Czechoslovak Mathematical Journal

Zdeněk Hustý

Колебательные свойства однородного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 1, 62–75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100277

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ЗДЕНЕК ГУСТЫ (Zdeněk Hustý), Брно

(Поступило в редакцию 11/XII 1956 г.)

В своей работе [3] Марко Швец доказывает некоторые колебательные свойства интегралов ондородного линейного дифференциального уравнения 4-го порядка, относительно которого делается существенное предположение (E): каждое решение имеет не более одного кратного корня. Настоящая работа примыкает к результатам М. Швеца, и в ней приводятся некоторые колебательные свойства уравнения (1,1) без предположения (E).

1

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$w'''' + 4a_3w''' + 6a_2w'' + 4a_1w' + a_0w = 0\,, \tag{1,1}$$

где a_3''', a_2'', a_1', a_0 — непрерывные в интервале $J \equiv \langle \xi, \infty)$ функции.

При помощи преобразования

$$w \doteq e^{-\int a_3 \mathrm{d}x}\, y$$

можно (1,1) привести к виду

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\, y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0\,, \tag{1,2}$$

где ω (ω_1) является инвариантом (семиинвариантом) уравнения (1,1), $A = \frac{3}{5}(a_2 - a_3^2 - a_3')$, см. [9]. Функции ω, ω_1, A'' непрерывны в интервале J.

В случае $\omega \equiv 0$ для всех $x \in J$ уравнение

$$y'''' + (10Ay')' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\, y = 0 \tag{1,3}$$

является самосопряженным уравнением. Уравнение

$$y'''' + (10Ay')' + 3(3A^2 + A'')\, y = 0 \tag{1,4}$$

является итерированным, и его фундаментальная система образована функциями u^3, u^2v, uv^2, v^3, если u, v — линейно независимые решения дифференциального уравнения

$$u'' + Au = 0 ; \tag{1,5}$$

см., напр. [10].

Заметим еще, что функции u^2, uv, v^2 образуют фундаментальную систему решений самосопряженного дифференциального уравнения 3-го порядка

$$Z''' + 4AZ' + 2A'Z = 0 . \tag{1,6}$$

Лемма 1. *Пусть $u(x)$, $v(x)$ — независимые интегралы уравнения* (1,5) *и пусть x, t — произвольные числа из интервала J.*

Уравнение

$$G(x, t) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix} = 0$$

справедливо тогда и только тогда, если x есть корень кокого-либо решения уравнения (1,5), *а t есть корень его производной. См. О. Борувка* [1], *стр.* 204.

Замечание 1,1. Если в уравнении (1,5) $A \leqq 0$ для всех $x \in J$, то $G(x, t) \neq 0$. Напр., для $W[u, v] > 0$ будет $G(x, t) > 0$ для всех $x, t \in J$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Уравнение*

$$F(x, t) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix} = 0$$

справедливо тогда и только тогда, если числа x, t являются корнями какого-либо решения уравнения (1,5). См. О. Борувка, цит. соч.

Замечание 1,2. Если в уравнении (1,5) $A \leqq 0$ для всех $x \in J$, то $F(x, t) = 0$ тогда и только тогда, если $x = t$. Если же $W[u, v] > 0$, то функция $F(x, t)$ отрицательна для всех $t \in \langle \xi, x)$ и положительна для всех $t \in (x, \infty)$; согласно лемме 1, она возрастает по отношению к t и убывает по отношению к x.

Замечание 1,3. В дальнейших параграфах будем предполагать, что все рассматриваемые точки входят в интервал J, а также, что все функции и их свойства определены для всех $x \in J$. Тривиальные решения мы исключаем из рассмотрения.

2

Во втором параграфе приведем большей частью без доказательств некоторые свойства интегралов итерированного уравнения (1,4), часть которых была доказана в работах М. Швеца [3] (для дифференциального уравнения 4-го порядка) и М. Грегуша [4] (для дифференциального уравнения 3-го порядка). Остальные свойства доказываются подобным же образом.

Пусть $u(x)$, $v(x)$ — линейно независимые интегралы уравнения (1,5).

2,1. *Каждое решение $y(x)$ уравнения* (1,4), *выполняющее в точке a начальные условия $y(a) = y'(a) = y''(a) = 0$, можно записать в виде $y = c_1v^3(x)$, где $v(a) = 0$, $c_1 = \text{konst} \neq 0$.*

Замечание 2,1. Все решения, имеющие в точке a трехкратный нуль, являются зависимыми; все нули этих решений являются общими для всех решений и могут быть только трехкратными.

2,2. *Каждое решение $y(x)$ уравнения* (1,4), *выполняющее в точках $a \neq b$ начальные условия*

$$y(a) = y'(a) = y(b) = 0\,, \quad y''(a) \neq 0 \neq y'(b)\,, \tag{2,1}$$

имеет вид $y(x) = c_1v^2(x)\,u(x)$, где $v(a) = u(b) = 0$.

Замечание 2,2. Все решения, выполняющие в точках a, b начальные условия (2,1), зависимы; все нули этих решений являются общими для всех решений и могут быть только двукратными или простыми. Между двумя двукратными нулями каждого решения лежит один и только один простой нуль этого решения и наоборот.

2,3. *Каждое решение $y(x)$ уравнения* (1,4), *выполняющее в точке a начальные условия*

$$y(a) = y'(a) = 0\,, \quad y''(a) \neq 0\,, \tag{2,2}$$

имеет вид $y(x) = c_1v^3(x) + c_2v^2(x)\,u(x) = v^2(x)[c_1v(x) + c_2u(x)]$,

где $v(a) = 0, c_2 = \text{konst} \neq 0$.

Замечание 2,3. Все решения, выполняющие (2,2), могут иметь только двукратные (всегда общие) и простые нули. Между двумя двукратными нулями каждого решения лежит один и только один простой нуль и наоборот.

2,4. *Каждое решение $y(x)$ уравнения* (1,4), *выполняющее в точке a начальные условия*

$$y(a) = 0\,, \quad y'(a) \neq 0\,, \tag{2,3}$$

имеет вид

$$y(x) = c_1v^3(x) + c_2v^2(x)\,u(x) + c_3v(x)\,u^2(x)\,, \tag{2,4}$$

где $v(a) = 0$, $c_3 = \text{konst} \neq 0$.

Замечание 2,4. Решение (2,4) обладает только простыми нулями тогда и только тогда, если $c_3 \neq 0$, $c_2^2 \neq 4c_1c_3$ (см., напр., М. Раб [5] стр. 350, замечание к теореме 1). Далее, обратим внимание на то, что (2,4) можно записать в виде $y(x) = v(x)\, Z(x)$, где $Z(x) = c_1 v^2(x) + c_2 v(x)\, u(x) + c_3 u^2(x)$ есть интеграл дифференциального уравнения (1,6). Отсюда следует, что функция $y(x) = u_1(x)\, u_2(x)\, u_3(x)$, где u_1, u_2, u_3 — произвольные интегралы дифференциального уравнения (1,5), является всегда решением дифференциального уравнения (1,4).

Замечание 2,5. Данное дифференциальное уравнение назовем колебательным, если все его интегралы являются в интервале J колеблющимися. В обратном случае мы скажем, что оно неколебательно. Неколеблющимся решением мы считаем каждое решение, имеющее в J конечное число нулей.

Теорема 1. *Уравнение* (1,4) *будет колебательным тогда и только тогда, если уравнение* (1,5) *колебательно.*

Доказательство. Пусть дифференциальное уравнение (1,5) колебательно. Покажем, что каждый интеграл $y(x)$ дифференциального уравнения (1,4), который может быть записан в виде

$$y(x) = c_1 u^3(x) + c_2 u^2(x)\, v(x) + c_3 u(x)\, v^2(x) + c_4 v^3(x) \tag{2,5}$$

является колеблющимся. Если $c_4 = 0$, наше утверждение очевидно. Пусть $c_4 \neq 0$. Ввиду п. 2,4, достаточно показать, что $y(x)$ обладает хоть одним нулем. Обе функции

$$\bar{y}(x) = c_1 u^3(x) + c_2 u^2(x)\, v(x) + c_3 u(x)\, v^2(x)\,, \quad \bar{\bar{y}}(x) = c_4 v^3(x)$$

являются колеблющимися интегралами дифференциального уравнения (1,4). Среди нулей функции $\bar{y}(x)$ находятся и нули функции $u(x)$. Обозначим через x_0, x_1 два последовательных нуля функции $u(x)$. Интеграл $\bar{\bar{y}}(x)$ имеет только трехкратные нули, совпадающие с нулями функции $v(x)$. Ввиду линейной независимости интегралов u, v, из теоремы Штурма следует, что $v(x_0)\, v(x_1) < 0$, так что и $0 > \bar{\bar{y}}(x_0)\, \bar{\bar{y}}(x_1) = y(x_0)\, y(x_1)$. Отсюда следует, что функция $y(x)$ имеет в интервале (x_0, x_1) хотя бы один корень.

Наоборот, если уравнение (1,4) колебательно, то всякий интеграл $u(x)$ уравнения (1,5) является колеблющимся, ибо функция $u^3(x)$ по предположению не имеет в интервале J конечного числа нулей.

3

3,1. Умножим уравнение (1,2) на y, соотв. на y', и проинтегрируем его в интервале $\langle a, b\rangle \subset J$. После преобразований получим тождества

$$[y'''y - y''y' + 10Ay'y + \tfrac{1}{2}\omega y^2]_a^b = \int_b^a [10Ay'^2 - y''^2 - (B - \tfrac{1}{2}\omega')\, y^2]\, \mathrm{d}t\,, \tag{3,1}$$

$$[y'''y' - \tfrac{1}{2}y''^2 + 5Ay'^2 + \tfrac{1}{2}By^2]_a^b = \int_b^a [\tfrac{1}{2}B'y^2 - (\omega + 5A')\, y'^2]\, \mathrm{d}t\,,$$

где $B = 3(3A^2 + A'') + \omega_1$.

Все решения уравнения (1,2), имеющие в точке a двукратный нуль, удовлетворяют уравнению

$$y'''y - y''y' + 10Ay'y + \tfrac{1}{2}\omega y^2 = \int_a^x [10Ay'^2 - y''^2 - (B - \tfrac{1}{2}\omega')\, y^2]\, \mathrm{d}t\,, \quad (3,2)$$

которое можно привести к виду

$$y'''y - y''y' + 4Ay'y + 3A'y^2 + \tfrac{1}{2}\omega y^2 = \int_a^x [4Ay'^2 - (3Ay + y'')^2 - (\omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega')\, y^2]\, \mathrm{d}t\,. \quad (3,3)$$

Все решения, имеющие в точке a трехкратный нуль, удовлетворяют уравнению

$$y'''y' - \tfrac{1}{2}y''^2 + 5Ay'^2 + \tfrac{1}{2}By^2 = \int_a^x [\tfrac{1}{2}B'y^2 - (\omega + 5A')\, y'^2]\, \mathrm{d}t\,. \quad (3,4)$$

3,2. Интегралы $U(x)$, $V(x)$ самосопряженного уравнения

$$y'''' + (10\bar{A}y')' + \bar{B}y = 0 \quad (\bar{B} = 3(3\bar{A} + \bar{A}'') + \bar{\omega}_1;\ \bar{A}'',\ \bar{\omega}_1 \ \text{непрерывны в } J) \quad (3,5)$$

удовлетворяют тождеству Лагранжа

$$L(U, V) = UV''' - U'''V - (U'V'' - U''V') + 10\bar{A}(UV' - U'V) = \mathrm{konst}.$$

Пусть определитель Вронского $W[U, V] \neq 0$ в открытом интервале (a, b) и пусть $y(x)$ — пока произвольная функция, имеющая в замкнутом интервале $\langle a, b\rangle$ вторую производную. Тогда для всех $x \in (a, b)$ имеет место тождество

$$y''^2 - 10\bar{A}y'^2 + \bar{B}y^2 - \left(\frac{W[y, U, V]}{W[U, V]}\right)^2 = \left[\frac{U'V''' - U'''V'}{UV' - U'V}\, y^2 - 2\,\frac{U'V'' - U''V'}{UV' - U'V}\, yy' + \frac{UV'' - U''V}{UV' - U'V}\, y'^2\right]' + \left[\frac{U'V'' - U''V'}{(UV' - U'V)^2}\, y^2 - \frac{1}{UV' - U'V}\, y'^2\right] . L[U, V]\,, \quad (3,6)$$

см. Г. Чиммино [2], стр. 9.

При помощи тождества (3,6) можно доказать следующую теорему сравнения для уравнений (1,2), (3,5).

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1° *Функции U, V — линейно независимые интегралы уравнения* (3,5), *которые хотя бы в одной точке $x \in J$ удовлетворяют уравнению*

$$L[U, V] = 0\,. \quad (3,7)$$

2° *Функция $y(x)$ является интегралом уравнения* (1,2) *и удовлетворяет в точках $a \neq b$ условиям*

$$y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0\,. \quad (3,8)$$

3° *Для всех* $x \in \langle a, b\rangle$ *справедливы неравенства* $\bar{A} \geqq A$, $\bar{B} \leqq B - \frac{1}{2}\omega'$ (*оба знака равенства не имеют одновременно места ни в каком подинтервале*).

Тогда функция $W[U, V]$ *имеет в открытом интервале* (a, b) *хотя бы один нуль.*

Замечание 3,1. Определитель Вронского $W[U, V]$ линейно независимых интегралов уравнения (3,5), удовлетворяющих (3,7), может иметь самое больше четырехкратный корень, см. Чиммино, цит. соч., стр. 11, 12.

Утверждение теоремы 2 докажем от противного. Пусть $W[U, V] \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Согласно (3,1), (3,6), имеют место тождества

$$\int_a^b [y''^2 - 10Ay'^2 + (B - \tfrac{1}{2}\omega')y^2]\,\mathrm{d}t = 0\,, \tag{3,9}$$

$$\int_a^b \left[y''^2 - 10\bar{A}y'^2 + \bar{B}y^2 - \left(\frac{W[y, U, V]}{W[U, V])}\right)^2\right] \mathrm{d}t =$$
$$= \left[\frac{U'V''' - U'''V'}{UV' - U'V}y^2 - 2\frac{U'V'' - U''V'}{UV' - U'V}yy' + \frac{UV'' - U''V}{UV' - U'V}y'^2\right]_a^b. \tag{3,10}$$

Выражение в правой части уравнения (3,10) равно нулю и в случае, когда функция $W[U, V]$ обладает в точках a, b четырехкратными нулями, см. Чиммино, цит. соч., стр. 12,13.

Вычитая уравнения (3,9), (3,10) получаем тождество

$$\int_a^b \left[10(\bar{A} - A)\,y'^2 + (B - \tfrac{1}{2}\omega' - \bar{B})\,y^2 + \left(\frac{W[y, U, V]}{W[U, V]}\right)^2\right] \mathrm{d}t = 0\,, \tag{3,11}$$

которое, ввиду условия 3°, невозможно.

3,3. Рассмотрим уравнение

$$y'''' + (10Ay')' + 3(3A^2 + A'')\,y = \varphi(x)\,, \tag{3,12}$$

где $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная функция. Возьмем два линейно независимых интеграла уравнения (1,5) $u(x)$, $v(x)$ таких, что $W[u, v] = 1$, и образуем функцию переменного x

$$K(x, t) = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^3,$$

где t — параметр. Функция $K(x, t)$ есть решение уравнения (1,4) и, как нетрудно убедиться, удовлетворяет начальным условиям

$$K(x, x) = K'_x(x, x) = K''_x(x, x) = 0\,,\quad K'''_x(x, x) = 1\,.$$

По формуле Коши, см. В. В. Степанов [8], стр. 238, функция

$$-\frac{1}{6}\int_a^x \varphi(t)\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^3 \mathrm{d}t$$

является частным решением уравнения (3,12). По известной теореме, см., напр., Степанов [8], стр. 220, каждое решение $Z(x)$ уравнения (3,12) удовлетворяет уравнению

$$Z(x) = z(x) - \frac{1}{6}\int_a^x \varphi(t)\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^3 \mathrm{d}t\,, \tag{3,13}$$

где $z(x)$ — решение уравнения (1,4), удовлетворяющее в точке a тем же начальным условиям, как и $Z(x)$.

Положим в (3,12) $\varphi(x) = -\omega_1(x)\,y(x) - \omega(x)\,y'(x)$, где $y(x)$ — произвольное решение уравнения (1,2).

Из формулы (3,13) следует, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y(x) = z(x) + \frac{1}{6}\int_a^x (y\omega_1 + y'\omega)\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^3 \mathrm{d}t\,,$$

которое можно привести к виду

$$y(x) = z(x) - \tfrac{1}{6}y(a)\,\omega(a)\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(a) & v(a) \end{vmatrix}^3 + \frac{1}{6}\int_a^x y\left[(\omega_1 - \omega')\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^3 - \right.$$

$$\left. - 3\omega\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}\right]\mathrm{d}t\,, \tag{3,14}$$

где $z(x)$ — интеграл уравнения (1,4), выполняющий в точке a те же начальные условия, как и $y(x)$.

3,4. *Пусть*

$$A \leqq 0\,, \quad B - \tfrac{1}{2}\omega' \geqq 0 \quad \text{или} \quad A \leqq 0\,, \quad \omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega' \geqq 0\,. \tag{3,15}$$

Тогда каждое решение $y(x)$ уравнения (1,2) удовлетворяет не более чем в одной точке a условию $y(a) = y'(a) = 0$ или $y(a) = y''(a) = 0$.

Утверждение следует из тождеств (3,2), (3,3).

Следствие. Если $y_1(x)$, $y_2(x)$ — два линейно независимых интеграла уравнения (1,2) которые выполняют в точке a условия

$$y_1(a) = y_1'(a) = y_2(a) = y_2'(a) = 0\,,$$

то $W[y_1, y_2] \neq 0$, $W'[y_1, y_2] \neq 0$ для всех $x \neq a$. Так как $W[y_1(a), y_2(a)] = 0$, то для всех $x > a$ функция $W[y_1, y_2]$ или положительна и возрастает или отрицательна и убывает. Аналогичное рассуждение справедливо для $x < a$.

3,5. Теорема 3. *Пусть*

$$-9M \leqq \omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega', \quad A \leqq -\sqrt{M}, \quad M = \text{konst.} \geqq 0. \tag{3,16}$$

Тогда каждый интеграл уравнения (1,2) *обладает самое больше одним двукратным корнем.*

Для доказательства воспользуемся теоремой 2. Предположим, что существует интеграл $y(x)$ уравнения (1,2), имеющий два двукратных корня $a < b$. Возьмем два независимых интеграла $u(x)$, $v(x)$ уравнения

$$u'' + (A + \sqrt{M})\, u = 0, \tag{3,17}$$

и пусть $u(a) = 0$. Функции $U(x) = u^3(x)$, $V(x) = u^2(x)\, v(x)$ являются независимыми интегралами уравнения

$$y'''' + [10(A + \sqrt{M})\, y']' + 3[3(A + \sqrt{M})^2 + A'']\, y = 0, \tag{3,18}$$

выполняющими в точке a условие $L[U, V] = 0$. Покажем, что коэффициенты уравнений (1,2), (3,18) удовлетворяют неравенствам, приведенным в условии 3^0 теоремы 2. Первое неравенство очевидно. Далее имеем

$$3[3(A + \sqrt{M})^2 + A''] \leqq 3[3(A^2 - M) + A''] \leqq 3(3A^2 + A'') + \omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega'.$$

Согласно теореме 2, функция $W[U, V] = u^4(x)\, W[u, v]$ имеет в интервале (a, b) хотя бы один нуль, что невозможно, так как никакой интеграл уравнения (3,17) не имеет в интервале J двух корней.

Замечание 3,2. Если выполняется одно из условий (3,15), (3,16), то для дифференциального уравнения (1,2) справедливы теоремы 4, 5, 6, 7, приведенные в работе М. Швеца [3].

3,6. *Пусть выполнено одно из условий* (3,19), *причем ни в каком подинтервале функции* $(5A' + \omega)$, B' *одновременно не равны тождественно нулю.*

Тогда каждое решение $y(x)$ *уравнения* (1,2) *выполняет не более чем в одной точке* a *условие* $y(a) = y'(a) = y''(a) = 0$.

Если

$$5A' + \omega \leqq 0, \quad B' \geqq 0, \quad [5A' + \omega \geqq 0, \quad B' \leqq 0], \tag{3,19}$$

то $y(x)$ *не имеет справа (слева) от точки* a *ни одного двукратного нуля.*

Если, далее, справедливы неравенства (3,19), $B \leqq 0$, *то* $y'(x)$ *не имеет справа (слева) от точки* a *ни одного нуля.*

Все эти утверждения следуют из тождества (3,4).

Теорема 4. *Пусть* $\omega_1(x) \geqq 0$. *Если* (1,5) — *колебательное уравнение, то и* (1,3) — *колебательное уравнение.*

Доказательство. Пусть уравнение (1,5) колебательно. Предположим, что утверждение теоремы 4 несправедливо, так что существует интеграл

$y(x)$ дифференциального уравнения (1,3), не имеющий нулей для $x \geqq a$, и пусть, напр., $y(x) > 0$ для $x \in \langle a, \infty)$. Функция $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3,14) для $\omega = 0$, где $z(x)$ — колеблющийся интеграл уравнения (1,4), удовлетворяющий в точке a тем же начальным условиям как и $y(x)$, а $u(x)$, $v(x)$ — совершенно произвольные независимые интегралы уравнения (1,5), для которых $W[u, v] = 1$. Возьмем теперь $v(x)$ так, чтобы $v(a) = 0$. Пусть $b > a$ — соседний нуль функции $v(x)$, так что $v(x) \neq 0$ для $x \in (a, b)$. Интеграл $z(x)$ имеет в интервале (a, b) хотя бы один корень (см. доказательство теоремы 1). Пусть x_0 — первый нуль функции $z(x)$ в интервале (a, b), так что $z(x) \neq 0$ для $x \in \langle a, x_0)$. Подберем теперь $u(x)$ так, чтобы $u(x_0) = 0$.

Функция $u(x) \neq 0$ в интервале $\langle a, x_0)$; предположим, что она там положительна. Тогда, в силу известных свойств интегралов уравнения (1,5), $u'(x_0) < 0$. Так как $1 = W[u(x_0), v(x_0)] = -u'(x_0)v(x_0)$, то $v(x_0) > 0$. Если теперь подставить подобранные функции $u(x)$, $v(x)$ в (3,14) и вычислить значение функции $y(x)$ в точке x_0, придем к противоречию, так как

$$0 < y(x_0) = \tfrac{1}{6}\int_a^{x_0} y(t)\,\omega_1(t) \begin{vmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^3 \mathrm{d}t = -\tfrac{1}{6}v^3(x_0)\int_a^{x_0} y(t)\,\omega_1(t)\,u^3(t)\,\mathrm{d}t \leqq 0\,.$$

Замечания 4,1. Предложим, что $\omega_1(x) \not\equiv 0$ ни в одном подинтервале.

а) Пусть $\omega_1 \geqq 0$. Если уравнение (1,3) имеет колеблющиеся интегралы, то (1,5) еще не должно быть колебательным уравнением. Напр., возьмем $A = 0$, $\omega_1 = 1$. Уравнение $u'' = 0$ не имеет ни одного колеблющегося интеграла, уравнение $y'''' + y = 0$ имеет колеблющиеся интегралы, напр. $e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

б) Пусть $\omega_1 \leqq 0$. Если (1,5) — колебательное уравнение, то (1,3) не будет обязательно колебательным. Возьмем $A = 1$, $\omega_1 = -9$. Уравнение $u'' + u = 0$ — колебательное, уравнение $y'''' + 10y'' = 0$ имеет неколеблющиеся интегралы, напр., 1, x. Уравнение (1,3) может иметь колеблющиеся интегралы даже тогда, когда каждый интеграл уравнения (1,5) имеет конечное число нулей. Возьмем $A = -1$, $\omega_1 = -20$. Уравнение $u'' - u = 0$ не имеет ни одного колеблющегося интеграла, уравнение $y'''' - 10y'' - 11y = 0$ имеет колеблющиеся интегралы, напр., $\sin x$.

Теорема 5. *Пусть $\omega_1 \geqq 0$, причем равенство не имеет места ни в одном подинтервале. Если какой-либо интеграл $y(x)$ уравнения (1,3) имеет кратные нули, то между любыми двумя кратными нулями лежит хоть один простой нуль* (кратный нуль — это каждый нуль, не являющийся простым).

Доказательство. Пусть a, b — два соседних кратных нуля интеграла $y(x)$. Согласно п. 2,3, $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x) = c_1 u^3(x) + c_2 u^2(x)\, v(x) + \tfrac{1}{6} \int_a^x y(t)\, \omega_1(t) \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^3 \mathrm{d}t\,, \qquad (4,1)$$

где $u(a) = 0$.

Если применить к уравнениям (1,4) и (1,3) теорему 2, то так же, как и при доказательстве теоремы 3, обнаружим, что $u(x)$ имеет в интервале (a, b) хоть один нуль. Пусть x_0 — первая сопряженная с a точка справа и пусть, напр., $u(x) > 0$ для $x \in (a, x_0)$. Так как $u'(x_0) < 0$, то, ввиду $W[u, v] = 1$, будет $v(x_0) > 0$. Используя уравнение (4,1), теперь нетрудно доказать, что функция $y(x)$ имеет в интервале $(a, x_0\rangle$ хоть один простой нуль. Если, наоборот, предположить, что, напр., $y(x) > 0$ для $x \in (a, x_0)$, то получим противоречивое уравнение

$$0 < y(x_0) = -\tfrac{1}{6} v^3(x_0) \int_a^{x_0} y(t)\, \omega_1(t)\, u(t)\, \mathrm{d}t \leqq 0\,.$$

5,1. Теорема 6. *Пусть*

$$A \leqq 0\,, \quad \omega_1 - \omega' \leqq 0\,, \quad \omega \leqq 0 \ [\omega \geqq 0]\,. \qquad (5,1)$$

Тогда каждый интеграл $y(x)$ *уравнения* (1,2), *удовлетворяющий начальным условиям*

$$y(a) = y'(a) = 0\,, \qquad (5,2)$$

$$y''(a)\, y'''(a) \geqq 0 \quad [\leqq 0]\,, \qquad (5,3)$$

не имеет вправо (влево) от точки a *ни одной нулевой точки.*

Мы докажем только первое утверждение, ибо второе доказывается аналогично.

Предположим противное, что интеграл $y(x)$, выполняющий начальные условия (5,2), (5,3) и удовлетворяющий интегральному уравнению

$$y(x) = u^2(x)\, w(x) + \tfrac{1}{6} \int_a^x y \left[(\omega_1 - \omega') \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^3 - \right.$$

$$\left. - 3\omega \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u(t) & v(t) \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix} \right] \mathrm{d}t\,, \qquad (5,4)$$

[где $u(a) = 0$, $w(x)$ — подходящий интеграл уравнения (1,5)], имеет справа от точки a нуль b, и пусть, напр., $y(x) > 0$ для $x \in (a, b)$. Тогда $y''(a) = 2u'^2(a)\, w(a) \geqq 0$, $y'''(a) = 6u'^2(a)\, w'(a) \geqq 0$, так что $w(a) \geqq 0$, $w'(a) \geqq 0$. Функция $u^2(x)\, w(x)$ положительна для всех $x > a$, ибо $[u^2(x)\, w(x)]' = 2u(x)\, u'(x)\, w(x) + u^2(x)\, w'(x) > 0$ для $x > a$. Отсюда следует, что уравнение (5,4) в точке b несправедливо, ибо по условию и по леммам 1, 2 будет $u^2(b)\, w(b) > 0$ и

$$\frac{1}{6}\int_a^b y\left[(\omega_1-\omega')\begin{vmatrix} u(b) & v(b)\\ u(t) & v(t)\end{vmatrix}^3 - 3\omega\begin{vmatrix} u(b) & v(b)\\ u(t) & v(t)\end{vmatrix}^2\begin{vmatrix} u(b) & v(b)\\ u'(t) & v'(t)\end{vmatrix}\right]\mathrm{d}t \geqq 0\,.$$

Следствия. *Пусть выполнено одно из условий* (5,1). *Тогда*

а) *Каждый интеграл уравнения* (1,2) *удовлетворяет не более чем в одной точке a одному из начальных условий*

$$y(a) = y'(a) = y''(a) = 0\,, \qquad (5,5)$$

или

$$y(a) = y'(a) = y'''(a) = 0\,. \qquad (5,6)$$

б) *Каждый интеграл уравнения* (1,3), *удовлетворяющий в точке a одному из начальных условий* (5,5) *или* (5,6), *не имеет кроме точки a никаких корней.*

б) *Каждый интеграл уравнения* (1,3) *имеет не более чем два двукратных корня. Если $a < b$ — два двукратных корня интеграла $y(x)$ уравнения* (1,3), *то $y''(a)\, y'''(a) < 0$, $y''(b)\, y'''(b) > 0$. Решение $y(x)$ не имеет слева* (*справа*) *от точки a* (b) *ни одного нуля.*

5,2. *Пусть*

$$A \leqq -\sqrt{M}\,, \quad -9M \leqq \omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega'\,, \quad \omega_1 - \omega' \leqq 0\,, \quad M = \mathrm{konst} \geqq 0\,,$$
$$\omega \leqq 0\ [\omega \geqq 0]\,. \qquad (5,7)$$

Тогда каждый интеграл $y(x)$ уравнения (1,2), *удовлетворяющий начальным условиям* (5,2), *имеет справа* (*слева*) *от точки a не более чем один корень.*

Утверждение следует из теорем 3, 6, если принять еще во внимание, что справедлива теорема 7 М. Швеца [3], см. замечание 3,2.

Замечание 5,1. *Если выполнены условия* (5,7), *то два интеграла уравнения* (1,2), *имеющие три общих корня x_1, x_2, x_3, линейно зависимы.* Ввиду теорем 3 и 4 М. Швеца [3], стр. 79, 81, достаточно принять во внимание, что утверждение справедливо и в случае $x_1 < x_2 < x_3$. Действительно, если бы два линейно независимых интеграла имели три общих простых корня, то не имело бы места утверждение п. 5,2.

5,3. *Пусть* $A \leqq -\sqrt{M}$, $-9M \leqq \omega_1 \leqq 0$, $M = \mathrm{konst.} \geqq 0$.

а) *Тогда каждый интеграл $y(x)$ уравнения* (1,3), *удовлетворяющий начальным условиям* (5,2), *имеет не более чем один корень, отличный от точки a.*

Если утверждение несправедливо, то существует интеграл $y_2(x)$ уравнения (1,3), имеющий в точке a двукратный корень, а в точках x_1, x_2 простые корни, причем $x_1 < a < x_2$ (см. п. 5.2). Пусть $y_1(x)$ — интеграл уравнения

(1,3), удовлетворяющий начальным условиям $y_1(a) = y_1'(a) = y_1'''(a) = 0$, так что, согласно следствию б) теоремы 6, он не имеет корней, кроме точки a, причем $y_1(x_1)\,y_1(x_2) > 0$. Интегралы $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы, так что функция

$$y(x) = y_1(x) - \frac{y_1''(a)}{y_2''(a)}\,y_2(x)\,,$$

[где $y_1''(a) \neq 0 \neq y_2''(a)$, см. следствие б) теоремы 6] является решением уравнения (1,3) и имеет в точке a трехкратный корень, причем $y(x_1)\,y(x_2) > 0$. Этот результат противоречит теореме 6, следствие б).

б) *Если два линейно независимых интеграла* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *имеют два общих корня* x_1, x_2, *то между любыми двумя корнями* (отличными от x_1, x_2) *одного интеграла лежит в точности один корень другого.* В случае $x_1 = x_2$ утверждение следует из теоремы 7 М. Швеца [3]. Пусть $x_1 \neq x_2$; предложим, что утверждение не имеет места, так что существуют корни x_3, x_4 (отличные от x_1, x_2) какого-либо интеграла, напр., $y_1(x)$, такие, что $y_2(x) \neq 0$ для $x \in \langle x_3, x_4 \rangle$. По известному методу легко установим, что функция $W[y_1, y_2]$ имеет в интервале (x_3, x_4) хотя бы один корень η. Итак, существует функция $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ (где c_1, c_2 — подходящие постоянные, причем $|c_1| + |c_2| \neq 0$), представляющая собой решение уравнения (1,3) и имеющая в точке η двукратный корень, а в точках x_1, x_2 хотя бы простые корни, что невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *O. Borůvka:* О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-го порядка. Чех. мат. ж. *3* (*78*), 1953, 199—255.

[2] *G. Cimmino:* Autosoluzioni e autovalori nelle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte die ordine superiore. Mathematische Zeitschrift *32* (1930), 4—58.

[3] *M. Švec:* Über einige neue Eigenschaften der Lösungen der linearen homogenen Di ferentialgleichung vierter Ordnung Чех. мат. ж. *4* (*79*), 1954, 75—94.

[4] *M. Greguš:* O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice homogénnej tretieho rádu. Matematicko-fyzikálný časopis SAV, *2* (*5*), 1955, 73—85.

[5] *M. Ráb:* Oscilační vlastnosti integrálů diferenciální lineární rovnice 3. řádu. Práce Brněnské základny ČSAV, *XXVII*, No 7, 1955, 349—360.

[6] *M. Ráb:* Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen dritter Ordnung. Spisy přírodovědecké fakulty MU, Brno, No *374*, 1956, 177—184.

[7] *G. Sansone:* Le equazioni lineari, omogenee, del quarto ordine, nel campo reale. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. XI, Fasc. III—IV, 1942, 151—196.

[8] *V. V. Stěpanov:* Курс дифференциальных уравнений (český překlad), Praha 1950.

[9] *Z. Hustý:* O některých vlastnostech homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu. Časopis pro pěst. mat. *83* (1958), č. 2.

[10] *Z. Hustý:* O iteraci homogenních lineárních diferenciálních rovnic. Sborník Vysoké školy zemědělské a lesnické fakulty, Brno, No *4*, 1956, 133—148.

Zusammenfassung

OSCILLATORISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN EINER HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG VIERTER ORDNUNG

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt 11. XII. 1956)

In der vorgelegten Arbeit werden einige oscillatorische Eigenschaften der Differentialgleichung

$$y'''' + 10Ay'' + (10A' + \omega)\,y' + [3(3A^2 + A'') + \omega_1]\,y = 0\,, \tag{1}$$

studiert, wobei die Funktionen ω (= die Differentialinvariante), ω_1 (= die Differentialsemiinvariante), A'' im Interval $J = \langle \xi, \infty)$ stetig sind.

Es sei $\omega = \omega_1 = 0$. Die Gleichung (1) ist oscillatorisch dann und nur dann, wenn gleichzeitig auch die Gleichung

$$y'' + Ay = 0 \tag{2}$$

oscillatorisch ist. (Die Differentialgleichung ist oscillatorisch, wenn jede ihre Lösung in J unendlich viele Nullstellen hat.)

Es sei $-9M \leqq \omega_1 - \frac{1}{2}\omega'$, $A \leqq -\sqrt{M}$, $M =$ Konstante $\geqq 0$. Dann hat jede Lösung der Gleichung (1) höchstens eine zweifache Nullstelle.

Es sei $\omega = 0$, $\omega_1 \geqq 0$. Die Gleichung (1) ist oscillatorisch, wenn die Gleichung (2) oscillatorisch ist.

Wenn $\omega = 0$, $\omega_1 \geqq 0$ sind, dann liegt zwischen jeden zwei mehrfachen Nullstellen beliebiger Lösung der Gleichung (1) wenigstens eine einfache Nullstelle.

Es sei

$$A \leqq 0\,, \quad \omega_1 - \omega' \leqq 0\,, \quad \omega \leqq 0 \quad [\omega \geqq 0]\,. \tag{3}$$

Dann hat jede Lösung der Gleichung (1), die die Anfangsbedingungen $y(a) = y'(a) = 0$, $y''(a) \,.\, y'''(a) \geqq 0$ $[\leqq 0]$ erfüllt, keine Nullstelle nach rechts [nach links] von dem Punkte a.

Wenn die Voraussetzung (3) gilt, dann erfüllt jede Lösung der Gleichung (1) höchstens in einem einzigen Punkte a eine von den Anfangsbedingungen

$$y(a) = y'(a) = y''(a)\,, \tag{4}$$

oder

$$y(a) = y'(a) = y'''(a)\,, \tag{5}$$

Wenn wir neben der Voraussetzung (3) noch die ergänzende Voraussetzung $\omega = 0$ machen, dann hat jede Lösung der Gleichung (1), welche im Punkte a eine von den Anfangsbedingungen (4) oder (5) erfüllt, keine andere Nullstelle ausser im Punkte a und jede Lösung der Gleichung (1) hat höchstens zwei zweifache Nullstellen.

Es sei

$$A \leqq -\sqrt{M}\,, \quad -9M \leqq \omega_1 - \tfrac{1}{2}\omega'\,, \quad \omega_1 - \omega' \leqq 0\,, \quad \omega \leqq 0 \ [\omega \geqq 0]\,,$$
$$M = \text{Konst} \geqq 0\,. \tag{6}$$

Dann hat jede Lösung der Gleichung (1), welche die Anfangsbedingungen

$$y(a) = y'(a) = 0 \tag{7}$$

erfüllt, höchstens eine Nullstelle nach rechts [nach links] vom Punkte a. Wenn zwei Lösungen drei gemeinsame Nullstellen haben, dann sind diese linear abhängig. Wenn wir zu der Voraussetzung (6) die ergänzende Voraussetzung $\omega = 0$ machen, dann hat jede Lösung der Gleichung (1), welche (7) erfüllt, höchstens eine von dem Punkte a abweichende Nullstelle. Wenn weiter zwei linear unabhängige Lösungen zwei gemeinsame Nullstellen x_1, x_2 haben, dann trennen sich alle übrigen Nullstellen von diesen Lösungen voneinander ab.