Czechoslovak Mathematical Journal

Kirill Aleksandrovich Sitnikov

Комбинаторная топология незамкнутых множеств

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 4, 444–449

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100214`

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

КОМБИНАТОРНАЯ ТОПОЛОГИЯ НЕЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

К. СИТНИКОВ, Москва.

Прочитано на IV съезде чехословацких математиков в Праге 8/IX 1955 г.

Доклад посвящается комбинаторной, а именно гомологической теории незамкнутых множеств, лежащих в n-мерном евклидовом пространстве. Проблема построения гомологической теории незамкнутых множеств была в 1935 г. поставлена П. С. Александровым в его докладе на Московской международной топологической конференции. Первым существенным шагом в построении такой теории была работа самого П. С. Александрова в 1947 г., в которой впервые была доказана общая теорема двойственности для любых множеств, лежащих в сферических простанствах и были даны первые комбинаторно-топологические методы исследования незамкнутых множеств.

Доклад состоит из двух частей. Первая часть посвящена теоремам двойственности, вторая часть — гомологической теории размерности для незамкнутых множеств. Основным результатом первой части является следующая теорема:

Первая теорема двойственности. *Пусть M^n — замкнутое ориентируемое гомологическое n-мерное многообразие, p и q — неотрицательные целые числа, дающие в сумме $n - 1$. Предполагаем, что M^n ациклично в размерностях q* и *$q + 1$ по данной произвольной группе коэффициентов G. Тогда для любого множества $A \subseteq M^n$ и $B = M^n \setminus A$ группы $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$, взятые по группе коэффициентов G, изоморфны между собой.*

При этом группа $\Delta^q B$ есть новая группа, основанная на более сильных, чем обычные виеторисовские, циклах и гомологиях: под Δ-циклом $z^q = \{z_k^q, x_k^{q+1}\}$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ в B понимается последовательность лежащих на каком-либо компакте $\varphi \subseteq B$ ε_k-циклов z_k^q и ε_k-цепей x_k^{q+1}, $\varepsilon_k \to 0$, причем $\Delta x_k^{q+1} = z_{k+1}^q - z_k^q$. Цикл z^q ограничивает в B, если на некотором компакте φ', $\varphi \subseteq \varphi' \subseteq B$ существуют такие ε_k'-цепи y_k^{q+1} и x_k^{q+2}, $\varepsilon_k' \to 0$, что $\Delta y_k^{q+1} = z_k^q$, $\Delta x_k^{q+2} = y_{k+1}^{q+1} - y_k^{q+1} - x_k^{q+1}$.

В теореме двойственности, сформулированной выше, не предполагается, что группа коэффициентов G снабжена какой-либо топологией. Однако, если G — бикомпактная топологическая группа, то группа $\Delta^q B$ совпадает со старой виеторисовской группой $\Delta^q_c B$ с компактными носителями. Если условие бикомпактности не выполнено, в частности, в важнейшем случае, когда G — просто группа целых чисел, группа $\Delta^q B$ существенно отлична от группы $\Delta^q_c B$. Это можно видеть на примере, когда B — соленоид.[1] В самом деле, возьмем на соленоиде B две точки a и b, которые нельзя соединить в B никакой простой дугой. Пара точек (a, b) образует нульмерный цикл z^0 гомологичный нулю в смысле группы Δ^0_c, так как B — континуум. Однако цикл z^0 не ограничивает в B в смысле группы Δ^0. Это происходит потому, что ε-цепочки, соединяющие точки a и b в B при $\varepsilon \to 0$ обегают соленоид всё большее число раз, что и не даёт возможности построить цепи x^2_k, входящие в данное выше определение ограничивающего цикла.

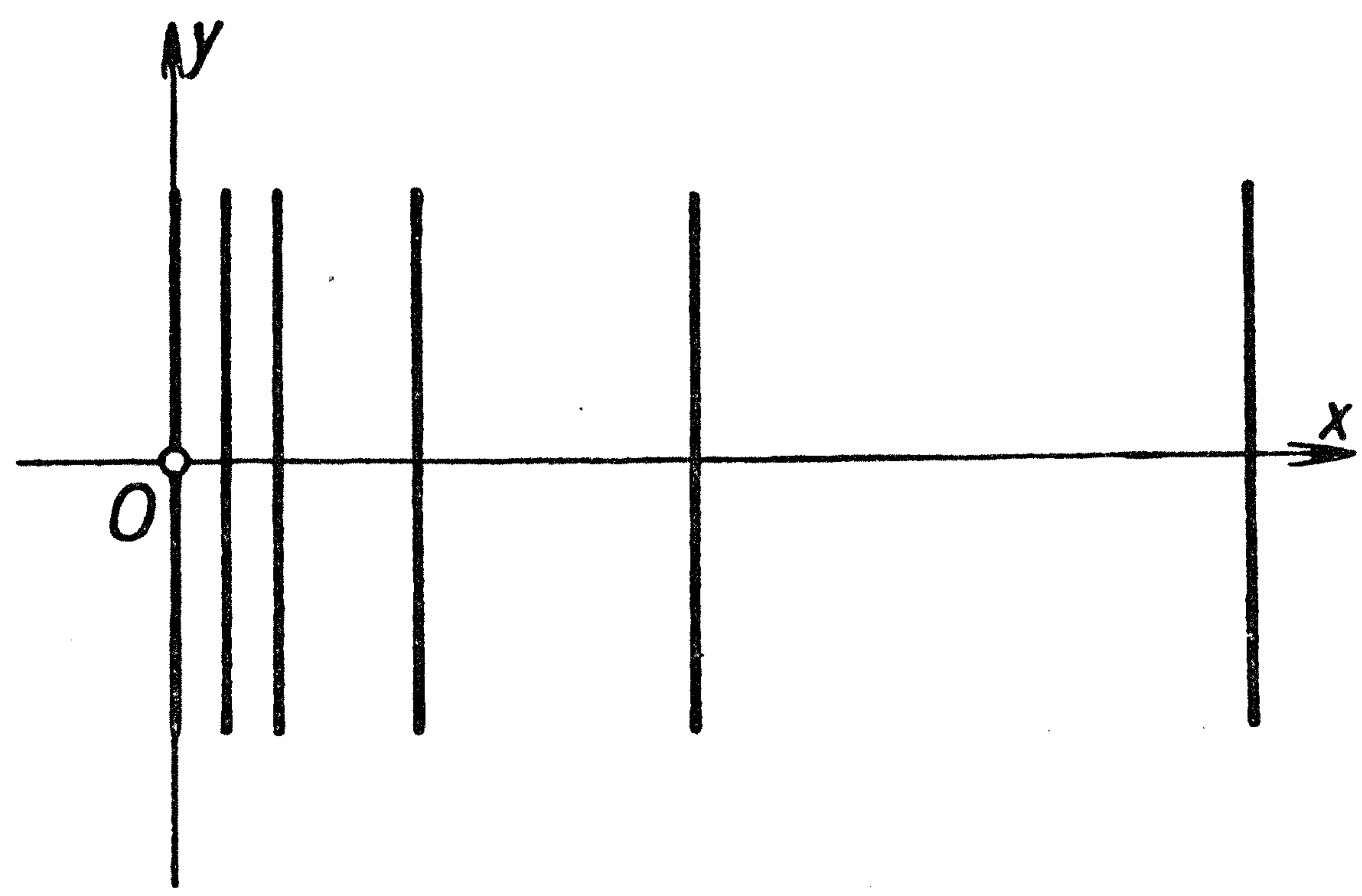

Рис. 1.

Группа $\nabla^p A$ есть известная ∇-группа, основанная на бесконечных цепях, взятых на нервах открытых звёздно-конечных покрытий множества A. Если размерность множества A равна p, то группа $\nabla^p A$ по целочисленной области коэффициентов имеет простой геометрический смысл: её элементы находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами непрерывных отображений множества A в p-мерную сферу S^p. Таким образом в этом частном случае закон двойственности утверждает существование некоторого естественного взаимно однозначного соответствия между классами отображений множества A в сферу S^p и целочисленными q-мерными гомологическими Δ-классами дополнительного множества B.[2]

Поясним сказанное на примере. Возьмём множество A на плоскости, состоящее из отрезков вида $x = 1/n$, $-1 \leqq y \leqq 1$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и из всех точек отрезка $[-1, 1]$ оси ординат, кроме точки O. (См. рис. 1.) Хотя в дополнительном множестве B любые две точки можно соединить простой дугой, группа $\Delta^0 B$ отлична от нуля. Чтобы убедиться в этом достаточно доказать в силу сформулированной выше теоремы двойственности, что

[1]) Для компактов введённая группа $\Delta^q B$ изоморфна $(q + 1)$-мерным группам Стинрода, основанным на так называемых регулярных циклах.

[2]) Локальная форма этой последней теоремы решает проблему П. С. Александрова о характеризации размерности незамкнутых множеств посредством локальных свойств дополнительного пространства (см. общую теорему о препятствиях).

$\nabla^1 A \neq O$, а для этого надо только найти существенное отображение множества A в окружность. Для построения такого отображения заметим, что множество A гомеоморфно множеству A', состоящему из всех точек множества A и ещё из всех точек отрезков $x = -1/n$, $-1 \leqq y \leqq 1$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заменить в множестве A отрезки, соответствующие, например, нечётным n симметричными относительно оси ординат отрезками. Множество A' существенно отображается на окружность с центром в точке O посредством центральной проекции из этой точки.

Этот пример показывает также, что для незамкнутых множеств свойство множества, состоящее в том, что его точки соединимы в нём континуумами, не является инвариантом дополнительного множества.

Приведём ещё пример, показывающий о сколь сложных множествах могут быть получены результаты с помощью первой теоремы двойственности. Возьмём известное урысоновское разбиение n-мерного пространства на два множества, из которых ни одно не содержит континуума, отличного от точки. Тогда нульмерная Δ-группа каждого из этих множеств будет континуальна, так как разные точки суть не гомологичные между собой нульмерные циклы. Но тогда по первой теореме двойственности и $(n-1)$-мерная ∇-группа каждого из этих множеств будет также континуальна. Это означает, что каждое из этих множеств может быть континуальным числом существенно различных способов отображено на $(n-1)$-мерную сферу.

С помощью первой теоремы двойственности можно получить целую серию других теорем двойственности. А именно в группах $\Delta^q B$ и $\nabla^p A$ можно выделить несколько подгрупп, которые при изоморфизме M между ними, переходят друг в друга и оказываются поэтому дуализируемыми. Такой оказывается, например, подгруппа $H^q B$ группы $\Delta^q B$, состоящая из тех её элементов, которые ограничивают в B в виеторисовском смысле. Фактор-группа $\Delta^q B - H^q B$ изоморфна виеторисовской группе $\Delta^q_c B$. Таким образом она также оказывается дуализируемой. Вопрос об этом был поставлен П. С. Александровым в 1935 г.

Доказательство этого требует определения проекционной Δ-группы нового типа по бикомпактной области коэффициентов. Для этого рассмотрим на нерве каждого покрытия α множества A p-мерную Δ-группу $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B})$, основанную на конечных цепях и взятую по бикомпактной области коэффициентов. $\mathfrak{B}$, но без всякой топологии и p-мерную ∇-группу $\nabla^p(\alpha; \mathfrak{A})$, основанную на бесконечных цепях и взятую по дискретной области коэффициентов $\mathfrak{A}$, двойственной $\mathfrak{B}$. В силу скалярного умножения каждый элемент одной из этих групп является алгебраическим характером другой. В группе $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B})$ выделяем подгруппу $N^p_\Delta(\alpha; \mathfrak{B})$, аннулирующую всю группу $\nabla^p(\alpha, \mathfrak{A})$, а в группе $\nabla^p(\alpha, \mathfrak{A})$ подгруппу $N^p_\nabla(\alpha; \mathfrak{A})$, аннулирующую всю $\Delta^p(\alpha; \mathfrak{B})$.

Тогда группа $\Delta^p(\alpha;\ \mathfrak{B}) - N^p_\Delta(\alpha;\ \mathfrak{B})$ топологизированная как группа характеров группы $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(\alpha;\ \mathfrak{A})$ имеет бикомпактное пополнение $\bar{\delta}^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$, двойственное группе $\nabla^p(\alpha;\ \mathfrak{A}) - N^p_\nabla(\alpha;\ \mathfrak{A})$. Группы $\bar{\delta}^p(\alpha;\ \mathfrak{B})$ образуют обратный спектр, бикомпактная предельная группа которого и есть искомая бикомпактная проекционная группа $\bar{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$.

Оказывается, что группа $H^q(B;\ \mathfrak{A})$ состоит из тех элементов группы $\Delta^q(B;\ \mathfrak{A})$, которые имеют нулевой коэффициент зацепления со всей группой $\bar{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$. При изоморфизме M между группами $\Delta^q(B;\ \mathfrak{A})$ и $\nabla^p(A;\ \mathfrak{A})$ подгруппа $H^q(B;\ \mathfrak{A})$ переходит в подгруппу $N^p_\nabla(A;\ \mathfrak{A})$, имеющую нулевое скалярное произведение со всей $\bar{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$. (Это следует из того, что при изоморфизме M коэффициент зацепления с элементом из $\bar{\delta}^p(A;\ \mathfrak{B})$ переходит в скалярное произведение.)

Дадим более полную картину дуализируемых подгрупп групп $\Delta^q B$ и $\nabla^p A$. В Δ-группе $\Delta^q B$ множества B, взятой по дискретной или по бикомпактной области коэффициентов, определяются две подгруппы незацепляемости $N^q_\Delta B$ и $N^q_{\Delta c} B$ с элементами проекционной соответственно Δ-группы дополнительного множества A, взятым по двойственным областям коэффициентов. (В случае дискретной области коэффициентов, как говорилось выше, $N^q_\Delta B = H^q B$.)

Эти подгруппы при изоморфизме M переходят в подгруппы $N^p_\nabla A$ и $N^p_{\nabla c} A$ группы $\nabla^p A$, имеющие нулевые скалярные произведения с теми же группами (проекционной и Δ-группой).

Группа незацепляемости $N^q_\Delta(B;\ \mathfrak{B})$ в случае бикомпактной области коэффициентов есть группа незацепляемости П. С. Александрова с элементами обычной проекционной Δ-группы $\delta^p(A;\ \mathfrak{A})$, а изоморфизм

$$\Delta^q(B;\ \mathfrak{B}) - N^q_\Delta(B;\ \mathfrak{B}) = \nabla^p(A;\ \mathfrak{B}) - N^p_\nabla(A;\ \mathfrak{B})$$

есть лишь иная форма закона двойственности П. С. Александрова.

При естественных гомоморфизмах вложения Δ-групп в проекционные группы ядрами этих гомоморфизмов оказываются группы $N_{\Delta c}$.

Общий итог. Все рассмотренные четырнадцать групп можно расположить в центрально-симметричную таблицу, в которой слева — группы по бикомпактной области коэффициентов, а справа — по дискретной.

$$\begin{array}{cc}
 & \delta^q B \\
 & \uparrow \\
N^q_\nabla B \subseteq N^q_{\nabla c} B \subseteq \nabla^q B\ , & \Delta^q B \supseteq N^q_{\Delta c} B \supseteq H^q B\ , \\
N^p_\Delta A \subseteq N^p_{\Delta c} A \subseteq \Delta^p A\ , & \nabla^p A \supseteq N^p_{\nabla c} A \supseteq N^p_\nabla A\ . \\
\downarrow & \\
\bar{\delta}^p A &
\end{array}$$

Группы, стоящие по одной вертикали, изоморфны (кроме группы δ и $\bar{\delta}$). Кроме того, имеются указанные ниже двойственности (они обозначены вертикальной чертой, а горизонтальная черта обозначает переход к бикомпактному пополнению; топологизируются эти группы как подгруппы групп характеров стоящих справа групп)

$$\bar{\delta}^p A | \nabla^p A - N^p_{\nabla} A; \; \overline{\nabla^q B - N^q_{\nabla} B} | \delta^q B; \; \overline{\nabla^q B - N^q_{\nabla c} B} | \Delta^q B - N^q_{\Delta c} B \, .$$

С помощью доказанных общих теорем двойственности находятся необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять множество, чтобы виеторисовские Δ-группы (группы Δ_c) этого множества и его дополнения в s^n были двойственны между собой, т. е. чтобы был справедлив закон двойственности Понтрягина.

Переходим к гомологической теории размерности для незамкнутых множеств. Её центральным геометрическим результатом является

Общая теорема о препятствиях. *Пусть $A \subseteq R^n$ — произвольное множество размерности $r < n$; тогда существует такой n-мерный шар $U^n \subset R^n$, что в $U^n \setminus A$ лежит целочисленный Δ-цикл размерности $n - r - 1$, не гомологичный нулю в $U^n \setminus A$; в то же время каков бы ни был шар $U^n \subset R^n$ и цикл размерности $< n - r - 1$, лежащий в $U^n \setminus A$, этот цикл гомологичен нулю в $U^n \setminus A$.*

При этом циклы и гомологии понимаются в новом введённом выше смысле.

Задача доказательства теоремы о препятствиях для любых множеств, лежащих в евклидовых пространствах, была также поставлена П. С. Александровым в 1935 г. Для замкнутых множеств теорема о препятствиях была доказана П. С. Александровым в 1932 г.

Эта теорема о препятствиях имеет окончательный характер; она перестаёт быть верной, если заменить употребляемые в ней гомологии обычными виеторисовскими. Это следует из построенного мною примера двумерного множества A, лежащего в трёхмерном евклидовом пространстве и не разбивающего никакой области Γ этого пространства (в том смысле, что всякие две точки множества $\Gamma \setminus A$ принадлежат лежащему в $\Gamma \setminus A$ континууму).

Этот пример даёт отрицательное решение проблемы, поставленной Урысоном в 1922 г.

Далее строится пример, показывающий, что для незамкнутых множеств теорема об ε-сдвигах П. С. Александрова не имеет места. Но имеет место другая деформационная характеристика размерности с помощью затухающих отображений:

Теорема. *Пусть A — множество размерности r, лежащее в R^n. Какого бы ни было открытое в R^n множество Γ, множество $\Gamma \cap A$ может быть в Γ посредством затухающей деформации (т. е. деформации, стремящейся* *к тождественной при приближении к границе Γ) переведено в r-мерный бесконечный полиэдр. В то же время существует такой шар $U^n \subset R^n$, что размерность множества $\Gamma \cap A$ не может быть понижена никаким непрерывным отображением, неподвижным на пересечении множества A с границей шара U^n.*

Результаты, изложенные в докладе, опубликованы в Математическом сборнике т. *34*, 1954 г. стр. 3—54, и в пяти заметках в ДАН т. *96*, 1954 г.; т. *82*, 1952 г.; т. *83*, 1952 г.; т. *88*, 1953 г.; т. *94*, 1954 г. Подробное изложение этих заметок печатается в Математическом сборнике.

Résumé

TOPOLOGIE COMBINATOIRE DES ENSEMBLES NON-FERMÉS

K. SITNIKOV, Moscou.

Conférence faite le 8 septembre 1955 au IVe Congrès des mathématiciens tchécoslovaques à Prague.

La conférence fut dédiée aux théorèmes sur la dualité (dans le sens de la topologie algébrique) pour le cas des ensembles quelconques situés sur une variété, ainsi qu'aux théorèmes homologiques concernant la dimension des ensembles dans l'espace euclidien. Le théorème principal sur la dualité, duquel résulte toute une série d'autres résultats, est le suivant:

Soit M^n une variété homologique fermée, orientable, de dimension n; soient p, q deux entiers non-négatifs, $p + q = n - 1$, et supposons ensuite que M^n soit acyclique en dimensions q et $q + 1$, par rapport au groupe G de coéfficients donné. Alors pour tout $A \subset M^n$ et $B = M^n \setminus A$, les groupes $\nabla^p A$ et $\Delta^q B$ (par rapport au même groupe G de coéfficients) sont isomorphes.

Dans ce théoreme $\Delta^q B$ représente un groupe nouvellement introduit, dont la notion est fondée sur une modification des homologies et des cycles de Vietoris; $\nabla^p A$ est le ∇-groupe classique, construit à la base de recouvrements ouverts combinatoirement finis („star finite").

Les résultats obtenus dans la théorie homologique de la dimension sont représentés par le théorème suivant (où R^n désigne l'espace euclidien à n dimensions, U^n une boule à n dimensions dans R^n, d'ailleurs quelconque):

Si $A \subset R^n$, $\dim A = r < n$, alors pour un U^n convenablement choisi il existe un Δ-cycle à coeficients entiers, de dimension $n - r - 1$, situé dans $U^n \setminus A$ mais qui n'y est pas homologique à zéro, tandis que quel que soit U^n, tout cycle de dimension $< n - r - 1$, situé dans ensemble $U^n \setminus A$, y est homologique à zéro.