Froim Marcus

Une nouvelle caractérisation des réseaux et surfaces $\mathcal{E}$ de Cartan

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 2, 308–313

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100249

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

UNE NOUVELLE CARACTÉRISATION DES RÉSEAUX ET SURFACES $\mathscr{E}$ DE CARTAN

F. MARCUS, IAŞI.

(Reçu le 1 octobre 1956.)

Le résultat principal, de cette Note est que les réseaux $\mathscr{E}$ d'E. Cartan sont identiques aux réseaux conjugués dont toutes les deux familles se composent de pangéodésiques.

Dans un travail [1] de 1944 E. Cartan[1]) démontre l'existence d'une classe de surfaces sur lesquelles il existe un réseau conjugué tel que

$$h = \bar{h}\,, \quad k = \bar{k}\,, \tag{1}$$

$h, k, \bar{h}, \bar{k}$ étant respectivement les invariants des équations ponctuelles et tangentielles de Laplace, qui correspondent au réseau. Ces réseaux et les surfaces sur lesquelles ces réseaux existent sont nommés par Cartan réseaux et surfaces $\mathscr{E}$.

Une surface $\mathscr{E}$ rapportée aux lignes asymptotiques est [1] caractérisée par

$$\left(\frac{\beta}{\Theta}\right)_u = (\gamma\Theta)_v\,, \quad (\gamma\sqrt{\Theta})_u = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\Theta}}\right)_v\,, \tag{2}$$

$\dfrac{\beta\,\mathrm{d}u^3 + \gamma\,\mathrm{d}v^3}{2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$ étant l'élément linéaire de Fubini de la surface, et

$$\mathrm{d}v^2 - \Theta\,\mathrm{d}u^2 = 0 \tag{2'}$$

l'équation du réseau.

A. Terracini [2] a défini l'élément linéaire projectif d'une congruence de droites, comme partie principale d'un birapport dont il a donné l'expression en supposant tout d'abord la première nappe focale de la congruence rapportée à un réseau conjugué.

En utilisant cette notion, j'ai caractérisé dans une Note récente [3] les réseaux et surfaces $\mathscr{E}$ de la manière suivante:

---

[1]) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

Pour qu'une surface appartienne à la classe $\mathscr{E}$ de Cartan, il est nécessaire et suffisant qu'elle admette un réseau conjugué tel que ses congruences de tangentes se correspondent par applicabilité projective, ou ce qui revient au même, par égalité des éléments linéaires de Terracini.

Plus tard j'ai pris connaissance d'un autre travail de Terracini [4] de 1934, dans lequel on donne l'expression de l'élément linéaire projectif d'une congruence de droites, en supposant la première nappe focale rapportée aux lignes asymptotiques. Il en résulte que l'applicabilité projective de deux congruences de droites est de deux espèces, nommées par Terracini, applicabilité de première et de deuxième espèce.

Si les congruences sont décrites par les tangentes d'un réseau conjugué, l'applicabilité projective de deuxième espèce a lieu [4] si

$$(\gamma\tau)_u = \left(\frac{\beta}{\tau}\right)_v , \quad \left(\frac{\beta}{\tau^2}\right)_u = (\gamma\tau^2)_v , \tag{3}$$

le réseau étant donné par

$$\mathrm{d}v^2 - \tau^2\,\mathrm{d}u^2 = 0 . \tag{3'}$$

En tenant compte de (2), il résulte que le réseau (3′) est un réseau $\mathscr{E}$ et il appartient à une surface $\mathscr{E}$. De même il résulte que Terracini [4] s'est occupé dix ans avant Cartan avec cette classe de surfaces. Mais il faut mentionner que l'existence de ces surfaces a été démontrée par Cartan [1].

En ce qui suit je donne une autre caractérisation des réseaux et surfaces $\mathscr{E}$, qui semble ne pas avoir été observée encore.

Soit S une surface rapportée aux lignes asymptotiques. Soit

$$x_{uu} = \Theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x , \quad x_{vv} = \gamma x_u + \Theta_v x_v + p_{22} x \tag{4}$$

le système satisfait par les coordonnées $x_i = x_i(u, v)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ d'un point générique de la surface.

Il est bien connu [5] , § 24, que les pangéodésiques de Fubini d'une surface forment un système de ∞^2 lignes, dont l'équation est

$$2u'' \frac{\beta u'^3 + \gamma}{u'^3} = 2\left(\frac{\gamma_u}{u'} - \beta_v u'\right) + \left(\frac{\gamma_v}{u'^2} - \beta u'^2\right) \tag{5}$$

$$\left(u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\right).$$

L'équation (5) peut être écrite aussi sous la forme donnée par E. Čech [5] notamment

$$(x, \mathrm{d}x, \mathrm{d}^2x, \mathrm{d}^3x) = (\xi, \mathrm{d}\xi, \mathrm{d}^2\xi, \mathrm{d}^3\xi) , \tag{5'}$$

ξ_i étant les coordonnées tangentielles de la surface.

Demandons-nous sur quelles surfaces il existe un réseau conjugué tel que les lignes du réseau soient des pangéodésiques.

En tenant compte de (5) il résulte que les lignes

$$\frac{du}{dv} = \varrho(u, v) \tag{6}$$

sont pangéodésiques si

$$2(\beta\varrho)_v - 2\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)_u + (\beta\,\varrho^2)_u - \left(\frac{\gamma}{\varrho^2}\right)_v = 0\,. \tag{5''}$$

De même les lignes

$$\frac{du}{dv} = -\,\varrho(u, v) \tag{6'}$$

sont pangéodésiques si

$$2(\beta\varrho)_v - 2\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)_u + \left(\frac{\gamma}{\varrho^2}\right)_v - (\beta\varrho^2)_u = 0\,. \tag{5'''}$$

Donc, les deux familles de courbes du réseau

$$du^2 - \varrho^2\,dv^2 = 0 \tag{6''}$$

sont pangéodésiques si

$$\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)_u = (\beta\varrho)_v\,, \quad (\beta\varrho^2)_u = \left(\frac{\gamma}{\varrho^2}\right)_v\,. \tag{7}$$

En conséquence, les surfaces cherchées sont des surfaces $\mathcal{E}$, et nous avons le

Théorème. *Si les lignes d'un réseau conjugué d'une surface sont des pangéodésiques, la surface est une surface $\mathcal{E}$ et le réseau un réseau $\mathcal{E}$.*

Si on tient compte des (7) qui caractérisent une surface $\mathcal{E}$, et des équations (5″) ou (5″) des pangéodésiques d'une surface nous avons le

Théorème. *Seulement sur les surfaces $\mathcal{E}$ il existent des réseaux conjugués dont les lignes sont des pangéodésiques.*

De ces théorèmes et des résultats de Terracini [4] et Marcus [3] il suit le résultat suivant:

Les congruences décrites par les tangentes aux lignes d'un réseau conjugué d'une surface ont le même élément linéaire projectif de Terracini si et seulement si les lignes du réseau sont pangéodésiques.

Quelques observations. D'aprés B. Segre [6] les lignes projectives d'une surface sont données par

$$(x, dx, d^2x, d^3x) + (\xi, d\xi, d^2\xi, d^3\xi) = 0\,. \tag{8}$$

Si on normalise les coordonnées de façon que $(x, x_u, x_v, x_{uv}) = \frac{1}{2}$, alors l'équation (8) devient

$$\left(\frac{\frac{d^3v}{du^3}}{\frac{dv}{du}}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2v}{du^2}}{\frac{dv}{du}}\right) = \frac{1}{2}\,\beta^2\left(\frac{du}{dv}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\gamma^2\left(\frac{dv}{du}\right)^4 + q_{11}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - q_{22} \tag{8'}$$

avec $q_{11} = - L$; $q_{22} = - M$, L, M étant les expressions bien connues de la théorie des surfaces [5].

En introduisant la notation

$$G_1(\varrho) = 2(\beta\varrho)_v - 2\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)_u + (\beta\varrho^2)_u - \left(\frac{\gamma}{\varrho^2}\right)_v ,$$

$$G_2(\varrho) = \frac{1}{\varrho}\Bigg[- L\varrho + \frac{M}{\varrho} - \varrho_{uu} + \frac{1}{2}\frac{\varrho_u^2}{\varrho} - \frac{\varrho_{vv}}{\varrho^2} + \frac{3}{2}\frac{\varrho_v^2}{\varrho^3} - - 2(\log\varrho)_{uv} + \frac{\gamma^2}{2\varrho^3} - \frac{\beta^2\varrho^3}{2} ,$$

$$\varrho(u, v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{A}{B}$$

et en tenant compte de (11) pag. 104 de [5] on a [7]

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2I_1}{sS} &= - \frac{N}{2AB} = - \varrho G_2(\varrho) + G_1(\varrho) - 4(\log\varrho)_{uv} + 2\left(\frac{\gamma}{\varrho^2}\right)_v - 2(\beta\varrho^2)_u ,\\
\frac{2\overline{I_1}}{sS} &= - \frac{N_1'}{2AB} = - \varrho G_2(\varrho) + G_1(\varrho) - 4(\log\varrho)_{uv} + 4\left(\frac{\gamma}{\varrho}\right)_u - 4(\beta\varrho)_v ,\\
\frac{2I_2}{- sS} &= \frac{N_1}{2AB} = \varrho G_2(\varrho) - G_1(\varrho) ,\\
\frac{2I_2}{- sS} &= \frac{N'}{2AB} = \varrho G_2(\varrho) + G_1(\varrho) .
\end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

I_i, $\bar{I}_i$ $(i = 1, 2)$, N, N_1, N', N_1' étant respectivement les invariants ponctuels et tangentiels des équations de Laplace qui correspondent au réseau $A^2\,\mathrm{d}u^2 - - B^2\,\mathrm{d}v^2 = 0$ et les invariants ponctuels et duales de Fubini qui correspondent aux congruences des tangentes du réseau.

On voit tout de suite que $I_2 = \bar{I}_2$ ou $N_1 = N'$ est l'équation d'une ligne pangéodésique d'une surface.

Si $\varrho = \pm 1$ nous avons des surfaces $\mathscr{E}$ particulières et (2) se réduit à

$$\beta_u = \gamma_v , \quad \gamma_u = \beta_v . \tag{2''}$$

Ces surfaces ont été déterminées dans un mémoire de 1933, par E. Čech [8] et se partagent en dix catégories.

Aux résultats précédents de Čech, il faut ajouter, conformément aux théorèmes précédents, que les lignes du réseau $\mathrm{d}u^2 - \mathrm{d}v^2 = 0$ de ces surfaces sont des pangéodésiques.

Dans une Note de 1924, Čech [9] a déterminé synthétiquement les surfaces qui possèdent une famille ∞^1 des pangéodésiques planes, ou projectives, en remarquant qu'il serait intéressant de déterminer toutes les surfaces qui possèdent plusieurs familles de ∞^1 pangéodésiques planes.

En tenant compte de (a) et (8′) il résulte [8] que les surfaces avec

$$\begin{gathered}\beta = \varphi + \psi\,; \quad \gamma = \varphi - \psi\,; \quad L = -\tfrac{3}{2}\varphi^2 - \tfrac{3}{2}\psi^2 - \varphi\psi + C\,; \\ M = -\tfrac{3}{2}\varphi^2 - \tfrac{3}{2}\psi^2 + \varphi\psi + C\,, \quad \varphi = \varphi(u+v)\,, \quad \psi = \psi(u-v)\end{gathered} \tag{b}$$

possèdent au moins deux familles de ∞^1 courbes pangéodésiques planes déterminées par $du^2 - dv^2 = 0$. Donc, elles sont des solutions du problème de Čech. De même, on peut faire voir que, en excluant les surfaces de coïncidence, les surfaces (b) sont les seules surfaces $\mathscr{E}$, qui possèdent deux familles de ∞^1 pangéodésiques planes, conjuguées entre elles. Ces surfaces ont été étudiées par B. Segre [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] *E. Cartan:* Sur une classe de surfaces apparentées aux surfaces R etc. Bull. des Sciences Mathém. 1944, 41—50.

[2] *A. Terracini:* Su alcuni elementi lineari proiettivi. Annali della R. Scuola Normale di Pisa, Vol. *II*, 1933.

[3] *F. Marcus:* Caracterizare geometrica a suprafetelor $\mathscr{E}$ ale lui Cartan. Revista Universitatii si a Institutului Politehnic Iasi, Vol. *I*, fasc. 1—2, 22—28, 1954.

[4] *A. Terracini:* Osservazioni sulla geometria proiettiva diferenziale delle congruenze de rette. Atti del R. Iatituto Veneto, Tomo *XCIV*, 1934—35, 75—86.

[5] *G. Fubini, E. Čech:* Geometria Proiettiva Differenziale, Tomo *I*, N. Zanichelli Bologna, 1924.

[6] *B. Segre:* I birapporti sulle superficie non sviluppabili dello spazio etc. 2 Note. Rendiconti dell'Ac. dei Lincei, vol. *XXI*, 656—660 e 692—697.

[7] *F. Marcus:* Asupra invariantilor din teoria proiectiva diferentiala a congruentelor de drepte a lui Fubini. Gazeta Matematica si Fizica, 1955, Seria *A*, Nr. *8*, 409—415.

8] *E. Čech:* Rés eaux R è invariants égaux. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, 1931.

9] *E. Čech:* Sur les géodésiques projectives. Rendiconti dell'Ac. dei Lincei, Vol. *XXXIII*, 1924, 15—16.

НОВЫЕ СВОЙСТВА СЕТЕЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ $\mathscr{E}$ КАРТАНА

Ф. МАРКУС (F. Marcus), Яссы.

(Поступило в редакцию 1/X 1956 г.)

Автор доказывает следующие теоремы:

Теорема. *Если линии сопряженной сети на поверхности являются пангеодезическими линиями, тогда поверхность и сеть будут, соответственно, поверхностью и сетью $\mathscr{E}$.*

Теорема. *Только на поверхностях $\mathscr{E}$ существуют сопряженные сети, линии которых являются пангеодезическими.*

Если примем во внимание результаты исследований Террачини [4] и Маркуса [3], то получим следующую теорему:

Теорема. *Конгруэнции, описанные касательными к линиям сопряженной сети на поверхности, имеют один и тот же проективный линейный элемент Террачини только в том случае, если линии сети являются пангеодезическими.*

Чех [9] определил синтетически поверхности, на которых существует единственное семейство плоских пангеодезических кривых, т. е. пангеодезических и проективных кривых, и отметил, что было бы интересно исследовать все поверхности с несколькими семействами ∞^1 плоских пангеодезических кривых. Поверхности, которые удовлетворяют (b), имеют два семейства ∞^1 плоских пангеодезических кривых; следовательно, они являются решением задачи Чеха. Они были изучены Б. Сегре [6]. Принимая во внимание [a] [8′], можно доказать, что кроме поверхностей совпадения эти поверхности являются единственными поверхностями $\mathscr{E}$, которые содержат два семейства ∞^1 пангеодезиическх и проективных кривых.