Czechoslovak Mathematical Journal

Vlastimil Dlab

Заметка к теории полных абелевых групп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 1, 54–61

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100276

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

ЗАМЕТКА К ТЕОРИИ ПОЛНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

ВЛАСТИМИЛ ДЛАБ (Vlastimil Dlab), Прага

(Поступило в редакцию 8/I 1957 г.)

В настоящей статье дается характеризация полных абелевых групп при помощи систем их образующих и при помощи определенного свойства их подгрупп. Далее в работе приведены примеры абелевых групп, системы образующих которых имеют определенные свойства.

1. Обозначения и определения

На протяжении всей статьи будем под группой понимать абелеву группу (с аддитивной записью). Порядок элемента $g \in G$ обозначим символом $O(g)$, прямую сумму групп G_1 и G_2 (или же групп G_δ, $\delta \in \Delta$) символом $G_1 + G_2$ (или же $\sum_{\delta \in \Delta} G_\delta$) и фактор-группу $G \bmod H$, $H \subseteq G$, обозначим через G/H.

Группа G называется *полной*, если равенство $pG = G$[1]) справедливо для каждого простого числа p; группа G является, следовательно, полной тогда и только тогда, если для всякого элемента $g \in G$ и всякого целого ненулевого числа k уравнение $k \,.\, x = g$ имеет в G хотя бы одно решение.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое непустое множество элементов группы G; символом $\{\mathfrak{M}\}$ будем обозначать подгруппу группы G, порожденную множеством $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{G}$ — множество элементов группы G такое, что $\{\mathfrak{G}\} = G$, то говорят, что $\mathfrak{G}$ — *система образующих* группы G. Итак, $\mathfrak{G} = (g_\iota)_{\iota \in I}$[2]) является системой образующих группы G тогда и только тогда, если всякий элемент $g \in G$ можно представить в виде линейной формы f от элементов множества $\mathfrak{G}$:

$$g = k_1 \,.\, g_{\iota_1} + k_2 \,.\, g_{\iota_2} + \ldots + k_n \,.\, g_{\iota_n}\,, \quad k_i \text{ — целые числа, } g_{\iota_i} \in \mathfrak{G}$$
$$\text{для } i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{1}$$

---

[1]) pG — подгруппа группы G, состоящая из элементов вида $p \,.\, g$, $g \in G$.

[2]) Символ $(a_\delta)_{\delta \in \Delta}$, или же $(\mathfrak{M}_\delta)_{\delta \in \Delta}$, означает множество, состоящее из элементов a_δ, $\delta \in \Delta$, или же множество, которое является объединением множеств $\mathfrak{M}_\delta$, $\delta \in \Delta$. В символе $\{(\mathfrak{M}_\delta)_{\delta \in \Delta}\}$ будем всегда внутренние скобки выпускать: $\{\mathfrak{M}_\delta\}_{\delta \in \Delta}$.

В этом случае будем для краткости вместо (1) писать

$$g = f(\mathfrak{G}) . \tag{1'}$$

Определение 1. Систему образующих $\mathfrak{G}$ группы G будем называть *неприводимой*, если множество $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \setminus (g)$[3]) не является системой образующих группы G ни для какого элемента $g \in \mathfrak{G}$. Система образующих, необладающая этим свойством, называется *приводимой*. Если $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \setminus (g)$ является системой образующих группы G для всякого $g \in \mathfrak{G}$, то назовем $\mathfrak{G}$ *сильно приводимой* системой образующих группы G.

Определение 2. Группу G назовем *достижимой*, если существует ее собственная подгруппа $H \subset G$ и элемент $g \in G$ так, что

$$\{H, g\} = G . \tag{2}$$

Замечание. Очевидно, что группа G достижима тогда и только тогда, если существует ее собственная подгруппа $H' \subset G$ и конечное число элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n$ со свойством $\{H', g_1, g_2, \ldots, g_n\} = G$.

2. Теоремы

Теорема 1. *Пусть G — полная группа. Тогда G не является достижимой.*

Доказательство. Если $G = 0$, то утверждение теоремы тривиально. Итак, пусть $G \neq 0$ и пусть существует собственная подгруппа $H \subset G$ и элемент $g \in G$ так, что справедливо соотношение (2). Так как всякое прямое слагаемое полной группы, очевидно, опять полно, то циклическая подгруппа $\{g\} \subset G$ не может быть прямым слагаемым группы G; ввиду этого, для подходящего целого ненулевого числа k будет

$$k \,.\, g = h \,, \quad h \in H . \tag{3}$$

Вследствие полноты группы G существует, далее, элемент $g_0 \in G$ такой, что

$$k \,.\, g_0 = g \,, \tag{4}$$

причем, ввиду (2), имеем

$$g_0 = h_0 + l \,.\, g \,, \quad h_0 \in H \,, \quad l \text{ — целое число} . \tag{5}$$

Тогда, согласно (4), (5) и (3),

$$g = k \,.\, g_0 = k \,.\, h_0 + lk \,.\, g = k \,.\, h_0 + l \,.\, h \,,$$

итак, $g \in H$. Следовательно, имеем $H = G$, что противоречит нашему предположению; этим теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть группа $G \neq 0$ не достижима. Тогда всякая система образующих группы G сильно приводима.*

---

[3]) $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$ означает разность множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$, наоборот, система образующих группы $G \neq 0$, которая не является сильно приводимой; пусть элемент $g_0 \in \mathfrak{G}$ такой, что

$$\{\mathfrak{G} \setminus (g_0)\} = H \neq G \quad \text{или} \quad \mathfrak{G} \setminus (g_0) = \emptyset\,;^{4)}$$

во втором случае положим $H = 0$. Тогда имеем $H \subset G$, $g_0 \in G$ и $\{H, g_0\} = G$; следовательно, G — достижимая вопреки предположению теоремы, и доказательство закончено.

Теорема 3. *Пусть всякая система образующих группы G сильно приводима. Тогда G полна.*

Доказательство этой теоремы проведем опять от противного. Предположим, что G не полна. Тогда существует простое число p такое, что $pG \neq G$. Далее, фактор-группа G/pG, очевидно, является прямой суммой циклических групп порядка p,[5] т. е.

$$G/pG = \sum_{\delta \in \Delta} \{\bar{h}_\delta\}\,, \quad O(\bar{h}_\delta) = p \quad \text{для} \quad \delta \in \Delta\,. \tag{6}$$

Пусть $\mathfrak{G}_p$ — система образующих группы pG. Пусть h_δ — произвольный элемент смежного класса $\bar{h}_\delta$ группы $G \bmod pG$: $h_\delta \in \bar{h}_\delta$, $\delta \in \Delta$. Обозначим, далее, множества $(\bar{h}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ и $(h_\delta)_{\delta \in \Delta}$ соответственно через $\bar{\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_p, \mathfrak{H})$, очевидно, — система образующих группы G. Мы докажем, что для всякого индекса $\delta \in \Delta$ справедливо

$$h_\delta \operatorname{non} \in \{\mathfrak{G} \setminus (h_\delta)\}\,. \tag{7}$$

Если бы соотношение (7) было неверно, то существовало бы равенство

$$h_\delta = f_1(\mathfrak{G}_p) + f_2(\mathfrak{H} \setminus (h_\delta))\,;$$

в фактор-группе G/pG мы, следовательно, получили бы равенство

$$\bar{h}_\delta = f_2(\bar{\mathfrak{H}} \setminus (\bar{h}_\delta))\,,$$

в противоречии с разложением (6). Итак, система образующих $\mathfrak{G}$ не является сильно приводимой. Мы получаем противоречие с предположением теоремы, и тем теорема 3 полностью доказана.

Из теорем 1, 2 и 3 вытекают непосредственно следующие следствия:

Следствие 1. *Ненулевая полная группа не обладает неприводимой системой образующих.*

Следствие 2. *Ненулевая группа полна тогда и только тогда, если всякая ее система образующих сильно приводима.*

Следствие 3. *Группа полна тогда и только тогда, если она не достижима.*

---

[4]) $\emptyset$ означает пустое множество.

[5]) Порядок всех ненулевых элементов группы G/pG равняется простому числу p, так что G/pG является векторным пространством над полем характеристики p; отсюда вытекает непосредственно прямое разложение (6).

3. Несколько замечаний

Определение 3. Говорим, что система образующих $\mathfrak{G}$ группы G *наследственно приводима*, если $\mathfrak{G}$ и также всякая система образующих $\mathfrak{G}'$ группы G, которая является подмножеством системы $\mathfrak{G}$, приводимы. Подобным способом определяем тоже *наследственно сильно приводимую* систему образующих группы G.

Итак, согласно определению 3, предположение теоремы 3 эквивалентно предположению, что всякая система образующих группы G наследственно сильно приводима. Как показывает следующий пример группы G_1, утверждение теоремы 3 неверно уже при более слабом предположении, что всякая система образующих группы G наследственно приводима (т. е. при предположении, что не существует неприводимая система образующих группы G):

Пусть $G_1 = G(p^\infty) + G(p)$, причем $G(p^\infty)$ — группа Прюфера типа p^∞, которая задана системой образующих и определяющих соотношений

$$h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots, \; p\,.\,h_1 = 0\,, \quad p\,.\,h_{i+1} = h_i \quad (i = 1, 2, \ldots)\,,$$

и $G(p)$ — циклическая группа порядка p, образующий элемент которой обозначим через g (p — простое число). Как известно, $G(p^\infty)$ является полной группой, в которой для произвольных двух элементов $e_1, e_2, O(e_1) \neq O(e_2)$, справедливо $e_j \in \{e_1 + e_2\}$ для $j = 1, 2$. Обозначим еще для каждого натурального числа k через G_1^k подгруппу группы G_1, порожденную элементами $g, h_1, h_2, \ldots, h_k : G_1^k = \{g, h_1, h_2, \ldots, h_k\}$.

Пусть $\mathfrak{G}_1$ — какая-нибудь система образующих группы G_1; докажем, что $\mathfrak{G}_1$ не является неприводимой. Пусть g_1, g_2 — два элемента системы $\mathfrak{G}_1$:

$$g_l = g_l' + g_l''\,, \quad g_l' \in G(p^\infty)\,, \quad g_l'' \in G(p)\,, \quad l = 1, 2\,; \tag{8}$$

пусть $g_l \in G_1^{k_l}$, $l = 1, 2$. Тогда необходимо существует элемент

$$g_3 \in \mathfrak{G}_1\,, \quad g_3 \operatorname{non} \in G_1^{k_1}\,, \quad g_3 = g_3' + g_3''\,, \quad g_3' \in G(p^\infty)\,, \quad g_3'' \in G(p)\,; \tag{9}$$

пусть $g_3 \in G_1^{k_2}$. Одинаковым способом мы легко убеждаемся в том, что существует элемент

$$g_4 \in \mathfrak{G}_1\,, \quad g_4 \operatorname{non} \in G_1^{k_2}\,, \quad g_4 = g_4' + g_4''\,, \quad g_4' \in G(p^\infty)\,, \quad g_4'' \in G(p)\,. \tag{10}$$

Если $g_3'' = 0$, то, очевидно, для подходящего целого числа t, $(t, p) = 1$,[6]) справедливо

$$t\,.\,g_3' = t\,.\,g_3 = h_{k_3}\,, \quad k_3 > k_2\,,$$

и поэтому или $g_2 \in \{g_3\}$ (в случае, когда $g_2'' = 0$), или $g_1 \in \{g_2, g_3\}$; итак, $\mathfrak{G}_1$ не является в этом случае неприводимой. Одинаковым способом легко проверить, что $\mathfrak{G}_1$ — приводимая система образующих, если $g_4'' = 0$.

---

[6]) (z_1, z_2) означает наибольший общий делитель целых чисел z_1 и z_2.

Остается рассмотреть, следовательно, случай, когда $g_3'' \neq 0$ и $g_4'' \neq 0$. Тогда, очевидно, существуют целые числа $u, v, (u, p) = (v, p) = 1$, такие, что из (9) и (10) следует

$$v \,.\, g_4 + u \,.\, g_3 = v \,.\, g_4' + u \,.\, g_3' \,; \tag{11}$$

далее, согласно сверху сделанному примечанию о группе $G(p^\infty)$, существует целое число w, $(w, p) = 1$, такое, что

$$w \,.\, (v \,.\, g_4' + u \,.\, g_3') = h_{k_4}\,, \quad k_4 > k_2\,. \tag{12}$$

Из соотношений (11), (12) и (8) уже непосредственно ясно, что или $g_2 \in \{g_3, g_4\}$, или $g_1 \in \{g_2, g_3, g_4\}$, так что $\mathfrak{G}_1$ на самом деле не является неприводимой.[7]

Сверх того множество

$$\mathfrak{G}_1^* = (h_1 + g_1, h_2 + g_1, \ldots, h_i + g_1, \ldots)\,,$$

очевидно, является наследственно сильно приводимой системой группы G_1; притом, конечно, группа G_1 неполна.

Так как всякая полная группа является прямым слагаемым группы, в которой она содержится, ясно, что всякая группа, которая не является редуцированной,[8] обладает наследственно приводимой системой образующих. Неверно, однако, что всякая система образующих такой группы наследственно приводима:

Пусть $G_2 = \sum\limits_{m=1}^{\infty} G_m(p^\infty) + \sum\limits_{m=1}^{\infty} G_m(p)$;[9] пусть

$$h_{m1}, h_{m2}, \ldots, h_{mi}, \ldots, p \,.\, h_{m1} = 0\,, \quad p \,.\, h_{mi+1} = h_{mi} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

— система образующих и определяющих соотношений группы $G_m(p^\infty)$ для $m = 1, 2, \ldots$ и g_m, $O(g_m) = p$, — образующий элемент циклической группы $G_m(p)$, $m = 1, 2, \ldots$[9])

Если разложить множество всех натуральных чисел в бесконечное число счетных множеств $N_1, N_2, \ldots, N_t, \ldots$:

$$N_t = (m_{t1}, m_{t2}, \ldots, m_{ti}, \ldots)\,,$$

то множество

$$\mathfrak{G}_2^* = (\mathfrak{G}_{21}^*, \mathfrak{G}_{22}^*, \ldots, \mathfrak{G}_{2t}^*, \ldots)\,, \quad \text{где}$$

$$\mathfrak{G}_{2t}^* = (h_{t1} + g_{m_{t1}}, h_{t2} + g_{m_{t2}}, \ldots, h_{ti} + g_{m_{ti}}, \ldots) \quad \text{для } t = 1, 2, \ldots,$$

очевидно, является *неприводимой системой образующих* нередуцированной группы G_2.

---

[7]) Подобным способом можно это утверждение доказать для группы $G = G(p^\infty) + G'$, где G' — конечная подгруппа.

[8]) Т. е. существует ненулевая полная подгруппа этой группы.

[9]) Значит, G_2 является прямой суммой счетного числа групп, изоморфных группе G_1.

Группа G_2 обладает также *наследственно сильно приводимой системой образующих;* системой этого типа является, как легко проверить, напр. множество

$$\mathfrak{G}_2^{**} = (\mathfrak{G}_{21}^{**}, \mathfrak{G}_{22}^{**}, \ldots, \mathfrak{G}_{2m}^{**}, \ldots) , \quad \text{где}$$
$$\mathfrak{G}_{2m}^{**} = (h_{m1} + g_m, h_{m2} + g_m, \ldots, h_{mi} + g_m, \ldots) \quad \text{для } m = 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим далее следующие системы образующих группы G_2:

(I) систему образующих $\mathfrak{G}_{21} = (g_1, \mathfrak{G}'_{21})$, где $\mathfrak{G}'_{21}$ является множеством всех элементов прямого слагаемого $G'_{21} = \sum_{m=1}^{\infty} G_m(p^\infty) + \sum_{m=2}^{\infty} G_m(p)$ группы G_2;

(II) систему образующих $\mathfrak{G}_{22}$, которая состоит из всех элементов группы G_2;

(III) систему образующих $\mathfrak{G}_{23} = (\mathfrak{H}, g_1, g_2, \ldots, g_m, \ldots)$, где

$$\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_m, \ldots) , \quad \mathfrak{H}_m = (h_{m1}, h_{m2}, \ldots, h_{mi}, \ldots) \quad \text{для}$$
$$m = 1, 2, \ldots ; \tag{13}$$

(IV) систему образующих $\mathfrak{G}_{24} = (\mathfrak{H}, \mathfrak{G}'_{24})$, где $\mathfrak{H}$ — множество (13) и $\mathfrak{G}'_{24}$ состоит из всех элементов прямого слагаемого $G'_{24} = \sum_{m=1}^{\infty} G_m(p)$ группы G_2.

Легко убедиться в том, что мы таким образом построили 4 следующих типа систем образующих группы G_2:

(I) *приводимую систему образующих, которая не является ни сильно приводимой, ни наследственно приводимой* (система $\mathfrak{G}_{21}$);

(II) *сильно приводимую систему образующих, которая не является наследственно приводимой и поэтому тем более не является наследственно сильно приводимой* (система $\mathfrak{G}_{22}$);

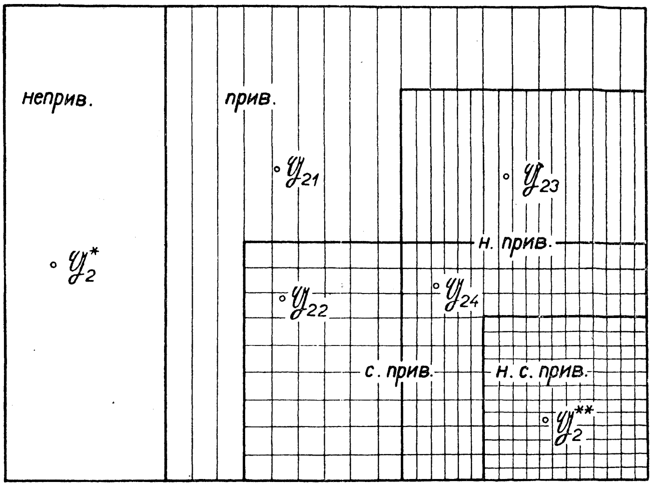
(III) *наследственно приводимую систему образующих, которая не является сильно приводимой* (система $\mathfrak{G}_{23}$);

(IV) *наследственно приводимую систему образующих, которая является одновременно сильно приводимой, но не является наследственно сильно приводимой* (система $\mathfrak{G}_{24}$).

Итак, группа G_2 имеет все логически возможные типы приведенных систем образующих (см. графическое изображение). Этим одновременно доказана независимость понятий, введенных в определениях 1 и 3.

Примечание. Во время подготовки к печати автор заметил, что подобным проблемам посвящены следующие работы: J. Łoś, E. Sąsiada and Z. Słomiński, *On groups with hereditarily generating systems*, Publ. Math. Debrecen *4* (1956), 351—356, и Г. Лось, *Об абелевых группах без кручения с на-*

следственными последовательностями образующих, Бюлл. Польск. Ак. Наук, Отд. III, *4* (1956), 165—167. Авторы вводят в них совсем другие понятия и достигают при помощи них более сложных результатов.



Графическое изображение множества систем образующих группы G_2.

Summary

A NOTE ON THE THEORY OF DIVISIBLE ABELIAN GROUPS

VLASTIMIL DLAB, Praha.

(Received January 8, 1957.)

In this paper a characterization of divisible groups*) by means of their generating systems and by means of a certain property of their subgroups is given. The author starts by introducing the following definitions:

Definition 1. A generating system $\mathfrak{G}$ of a group G is said to be *irreducible*, if the set $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \setminus (g)$ is not the generating system of G for any element $g \in \mathfrak{G}$. In the contrary case we speak about a *reducible* system of a group G. If $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \setminus (g)$ is a generating system of G for any element $g \in \mathfrak{G}$, then $\mathfrak{G}$ is called *strongly reducible* generating system of G.

Definition 2. We call a group G *attainable,* if a proper subgroup $H \subset G$ and an element $g \in G$ exist, such that $\{H, g\} = G$.

*) By a group always an abelian group is meant.

Definition 3. A generating system $\mathfrak{G}$ of a group G is said to be *hereditarily reducible,* if $\mathfrak{G}$ and also every generating system $\mathfrak{G}'$ of G, which is a subset of system $\mathfrak{G}$, is reducible. In the same way let us define the *hereditarily strongly reducible* generating system of a group G.

The author then proves the following assertions:

Theorem 1. *If G is a divisible group, then G is not attainable.*

Theorem 2. *If a group $G \neq 0$ is not attainable, then every generating system of the group G is strongly reducible.*

Theorem 3. *If every generating system of a group G is strongly reducible, then G is divisible.*

At the end the author shows on the example of the group

$$G_2 = \sum_{m=1}^{\infty} G_m(p^{\infty}) + \sum_{m=1}^{\infty} G_m(p)\ ,^{**})$$

that a group can have all logical possible types of generating systems:

(I) an irreducible generating system (the system $\mathfrak{G}_2^*$);

(II) a reducible generating system which is neither strongly reducible nor hereditarily reducible (the system $\mathfrak{G}_{21}$);

(III) a strongly reducible generating system which is not hereditarily reducible and therefore all the more not hereditarily strongly reducible (the system $\mathfrak{G}_{22}$);

(IV) a hereditarily reducible generating system which is not strongly reducible (the system $\mathfrak{G}_{23}$);

(V) a hereditarily reducible generating system which is simultaneously strongly reducible and which is not hereditarily strongly reducible (the system $\mathfrak{G}_{24}$);

(VI) a hereditarily strongly reducible generating system (the system $\mathfrak{G}_2^{**}$).

**) $G(p^\infty)$ is the Prüfer's group of the type p^∞ and $G(p)$ is the cyclic group of the order p (p is assumed to be prime).