Jan Mařík

Eine Bemerkung über elliptische Differentialgleichungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 2, 246–250

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100298`

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

EINE BEMERKUNG ÜBER ELLIPTISCHE DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN

JAN MAŘÍK, Praha

(Eingelangt am 1. Juli 1957)

Es wird gezeigt, dass für eine gewisse Klasse von Operatoren L die Lösung u der Gleichung $Lu = 0$ durch die Randwerte eindeutig bestimmt ist; für u werden Abschätzungen gefunden. Zum Schluss wird eine Verallgemeinerung eines Satzes von Morgenstern bewiesen.

Bezeichnungen. Das Wort „Zahl" (resp. „Funktion") bedeutet immer eine endliche reelle Zahl (resp. eine endliche reelle Funktion). G ist eine nichtleere beschränkte offene Untermenge von E_m; H ist die Grenze von G, $\bar{G} = G \cup H$. $\mathfrak{F}_0$ (resp. $\mathfrak{F}$) ist das System aller Funktionen auf G (resp. das System aller auf $\bar{G}$ stetigen Funktionen), deren sämtliche partielle Ableitungen 2. Ordnung auf G stetig sind. Griechische Buchstaben bedeuten immer Zahlen; die Buchstaben a, b, c, f (resp. u, v), event. mit Indexen, bedeuten Funktionen auf G (resp. Elemente von $\mathfrak{F}$).

Ist F eine Funktion auf der Menge M und ist $M_0 \subset M$, dann verstehen wir unter der Aussage „$F > 0$ auf M_0", dass $F(x) > 0$ für jedes $x \in M_0$ ist. Sind F_1, F_2 Funktionen auf M, so ist klar, was z. B. „$F_1 F_2 \geqq 1$ auf M_0" usw. bedeutet. Wenn es aus dem Zusammenhang zu sehen ist, welches M_0 gemeint wird, so schreiben wir einfach „$F > 0$" usw.

Für $x = [x_1, \ldots, x_m] \in E_m$ setzen wir $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$. Es gilt $\left|\sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right| \leqq |x|\,|y|$.

Es sei $\mathcal{J}$ das System aller Operatoren

$$J = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1}$$

mit folgender Eigenschaft: Wenn $f \in \mathfrak{F}_0$, $f \geqq 0$ ist und wenn es ein $x_0 \in G$ mit $f(x_0) = 0$ gibt, dann gilt $Jf(x_0) \geqq 0$. Man kann beweisen, dass der Operator (1) diese Eigenschaft dann und nur dann hat, wenn für jedes $x \in G$ und alle $\tau_1, \ldots, \tau_m$ die Beziehung $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\, \tau_i \tau_j \geqq 0$ besteht. Wenn also der Operator (1) zu $\mathcal{J}$ gehört, so haben wir

$$a_{ii} \geqq 0 \,, \quad a_{ij}^2 \leqq a_{ii} a_{jj} \,.$$

Es sei weiter $\mathscr{L}$ das System aller Operatoren $L = c - J$, wo $J \in \mathscr{J}$, für welche gilt:

$$(u \geqq 0 \text{ auf } H\,, \quad Lu \geqq 0 \text{ auf } G) \Rightarrow u \geqq 0 \text{ auf } G\,.$$

Ist $L \in \mathscr{L}$, $Lu_1 = Lu_2$ auf G und $u_1 = u_2$ auf H, so gilt offenbar $u_1 = u_2$ auf $\bar{G}$.

Lemma 1. *Es sei $J \in \mathscr{J}$, $f \in \mathfrak{F}_0$, $f \geqq 0$, $cf > Jf$. Dann ist $f > 0$.*

Beweis. Wäre $f(x_0) = 0$, so hätten wir $0 = c(x_0)\,f(x_0) > Jf(x_0) \geqq 0$, was unmöglich ist.

Satz 1. *Es sei $J \in \mathscr{J}$, $L = c - J$, $v > 0$ auf H, $v \geqq 0$ auf G, $Lv > 0$ auf G. Dann ist $L \in \mathscr{L}$.*

Beweis. Sei $u \geqq 0$ auf H, $Lu \geqq 0$ auf G. Für jedes $\tau \geqq 0$ setzen wir $F(\tau) = \min\limits_{x \in \bar{G}} (u(x) + \tau\, v(x))$. Wir haben zu zeigen, dass $F(0) \geqq 0$. Es sei also $F(0) < 0$. Nach Lemma 1 ist $v > 0$ auf $\bar{G}$; daraus folgt leicht, dass $F(\tau) > 0$ für grosse τ ist. Da F stetig ist, gibt es ein $\tau_0 > 0$ mit $F(\tau_0) = 0$. Setzen wir noch $w = u + \tau_0 v$, so folgt aus den Beziehungen $Lw > 0$, $w \geqq 0$ nach Lemma 1, dass $w > 0$ auf G ist. Da aber $w \geqq \tau_0 v > 0$ auf H ist, haben wir $0 < \min\limits_{x \in \bar{G}} w(x) = F(\tau_0)$; durch diesen Widerspruch ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 1. Ist $v_1 \geqq 0$, $Lv_1 > 0$, $Lv_2 \geqq 0$ auf G, $v_2 > 0$ auf H, so erfüllt die Funktion $v = \mu v_1 + v_2$ bei hinreichend grossem μ unsere Voraussetzungen.

Bemerkung 2. Ist $L \in \mathscr{L}$, $u \geqq 0$ auf H, $Lu > 0$ auf G, so ist $u > 0$ auf G.

Satz 2. *Ist $J \in \mathscr{J}$, $c > 0$, so hat man $c - J \in \mathscr{L}$.*

Beweis. Im Satz 1 setzen wir $v = 1$.

Satz 3. *Es sei $s \in E_m$ und $|x - s| < \varrho$ für jedes $x \in \bar{G}$. Der Operator J sei durch* (1) *definiert; wir schreiben $a = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ii}$, $b = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} b_k^2}$ und setzen voraus, dass für jedes $x \in G$ die Beziehung*

$$2a(x) + c(x)\,.\,(\varrho^2 - |x - s|^2) > 2\varrho\, b(x) \tag{2}$$

besteht. Dann gilt $c - J \in \mathscr{L}$.

Beweis. Die Funktion $v(x) = \varrho^2 - |x - s|^2$ erfüllt die Relationen $Jv(x) = - \sum\limits_{i=1}^{m} 2a_{ii}(x) - 2 \sum\limits_{k=1}^{m} b_k(x)\,.\,(x_k - s_k) \leqq - 2a(x) + 2\varrho\, b(x)$ $(x \in G)$, $cv - Jv \geqq cv + 2a - 2\varrho b > 0$ (laut (2)) und $v(x) > 0$ $(x \in \bar{G})$. Unsere Behauptung folgt nun unmittelbar aus Satz 1.

Beispiel. Ist $c(x) > - \dfrac{2m}{\varrho^2 - |x - s|^2}$ $(x \in G)$, so hat man $c - \Delta \in \mathscr{L}$ $\left(\Delta = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$.

Satz 4. *Es sei $J \in \mathscr{J}$, $c_1 v > Jv$, $c_1 \leqq c_2$ auf G, $v > 0$ auf $\bar{G}$, $L_i = c_i - J$ $(i = 1, 2)$, $|L_2 u_2| \leqq L_1 u_1$ auf G, $|u_2| \leqq u_1$ auf H. Dann gilt $|u_2| \leqq u_1$ auf $\bar{G}$.*

Beweis. Nach Satz 1 haben wir $L_i \in \mathscr{L}$ $(i = 1, 2)$; daraus folgt $u_1 \geqq 0$, $L_2 u_1 \geqq L_1 u_1 \geqq L_2 u_2$, $L_2(u_1 - u_2) \geqq 0$. Da $u_1 - u_2 \geqq 0$ auf H ist, gilt $u_1 \geqq u_2$ auf $\bar{G}$. Ähnlich kann man die Ungleichung $u_1 \geqq - u_2$ beweisen.

Satz 5. *Es sei $J \in \mathscr{J}$, $- J \in \mathscr{L}$, $Ju \leqq 0$. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in H$ mit $u(x_0) \leqq u(x)$ $(x \in \bar{G})$.*

Beweis. Wir wählen den Punkt $x_0 \in H$ derart, dass $u(x_0) = \alpha = \min\limits_{x \in H} u(x)$, und setzen $v = u - \alpha$. Aus den Beziehungen $v \geqq 0$ auf H, $- Jv = - Ju \geqq 0$ auf G folgt $v \geqq 0$, d. h. $u \geqq \alpha$ auf $\bar{G}$.

Bemerkung. Ist $\beta \geqq 0$, $L = c - J$, $J \in \mathscr{J}$, $L \in \mathscr{L}$, $c \geqq 0$ (resp. $c \leqq 0$), $Lu \leqq 0$ (resp. $Lu \geqq 0$) auf G, $u \leqq \beta$ auf H (resp. $u \geqq \beta$ auf H), so ist $u \leqq \beta$ (resp. $u \geqq \beta$) auf $\bar{G}$.

Satz 6. *Es sei $L \in \mathscr{L}$, $\min\limits_{x \in H} v(x) = \varepsilon > 0$, $\inf\limits_{x \in G} Lv(x) = \eta > 0$. Wenn die Funktion u den Ungleichungen $|Lu| \leqq \mu$ auf G, $|u| \leqq \delta$ auf H genügt, so gilt $|u| \leqq v \,.\, \max\,(\delta\varepsilon^{-1}, \mu\eta^{-1})$ auf $\bar{G}$.*

Beweis. Setzen wir $\beta = \max\,(\delta\varepsilon^{-1}, \mu\eta^{-1})$, so ist $u \leqq \beta v$ auf H, $Lu \leqq \beta Lv$ auf G. Da $L \in \mathscr{L}$, haben wir $u \leqq \beta v$ (auf $\bar{G}$). Desgleichen gilt $- u \leqq \beta v$.

Bemerkung. Ist $L \in \mathscr{L}$, $v \geqq \varepsilon > 0$ auf H, $|u| \leqq \delta$ auf H und $Lu = 0 \leqq Lv$ auf G, so gilt $|u| \leqq v \,.\, \delta\varepsilon^{-1}$ auf $\bar{G}$.

Satz 7. *Es sei $J \in \mathscr{J}$, $v > 0$ auf $\bar{G}$, $- Jv \geqq \eta > 0$ auf G,* $\liminf\limits_{n \to \infty} (\inf\limits_{x \in G} c_n(x)) \geqq$ $\geqq 0$, *$u_n(x) \to 0$ gleichmässig auf H, $c_n u_n(x) - Ju_n(x) \to 0$ gleichmässig auf G. Dann gilt $u_n(x) \to 0$ gleichmässig auf $\bar{G}$.*

Beweis. Ist n gross genug, so hat man $c_n v - Jv \geqq \frac{1}{2}\eta$. Jetzt machen wir von Satz 1 und 6 Gebrauch.

Satz 8. *Wir setzen voraus, dass $J \in \mathscr{J}$ und dass f_0 eine beschränkte Funktion ist. Es sei $c_0 v - Jv \geqq \eta > 0$ auf G, $v > 0$ auf $\bar{G}$, $c_n(x) \to c_0(x)$, $f_n(x) \to f_0(x)$ gleichmässig auf G, $u_n(x) \to u_0(x)$ gleichmässig auf H und $c_n u_n = Ju_n + f_n$ auf G $(n = 0, 1, \ldots)$. Dann gilt $u_n(x) \to u_0(x)$ gleichmässig auf $\bar{G}$.*

Beweis. Für grosse n ist $c_n v - Jv \geqq \frac{1}{2}\eta$; nach Satz 6 ist die Folge von Funktionen u_n beschränkt. Weiter gilt $c_0(u_0 - u_n) = J(u_0 - u_n) + f_0 - f_n +$ $+ (c_n - c_0)\, u_n$. Eine nochmalige Anwendung des Satzes 6 zeigt, dass $u_n(x) \to$ $\to u_0(x)$ gleichmässig auf $\bar{G}$ gilt.

Lemma 2. *Es sei $s \in E_m$, $G = E[x; |x - s| < \varrho]$. Wir definieren den Operator $J \in \mathscr{J}$ durch die Formel (1) und setzen $a = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ii}$, $b = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} b_k^2}$, $L = 1 - J$. Wenn $a \leqq \alpha$, $b \leqq \beta$ ist und wenn die Funktion u den Ungleichungen $|u| \leqq \gamma$ auf H, $|Lu| \leqq \delta$ auf G genügt, dann gilt*

$$|u(s)| \leqq 2\gamma(\alpha\varrho^{-2} + \beta\varrho^{-1}) + \delta\,. \tag{3}$$

Beweis. Wir setzen $p(x) = |x - s|^2$, $v = \gamma\varrho^{-2}(p + 2\alpha + 2\beta\varrho) + \delta$. Es ist $Lv(x) = v(x) - \gamma\varrho^{-2}Jp(x) = v(x) - \gamma\varrho^{-2}(2a(x) + 2\sum_{k=1}^{m} b_k(x)(x_k - s_k)) \geqq v(x) - \gamma\varrho^{-2}(2\alpha + 2\varrho\beta) = \gamma\varrho^{-2}p(x) + \delta \geqq \delta \geqq Lu(x)$ $(x \in G)$, $v \geqq \gamma\varrho^{-2}p = \gamma \geqq u|$ auf H; da (nach Satz 2) $L \in \mathscr{L}$ ist, so hat man $v \geqq u$, insbesondere also $v(s) \geqq u(s)$. Ähnlich kann man zeigen, dass $v(s) \geqq -u(s)$; daraus folgt unmittelbar die Beziehung (3).

Satz 9. *Es sei* $J_n = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^{(n)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_k} \in \mathscr{J}$, $L_n = 1 - J_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; f *sei stetig (auf* G*). Die Folge von Funktionen* $u_1, u_2, \ldots$ *(resp.* $L_1u_1, L_2u_2, \ldots$*) sei auf der Menge* H *(resp.* G*) beschränkt; auf jeder kompakten Teilmenge von* G *gelte gleichmässig* $\lim_{n\to\infty} a_{ii}^{(n)}(x) = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_i^{(n)}(x) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\lim_{n\to\infty} L_nu_n(x) = f(x)$. *Dann gilt auch* $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = f(x)$ *gleichmässig auf jeder kompakten Teilmenge von* G.

Beweis. Es sei D eine nichtleere kompakte Untermenge von G; ε sei positiv. Wir bilden eine offene Menge U, die D umfasst und samt ihrer Grenze in G liegt. Weiter können wir eine Funktion $f_0 \in \mathfrak{F}_0$ finden, die für jedes $x \in U$ die Ungleichung $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$ erfüllt. (Nach dem Satz von Weierstrass existiert sogar ein solches Polynom f_0.) Jetzt setzen wir $g_n(x) = u_n(x) - f_0(x)$ $(x \in G)$. Die Gleichheit $L_ng_n = L_nu_n - f_0 + J_nf_0$ hat zur Folge, dass $L_ng_n(x) \to f(x) - f_0(x)$ gleichmässig auf U gilt. Wenn wir also $\lambda_n = \sup_{x\in U} | L_ng_n(x) - f(x) + f_0(x)$ setzen, so ist $\lambda_n \to 0$ und

$$|L_ng_n(x)| < \varepsilon + \lambda_n \quad (x \in U,\ n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{4}$$

Es gibt ein μ derart, dass $|u_n(x)| \leqq \mu$ $(x \in H)$, $|L_n u_n(x)| \leqq \mu$ $(x \in G)$ für alle n ist. Nach Satz 6 (wo $v = 1$ gesetzt wird) hat man $|u_n(x)| \leqq \mu$ für alle n und alle $x \in G$. Da auch $|f| \leqq \mu$ ist, bekommt man die Abschätzung

$$|g_n(x)| \leqq |u_n(x)| + |f(x)| + |f(x) - f_0(x)| < 2\mu + \varepsilon \quad (x \in U)\,. \tag{5}$$

Wir schreiben noch $a_n = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}^{(n)}$, $b_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (b_i^{(n)})^2}$, $\alpha_n = \sup_{x\in U} a_n(x)$, $\beta_n = \sup_{x\in U} b_n(x)$; die Entfernung der Menge D von der Grenze der Menge U bezeichnen wir mit ϱ. Laut (3), (4), (5) haben wir dann

$$|g_n(x)| \leqq 2(2\mu + \varepsilon)(\alpha_n\varrho^{-2} + \beta_n\varrho^{-1}) + \varepsilon + \lambda_n \quad (x \in D)\,. \tag{6}$$

Es existiert also ein n_0 derart, dass die Ungleichung $|g_n| < 2\varepsilon$ und folglich $|u_n - f| \leqq |g_n| + |f - f_0| < 3\varepsilon$ auf der Menge D für jedes $n > n_0$ gilt.

Bemerkung 1. Wenn $f \in \mathfrak{F}_0$ ist, so können wir natürlich $f_0 = f$ setzen; dann ist $g_n = u_n - f$. Setzen wir noch $\sigma_n = \sup_{x\in U} |L_nu_n(x) - f(x)|$, $\tau_n = \sup_{x\in U} |J_nf(x)|$, so ist $\lambda_n \leqq \sigma_n + \tau_n$ und die Beziehung (6), wo wir jetzt $\varepsilon = 0$ schreiben können, liefert eine effektive (von den Mengen D und U abhängige) Abschätzung für die Schnelligkeit der Konvergenz.

Bemerkung 2. Der Satz 9 ist eine Verallgemeinerung des Satzes 4 aus [1] und des Hauptresultates aus [2].

LITERATUR

[1] *D. Morgenstern:* Singuläre Störungstheorie partieller Differentialgleichungen, Journ. of Rat. Mech. and Anal., vol. *5* (1956), 203—216.

[2] *M. Zlámal:* Über die erste Randwertaufgabe für eine singulär perturbierte elliptische Differentialgleichung, Чех. мат. ж., *7* (*82*), 1957, 413—417.

Резюме

ЗАМЕТКА ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

ЯН МАРЖИК (Jan Mařík), Прага

(Поступило в редакцию 1/VII 1957 г.)

Пусть G — непустое ограниченное открытое подмножество пространства E_m; пусть H — граница G (значит, $\bar{G} = G \cup H$). Буквы u, v обозначают функции, непрерывные на $\bar{G}$ и обладающие на G непрерывными производными 2-ого порядка. Если мы скажем, напр., „$u > 0$ на G", то подразумеется, что $u(x) > 0$ для всякого $x \in G$.

Далее, пусть $\mathscr{J}$ — система всех операторов J вида

$$J = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

где a_{ij} — функции на множестве G такие, что $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) \tau_i \tau_j$ для всякого $x \in G$ представляет собой неотрицательную функцию переменных $\tau_1, \ldots, \tau_m$, и где $b_1, \ldots, b_m$ — произвольные функции на G. Пусть, наконец, $\mathscr{L}$ — система всех операторов L вида $L = c - J$ (c — функция на G), для которых справедлива импликация ($u \geqq 0$ на H, $Lu \geqq 0$ на G) $\Rightarrow u \geqq 0$ на G.

Теорема 1. *Если $J \in \mathscr{J}$, $L = c - J$, $v > 0$ на $\bar{G}$, $Lv > 0$ на G, то $L \in \mathscr{L}$.*

Теоремы 2 и 3 показывают, как для некоторых операторов можно найти функцию v так, чтобы выполнялись предположения теоремы 1.

Теоремы 4—6 представляют собой оценки решения u уравнения $Lu = f$, где $L \in \mathscr{L}$. Теоремы 7, 8 и 9 показывают, что при некоторых условиях решение u мало изменяется при малом изменении оператора L, функции f и значений функции u на множестве H.