Karel Winkelbauer

Эргодическая теорема в линейных полуупорядоченных пространствах с абстрактной нормой

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 1, 1–21

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100274`

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *8* (*83*) ПРАГА 24. III. 1958 г., No 1

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В ЛИНЕЙНЫХ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С АБСТРАКТНОЙ НОРМОЙ

КАРЕЛ ВИНКЕЛЬБАУЭР (Karel Winkelbauer), Прага

(Поступило в редакцию 17/XII 1955 г.)

В настоящей статье*) доказаны некоторые эргодические теоремы для линейных полуупорядоченных пространств, нормированных элементами пространств того же типа, которые являются аналогиями известных эргодических теорем Биркгоффа и Хинчина в теории стационарных случайных процессов (ср. [1], [2]). Эргодические теоремы аналогичного вида в линейных полуупорядоченных пространствах с числовой нормой были рассмотрены Г. Биркгоффом [3] и С. Какутани [4]. Для случая числовой нормы приведенные здесь теоремы вытекают из теоремы Какутани о конкретном представлении пространств указанного типа (см. [4]). Однако, в случае абстрактной нормы невозможно воспользоваться методом конкретного представления; поэтому метод доказательств в настоящей статье — прямой и основывается главным образом на погружении полуупорядоченного пространства в пространство более общего характера.

Пусть X — вещественное линейное множество, которое является одновременно условно полной структурой (определение см. в [5], гл. IV, § 3), и пусть действия сложения и умножения на вещественное число связаны с частичным упорядочением следующими аксиомами: (1) если $x \leqq y$, то $x + z \leqq y + z$; (2) если $x \leqq y$, $\alpha \geqq 0$, то $\alpha x \leqq \alpha y$ (x, y, z — элементы в X, α — вещественное число). Тогда X называется *линейным полуупорядоченным пространством* или *K-пространством* (эквивалентное определение см. в [6], гл. I, § 1). Для K-пространств мы в дальнейшем воспользуемся следующими обозначениями: через $\sup E$ ($\inf E$) мы обозначим верхнюю (нижнюю) грань множества $E \subset X$; если E неограничено сверху

*) В статье даются доказательства теорем, приведенных в докладе, прочитанном автором 2/IX 1955 г. на IV конгрессе чехословацких математиков.

(снизу), положим $\sup E = +\infty (\inf E = -\infty)$; если E — конечное множество и $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то для $\sup E$ ($\inf E$) будем употреблять также запись $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ $(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$. Далее положим: $x_+ = x \vee 0$, $x_- = (-x) \vee 0$, $|x| = x_+ + x_-$. *Положительным* (*отрицательным*) элементом в K-пространстве назовем всякий элемент $x \geqq 0$ $(x \leqq 0)$.

Для последовательности $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ элементов в K-пространстве X положим

$$y_i = \sup_{n \geqq i} x_n\,, \quad z_i = \inf_{n \geqq i} x_n\,,$$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{i \geqq 1} y_i\,, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{i \geqq 1} z_i\,; \tag{1}$$

последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся по упорядоченности* к пределу x (конечному, когда $x \in X$, или к бесконечному, когда $x = +\infty$), если

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = x\,; \tag{2}$$

мы пишем: $x_n \to x$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (сходимость по упорядоченности называется также (o)-сходимостью; см. [6], гл. I, § 2). Для монотонно возрастающей (убывающей) последовательности $\{x_n\}$, сходящейся по упорядоченности к пределу x, мы воспользуемся записью $x_n \nearrow x$ $(x_n \searrow x)$. Если, далее, для последовательности $\{x_n\}$ и для элемента x^* в X имеет место равенство

$$\limsup_{n\to\infty}((x_n \wedge y) \vee z) = (x^* \wedge y) \vee z \tag{3}$$

при всяком $y \in X$ и всяком $z \in X$, причем $y \geqq z$, то будем писать

$$x^* = \operatorname{ind-lim\,sup}_{n\to\infty} x_n\,. \tag{4}$$

Аналогично, если для $x_* \in X$ имеет место равенство

$$\liminf_{n\to\infty}((x_n \wedge y) \vee z) = (x_* \wedge y) \vee z \tag{5}$$

при всяких $y \in X$, $z \in X$, $y \geqq z$, то положим:

$$x_* = \operatorname{ind-lim\,inf}_{n\to\infty} x_n\,. \tag{6}$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся индивидуально* к пределу $x \in X$, если

$$x = \operatorname{ind-lim\,sup}_{n\to\infty} x_n = \operatorname{ind-lim\,inf}_{n\to\infty} x_n\,; \tag{7}$$

мы пишем: $x = \operatorname{ind-lim}\limits_{n\to\infty} x_n$ (ср. определение индивидуальной сходимости в [7]).

Пусть имеются K-пространства X и Y. Говорят, что *K-пространство X нормировано элементами K-пространства Y* (или *посредством Y*), если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие элемент $y = \|x\| \in Y$, т. наз. *абстрактная норма элемента* x, причем выполнены следующие условия: (1) $\|x\| > 0$, если $x \neq 0$; $\|0\| = 0$; (2) $\|x_1 + x_2\| \leqq \|x_1\| + \|x_2\|$; (3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, α — вещественное число; (4) $\| \, |x| \, \| = \|x\|$. Абстрактная норма в X называется *аддитивной для положительных элементов*, если $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ при любых $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$. *Непрерывной* нормой в X мы назовем абстрактную норму, обладающую следующим свойством:

$$\text{если } x_n \in X \ (n = 1, 2, 3, \ldots), \ x \in X, \ x_n \to x, \text{ то } \|x_n - x\| \to 0 \, .$$

Мы будем говорить, что абстрактная норма в X *непрерывна в бесконечности*, если для $x_n \nearrow +\infty$ имеет место $\|x_n\| \to +\infty$.

Пусть дано K-пространство X. Если $x_0 \in X$ и $x \wedge x_0 > 0$ для любого $x > 0$, то x_0 называется *единицей* в X. K-пространство, в котором существует единица, будем называть *K-пространством с единицей*. Фиксированную единицу в K-пространстве будем обозначать через 1.

Пусть T — взаимно однозначное отображение K-пространства X на себя, выполняющее следующие требования: (1) $T(x + y) = Tx + Ty$; (2) $Tx > 0$ тогда и только тогда, когда $x > 0$. Тогда T называется *автоморфизмом* на X. Если X является K-пространством с единицей, то говорят, что автоморфизм T на X *сохраняет единицу* 1, если $T1 = 1$. Если X нормировано посредством K-пространства Y и если для автоморфизма T на X имеет место при любом $x \in X$ соотношение $\|Tx\| = \|x\|$, то T называется автоморфизмом, *сохраняющим норму* в X. Во всем дальнейшем T^i означает автоморфизм на X, определенный соотношениями

$$T^0 x = x \, ; \quad T^i x = T(T^{i-1} x) \, , \quad i = 1, 2, 3, \ldots \, ;$$

$$T^i x = (T^{-1})^{-i} x \, , \quad i = -1, -2, \ldots \, ; \quad x \in X \, ,$$

для данного автоморфизма T на X.

В настоящей статье даются доказательства следующей эргодической теоремы и некоторых вытекающих из нее следствий.

Теорема 1. *Пусть X — K-пространство с единицей, нормированное элементами некоторого K-пространства, с непрерывной и для положительных элементов аддитивной нормой. Пусть T — автоморфизм на X, сохраняющий абстрактную норму и некоторую единицу в X. Пусть абстрактная норма в X непрерывна также в бесконечности. Тогда для любого $x \in X$ последовательность сумм*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} T^i x \, , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \, , \tag{8}$$

сходится индивидуально к некоторому пределу и имеет место неравенство

$$\left\| \operatorname*{ind\text{-}lim}_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i x \right\| \leqq \|x\| \, . \tag{9}$$

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, мы введем ряд дальнейших понятий и выведем некоторые леммы. В приведенных ниже рассуждениях предполагается, что элементарные свойства K-пространств, относящиеся к сложению, умножению на число и к операциям sup и inf, известны; эти элементарные свойства можно найти в монографиях [5] и [6] (обзор нам нужных основных свойств K-пространств дается в § 1 гл. I в [6]).

Прежде всего приведем такие леммы, которые легко вытекают из упомянутых основных свойств K-пространств. В этих леммах X означает данное K-пространство.

Лемма 1. *Если* $x, y, z \in X$, $z \geqq 0$, $z \wedge y_+ = 0$, *то* $(x+y)_+ \wedge z \leqq x_+$.

Доказательство. Пользуясь соотношением $z \wedge 0 = 0$, получим элементарными вычислениями равенства:

$$x_+ - ((x+y)_+ \wedge z) = (x \vee 0) - (((x+y) \wedge z) \vee 0) =$$
$$= ((-y) \vee (-x-y) \vee (x-z) \vee (-z)) \wedge (x \vee 0) .$$

Так как $z \geqq 0$, $z \wedge y_+ = 0$, $z \wedge y \leqq z \wedge y_+$, то $-(z \wedge y) \geqq 0$. Тогда мы имеем: $(-y) \vee (-x-y) \vee (x-z) \vee (-z) \geqq (-y) \vee (-z) = -(z \wedge y) \geqq 0$. Отсюда и из предыдущего вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. *Если* $x_i \in X$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *то*

$$\inf_{1 \leqq j \leqq n} \sup_{j \leqq k \leqq n} \left(\sum_{i=j}^{k} x_i \right)_+ \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)_+ .$$

Доказательство. Из свойств дистрибутивности inf и sup в K-пространстве мы легко выведем равенство:

$$\inf_{1 \leqq j \leqq n} \sup_{j \leqq k \leqq n} \left(\sum_{i=j}^{k} x_i \right)_+ = \sup_{p_1, p_2, \ldots, p_n} \inf_{1 \leqq j \leqq n} \left(\sum_{i=j}^{p_j} x_i \right)_+ ,$$

где возьмем супремум для всех последовательностей $p_1, p_2, \ldots, p_n$ целых чисел таких, что $j \leqq p_j \leqq n$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Если $q_1, q_2, \ldots, q_r$ — последовательность целых чисел такая, что

$$q_1 = 1 ; \quad q_{s+1} = p_{q_s} + 1 , \quad s = 1, 2, \ldots, r-1 ; \quad p_{q_r} = n ,$$

то

$$\inf_{1 \leqq j \leqq n} \left(\sum_{i=j}^{p_j} x_i \right)_+ \leqq \inf_{1 \leqq s \leqq r} \left(\sum_{i=q_s}^{p_{q_s}} x_i \right)_+ \leqq \left(\sum_{s=1}^{r} \sum_{i=q_s}^{p_{q_s}} x_i \right)_+ = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)_+ .$$

Из приведенных здесь соотношений следует справедливость леммы.

Лемма 3. *Пусть* $x_i \in X$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$, $z \in X$, $z \geqq 0$ *и пусть* γ, δ — *индексы такие, что* $0 \leqq \gamma \leqq \delta < m - 1$. *Если*

$$z \wedge \sup_{\delta+1 \leqq k \leqq m-1} \left(\sum_{i=\delta+1}^{k} x_i \right)_+ = 0 ,$$

то

$$z \wedge \inf_{\gamma \leqq j \leqq \delta} \sup_{j \leqq k \leqq m-1} \left(\sum_{i=j}^{k} x_i\right)_+ \leqq \left(\sum_{j=\gamma}^{\delta} x_i\right)_+ .$$

Доказательство. Элементарными вычислениями получим неравенство:

$$z \wedge \inf_{\gamma \leqq j \leqq \delta} \sup_{j \leqq k \leqq m-1} \left(\sum_{i=j}^{k} x_i\right)_+ \leqq \inf_{\gamma \leqq j \leqq \delta} \left(\sup_{j \leqq k \leqq \delta} \left(\sum_{i=j}^{k} x_i\right)_+ \vee \sup_{\delta+1 \leqq k \leqq m-1} \left(z \wedge \left(\sum_{i=j}^{k} x_i\right)_+\right)\right).$$

Согласно лемме 1, получим при $\gamma \leqq j \leqq \delta$, $\delta + 1 \leqq k \leqq m - 1$

$$\left(\sum_{i=j}^{k} x_i\right)_+ \wedge z = \left(\sum_{i=j}^{\delta} x_i + \sum_{i=\delta+1}^{k} x_i\right)_+ \wedge z \leqq \left(\sum_{i=j}^{\delta} x_i\right)_+ .$$

Из леммы 2 следует неравенство

$$\inf_{\gamma \leqq j \leqq \delta} \sup_{j \leqq k \leqq \delta} \left(\sum_{i=j}^{k} x_i\right)_+ \leqq \left(\sum_{i=\gamma}^{\delta} x_i\right)_+ .$$

Из приведенных здесь неравенств легко вытекает утверждение леммы.

Теперь перейдем к одной лемме, касающейся определенной выше сходимости по упорядоченности в K-пространстве. Эта лемма является аналогией известной теоремы для сходимости последовательностей вещественных чисел. Для доказательства этой леммы мы воспользуемся элементарными свойствами рассматриваемого типа сходимости; они приведены, например, в § 2 гл. I в [6].

Лемма 4. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *элементов в K-пространстве X сходится по упорядоченности к конечному пределу x. Тогда последовательность*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i , \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

сходится по упорядоченности также к пределу x.

Доказательство. Для того, чтобы $x_n \to x$, где x — конечный элемент, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность $u_n \searrow 0$, что $|x_n - x| \leqq u_n$ (см. [6], гл. I, § 2, 2.12е). Итак, пусть $\{u_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — последовательность, обладающая указанным свойством. Положим

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Имеем:

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} u_i + \frac{1}{n+1} u_{n+1} \leqq \frac{n}{n+1} v_n + \frac{1}{n+1} v_n = v_n ,$$

ибо $u_{n+1} \leqq u_n \leqq v_n \leqq u_1$. Значит, $\{v_n\}$ монотонно убывает и сходится к некоторому пределу $v \geqq 0$. Если $n > m$, то

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} u_i + \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{n} u_i \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} u_i + u_m .$$

Переходя в найденном неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим: $v \leqq u_m$. Последнее неравенство даст при $m \to \infty$ неравенство $v \leqq 0$; следовательно, $v = 0$, т. е. $v_n \searrow 0$. Так как

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i - x \right| \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - x| \leqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i = v_n ,$$

то найдем, согласно приведенному выше критерию сходимости, что утверждение леммы справедливо.

Пусть P — оператор, отображающий K-пространство X в себя и удовлетворяющий следующим условиям: (1) $0 \leqq Px \leqq x$ для любого $x \geqq 0$; (2) $P(Px) = Px$; (3) $P(x + y) = Px + Py$. Тогда P называется *проектором* в X (эквивалентное определение см. в § 2 гл. III в [6]; ср. там же теорему 2.23). Обозначим множество всех проекторов в данном K-пространстве X через $\mathfrak{P}$. Если положить $P \leqq Q$ в $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда, если $P(Qx) = Px$ при любом $x \in X$, то $\mathfrak{P}$ образует относительно соотношения $\leqq$ полную алгебру Буля. Единица в алгебре проекторов $\mathfrak{P}$, которую обозначим через I, есть тождественный оператор: $Ix = x$; нулевой проектор в алгебре $\mathfrak{P}$, который обозначим через O, есть оператор, тождественно равный нулю: $Ox = 0$. (Доказательства приведенных здесь утверждений см. в § 2 гл. III в [6].)

Пусть p — элемент данного K-пространства X. Обозначим через $\mathfrak{Q}_p$ множество всех проекторов P в X таких, что $P(p) = p$. Очевидно, $I \in \mathfrak{Q}_p$. Проектор $\inf\{P\colon P \in \mathfrak{Q}_p\}$ называется *проектором, порожденным элементом* p, и обозначается через $[p]$ (равносильное определение см. в 2.3 гл. III в [6]).

В дальнейшем мы воспользуемся основными свойствами проекторов без каких-либо ссылок; они описаны в § 2 гл. III в [6], именно: общие свойства проекторов в 2.2 и свойства проекторов, порожденных элементами, в 2.3. Заметим, что обозначениями, введенными в K-пространствах в связи с частичным упорядочением, мы будем пользоваться в алгебре Буля проекторов в том же смысле. Дополнение проектора P в алгебре Буля $\mathfrak{P}$ мы будем обозначать через $I - P$.

Перейдем теперь к изучению некоторых свойств автоморфизмов на K-пространствах. Прежде всего, автоморфизм есть однородный оператор (ср. [6], гл. VII, 1.13). Если T — автоморфизм на K-пространстве X и $x_\alpha \in X$ ($\alpha \in A$), $x \in X$, то легко убедимся в том, что имеют место равенства:

$$T(\sup_\alpha x_\alpha) = \sup_\alpha Tx_\alpha , \quad \text{если} \quad \sup_\alpha x_\alpha \in X ;$$

$$T(\inf_\alpha x_\alpha) = \inf_\alpha Tx_\alpha , \quad \text{если} \quad \inf_\alpha x_\alpha \in X ;$$

$$Tx_+ = (Tx)_+ , \quad Tx_- = (Tx)_- , \quad T|x| = |Tx| .$$

Дальнейшие свойства автоморфизмов выражают следующие леммы; в них T означает данный автоморфизм на K-пространстве X.

Лемма 5. *Если P — проектор в X, то оператор TPT^{-1}, определенный соотношением $TPT^{-1}x = T(P(T^{-1}x))$ при любом $x \in X$, образует также проектор в X. Если P, P_α ($\alpha \in A$) — проекторы в X, то*

$$T(\sup_\alpha P_\alpha)\,T^{-1} = \sup_\alpha TP_\alpha T^{-1}, \quad T(\inf_\alpha P_\alpha)\,T^{-1} = \inf_\alpha TP_\alpha T^{-1},$$
$$T(I-P)\,T^{-1} = I - TPT^{-1}.$$

Доказательство. Пусть P — проектор в X. Если $x \geqq 0$, то $T^{-1}x \geqq 0$, $P(T^{-1}x) \geqq 0$, $TPT^{-1}x \geqq 0$; так как $T^{-1}x \geqq 0$, то $P(T^{-1}x) \leqq T^{-1}x$, $TPT^{-1}x \leqq \leqq x$. При любом x, очевидно, $TPT^{-1}(TPT^{-1}x) = TPT^{-1}x$. Ясно, что оператор TPT^{-1} — аддитивный. Этим доказана первая часть леммы. Теперь пусть P_α ($\alpha \in A$) — проекторы в X. Положим $R = \sup P_\alpha$, $Q = \sup TP_\alpha T^{-1}$. При любых $x \geqq 0$ и α имеем $P_\alpha(T^{-1}x) \leqq R(T^{-1}x)$, $TP_\alpha T^{-1}x \leqq TRT^{-1}x$, т. е. $Qx \leqq TRT^{-1}x$. Отсюда следует неравенство $Q \leqq TRT^{-1}$. Аналогично, при любых $x \geqq 0$ и α имеет место $TP_\alpha T^{-1}(Tx) \leqq Q(Tx)$, $T^{-1}(TP_\alpha T^{-1}(Tx)) = = P_\alpha x \leqq T^{-1}QTx$. Следовательно, $R \leqq T^{-1}QT$ или $TRT^{-1} \leqq Q$. Наконец, мы получим: $TRT^{-1} = Q$. Подобным же образом мы доказали бы и остальные равенства.

Лемма 6. *Если $x \in X$ и n — натуральное число, то*

$$T^j\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} T^i x\right)_+\right]T^{-j} = \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} T^{i+j} x\right)_+\right], \quad j = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Положим при данных x, n, j

$$P = \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} T^i x\right)_+\right], \quad Q = \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} T^{i+j} x\right)_+\right].$$

Согласно лемме 5, T^jPT^{-j} и $T^{-j}QT^j$ являются проекторами в X. Так как

$$T^jPT^{-j}\left(\sum_{i=0}^{n-1} T^{i+j}x\right)_+ = T^j\left(P\left(\sum_{i=0}^{n-1} T^i x\right)_+\right) = T^j\left(\sum_{i=0}^{n-1} T^i x\right)_+ = \left(\sum_{i=0}^{n-1} T^{i+j} x\right)_+,$$

то $T^jPT^{-j} \geqq Q$ (ср. определение проектора, порожденного элементом). Аналогичным образом получим, что $T^{-j}QT^j \geqq P$ или $Q \geqq T^jPT^{-j}$. Лемма доказана.

Введем еще одно определение. Пусть T — автоморфизм на K-пространстве X. Если проектор P в X удовлетворяет условию: $TPT^{-1}x = Px$ для любого $x \in X$, то будем говорить, что P есть *проектор, инвариантный относительно автоморфизма T*.

Пусть U — операция, отображающая K-пространство X в K-пространство Y. Операция U называется: *аддитивной*, если $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + + U(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in X$; *однородной*, если $U(\alpha x) = \alpha U(x)$ для любого $x \in X$ и любого вещественного числа α; *положительной*, если $U(x) \geqq 0$ для любого $x \geqq 0$; *непрерывной*, если $U(x_n) \to U(x)$ при $x_n \to x$, где x — конечный элемент (т. е. лежит в X). Если операция аддитивна и положительна, то она однородна (см. [6], гл. VII, 1.13). Достаточным условием для того, чтобы аддитивная операция U была непрерывной, является непрерывность U в точке 0; т. е., из $x_n \to 0$ вытекает $U(x_n) \to 0$ (ср. [6], гл. VII, 2.13).

Теперь мы можем сформулировать и доказать фундаментальную лемму, на которой основывается одна часть доказательства теоремы 1.

Лемма 7. *Пусть X — K-пространство с единицей и пусть* 1 *— данная единица в X. Пусть U — положительная и аддитивная непрерывная операция, отображающая X в K-пространство Y. Далее, пусть T — автоморфизм на X, сохраняющий единицу* 1 *и такой, что для любого $x \in X$ имеет место равенство: $U(Tx) = U(x)$. Если P — проектор, инвариантный относительно автоморфизма T, то при любом $x \in X$ и для любого вещественного λ имеет место неравенство*:

$$U((\sup_{n\geqq 1} P^x_{n\lambda})\, Px) \leqq \lambda U((\sup_{n\geqq 1} P^x_{n\lambda})\, P1)\,,$$

где $P^x_{n\lambda}$ означает проектор, порожденный элементом

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda 1 - T^i x)\right)_+ .$$

Доказательство. Пусть x — данный элемент в X и λ — данное вещественное число. Для краткости положим $x_i = P(\lambda 1 - T^i x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и будем писать $P^x_{n\lambda}$ без индексов x и λ, т. е. P_n означает проектор $P^x_{n\lambda}$ для данных x и λ. Так как

$$\sup_{1\leqq n\leqq j} P_n \nearrow \sup_{n\geqq 1} P_n\,, \quad j \to \infty\,,$$

то из непрерывности U следует, что

$$U((\sup_{1\leqq n\leqq j} P_n)\, x_0) \to U((\sup_{n\geqq 1} P_n)\, x_0)\,, \quad j \to \infty\,.$$

Согласно лемме 4, также

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} U((\sup_{1\leqq n\leqq j} P_n)\, x_0) \to U((\sup_{n\geqq 1} P_n)\, x_0)\,, \quad m \to \infty\,.$$

Лемма будет доказана, если мы покажем, что

$$\sum_{j=1}^{m} U((\sup_{1\leqq n\leqq j} P_n)\, x_0) \geqq 0\,, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

так как тогда будет

$$\lambda U((\sup_{n\geqq 1} P_n)\, P1) - U((\sup_{n\geqq 1} P_n)\, Px) = U((\sup_{n\geqq 1} P_n)\, x_0) \geqq 0\,.$$

Пусть m — данное натуральное число. Положим

$$R_j = \sup_{1\leqq n\leqq m-j} T^j P_n T^{-j}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1\,.$$

Из лемм 5 и 6 следует, что R_j является проектором, порожденным элементом

$$\sup_{j \leq k \leq m-1} \left(\sum_{i=j}^{k} T^i(\lambda 1 - x) \right)_+$$

(при этом воспользуемся теоремами 2.31c, 2.32c гл. III в [6]). Из инвариантности P относительно T вытекает, что $x_j = T^j x_0$. Так как $U(T^j z) = U(z)$ для любого $z \in X$ и для любого целого j, то можем писать:

$$\sum_{j=1}^{m} U((\sup_{1 \leq n \leq j} P_n)\, x_0) = \sum_{j=0}^{m-1} U((\sup_{1 \leq n \leq m-j} P_n)\, x_0) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} U(T^j(\sup_{1 \leq n \leq m-j} P_n)\, T^{-j} x_j) = \sum_{j=0}^{m-1} U(R_j x_j) = U\left(\sum_{j=0}^{m-1} R_j x_j \right),$$

ибо операция U аддитивна. Пользуясь положительностью операции U, мы видим, что для доказательства леммы достаточно будет доказать неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-1} R_j x_j \geqq 0 \tag{10}$$

(разумеется, при любом m).

Полагая $R_j^0 = I - R_j$, $R_j^1 = R_j$, мы легко убедимся методом математической индукции в том, что

$$I = \sum_{r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}} \inf_{0 \leq j \leq m-1} R_j^{r_j},$$

где суммируется для всех последовательностей $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}$нулей и единиц, и знак суммы означает взятие супремума попарно дизъюнктных элементов в алгебре Буля проекторов. Если мы покажем, что для любой последовательности $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}$ нулей и единиц

$$(\inf_{0 \leq j \leq m-1} R_j^{r_j}) \sum_{j=0}^{m-1} R_j x_j \geqq 0, \tag{11}$$

то, очевидно, имеет место неравенство (10).

Пусть $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}$ — данная последовательность нулей и единиц такая, что существует j, для которого $r_j = 1$. Тогда существуют индексы $0 \leqq \gamma_1 \leqq \delta_1 < \gamma_2 \leqq \delta_2 < \ldots < \gamma_q \leqq \delta_q \leqq m - 1$ такие, что при любом j, $0 \leqq j \leqq m - 1$, имеем $r_j = 1$ тогда и только тогда, если существует p, $1 \leqq p \leqq q$, для которого $\gamma_p \leqq j \leqq \delta_p$. Легко убедимся в том, что в этом случае

$$(\inf_{0 \leq j \leq m-1} R_j^{r_j}) \sum_{j=0}^{\gamma_1 - 1} R_j x_j = 0, \quad (\inf_{0 \leq j \leq m-1} R_j^{r_j}) \sum_{j=\delta_q+1}^{m-1} R_j x_j = 0,$$

$$(\inf_{0 \leq j \leq m-1} R_j^{r_j}) \sum_{j=\delta_p+1}^{\gamma_{p+1}-1} R_j x_j = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, q-1.$$

Например, при $\gamma_1 > 0$

$$(\inf_{0 \leqq j \leqq m-1} R_j^{r_j}) \sum_{j=0}^{\gamma_1 - 1} R_j x_j = \sum_{j=0}^{\gamma_1 - 1} (\inf_{0 \leqq k \leqq m-1} R_k^{r_k} \wedge (I - R_j)) R_j x_j = \sum_{j=0}^{\gamma_1 - 1} O x_j = 0 .$$

Следовательно, мы получим:

$$(\inf_{0 \leqq j \leqq m-1} R_j^{r_j}) \sum_{j=0}^{m-1} R_j x_j = \sum_{p=1}^{q} (\inf_{0 \leqq j \leqq m-1} R_j^{r_j}) \sum_{j=\gamma_p}^{\delta_p} R_j x_j . \tag{12}$$

Пусть дано p $(1 \leqq p \leqq q)$. Обозначим через Q_p проектор, порожденный элементом

$$\left(\sum_{i=\gamma_p}^{\delta_p} T^i(\lambda 1 - x)\right)_+ .$$

Нашей целью будет доказать неравенство

$$\inf_{\substack{\gamma_p \leqq j \leqq \delta_p + 1 \\ j \leqq m-1}} R_j^{r_j} \leqq Q_p . \tag{13}$$

I случай: $\delta_p = m - 1$. Согласно лемме 2 имеет место неравенство

$$\inf_{\gamma_p \leqq j \leqq m-1} \sup_{j \leqq k \leqq m-1} \left(\sum_{i=j}^{k} (T^i(\lambda 1 - x)\right)_+ \leqq \left(\sum_{i=\gamma_p}^{m-1} (T^i(\lambda 1 - x)\right)_+ .$$

Так как

$$\inf_{\gamma_p \leqq j \leqq m-1} R_j = \left[\inf_{\gamma_p \leqq j \leqq m-1} \sup_{j \leqq k \leqq m-1} \left(\sum_{i=j}^{k} (T^i(\lambda 1 - x)\right)_+\right],$$

то из последнего неравенства непосредственно вытекает (13).

II случай: $\delta_p < m - 1$. Для любого $z \geqq 0$, обладающего свойством

$$z \wedge \sup_{\delta_p + 1 \leqq k \leqq m-1} \left(\sum_{i=\delta_p+1}^{k} T^i(\lambda 1 - x)\right)_+ = 0 ,$$

справедливо неравенство

$$z \wedge \inf_{\gamma_p \leqq j \leqq \delta_p} \sup_{j \leqq k \leqq m-1} \left(\sum_{i=j}^{k} T^i(\lambda 1 - x)\right)_+ \leqq \left(\sum_{i=\gamma_p}^{\delta_p} T^i(\lambda 1 - x)\right)_+$$

(см. лемму 3), из которого непосредственно следует неравенство

$$(\inf_{\gamma_p \leqq j \leqq \delta_p} R_j) \wedge [z] \leqq Q_p .$$

Так как $I - R_{\delta_p + 1} = \sup [z]$, где возьмем супремум для всех $z \geqq 0$, обладающих приведенным выше свойством, то из последнего неравенства непосредственно вытекает (13). Положим

$$\bar{Q}_p = \inf_{\substack{\gamma_p \leqq j \leqq \delta_p + 1 \\ j \leqq m-1}} R_j^{r_j} .$$

Согласно (13), мы получим:

$$\bar{Q}_p \sum_{j=\gamma_p}^{\delta_p} R_j x_j = (\bar{Q}_p \wedge Q_p) \sum_{j=\gamma}^{\delta_p} R_j x_j =$$
$$= \sum_{j=\gamma_p}^{\delta_p} (\bar{Q}_p \wedge Q_p \wedge R_j) R_j x_j = \sum_{j=\gamma_p}^{\delta_p} (\bar{Q}_p \wedge Q_p) x_j =$$
$$= \sum_{j=\gamma_p}^{\delta_p} (\bar{Q}_p \wedge Q_p) P(T^j(\lambda 1 - x)) =$$
$$= (\bar{Q}_p \wedge P) \left(Q_p \sum_{j=\gamma_p}^{\delta_p} T^j(\lambda 1 - x) \right) = \bar{Q}_p \left(P \left(\sum_{j=\gamma_p}^{\delta_p} T^j(\lambda 1 - x) \right)_+ \right) \geqq 0 \, .$$

Полученный результат имеет место при всяком p, $p = 1, 2, \ldots, q$; следовательно,

$$\sum_{p=1}^{q} \left(\inf_{0 \leqq j \leqq m-1} R_j^{r_j} \right) \sum_{j=\gamma_p}^{\delta_p} R_j x_j = \sum_{p=1}^{q} \left(\inf_{0 \leqq j \leqq m-1} R_j^{r_j} \right) \left(\bar{Q}_p \sum_{j=\gamma_p}^{\delta_p} R_j x_j \right) \geqq 0 \, .$$

Согласно (12), отсюда следует неравенство (11), чем и заканчивается доказательство леммы, так как для $r_1 = r_2 = \ldots = r_{m-1} = 0$ (11) очевидно.

Пусть даны K-пространство X с единицей и некоторая единица 1 в X. *Единичным элементом* в X относительно единицы 1 мы будем называть всякий элемент $e \in X$, для которого существует проектор P в X такой, что имеет место равенство $e = P1$. Множество всех единичных элементов в X относительно данной единицы 1 называется *базой K-пространства* X (относительно этой единицы) и обозначается через $\mathfrak{F}(X)$. В § 3 гл. III в [6] доказана следующая теорема об изоморфизме базы и алгебры проекторов в K-пространстве с единицей:

(A) Множество $\mathfrak{F}(X)$ образует относительно частичного упорядочения, которым оно обладает как подмножество пространства X, полную алгебру Буля с единицей 1 и нулевым элементом 0, в которой операции sup и inf имеют тот же смысл как в X (т. е. $\mathfrak{F}(X)$ является подструктурой структуры X). Полная алгебра Буля $\mathfrak{F}(X)$ изоморфна полной алгебре Буля $\mathfrak{P}$ проекторов в X; этот изоморфизм осуществляется посредством соответствия каждому элементу $e \in \mathfrak{F}(X)$ проектора $[e]$.

В дальнейшем обозначим через $\Omega_0(X)$ множество всех отображений ω пространства вещественных чисел в базу $\mathfrak{F}(X)$, которые удовлетворяют условию: $\omega(\lambda_1) \leqq \omega(\lambda_2)$ при $\lambda_1 \leqq \lambda_2$ (λ_1, λ_2 — любые вещественные числа). Если $\omega, \omega' \in \Omega_0(X)$ и $\omega'(\lambda_1) \leqq \omega(\lambda_2)$ при любых $\lambda_1 < \lambda_2$, то будем писать $\omega \leqq \omega'$. Если одновременно $\omega \leqq \omega'$ и $\omega' \leqq \omega$, то будем писать $\omega = \omega'$ и два таких отображения, как элементы в $\Omega_0(X)$, будем считать равными. Строгое неравенство $\omega < \omega'$ означает, как обычно, что $\omega \leqq \omega'$, но при этом $\omega \neq \omega'$.

Лемма 8. *Множество $\Omega_0(X)$ является относительно в нем определенных отношений $=$ и $\leqq$ полной структурой, причем*

$$(\sup_\alpha \omega_\alpha)(\lambda) = \inf_\alpha \omega_\alpha(\lambda)\ , \quad (\inf_\alpha \omega_\alpha)(\lambda) = \sup_\alpha \omega_\alpha(\lambda)\ , \quad -\infty < \lambda < +\infty\ ,$$

для любого семейства ω_α $(\alpha \in A)$ элементов в $\Omega_0(X)$.

Доказательство. Из определений отношений $=$ и $\leqq$ ясно, что $\Omega_0(X)$ частично упорядочено. Пусть ω_α $(\alpha \in A)$ — семейство элементов в $\Omega_0(X)$. Положим

$$\omega(\lambda) = \inf_\alpha \omega_\alpha(\lambda)\ , \quad -\infty < \lambda < +\infty\ .$$

Очевидно, что $\omega \in \Omega_0(X)$ и $\omega_\alpha \leqq \omega$ при любом α. Если $\omega' \in \Omega_0(X)$ и $\omega_\alpha \leqq \omega'$ при любом α, то $\omega'(\lambda_1) \leqq \omega_\alpha(\lambda_2)$ для любых $\lambda_1 < \lambda_2$ и для любого α. Отсюда легко следует неравенство $\omega \leqq \omega'$. Следовательно, $\omega = \sup\limits_\alpha \omega_\alpha$. Аналогичным образом доказывается и второе равенство. Лемма доказана.

Если $\omega_n \in \Omega_0(X)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то положим:

$$\limsup_{n\to\infty} \omega_n = \inf_{i\geqq 1} \sup_{n\geqq i} \omega_n\ , \quad \liminf_{n\to\infty} \omega_n = \sup_{i\geqq 1} \inf_{n\geqq i} \omega_n\ ,$$

где inf и sup взяты в смысле частичного упорядочения в $\Omega_0(X)$ (ср. лемму 8). Если $\omega = \limsup\limits_{n\to\infty} \omega_n = \liminf\limits_{n\to\infty} \omega_n$, то будем писать: $\omega_n \to \omega$.

Через $\Omega(X)$ обозначим множество всех $\omega \in \Omega_0(X)$, обладающих свойствами:

$$\inf_{-\infty<\lambda<+\infty} \omega(\lambda) = 0\ , \qquad \sup_{-\infty<\lambda<+\infty} \omega(\lambda) = 1\ .$$

Будем говорить, что последовательность $\{\omega_n\}$ элементов в $\Omega(X)$ *почти равномерно сходится* к пределу $\omega \in \Omega(X)$, и будем писать $\omega_n \rightrightarrows \omega$, если существует счетное множество попарно дизъюнктных элементов e_i в полной алгебре Буля $\mathfrak{F}(X)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} e_i = 1$, причем для каждого i справедливо следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0(\varepsilon, i)$ такое, что при всех $n \geqq n_0(\varepsilon, i)$ и $-\infty < \lambda < +\infty$

$$e_i \wedge \omega_n(\lambda - \varepsilon) \leqq e_i \wedge \omega(\lambda) \leqq e_i \wedge \omega_n(\lambda + \varepsilon)\ .$$

В монографии [6] целый § 1 гл. IV посвящен доказательству следующей теоремы:

(Б) В множестве $\Omega(X)$ определены действия сложения и умножения на вещественное число однозначно требованиями:

(1) Если $\omega, \omega' \in \Omega(X)$ такие, что существуют элементы $e_i \in \mathfrak{F}(X)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, которые попарно дизъюнктны и $\sum\limits_{i=1}^{m} e_i = 1$, причем

$$\omega(\lambda) = \sup\{e_i\colon\ \lambda_i < \lambda,\ i = 1, 2, \ldots, m\},\ -\infty < \lambda < +\infty\ ,$$
$$\omega'(\lambda) = \sup\{e_i\colon\ \lambda'_i < \lambda,\ i = 1, 2, \ldots, m\},\ -\infty < \lambda < +\infty\ ,$$

где λ_i, λ'_i — вещественные числа, то при любых вещественных α и β

$$(\alpha\omega + \beta\omega')(\lambda) = \sup\{e_i\colon \alpha\lambda_i + \beta\lambda'_i < \lambda,\ i = 1, 2, \ldots, m\}\,,$$
$$-\infty < \lambda < +\infty\,.$$

(2) Если $\omega_n, \omega'_n \in \Omega(X)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\omega, \omega' \in \Omega(X)$, $\omega_n \rightrightarrows \omega$, $\omega'_n \rightrightarrows \omega'$, α и β — вещественные числа, то

$$\alpha\omega_n + \beta\omega'_n \rightrightarrows \alpha\omega + \beta\omega'\,.$$

При этом множество $\Omega(X)$ образует относительно определенных таким образом алгебраических операций и относительно частичного упорядочения, которым оно обладает как подмножество в $\Omega_0(X)$, K-пространство с единицей, каждая база которого изоморфна (в смысле частичного упорядочения) алгебре $\mathfrak{F}(X)$. Далее, для каждого $\omega \in \Omega(X)$ имеет место формула

$$\omega(\lambda - h) = (\omega + h\bar{1})(\lambda)\,,$$

где λ, h — вещественные числа и $\bar{1}(\lambda) = 0$ при $\lambda < 1$ и $\bar{1}(\lambda) = 1$ при $\lambda > 1$.

С помощью этой теоремы докажем следующую лемму.

Лемма 9. *Пусть* ω, ω'_n, $\omega''_n \in \Omega(X)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *и пусть*

$$\omega'_n = \frac{1}{n}\,\omega + \omega''_n\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда существует последовательность попарно дизъюнктных элементов $e_i \in \mathfrak{F}(X)$ $(i = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$, $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} e_i = 1$, *такая, что для всякого* i *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $n_0(\varepsilon, i)$, *обладающее свойством*:

$$e_i \wedge \omega'_n(\lambda - \varepsilon) \leqq e_i \wedge \omega''_n(\lambda) \leqq e_i \wedge \omega'_n(\lambda + \varepsilon)\,;$$
$$n \geqq n_0(\varepsilon, i)\,, \quad -\infty < \lambda < +\infty\,. \tag{14}$$

Доказательство. Положим $e_i = \omega(i + 1) - \omega(i)$, $\omega'_{ni}(\lambda) = e_i \wedge \omega'_n(\lambda)$, $\omega''_{ni}(\lambda) = e_i \wedge \omega''_n(\lambda)$. Так как

$$X_i = \{x\colon x \in X,\ [e_i]\, x = x\}$$

является K-пространством с единицей e_i (в силу индуцированных в нем алгебраических операций и частичного упорядочения) и с базой $\mathfrak{F}(X_i)$, то, если $\Omega(X_i)$ имеет определенный выше смысл, $\omega'_{ni} \in \Omega(X_i)$, $\omega''_{ni} \in \Omega(X_i)$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Полагая $\bar{e}_i(\lambda) = 0$ при $\lambda < 1$ и $\bar{e}_i(\lambda) = e_i$ при $\lambda > 1$ и выбирая $n_0(\varepsilon,i) > \dfrac{i+1}{\varepsilon}$ при $i \geqq 0$ и $n_0(\varepsilon,i) > -\dfrac{i}{\varepsilon}$ при $i < 0$, легко убедимся в том, что в $\Omega(X_i)$ имеют место неравенства

$$\omega'_{ni} - \varepsilon\bar{e}_i \leqq \omega''_{ni} \leqq \omega'_n + \varepsilon\bar{e}_i\,, \quad n \geqq n_0(\varepsilon, i)\,.$$

Эти неравенства являются лишь другим видом неравенств (14); следовательно, лемма справедлива.

Пусть X — K-пространство с единицей и пусть 1 — данная единица в X. Если для $x \in X$ отображение ω пространства вещественных чисел в базу $\mathfrak{F}(X)$ удовлетворяет условиям: (1) $[\omega(\lambda)]\, x \leqq \lambda\omega(\lambda)$; (2) $(I - [\omega(\lambda)])x \geqq \geqq \lambda(1 - \omega(\lambda))$ при любом λ, то ω называется *характеристикой* элемента x относительно единицы 1. В § 4 гл. III в [6] доказано:

(В) Для любого $x \in X$ отображение ω пространства вещественных чисел в базу $\mathfrak{F}(X)$ является характеристикой элемента x относительно единицы 1 тогда и только тогда, если оно удовлетворяет соотношениям

$$P_\lambda 1 \leqq \omega(\lambda) \leqq \bar{P}_\lambda 1\,, \quad -\infty < \lambda < +\infty\,,$$

где

$$P_\lambda = [(\lambda 1 - x)_+]\,, \quad \bar{P}_\lambda = I - [(x - \lambda 1)_+]\,.$$

Множество X_1 элементов K-пространства X называется *нормальным подпространством* пространства X, если X_1, в силу индуцированных в нем алгебраических операций и частичного упорядочения, само представляет собой K-пространство и если из $x \in X_1$, $y \in X$, $|y| \leqq |x|$ следует $y \in X_1$ (см. определения в [6], гл. II, 1.12, 1.24). Если X_1 — нормальное подпространство пространства X и E — ограниченное в X_1 множество его элементов, то точные грани E в X_1 совпадают с точными гранями E в X (см. [6], гл. II, 1.27).

Пусть X — K-пространство с единицей и пусть 1 — фиксированная единица в X. Обозначим через $\Omega_1(X)$ множество всех характеристик (относительно единицы 1) всех элементов в X. Тогда имеет место следующая теорема о погружении K-пространства с единицей (см. § 2 гл. IV в [6]):

(Д) Множество $\Omega_1(X) \subset \Omega(X)$, в силу индуцированных в нем алгебраических операций и частичного упорядочения, является нормальным подпространством K-пространства $\Omega(X)$, изоморфным (ср. [6], гл. I, 1.82) K-пространству X. Этот изоморфизм осуществляется посредством сопоставления каждому элементу $x \in X$ его характеристики.

В следующей лемме X — K-пространство с единицей и 1 — фиксированная единица в X; $\Omega(X)$ имеет определенный выше смысл.

Лемма 10. *Пусть $x_n \in X$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), $x \in X$, ω_n — характеристика элемента x_n, ω — характеристика элемента x. Последовательность $\{x_n\}$ сходится индивидуально к пределу x тогда и только тогда, если $\omega_n \to \omega$ в смысле сходимости по упорядоченности в $\Omega(X)$, т. е. как в $\Omega_0(X)$.*

Доказательство. I. Пусть $\omega_n \to \omega$ в $\Omega(X)$. Если $\omega', \omega'' \in \Omega_1(X)$, $\omega' \geqq \omega''$, то

$$(\omega_n \wedge \omega') \vee \omega'' \to (\omega \wedge \omega') \vee \omega'' \tag{15}$$

в $\Omega(X)$. Так как, согласно теореме (Д) о погружении, $\Omega_1(X)$ является нормальным подпространством пространства $\Omega(X)$, то (15) справедливо также в смысле сходимости по упорядоченности в $\Omega_1(X)$. Из изоморфизма $\Omega_1(X)$ и X сразу следует, что $x = \text{ind-lim}\, x_n$.

II. Пусть $x = \text{ind-lim}\, x_n$. Положим: $\omega^* = \limsup \omega_n$, $\omega^{**} = \liminf \omega_n$ в $\Omega_0(X)$. Легко убедимся в том, пользуясь теоремой (Д), что тогда

$$(\omega^* \wedge \omega') \vee \omega'' = (\omega \wedge \omega') \vee \omega'' = (\omega^{**} \wedge \omega') \vee \omega''$$

для всяких $\omega', \omega'' \in \Omega_1(X)$, $\omega' \geqq \omega''$. Отсюда сразу вытекает, что $\omega^* = \omega = \omega^{**}$. Следовательно, $\omega_n \to \omega$ в смысле сходимости по упорядоченности в $\Omega(X)$.

Доказательство теоремы 1. I. Пусть X — K-пространство с единицей, нормированное элементами некоторого K-пространства, с непрерывной и для положительных элементов аддитивной нормой. Пусть T — автоморфизм на X, сохраняющий абстрактную норму и данную единицу 1. Пусть x — данный элемент в X. Положим

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i x ,$$

$$P_{n\lambda} = [(\lambda 1 - y_n)_+] , \quad \bar{P}_{n\lambda} = I - [(y_n - \lambda 1)_+] ,$$

$$\omega_n(\lambda) = P_{n\lambda} 1 , \quad \bar{\omega}_n(\lambda) = \bar{P}_{n\lambda} 1 , \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad -\infty < \lambda < +\infty .$$

Согласно теореме (В), ω_n и $\bar{\omega}_n$ — характеристики элемента y_n (относительно единицы 1) и $\omega_n = \bar{\omega}_n$ в смысле равенства в $\Omega_0(X)$. Обозначим через ω^* наибольший предел $\limsup \omega_n$ и через ω^{**} наименьший предел $\liminf \omega_n$ элементов ω_n в $\Omega_0(X)$. Докажем, что $\omega^* = \omega^{**}$.

Допустим, что $\omega^* \neq \omega^{**}$, т. е. $\omega^{**} < \omega^*$. Отсюда вытекает, что существуют вещественные числа $\alpha < \beta$ такие, что $\omega^{**}(\alpha) - \omega^*(\beta) > 0$. Так как $\omega_n = \bar{\omega}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то также $\omega^* = \limsup \bar{\omega}_n$. Следовательно, согласно лемме 8 получим:

$$\omega^{**}(\alpha) - \omega^*(\beta) = \inf_{i \geqq 1} \sup_{n \geqq i} P_{n\alpha} 1 - \sup_{i \geqq 1} \inf_{n \geqq i} \bar{P}_{n\beta} 1 > 0 .$$

Пусть теперь P будет проектор, определенный равенством:

$$P = \inf_{i \geqq 1} \sup_{n \geqq i} P_{n\alpha} - \sup_{i \geqq 1} \inf_{n \geqq i} \bar{P}_{n\beta} .$$

Согласно лемме 5,

$$TPT^{-1} = \inf_{i \geqq 1} \sup_{n \geqq i} TP_{n\alpha}T^{-1} - \sup_{i \geqq 1} \inf_{n \geqq i} T\bar{P}_{n\beta}T^{-1} .$$

Из леммы 6 следуют соотношения

$$TP_{n\alpha}T^{-1} = [(\alpha 1 - y'_n)_+] , \quad T\bar{P}_{n\beta}T^{-1} = I - [(y'_n - \beta 1)_+] , \tag{16}$$

$$y'_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^{i+1} x .$$

Так как $y_{n+1} = \frac{1}{n+1} x + \frac{n}{n+1} y'_n$, то, согласно теореме (Д) о погружении K-пространства с единицей, имеет место равенство

$$\omega_{n+1} = \frac{1}{n+1} \omega + \frac{n}{n+1} \omega'_n ,$$

где ω — некоторая характеристика элемента x и ω_n' — некоторая характеристика элемента y_n'. Полагая

$$\omega_n'' = \frac{n}{n+1}\,\omega_n' ,$$

мы видим, что, согласно лемме 9, существует последовательность попарно дизъюнктных элементов $e_i \in \mathfrak{F}(X)$ $(i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_i = 1$, такая, что для всякого i и для любого $\varepsilon > 0$

$$e_i \wedge \sup_{j\geqq 1}\inf_{n\geqq j}\omega_n(\lambda-\varepsilon) \leqq e_i \wedge \sup_{j\geqq 1}\inf_{n\geqq j}\omega_n''(\lambda) \leqq e_i \wedge \sup_{j\geqq 1}\inf_{n\geqq j}\omega_n(\lambda+\varepsilon) .$$

Отсюда следует (ср. лемму 8)

$$\limsup_{n\to\infty}\omega_n = \limsup_{n\to\infty}\omega_n'' .$$

Аналогичным образом получим равенство

$$\liminf_{n\to\infty}\omega_n = \liminf_{n\to\infty}\omega_n'' .$$

Так как

$$(\lambda 1 - y_n')_+ = \frac{n+1}{n}\left(\left(\frac{n}{n+1}\lambda\right)1 - \frac{n}{n+1}\,y_n'\right)_+ ,$$

то справедливо равенство

$$\omega_n'(\lambda) = \omega_n''\left(\frac{n}{n+1}\lambda\right), \quad -\infty < \lambda < +\infty$$

при надлежащем выборе элементов ω_n' и ω_n''. Отсюда следуют равенства

$$\limsup_{n\to\infty}\omega_n' = \limsup_{n\to\infty}\omega_n'' , \quad \liminf_{n\to\infty}\omega_n' = \liminf_{n\to\infty}\omega_n'' .$$

Следовательно, имеем:

$$\limsup_{n\to\infty}\omega_n = \limsup_{n\to\infty}\omega_n' , \quad \liminf_{n\to\infty}\omega_n = \liminf_{n\to\infty}\omega_n' . \tag{17}$$

Из изоморфизма алгебры проекторов $\mathfrak{P}$ и базы $\mathfrak{F}(X)$ (теорема (A)) и из соотношений (16) и (17) непосредственно вытекает равенство: $P = T^{-1}PT = TPT^{-1}$. Значит, проектор P — инвариантный относительно автоморфизма T.

Положим $U(x) = \|x_+\| - \|x_-\|$. Элементарными рассуждениями мы убедимся в том, что определенная таким образом операция U положительна, аддитивна и непрерывна. Из соотношения $y_n - \lambda 1 = (-\lambda)\,1 - (-y_n)$ следует равенство

$$P_{n,-\lambda}^- = I - \bar{P}_{n\lambda} ; \quad P_{n\lambda}^- = \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda 1 + T^i x)\right)_+\right], \quad -\infty < \lambda < +\infty .$$

Согласно лемме 7, учитывая, что по определению P

$$P \leqq \sup_{n \geqq 1} P_{n\alpha}, \quad P \leqq \sup_{n \geqq 1}(I - \bar{P}_{n\beta}) = \sup_{n \geqq 1} P^{-}_{n,-\beta},$$

получим

$$U(Px) \leqq \alpha U(P1), \quad U(P(-x)) \leqq (-\beta)\, U(P1),$$

или

$$U(Px) \leqq \alpha U(P1) \leqq \beta U(P1) \leqq U(Px).$$

Так как $\alpha < \beta$, то $U(P1) = 0$, т. е. $\|P1\| = 0$. Отсюда вытекает, что $P1 = 0 = \omega^{**}(\alpha) - \omega^{*}(\beta)$, что противоречит предположению. Этим доказано равенство $\omega^* = \omega^{**}$.

II. Пусть теперь $x \geqq 0$. Предположим, что абстрактная норма в X непрерывна в бесконечности. Положим $z_n = \inf\limits_{i \geqq n} y_i$, $y = \lim\inf y_n$. Очевидно, $z_n \nearrow y$, $U(z_n) \leqq U(y_n)$ или $\|z_n\| \leqq \|y_n\|$. Далее,

$$\|y_n\| = \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i x \right\| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \|T^i x\| = \|x\|. \tag{18}$$

Следовательно, $y \in X$, ибо иначе $\|z_n\| \to +\infty$, что противоречит соотношению (18). Тогда из теоремы (Д) о погружении вытекает, что $\omega^{**} \in \Omega_1(X)$ является характеристикой элемента y. Так как по доказанному $\omega_n \to \omega^{**} = \omega^*$ в смысле сходимости по упорядоченности в $\Omega(X)$, то из леммы 10 следует, что последовательность $\{y_n\}$ сходится индивидуально к пределу y. Пользуясь неравенством $\|z_n\| \leqq \|y_n\|$ и соотношением (18), мы сразу убеждаемся в том, что имеет место неравенство

$$\|y\| = \| \operatorname{ind-lim}_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i x \| \leqq \|x\|. \tag{19}$$

Если x — любой элемент в X, то по доказанному существуют элементы y^*, y^{**} в X такие, что

$$y^* = \operatorname{ind-lim}_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i x_+, \quad y^{**} = \operatorname{ind-lim}_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i x_-.$$

Отсюда вытекает, что существует

$$\operatorname{ind-lim}_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i x = y^* - y^{**}$$

(ср. лемму 10). Этим доказана первая часть теоремы. Вторая часть теоремы, т. е. неравенство (9), сразу следует из (19). Тем и закончено доказательство выше сформулированной эргодической теоремы.

K-пространство X называется *расширенным*, если оно есть пространство с единицей и среди характеристик его элементов встречаются все элементы из $\Omega(X)$ (относительно любой фиксированной его единицы).

Если X — расширенное K-пространство с выделенной единицей 1, то справедлива следующая теорема (см. [6], гл. IV, 2.31):

(E) Если x_α ($\alpha \in A$) — элементы в X и $\sup\limits_\alpha x_\alpha = +\infty$, то существует единичный элемент $e_0 > 0$, для которого при любом k

$$\sup_\alpha([e_0]\, x_\alpha \wedge ke_0) = ke_0 .$$

С помощью этой теоремы докажем следующую лемму.

Лемма 11. *В расширенном K-пространстве непрерывная и аддитивная для положительных элементов абстрактная норма непрерывна также в бесконечности.*

Доказательство. Пусть $x_n \in X$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), $x_n \nearrow +\infty$ (при выше приведенных обозначениях). Тогда существует единичный элемент $e > 0$, для которого при любом $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty}(|x_n| \wedge ke) = ke .$$

Но в этом случае

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\| \geqq \lim_{n\to\infty}\||x_n| \wedge ke\| = k\|e\| .$$

Так как $e > 0$ и неравенство верно при любом натуральном k, то $\|x_n\| \to \infty$. Утверждение доказано.

Из леммы 11 непосредственно вытекает следующее следствие доказаной выше теоремы, именно

Теорема 2. *Пусть X — расширенное K-пространство, нормированное посредством некоторого K-пространства, с непрерывной и аддитивной для положительных элементов нормой. Пусть T — автоморфизм на X, сохраняющий абстрактную норму и некоторую единицу в X. Тогда для любого $x \in X$ последовательность сумм* (8) *сходится по упорядоченности к конечному пределу и имеет место равенство*

$$\left\|\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i|x|\right\| = \|x\| . \tag{20}$$

Доказательство. Согласно лемме 11, норма непрерывна также в бесконечности. Из леммы 10 вытекает, что в расширенном K-пространстве сходимость по упорядоченности и индивидуальная сходимость совпадают. Равенство (20) следует из непрерывности нормы; первая часть теоремы является непосредственным следствием теоремы 1.

Элемент x в K-пространстве с единицей называется *ограниченным* относительно данной единицы 1, если существует вещественное λ такое, что $|x| \leqq \lambda 1$. Если X — K-пространство с единицей, в котором каждый элемент ограничен относительно одной и той же единицы в X, то X называется *K-протсранством ограниченных элементов*.

Теорема 3. *Если X — K-пространство ограниченных элементов, нормированное посредством некоторого K-пространства, с непрерывной и аддитивной для положительных элементов нормой, и если T — автоморфизм на X, сохраняющий ту единицу, относительно которой элементы в X ограничены, и сохраняющий абстрактную норму, то для любого $x \epsilon X$ последовательность сумм* (8) *сходится по упорядоченности к конечному пределу и имеет место равенство* (20).

Доказательство. Из неравенства

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x\right| \leqq \lambda 1 , \quad \text{когда} \quad |x| \leqq \lambda 1 ,$$

следует, что (8) является ограниченной последовательностью, так что во II-ой части доказательства теоремы 1 нет необходимости пользоваться непрерывностью нормы в бесконечности, и далее здесь индивидуальная сходимость совпадает со сходимостью по упорядоченности. Равенство (20) является следствием непрерывности пормы.

Замечание. Если X — K-пространство с единицей и с абстрактной нормой, непрерывной и для положительных элементов аддитивной, и если автоморфизм T сохраняет норму и некоторую единицу, то утверждение теоремы 3 будет иметь место для всякого элемента $x \epsilon X$, который ограничен относительно той единицы, которая сохраняется автоморфизмом T

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. D. Birkhoff:* Proof of the ergodic theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., vol. *17* (1931), 656—660.

[2] *A. Khintchine* (Хинчин): Zur Birkhoffs Lösung des Ergodenproblems. Math. Ann. *107* (1933).

[3] *G. Birkhoff:* Dependent probabilities and the space (L). Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., vol. *24* (1938), 154—159.

[4] *S. Kakutani:* Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem. Ann. Math., vol. *42* (1941), 523—537.

[5] *G. Birkhoff:* Lattice theory. Rev. ed. 1951.

[6] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Москва-Ленинград 1950.

[7] *Hidegorô Nakano:* Ergodic theorems in semi-ordered linear spaces. Ann. Math., vol. *49* (1948), 538—556.

Summary

ERGODIC THEOREM IN COMPLETE VECTOR LATTICES WITH ABSTRACT NORM

KAREL WINKELBAUER, Praha

(Received December 17, 1955)

A complete vector lattice (in the sense of G. Birkhoff's terminology; see [5], Chapter XV) will be here briefly called a *K-space*; the abbreviations sup and inf are used instead of l. u. b. and g. l. b. If $\{x_n\}$ is a sequence in a K-space X, lim sup x_n and lim inf x_n are defined by the equations (1) (see the Russian text); the sequence $\{x_n\}$ is said to *order-converge* to some limit x (finite if $x \in X$, or infinite if $x = \pm \infty$) if the equalities (2) hold; in this case we write $x_n \to x$ or $\lim x_n = x$. For the monotone sequences we shall use the notation $x_n \nearrow x$ and $x_n \searrow x$ respectively. If, for some $x^* \in X$, (3) holds for every $y, z \in X$, $y \geqq z$, then we shall write (4); similarly, if for some $x_* \in X$ (5) holds for every $y, z \in X$, $y \geqq z$, then we write (6). The sequence $\{x_n\}$ is said to *converge individually* to some limit $x \in X$ if the equalities (7) hold; in this case we shall write $x = \text{ind-lim } x_n$.

Let X and Y be K-spaces. We shall say that the K-space X *is normed by elements* of the K-space Y if to every $x \in X$ there corresponds an element $y = \|x\| \in Y$ — the abstract norm of x — satisfying the following conditions: (1) $\|x\| > 0$ if $x \neq 0$; $\|0\| = 0$; (2) $\|x_1 + x_2\| \leqq \|x_1\| + \|x_2\|$; (3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, . \, \|x\|$ (α is a real number); (4) $\||x|\| = |x|$. An abstract norm in X is said to be *additive for positive elements* if $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ for any $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$. An abstract norm in X will be called *continuous* if it has the following property: if $x_n \in X$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $x \in X$, $x_n \to x$, then $\|x_n - x\| \to 0$. We shall say that an abstract norm in X is *continuous at infinity* if $x_n \nearrow +\infty$ implies $\|x_n\| \to +\infty$.

Let X be a K-space. If $x_0 \in X$ and inf $(x, x_0) > 0$ for every $x > 0$, then x_0 is called a *unit* in X (a weak unit in the sense of G. Birkhoff; see [5], Chapter XIV, § 6). A K-space in which there exists a unit will be said a *K-space with a unit*. A fixed unit in a K-space will be denoted by 1.

Let T be a one-to-one correspondence between elements of a K-space X satisfying the following assumptions: (1) $T(x + y) = Tx + Ty$; (2) $Tx > 0$ if and only if $x > 0$. Then T is called an *automorphism* on X. If X is a K-space with a unit, then an automorphism T on X is said to *preserve a unit* 1 if $T1 = 1$. If X is normed by elements of some K-space Y and if $\|Tx\| = \|x\|$ for every $x \in X$, then the automorphism T is said to *preserve the abstract norm*. For an automorphism T, T^i (i is an integer) has the usual meaning.

Theorem 1. *Let X be a K-space with a unit, which is normed by elements of some K-space Y, the abstract norm being additive for positive elements and continuous.*

Let T be an automorphism on X, preserving the abstract norm and some unit in X. Let the abstract norm in X be also continuous at infinity. Then, for every $x \in X$, the sequence of sums (8) *converges individually to some limit and the inequality* (9) *holds.*

Let P be an operator which maps a K-space X into itself and satisfies the following conditions: (1) $0 \leqq Px \leqq x$ for every $x \geqq 0$; (2) $P(Px) = Px$; (3) $P(x + y) = Px + Py$. Then P is called a *projector* in X. If we put $P \leqq Q$ (for projectors P, Q in X) if and only if $P(Qx) = Px$ for every $x \in X$, then the aggregate of all projectors in X forms relative to $\leqq$ a complete Boolean algebra (cf. [6], Chapter III). Let p be an element of X. Then the projector inf $\{P: P(p) = p\}$ (the g. l. b. taken in complete Boolean algebra of projectors in X) is said to be *generated by the element* p and is denoted by $[p]$. By $I - P$ we shall denote the complement of the projector P in the Boolean algebra of projectors in X.

A K-space X is said to be *extended* if it is a K-space with a unit 1 and if to every resolution ω of the unit 1 (see the definition in [5], Chapter XV, § 12) there exists an element $x \in X$ such that the following conditions are satisfied: (1) $[\omega(\lambda)]\, x \leqq \lambda\omega(\lambda)$; (2)$(I - [\omega(\lambda)])\, x \geqq \lambda(1 - \omega(\lambda))$ for every real λ.

Theorem 2. *Let X be an extended K-space, which is normed by elements of some K-space Y, the abstract norm being additive for positive elements and continuous. Let T be an automorphism on X, preserving the abstract norm and some unit in X. Then, for every $x \in X$, the sequence of sums* (8) *order-converges to a finite limit and the equality* (20) *holds.*

An element x in a K-space with a unit is said to be *bounded* with respect to a given unit 1 if there exists a real number λ such that $|x| \leqq \lambda 1$. If X is a K-space with a unit in which every element is bounded with respect to the same unit in X, then X is called a *K-space of bounded elements.*

Theorem 3. *Let X be a K-space of bounded elements, which is normed by elements of some K-space Y, the abstract norm being additive for positive elements and continuous. Let T be an automorphism on X, preserving that unit with respect to which the elements in X are bounded, and preserving the abstract norm. Then for every $x \in X$, the sequence of sums* (8) *order-converges to a finite limit and the equality* (20) *holds.*

Theorems 2 and 3 follow from Theorem 1 if we make some modifications in its proof. Therefore, nearly the whole paper is devoted to the proof of Theorem 1; in proving this theorem, a direct method has been used.