновенно,

$$\mathbf{P}\{x(0) = 0\} = 1\,. \tag{3.2}$$

Обозначим, следуя Хинчину,

$$\psi_k(\tau, t) = \sum_{j=k}^{\infty} v_j(\tau, t)\,. \tag{3.3}$$

Пусть теперь $I_0 = \langle 0, T)$ — любой конечный интервал. В интервале I_0 определим функции от интервала $I = (\alpha, \beta)$:

$$M(I) = \mathrm{M}(\beta) - \mathrm{M}(\alpha)\,, \tag{3.4}$$

$$\lambda(I) = \psi_1(\beta - \alpha, \alpha)\,. \tag{3.5}$$

Замечание 2. В некоторых исключительных случаях мы сохраним один и тот же символ для данной точечной функции и для соответствующей функции от интервала. Эти небольшие непоследовательности появляются, однако, только исключительно и только там, где нет опасности, что натолкнемся на недоразумения.

Для $K \subset I_0$ положим

$$\Lambda(K) = \int_K \lambda(I) . \tag{3.6}$$

Интеграл (3.6) существует, так как $\lambda(I)$ — непрерывная функция от интервала, удовлетворяющая, как нетрудно убедиться, условию

$$\lambda(I_1 + I_2) \leqq \lambda(I_1) + \lambda(I_2) \tag{3.7}$$

для любых двух непересекающихся соседних интервалов $I_1, I_2 \subset I_0$. Кроме того, очевидно, $\lambda(I) \leqq M(I)$; это значит, что тоже

$$\Lambda(I) \leqq M(I) . \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что интеграл (3.6) конечен (см. [1], теорема 5.1). Λ является непрерывной и аддитивной функцией от интервала.

Мы назовем, следуя при этом [3], данный входящий поток ординарным, если для любого положительного ε найдется такое $\delta > 0$ что для $0 \leqq t < < t + \tau < t + \delta < T$

$$\psi_2(\tau, t) \leqq \varepsilon\psi_1(\tau, t) . \tag{3.9}$$

Тогда справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы данный регулярный поток $x(t)$ был ординарным, достаточно и необходимо, чтобы для любого $I \subseteq I_0$ имело место равенство*

$$\Lambda(I) = M(I) . \tag{3.10}$$

Доказательство. А. Пусть данный поток $x(t)$ ординарен. Тогда в силу формулы 7 работы [4] будет

$$\lambda(I) = 1 - \exp[- M(I)] , \tag{3.11}$$

но отсюда и из нашей леммы 2 следует уже (3.10).

Б. Пусть (3.10) имеет место. Для $I = (t, t + \tau)$ положим

$$f(I) = v_0(\tau, t) \tag{3.12}$$

и

$$g(I) = \psi_2(\tau, t) . \tag{3.13}$$

В силу лемм 7 и 8 работы [3] только что определенная функция f удовлетворяет условиям нашей леммы 3. Что касается функции g, то, очевидно,

$$\mathrm{M}(t + \tau) - \mathrm{M}(t) = \psi_1(\tau, t) + \psi_2(\tau, t) + \sum_{j=3}^{\infty} \psi_j(\tau, t) . \tag{3.14}$$

Отсюда и из (3.13) уже почти непосредственно вытекает неравенство

$$\bar{\int_K} g(I) \leqq \bar{\int} [M(I) - \lambda(I)] = 0\,, \tag{3.15}$$

так что функция g тоже удовлетворяет условиям нашей леммы 3. Мы имеем тогда, в силу этой леммы,

$$\bar{\int} \frac{g(I)}{f(I)} = 0\,. \tag{3.16}$$

Из (3.16) и из неравенства, полученного Хинчиным в [4], стр. 323, вытекает, что

$$\chi_k(\beta) - \chi_k(\alpha) = 0 \tag{3.17}$$

для $0 \leqq \alpha < \beta < T$, $k = 2, 3, \ldots$ Поток $x(t)$ является, согласно [4], пуассоновским, значит, он тоже ординарен, ч. т. д.

Из самого доказательства теоремы 1 следует, что справедлива также

Теорема 2. *Регулярный входящий поток* $x(t)$ *является ординарным тогда и только тогда, если для функции* g, *определенной по формуле* (3.13), *справедливо* (2.6).

4. Строго регулярные потоки

Определение. Условимся называть поток $x(t)$ строго регулярным, если его ведущая функция абсолютно непрерывна.

Абсолютно непрерывную ведущую функцию $\mathrm{M}(t)$ можно выразить в виде интеграла

$$\mathrm{M}(t) = \int_0^t \mu(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{4.1}$$

где $\mu(t)$ — конечная неотрицательная функция; ее обычно называют интенсивностью потока $x(t)$. Очевидно, что в этом случае соответствующая функция от интервала $M(I)$ тоже является абсолютно непрерывной, значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для $I_j \subset I_0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (где I_0, как обыкновенно, — наперед заданный конечный интервал) справедлива импликация

$$\sum_j |I_j| < \delta \Rightarrow \sum M(I_j) < \varepsilon\,. \tag{4.2}$$

Из общего неравенства (3.8) вытекает тогда и абсолютная непрерывность функции Λ; это значит, что почти всюду существует ее производная

$$l(t) = \lim_{I \to (t,t)} \frac{\Lambda(I)}{|I|}\,, \tag{4.3}$$

которая почти всюду равна производной

$$\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial\tau}\,\psi_1(\tau, t)\Big|_{\tau=0+} = \lim_{\tau\to 0+}\frac{\psi_1(\tau, t)}{\tau}\,. \tag{4.4}$$

Формула (4.4) определяет так называемое ,,мгновенное значение" параметра потока $x(t)$.

Если изучаемый строго регулярный поток ординарен, то, очевидно, из (3.10) вытекает

$$\mu(t) = l(t) \quad \textit{почти всюду}\ , \tag{4.5}$$

или

$$\mu(t) = \lambda(t) \quad \textit{почти всюду}\,. \tag{4.6}$$

Из равенства (4.6), соотв. (4.5), следует, с другой стороны, равенство (3.10), так что для строго регулярных потоков справедлива

теорема 3. *Строго регулярный поток $x(t)$ ординарен тогда и только тогда, если для почти всех $t \in I_0$ справедливо* (4.6), *значит,*

$$\lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}\,[\mathrm{M}(t+\tau) - \mathrm{M}(t)] = \lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}\,\psi_1(\tau, t)\,. \tag{4.7}$$

Стационарные потоки являются частным случаем строго регулярных потоков, так как в этом случае

$$\mathrm{M}(t) = \mu t\,, \quad 0 < \mu < \infty\,, \tag{4.8}$$

так что теорема 3 из [5] является — в области финитных потоков без последействия — следствием нашей теоремы 3.

5. k-ординарные потоки

Пусть k — целое положительное число.

Определение. Условимся называть данный регулярный поток $x(t)$ k-ординарным, если для любого конечного интервала K справедливо равенство

$$\int_K g_k(I) = 0\,, \tag{5.1}$$

где мы полагаем

$$g_k(I) = \psi_{k+1}(\tau, t) \tag{5.2}$$

для $I = (t, t+\tau)$.

В силу теоремы 2 совпадает понятие 1-ординарности с понятием ординарности в смысле Хинчина.

Пусть $x(t)$ — данный k-ординарный регулярный поток; для $I = (t, t + \tau)$ положим

$$b_j(I) = v_j(\tau, t)\ , \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.3}$$

и

$$B_j(K) = \int\limits_K b_j(I)\ , \quad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.4}$$

Интегралы (5.4) существуют; это вытекает из нашей леммы 4 и из леммы 10 работы [3].

Замечание 3. Было бы, конечно, возможно — и наверно более элегантно — доказать существование интегралов (5.4) прямо, без посредства леммы 4, но здесь мы доказали одновременно и равенство (2.15), в нашем случае конкретно

$$\chi_j(\beta) - \chi_j(\alpha) = B_j((\alpha, \beta))\ ; \tag{5.5}$$

значит, функции χ_j Хинчина можно выразить более простым способом при помощи интегралов Бэркилла от вероятностей v_j.

Для k-ординарного потока будет, конечно,

$$M(I) = \sum_{j=1}^{k} jB_j(I) \tag{5.6}$$

и

$$\Lambda(I) = \sum_{j=1}^{k} B_j(I)\ . \tag{5.7}$$

Рассмотрим теперь — рядом с данным k-ординарным потоком $x(t)$ — k взаимно независимых ординарных регулярных потоков $x_1(t), x_2(t), \ldots, \ldots, x_k(t)$, ведущие функции которых удовлетворяют условиям

$$M_j(I) = B_j(I) \tag{5.8}$$

(функции B_j относятся к данному k-ординарному потоку x), и пусть

$$y(t) = \sum_{j=1}^{k} jx_j(t)\ . \tag{5.9}$$

Мы получили таким образом новый входящий поток $y(t)$, который, очевидно, тоже является регулярным, финитным потоком без последействия. Поток $y(t)$ эквивалентен *в смысле Бернулли* нашему первоначальному потоку $x(t)$; это значит, что у него те же самые законы распределения вероятностей. Любой k-ординарный регулярный поток можно выразить в форме линейной комбинации (5.9) 1-ординарных потоков. (Этот результат можно обобщить, повидимому, также для случая потоков, которые не являются k-ординарными для никакого конечного целого положительного k.) Этот факт снова подчеркивает значение ординарных потоков в теории регулярных входящих потоков.

6. Преобразования времени

Пусть $x(t)$ — регулярный поток, пусть $f(t)$ — неубывающая непрерывная вещественная функция, определенная для $t \geqq 0$ и удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Положим

$$y(t) = x[f(t)] . \tag{6.1}$$

Здесь мы получили новый входящий поток $y(t)$, который, конечно, опять является финитным и без последействия. Так как для $h \to 0$

$$M^{(y)}(t + h) - M^{(y)}(t) = M^{(x)}[f(t + h)] - M^{(x)}[f(t)] \to 0 , \tag{6.2}$$

то $y(t)$ тоже является регулярным. Если $x(t)$ ординарен, то $y(t)$ также ординарен, так как для достаточно малого h приращение $\Delta_h f(t) = f(t + h) - f(t)$ также мало, значит,

$$\psi_2^{(y)}(h, t) = \psi_2^{(x)}[\Delta_h f(t), f(t)] \leqq \varepsilon\psi_1^{(x)}[\Delta_h f(t), f(t)] = \varepsilon\psi_1^{(y)}(h, t) . \tag{6.3}$$

Предположим теперь, что данный поток $x(t)$ стационарен и что его интенсивность $\mu = 1$. Тогда, конечно, $M^{(x)}(t) = t$, значит, $M^{(y)}(t) = f(t)$ и

$$\Lambda^{(y)}(\langle 0, t)) = \int_{\langle 0,t)} \psi_1^{(y)} = f(t) . \tag{6.4}$$

Отсюда следует, что любой регулярный ординарный поток $z(t)$ с ведущей $M(t)$ можно рассматривать — хотя только в смысле Бернулли — как преобразование

$$z(t) = x[M(t)] \tag{6.5}$$

простейшего потока с интенсивностью $\mu = 1$.

Определение. Условимся называть регулярный поток $z(t)$ квазистационарным, если существует такая неубывающая непрерывная функция $f(t)$, $f(0) = 0$, что (опять только в смысле Бернулли) —

$$z(t) = x[f(t)] , \tag{6.6}$$

где $x(t)$ — стационарный поток с интенсивностью $\mu = 1$.

В силу очевидного равенства

$$M^{(z)}(t) = M^{(x)}[f(t)] = f(t) \tag{6.7}$$

функция f из (6.6) равна — если она существует — ведущей функции потока $z(t)$. Результаты, полученные в начале этого параграфа, можно сформулировать следующим образом:

Теорема 4. *Регулярный ординарный поток квазистационарен.*

Для доказательства теоремы 4 достаточно заметить, что ординарный поток является пуассоновским, так что все распределения вероятностей однозначно определены уже самой ведущей функцией потока (см. [3] и [4]).

Попробуем теперь охарактеризовать квазистационарные регулярные потоки вообще. Чтобы упростить наши рассуждения, мы ограничимся только случаем k-ординарных потоков. Можно предполагать, что дальнейшее обобщение (на случай общих регулярных квазистационарных потоков), произошло бы уже без больших трудностей.

Мы будем пользоваться здесь опять функциями (5.4) или соответствующими точечными функциями

$$A_j(t) = B_j(\langle 0, t)) = \int_{\langle 0,t)} b_j(I) . \tag{6.8}$$

Пусть дан k-ординарный квазистационарный поток $z(t)$. Так как $z(t)$ — квазистационарный поток, то его можно выразить в форме

$$z(t) = y[f(t)] , \tag{6.9}$$

где $y(t)$ — стационарный поток с ведущей функцией $\mathrm{M}^{(y)}(t) = t$ и $f(t)$ — ведущая функция потока $z(t)$. Нетрудно убедиться в том, что $y(t)$ тоже является k-ординарным, так что — в силу результатов § 5 — его можно выразить как линейную комбинацию взаимно независимых простейших потоков

$$y(t) = \sum_{j=1}^{k} j x_j(t) . \tag{6.10}$$

Потоки $x_j(t)$ имеют интенсивности $\mu_j \geqq 0$, удовлетворяющие соотношению

$$\sum_{j=1}^{k} j\mu_j = 1 . \tag{6.11}$$

Тогда

$$A_j^{(z)}(t) = A_j^{(y)}[f(t)] = \mu_j f(t) . \tag{6.12}$$

Но, с другой стороны, поток $z(t)$ k-ординарен, так что его можно выразить в форме (5.9) как

$$z(t) = \sum_{j=1}^{k} j w_j(t) \tag{6.13}$$

где $w_j(t)$ — независимые ординарные потоки. Из теоремы 4 следует, что потоки $w_j(t)$ квазистационарны, значит, и выразимы как

$$w_j(t) = u_j[f_j(t)] , \tag{6.14}$$

где $u_j(t)$ — простейшие потоки. Опять-таки

$$f_j(t) = A_1^{(w_j)}(t) = A_j^{(z)}(t) . \tag{6.15}$$

Из (6.15) и (6.12) следует, что

$$f_j(t) = \mu_j f(t) \tag{6.16}$$

так что справедлива

Теорема 5. *Регулярный k-ординарный поток $x(t)$ квазистационарен тогда и только тогда, если для $j = 1, 2, \ldots, k$, $t \geqq 0$, имеет место равенство*

$$A_j(t) = \mu_j \mathrm{M}^{(x)}(t) , \tag{6.17}$$

где $A_j(t)$ — *функции, определенные в* (5.4) *и* (6.8), $\mathrm{M}^{(x)}(t)$ — *ведущая функция потока* $x(t)$ *и* μ_j — *константы, удовлетворяющие* (6.11).

Доказательство. Необходимость условия (6.17) вытекает из предыдущих рассуждений, а именно из (6.12), (6.15) и (6.16); достаточность очевидна.

Замечание 4. Из (6.17) следует между прочим интересное соотношение

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_j = \frac{\Lambda(I)}{M(I)} = \text{const} \leqq 1 . \tag{6.18}$$

Примечание. Уже после отдачи в набор этой работы я познакомился со статьей: A. Prékopa: On Poisson and composed Poisson stochastic set functions; Studia Math. *16* (1957), 142—155, однако она к сожалению уже не смогла влиять на содержание настоящей работы. В ней исследуются родственные проблемы и она существенным образом дополняет некоторые результаты приведенные в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. C. Burkill:* Functions of intervals; Proceedings London Math. Soc., II. ser., *22* (1924), 275–310.

[2] *А. Я. Хинчин:* Математические методы теории массового обслуживания; Труды Мат. Инст. им. В. А. Стеклова, *49* (1955), 1—122.

[3] *А. Я. Хинчин:* Потоки случайных событий без последействия; Теория вероятностей, *1* (1956), 3—18.

[4] *А. Я. Хинчин:* О пуассоновских потоках случайных событий; Теория вероятностей, *1* (1956), 320—327.

[5] *Ф. Зитэк:* Заметка к одной теореме Королюка; Чехосл. Мат. Журнал, *7* (*82*), 1957, 318—319.

Zusammenfassung

ZUR THEORIE DER ORDINÄREN NACHWIRKUNGSFREIEN FOLGEN

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Eingelangt am 25. März 1957)

Anschliessend an die Arbeiten von A. Khintchine wird in diesem Artikel die Theorie der nachwirkungsfreien Folgen weitergepflegt. In der ganzen Arbeit setzen wir voraus, dass die Folgen *finit* (*endlich*) und *nachwirkungsfrei* sind.

Nachdem im § 2 einige Hilfssätze aus der Theorie des Burkill'schen Integrals bewiesen werden, wird im § 3 zuerst der bekannte Satz von Korolyuk (s. [2]

und [5]) mit Hilfe der Theorie des Burkill'schen Integrals für den Fall einer allgemeinen (also auch nichtstazionären) Folge erweitert. Es sei $I \subset I_0 = \langle 0, T)$ ein endliches Intervall, $M(I)$ sei dann die mathematische Erwartung der Anzahl der in der Zeitstrecke I eintretenden Ereignisse und $\lambda(I)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Anzahl nicht Null ist; Λ sei durch (3.6) definiert.

Satz 1. *Für die Ordinarität einer regulären Folge $x(t)$ ist die Gleichheit* (3.10) *notwendig und hinreichend.*

Satz 2. *Für die Ordinarität einer regulären Folge $x(t)$ ist es notwendig und hinreichend, dass (für jedes endliche Interval K) $\int_K g(I) = 0$, wo $g(I)$ die Wahrscheinlichkeit ist dafür, dass in der Zeitstrecke I mindestens zwei Ereignisse stattfinden.*

Im vierten Absatze werden die *streng-regulären* Folgen definiert: Es sind solche Folgen, deren Funktionen M absolut stetig sind. In diesem Falle haben M und Λ fast überall endliche Abgeleiteten $\mu(t)$ und $\lambda(t)$ und es gilt der

Satz 3. *Eine streng-reguläre Folge $x(t)$ ist dann und nur dann ordinär, wenn fast überall $\mu(t) = \lambda(t)$.*

Der Satz 3 von der Arbeit [5] ist — im Bereiche der finiten nachwirkungsfreien Folgen — ein Spezialfall des eben ausgesprochenen Satzes.

Im fünften Absatze wird der Begriff der k-Ordinarität eingeführt, der eine Verallgemeinerung des Begriffes der gewöhnlichen Ordinarität ist.

Im letzten Absatze werden endlich stetige Zeittransformationen angesehen und der Begriff der Quasistazionarität eingeführt. Es wird bewiesen, dass *jede reguläre ordinäre Folge auch quasistazionär ist* (Satz 4) und dass *die k-ordinären quasistazionären Folgen durch* (6.17) *charakterisiert werden können*, wo $\mathrm{M}(t)$ die mathematische Erwartung der Anzahl der in der Zeitstrecke $\langle 0, t)$ eintretenden Ereignisse ist und $A_j(t)$ das Burkill'sche Integral der Wahrscheinlichkeit, dass diese Anzahl gleich j ist, darstellt; μ_j sind Konstanten, welche (6.11) erfüllen (Satz 5).

Der fünfte Absatz enthält ausserdem noch ein wichtiges Nebenergebnis: Es gelang uns nämlich die Funktionen $\chi_k(t)$ von A. Khintchine (s. [3]) in einer einfacheren Form auszudrücken, und zwar als Burkill'sche Integrale der Wahrscheinlichkeiten $v_k(\tau, t)$, also

$$\chi_k(t) = \int_{\langle 0,t)} v_k(I)\,, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

B e m e r k u n g. Erst nach dem Druckfertigmachen dieser Arbeit erhielt ich Kenntnis von der Abhandlung „On Poisson and composed Poisson stochastic set functions“ (Studia Mathem. *16* (1957), 142-155) von A. Prékopa, welche mit der vorliegenden Arbeit sehr enge Berührungspunkte aufweist, jedoch leider hierauf ohne Einfluss geblieben ist.