Alois Švec

Problèmes d'existence de la déformation projective des surfaces de S_5 possédant un réseau conjugué

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 1, 125–138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100183

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

PROBLÈMES D'EXISTENCE DE LA DÉFORMATION PROJECTIVE DES SURFACES DE S_5 POSSÉDANT UN RÉSEAU CONJUGUÉ

ALOIS ŠVEC, Praha.

(Reçu le 30 septembre 1955.)

Dans mon travail antérieur *Déformation projective des surfaces avec un réseau conjugué das* S_5 (ce Journal) j'ai étudié les propriétés géométriques des surfaces qui admettent une déformation proj. du 3ème ordre. A la base de ces considérations je résous ici les questions d'existence: *les surfaces déformables avec deux transformations de Laplace non dégénérées dépendent de dix fonctions d'une variable*; *les surfaces déformables à précisément une transformation de Laplace dégénérée dépendent de sept fonctions d'une variable.* Les surfaces déformables à deux transformations de Laplace dégénérées sont étudiées dans mon travail récent *Déformation projective de certaines surfaces avec un réseau conjugué*.

1. Dans ce Mémoire je trouverai le degrée de généralité de certaines surfaces dans S_5 qui ont des propriétés intéressantes en elles-mêmes, mais en relation avec des résultats ultérieurs (voir mon travail *Déformation projective des surfaces avec unréseau conjugué dans* S_5, ce Journal) je résoudrai en premier lieu des questions importantes de la théorie de la déformation projective du 3ème ordre des surfaces de S_5 possédant un réseau conjugué.

Une surface (A_0) dans S_5 est donnée de manière bien connue par le système

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A_0 &= \omega_{00}A_0 + \omega_1A_1 + \omega_2A_2\,, \\
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{10}A_0 + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_{13}A_3 + \omega_{14}A_4 + \omega_{15}A_5\,, \\
\mathrm{d}A_2 &= \omega_{20}A_0 + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_{23}A_3 + \omega_{24}A_4 + \omega_{25}A_5\,, \\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{30}A_0 + \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \omega_{34}A_4 + \omega_{35}A_5\,, \\
\mathrm{d}A_4 &= \omega_{40}A_0 + \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \omega_{43}A_3 + \omega_{44}A_4 + \omega_{45}A_5\,, \\
\mathrm{d}A_5 &= \omega_{50}A_0 + \omega_{51}A_1 + \omega_{52}A_2 + \omega_{53}A_3 + \omega_{54}A_4 + \omega_{55}A_5
\end{aligned} \tag{1}$$

qui satisfait les conditions d'integrabilité (les équations du structure)

$$[\mathrm{d}\omega_{ij}] = [\omega_{ik}\omega_{kj}]\,. \tag{2}$$

J'ai posé

$$\omega_{01} = \omega_1\,, \quad \omega_{02} = \omega_2\,. \tag{3}$$

Pour la surface (A_0) on a donc

$$\omega_{03} = \omega_{04} = \omega_{05} = 0\,. \tag{4}$$

En différentiant extérieurement on en déduit d'après (2)

$$\begin{aligned}
[\omega_1\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}] &= 0\,,\\
[\omega_1\omega_{14}] + [\omega_2\omega_{24}] &= 0\,,\\
[\omega_1\omega_{15}] + [\omega_2\omega_{25}] &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

et d'après le lemme de Cartan

$$\begin{aligned}
\omega_{13} &= a_1\omega_1 + a_2\omega_2\,, & \omega_{23} &= a_2\omega_1 + a_3a_2\,,\\
\omega_{14} &= b_1\omega_1 + b_2\omega_2\,, & \omega_{24} &= b_2\omega_1 + b_3\omega_2\,,\\
\omega_{15} &= c_1\omega_1 + c_2\omega_2\,, & \omega_{25} &= c_2\omega_1 + c_3\omega_2\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Par différentiation extérieure de ces relations on a

$$\begin{aligned}
[\varDelta a_1\omega_1] + [\varDelta a_2\omega_2] &= 0\,, & [\varDelta a_2\omega_1] + [\varDelta a_3\omega_2] &= 0\,,\\
[\varDelta b_1\omega_1] + [\varDelta b_2\omega_2] &= 0\,, & [\varDelta b_2\omega_1] + [\varDelta b_3\omega_2] &= 0\,,\\
[\varDelta c_1\omega_1] + [\varDelta c_2\omega_2] &= 0\,, & [\varDelta c_2\omega_1] + [\varDelta c_3\omega_2] &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

où apparaissent les autres formes principals

$$\begin{aligned}
\varDelta a_1 &= \mathrm{d}a_1 + a_1(\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11}) - 2a_2\omega_{12} + b_1\omega_{43} + c_1\omega_{52}\,,\\
\varDelta a_2 &= \mathrm{d}a_2 + a_2(\omega_{00} + \omega_{33} - \omega_{11} - \omega_{22}) - a_1\omega_{21} - a_3\omega_{12} + b_2\omega_{43} + c_2\omega_{53}\,,\\
\varDelta a_3 &= \mathrm{d}a_3 + a_3(\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{22}) - 2a_2\omega_{21} + b_3\omega_{43} + c_3\omega_{53}\,,\\
\varDelta b_1 &= \mathrm{d}b_1 + b_1(\omega_{00} + \omega_{44} - 2\omega_{11}) - 2b_2\omega_{12} + a_1\omega_{34} + c_1\omega_{54}\,,\\
\varDelta b_2 &= \mathrm{d}b_2 + b_2(\omega_{00} + \omega_{44} - \omega_{11} - \omega_{22}) - b_1\omega_{21} - b_3\omega_{12} + a_2\omega_{34} + c_2\omega_{54}\,,\\
\varDelta b_3 &= \mathrm{d}b_3 + b_3(\omega_{00} + \omega_{44} - 2\omega_{22}) - 2b_2\omega_{21} + a_3\omega_{34} + c_3\omega_{54}\,,\\
\varDelta c_1 &= \mathrm{d}c_1 + c_1(\omega_{00} + \omega_{55} - 2\omega_{11}) - 2c_2\omega_{12} + a_1\omega_{35} + b_1\omega_{45}\,,\\
\varDelta c_2 &= \mathrm{d}c_2 + c_2(\omega_{00} + \omega_{55} - \omega_{11} - \omega_{22}) - c_1\omega_{21} - c_3\omega_{12} + a_2\omega_{35} + b_2\omega_{45}\,,\\
\varDelta c_3 &= \mathrm{d}c_3 + c_3(\omega_{00} + \omega_{55} - 2\omega_{22}) - 2c_2\omega_{21} + a_3\omega_{35} + b_3\omega_{45}
\end{aligned} \tag{8}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\delta a_1 &= a_1(2e_{11} - e_{00} - e_{33}) + 2a_2e_{12} - b_1e_{43} - c_1e_{53}\,,\\
\delta a_2 &= a_2(e_{11} + e_{22} - e_{00} - e_{33}) + a_3e_{12} + a_1e_{21} - b_2e_{43} - c_2e_{53}\,,\\
\delta a_3 &= a_3(2e_{22} - e_{00} - e_{33}) + 2a_2e_{21} - b_3e_{43} - c_3e_{53}\,,\\
\delta b_1 &= b_1(2e_{11} - e_{00} - e_{44}) + 2b_2e_{12} - a_1e_{34} - c_1e_{54}\,,\\
\delta b_2 &= b_2(e_{11} + e_{22} - e_{00} - e_{44}) + b_3e_{12} + b_1e_{21} - a_2e_{34} - c_2e_{54}\,,\\
\delta b_3 &= b_3(2e_{22} - e_{00} - e_{44}) + 2b_2e_{21} - a_3e_{34} - c_3e_{54}\,,\\
\delta c_1 &= c_1(2e_{11} - e_{00} - e_{55}) + 2c_2e_{12} - a_1e_{35} - b_1e_{45}\,,\\
\delta c_2 &= c_2(e_{11} + e_{22} - e_{00} - e_{55}) + c_3e_{12} + c_1e_{21} - a_2e_{35} - b_2e_{45}\,,\\
\delta c_3 &= c_3(2e_{22} - e_{00} - e_{55}) + 2c_2e_{21} - a_3e_{35} - b_3e_{45}\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

D'après le lemme de Cartan, les relations (5) conduisent à introduire les formes quadratiques

$$\begin{aligned}
\varphi_a &= a_1\omega_1^2 + 2a_2\omega_1\omega_2 + a_3\omega_2^2\,,\\
\varphi_b &= b_1\omega_1^2 + 2b_2\omega_1\omega_2 + b_3\omega_2^2\,,\\
\varphi_c &= c_1\omega_1^2 + 2c_2\omega_1\omega_2 + c_3\omega_2^2
\end{aligned} \tag{10}$$

et on trouve facilement

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_a &= (e_{00} - e_{33})\,\varphi_a && - e_{43}\varphi_b && - e_{53}\varphi_c\,, \\
\delta\varphi_b &= - e_{34}\varphi_a && + (e_{00} - e_{44})\,\varphi_b && - e_{54}\varphi_c\,, \\
\delta\varphi_c &= - e_{35}\varphi_a && - e_{45}\varphi_b && + (e_{00} - e_{55})\,\varphi_c\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

Les dernières équations montrent que le système linéaire des formes $\{\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c\}$ est invariant et que sa dimension (le nombre maximum des formes quadratiques indépendantes diminué d'une unité) est un invariant proj. dif.

2. J'envisage les surfaces pour lesquelles $\dim\{\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c\} = 1$. Le système $\{\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c\}$ se reduit à un faisceau et deux cas sont possibles.

D'abord je vais examiner le cas où il est possible de donner aux φ_λ la forme

$$\begin{aligned}
\varphi_a &= a_1\omega_1^2\,, \\
\varphi_b &= \qquad b_3\omega_2^2\,, \quad (a_1 b_3 \neq 0)\,, \\
\varphi_c &= 0\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

De (9) je déduis

$$\begin{aligned}
\delta a_1 &= a_1(2e_{11} - e_{00} - e_{33})\,, \\
\delta b_3 &= b_3(2e_{22} - e_{00} - e_{44})
\end{aligned} \tag{13}$$

de sorte que je peux choisir

$$a_1 = b_3 = 1\,. \tag{14}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\omega_{13} &= \omega_1\,, & \omega_{14} &= 0\,, & \omega_{15} &= 0\,, \\
\omega_{23} &= 0\,, & \omega_{24} &= \omega_2\,, & \omega_{25} &= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

et de (8) et (7) il résulte

$$\begin{aligned}
\Delta a_1 &= \omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} = \alpha_1\omega_1 - \alpha_2\omega_2\,, \\
-\Delta a_2 &= \omega_{21} = \omega_2\alpha_1 - \alpha_3\omega_2\,, \\
\Delta a_3 &= \omega_{43} = \alpha_3\omega_1 + \alpha_4\omega_2\,, \\
\Delta b_1 &= \omega_{34} = \beta_1\omega_1 - \beta_2\omega_2\,, \\
-\Delta b_2 &= \omega_{12} = \beta_2\omega_1 - \beta_3\omega_2\,, \\
\Delta b_3 &= \omega_{00} + \omega_{44} - 2\omega_{22} = \beta_3\omega_1 + \beta_4\omega_2\,, \\
\Delta c_1 &= \omega_{35} = \gamma_1\omega_1\,, \\
\Delta c_2 &= 0\,, \\
\Delta c_3 &= \omega_{45} = \gamma_2\omega_2\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

Dans le cas consideré on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 A_0 = (\mathrm{d}\omega_{00} + \underline{\omega_{00}^2 + \omega_1\omega_{10}} + \omega_2\omega_{20})\,A_0 &+ \\
+ (\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1\omega_{00} + \underline{\omega_{11} + \omega_2\omega_{21}})\,A_1 &+ \\
+ (\mathrm{d}\omega_2 + \omega_1\omega_{12} + \omega_2\omega_{00} + \omega_{22})\,A_2 &+ \omega_1^2 A_3 + \omega_2^2 A_4\,.
\end{aligned} \tag{17}$$

L'espace osculateur de la surface (A_0) est en chaque point de (A_0) à quatre dimensions. Le réseau

$$\omega_1\omega_2 = 0 \tag{18}$$

forme le (seul) *réseau conjugué* de cette surface, puisque on a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}[A_0A_1] &= (\omega_{00} + \omega_{11})[A_0A_1] + \omega_{12}[A_0A_2] - \omega_2[A_1A_2] + \omega_1[A_0A_3]\,, \\
\mathrm{d}[A_0A_2] &= \omega_{21}[A_0A_1] + (\omega_{00} + \omega_{22})[A_0A_2] + \omega_1[A_1A_2] + \omega_2[A_0A_4]\,.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Au cas où il est possible de choisir

$$
\begin{aligned}
\varphi_a &= a_1\omega_1^2\,, \\
\varphi_b &= 2b_2\omega_1\omega_2 \quad (a_1b_2 \neq 0)\,, \\
\varphi_c &= 0\,,
\end{aligned} \tag{20}
$$

la surface possède *une couche des lignes asymptotiques.*

3. Dorénavant je m'occuperai exclusivement des surfaces avec un réseau conjugué, pour lesquelles on a (4), (7) et (15)—(19). Par la différentiation extérieure de $(16_{1,2\,5,6})$ j'obtiens

$$
\begin{aligned}
&[(\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1\,\omega_{00} - \omega_{11} + 3\omega_{10} - \omega_{31} + \gamma_1\omega_{53})\,\omega_1] - \\
&- [(\mathrm{d}\alpha_2 + \alpha_1\omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{20})\,\omega_2] + r_1[\omega_1\omega_2] = 0\,, \\
&[\varrho_1\omega_1] - [(\mathrm{d}\alpha_3 + \alpha_3\omega_{00} + \omega_{11} - 2\omega_{22} - \omega_{41})\,\omega_2] + r_2[\omega_1\omega_2] = 0\,, \\
&[(\mathrm{d}\beta_2 + \beta_2\omega_{00} + \omega_{22} - 2\omega_{11} + \omega_{32})\,\omega_1] + [\varrho_2\omega_2] + r_3[\omega_1\omega_2] = 0\,, \\
&[(\mathrm{d}\beta_3 + \beta_3\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{10})\,\omega_1] + \\
&+ [(\mathrm{d}\beta_4 + \beta_4\omega_{00} - \omega_{22} + 3\omega_{20} - \omega_{42} + \gamma_2\omega_{54})\,\omega_2] + r_4[\omega_1\omega_2] = 0
\end{aligned} \tag{21}
$$

où les formes ϱ_i resp. les fonctions r_i ne m'interessent pas. Il est important qu'on a

$$
\begin{aligned}
\delta\alpha_1 &= \alpha_1(e_{11} - e_{00}) - \gamma_1 e_{53} + 3(e_{31} - e_{10})\,, \\
\delta\alpha_2 &= \alpha_2(e_{22} - e_{00}) + e_{20}\,, \\
\delta\alpha_3 &= \alpha_3(2e_{22} - e_{00} - e_{11}) + e_{41}\,, \\
\delta\beta_2 &= \beta_2(2e_{11} - e_{00} - e_{22}) - e_{32}\,, \\
\delta\beta_3 &= \beta_3(e_{11} - e_{00}) - e_{10}\,, \\
\delta\beta_4 &= \beta_4(e_{22} - e_{00}) - \gamma_2 e_{54} + 3(e_{42} - e_{20})\,.
\end{aligned} \tag{22}
$$

D'après l'indépendance linéaire des formes $e_{10}, e_{20}, e_{31}, e_{32}, e_{41}, e_{42}$ on peut choisir

$$
\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \tag{23}
$$

et le système (16) donne

$$
\begin{aligned}
\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} &= 0\,, \\
\omega_{21} &= 0\,, \\
\omega_{43} &= \alpha\omega_2\,, \\
\omega_{34} &= \beta\omega_1\,, \\
\omega_{12} &= 0\,, \\
\omega_{00} + \omega_{44} - 2\omega_{22} &= 0\,, \\
\omega_{35} &= \gamma_1\omega_1\,, \\
\omega_{45} &= \gamma_2\omega_2
\end{aligned} \tag{24}
$$

où j'ai posé

$$\alpha_4 = \alpha\,, \quad \beta_1 = \beta\,. \tag{25}$$

Par la différentiation extérieure des équations (24) il résulte

$$\begin{aligned}
[(\overline{3\omega_{31} - \omega_{10}} - \gamma_1\omega_{53} - \alpha\beta\omega_2)\,\omega_1] - [\omega_{20}\omega_2] &= 0\,,\\
[\omega_{20}\omega_1] - [\omega_{41}\omega_2] &= 0\,,\\
[\omega_{41}\omega_1] - [(\mathrm{d}\alpha + \overline{\alpha\omega_{33} - \omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{00}} + \gamma_2\omega_{53})\,\omega_2] &= 0\,,\\
[(\mathrm{d}\beta + \overline{\beta\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_{44} - \omega_{33}} + \gamma_1\omega_{54})\,\omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] &= 0\,,\\
[\omega_{32}\omega_1] - [\omega_{10}\omega_2] &= 0\,,\\
[\omega_{10}\omega_1] - [(\overline{3\omega_{42} - \omega_{20}} - \gamma_2\omega_{54} - \alpha\beta\omega_1)\,\omega_2] &= 0\,,\\
[(\mathrm{d}\gamma_1 + \overline{\gamma_1\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{33} + \omega_{55}} + \beta\gamma_2\omega_2)\,\omega_1] &= 0\,,\\
[(\mathrm{d}\gamma_2 + \overline{\gamma_2\omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{44} + \omega_{55}} + \alpha\gamma_1\omega_1)\,\omega_2] &= 0\,.
\end{aligned} \tag{26}$$

De $(26_{3,4,7,8})$ on déduit

$$\begin{aligned}
\delta\alpha &= \alpha(e_{22} + e_{44} - e_{00} - e_{33}) - \gamma_2 e_{53}\,,\\
\delta\beta &= \beta(e_{11} + e_{33} - e_{00} - e_{44}) - \gamma_1 e_{54}\,,
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_1 &= \gamma_1(e_{11} + e_{33} - e_{00} - e_{55})\,,\\
\delta\gamma_2 &= \gamma_2(e_{22} + e_{44} - e_{00} - e_{55})\,.
\end{aligned} \tag{28}$$

De (28) on déduit que γ_1 et γ_2 sont les invariants relatifs, pour $\gamma_1 = 0$ (resp. $\gamma_2 = 0$) β (resp. α) est l'invariant relatif. On doit distinguer plusieurs types des surfaces avec un réseau conjugué.

Avant de commencer leur étude j'effectue quelques calculs. De (24) on trouve facilement

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 A_0 = {} & (\mathrm{d}\omega_{00} + \omega_{00}^2 + \omega_1\omega_{10} + \omega_2\omega_{20})\,A_0 + (\mathrm{d}\omega_1 + \overline{\omega_1\omega_{00} + \omega_{11}})\,A_1 + \\
& + (\mathrm{d}\omega_2 + \overline{\omega_2\omega_{00} + \omega_{22}})\,A_2 + \omega_1^2 A_3 + \omega_2^2 A_4\,,
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^3 A_0 \equiv {} & (3\omega_1\,\mathrm{d}\omega_1 + \overline{\omega_1^2\omega_{11} + \omega_{11} + \omega_{33}} + \alpha\omega_2^3)\,A_3 + \\
& + (3\omega_2\,\mathrm{d}\omega_2 + \overline{\omega_2^2\omega_{00} + \omega_{22} + \omega_{44}} + \beta\omega_1^3)\,A_4 + (\gamma_1\omega_1^3 + \gamma_2\omega_2^3)\,A_5 \\
& (\mathrm{mod}\ A_0, A_1, A_2)\,.
\end{aligned} \tag{30}$$

En outre on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[A_0A_1A_2A_3A_4] = (\ldots)[A_0A_1A_2A_3A_4] + \gamma_1\omega_1[A_0A_1A_2A_5A_4] + \\
+ \gamma_2\omega_2[A_0A_1A_2A_3A_5]\,.
\end{aligned} \tag{31}$$

Je désigne par d_1 (resp. d_2) la différentiation le long la ligne $\omega_1 = 0$ (resp. $\omega_2 = 0$). Alors on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_1^3 A_0 &\equiv \alpha\omega_2^3 A_3 + (3\omega_2\,\mathrm{d}_1\omega_1 + \overline{\omega_2^2\underset{1}{\omega_{00}} + \underset{1}{\omega_{22}} + \underset{1}{\omega_{44}}})\,A_4 + \gamma_2\omega_2^3 A_5\,,\\
\mathrm{d}_2^3 A_0 &\equiv (3\omega_1\,\mathrm{d}_2\omega_1 + \overline{\omega_1^2\underset{2}{\omega_{00}} + \underset{2}{\omega_{11}} + \underset{2}{\omega_{33}}})\,A_3 + \beta\omega_1^3 A_4 + \gamma_1\omega_1^3 A_5 \\
& (\mathrm{mod}\ A_0, A_1, A_1)
\end{aligned} \tag{32}$$

où pour $k = 0, 1$

$$\omega_{ij}(\mathrm{d}_k) = \underset{k}{\omega_{ij}} . \tag{33}$$

4. Je considère les surfaces pour lesquelles on a $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$. Ensuite je peux choisir, ayant ègard à (27)

$$\alpha = \beta = 0 \tag{34}$$

et d'après (28) je peux poser

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 1 . \tag{35}$$

Pour les surfaces de ce type il résulte de (24)

$$\begin{gathered} \omega_{12} = 0 , \quad \omega_{21} = 0 , \\ \omega_{34} = 0 , \quad \omega_{35} = \omega_1 , \quad \omega_{43} = 0 , \quad \omega_{45} = \omega_2 , \\ \omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} = 0 , \quad \omega_{00} + \omega_{44} - 2\omega_{22} = 0 . \end{gathered} \tag{36}$$

Par différentiation extérieure j'obtiens (26) dans la forme

$$\begin{aligned} [(\overline{3\omega_{31} - \omega_{10}} - \omega_{53})\, \omega_1] - [\omega_{20}\omega_2] &= 0 , \\ [\omega_{20}\omega_1] - [\omega_{41}\omega_2] &= 0 , \\ [\omega_{41}\omega_1] - [\omega_{53}\omega_2] &= 0 , \\ [\omega_{54}\omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] &= 0 , \\ [\omega_{32}\omega_1] - [\omega_{10}\omega_2] &= 0 , \\ [\omega_{10}\omega_1] - [(\overline{3\omega_{42} - \omega_{20}} - \omega_{54})\, \omega_2] &= 0 , \\ [(\omega_{55} - \omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{00})\, \omega_1] &= 0 , \\ [(\omega_{55} - \omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{00})\, \omega_2] &= 0 \end{aligned} \tag{37}$$

et d'après le lemme de Cartan

$$\begin{aligned} 3(\omega_{31} - \omega_{10}) - \omega_{53} &= M_1\omega_1 - M_2\omega_2 , \\ \omega_{20} &= M_2\omega_1 - M_3\omega_2 , \\ \omega_{41} &= M_3\omega_1 - M_4\omega_2 , \\ \omega_{53} &= M_4\omega_1 - M_5\omega_2 , \\ \omega_{54} &= N_1\omega_1 - N_2\omega_2 , \\ \omega_{32} &= N_2\omega_1 - N_3\omega_2 , \\ \omega_{10} &= N_3\omega_1 - N_4\omega_2 , \\ 3(\omega_{42} - \omega_{20}) - \omega_{54} &= N_4\omega_1 - N_5\omega_2 , \\ \omega_{55} - \omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{00} &= P\omega_1 , \\ \omega_{55} - \omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{00} &= Q\omega_2 . \end{aligned} \tag{38}$$

La signification géométrique de la condition $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$ est évidente. D'après (34), (35) on conclut de (32)

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}_1^3A_0 &\equiv \omega_2^3A_5 \\ \mathrm{d}_2^3A_0 &\equiv \omega_1^3A_5 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{mod}\ A_0, A_1, A_2, A_3, A_4) . \tag{39}$$

Si je me rends compte du fait que l'espace osculateur de la surface (A_0) au point A_0 est précisement $[A_0A_1A_2A_3A_4]$, on déduit que *les troisièmes espaces osculateurs des lignes du réseau conjugué ne sont pas contenus dans l'espace osculateur de la surface*. L'équation des *lignes principales* est évidemment

$$(A_0A_1A_2A_3A_4\,\mathrm{d}^3A_0) = 0\ ,$$

où

$$\omega_1^3 + \omega_2^3 = 0\ . \tag{40}$$

5. Soit maintenant $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$, $\alpha \neq 0$. D'après (27), (28) on peut choisir

$$\gamma_1 = 1\ ,\quad \alpha = 1\ ,\quad \beta = 0 \tag{41}$$

et le système (24) devient

$$\begin{aligned}
\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} &= 0\ ,\\
\omega_{21} &= 0\ ,\\
\omega_{43} &= \omega_2\ ,\\
\omega_{34} &= 0\ ,\\
\omega_{12} &= 0\ ,\\
\omega_{00} + \omega_{44} - 2\omega_{22} &= 0\ ,\\
\omega_{35} &= \omega_1\ ,\\
\omega_{45} &= 0\ .
\end{aligned} \tag{42}$$

Par différentiation de la dernière équation j'obtiens

$$[\omega_2\omega_1] = 0\ ,$$

ce qui n'est pas possible. Donc les surfaces de ce type n'existent pas et de $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$ on déduit $\alpha = 0$. Quand même je trouverai la signification géometrique formelle de ces surfaces. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_1^3A_0 &\equiv (3\omega_2\,\mathrm{d}_1\omega_2 + \omega_2^2\underset{1}{\omega_{00}} + \underset{1}{\omega_{22}} + \underset{1}{\omega_{44}})\,A_4 + \omega_2^3A_3\ ,\\
\mathrm{d}_2^3A_0 &\equiv (\ldots)\,A_3 + \omega_1^3A_5\ ,\quad (\mathrm{mod}\ A_0, A_1, A_2)\ .
\end{aligned} \tag{43}$$

Le troisième espace osculateur de la courbe $\omega_1 = 0$ est contenu dans l'espace osculateur de la surface, mais le troisième espace osculateur de la courbe $\omega_2 = 0$ n'y est pas contenu. Le plan osculateur de la courbe $\omega_1 = 0$ est évidemment $[A_0A_2A_4]$ et le troisième l'espace osculateur de la courbe $\omega_1 = 0$ n'est pas contenu dans l'espace qui joint le plan osculateur de la courbe $\omega_1 = 0$ avec le plan tangent de la surface.

Je considère donc le cas $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 = 0$, $\alpha = 0$, où je peux choisir

$$\gamma_1 = 1\ ,\quad \beta = 0 \tag{44}$$

et (24) devient

$$
\begin{aligned}
\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11} &= 0 . \\
\omega_{21} &= 0 , \\
\omega_{43} &= 0 , \\
\omega_{34} &= 0 , \\
\omega_{12} &= 0 , \\
\omega_{00} + \omega_{44} - 2\omega_{22} &= 0 , \\
\omega_{35} &= \omega_1 , \\
\omega_{45} &= 0
\end{aligned}
\tag{45}
$$

avec les conséquences différentielles

$$
\begin{aligned}
[(\overline{3\omega_{31} - \omega_{10}} - \omega_{53})\, \omega_1] - [\omega_{20}\omega_2] &= 0 , \\
[\omega_{20}\omega_1] - [\omega_{41}\omega_2] &= 0 , \\
[\omega_{41}\omega_1] \qquad &= 0 , \\
[\omega_{54}\omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] &= 0 , \\
[\omega_{32}\omega_1] - [\omega_{10}\omega_2] &= 0 , \\
[\omega_{10}\omega_1] - 3[(\omega_{42} - \omega_{20})\, \omega_2] &= 0 , \\
[(\omega_{55} - \omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{00})\, \omega_1] &= 0
\end{aligned}
\tag{46}
$$

de sorte que

$$
\begin{aligned}
3(\omega_{31} - \omega_{10}) - \omega_{53} &= M_1\omega_1 - M_2\omega_2 , \\
\omega_{20} &= M_2\omega_1 - M_3\omega_2 , \\
\omega_{41} &= M_3\omega_1 , \\
\omega_{54} &= N_1\omega_1 - N_2\omega_2 , \\
\omega_{32} &= N_2\omega_1 - N_3\omega_2 , \\
\omega_{10} &= N_3\omega_1 - N_4\omega_2 , \\
3(\omega_{42} - \omega_{20}) &= N_4\omega_1 - N_5\omega_2 , \\
\omega_{55} - \omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{00} &= P\omega_1 .
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Le système fermé (4) + (15) + (45) + (46) est en involution et *les surfaces considérées dépendent d'une fonction de deux variables.*

Après cela j'ai

$$
\begin{aligned}
d_1^3 A_0 &\equiv (\ldots)\, A_4 , \\
d_2^3 A_0 &\equiv (\ldots)\, A_3 + \omega_1^3 A_5 ,
\end{aligned}
\quad (\mathrm{mod}\ A_0, A_1, A_2) . \tag{48}
$$

Le troisième espace osculateur de la courbe $\omega_1 = 0$ est contenu dans l'espace qui joint le plan osculateur de la courbe $\omega_1 = 0$ avec le plan tangent de la surface. Le troisième espace osculateur de la courbe $\omega_2 = 0$ n'est pas contenu dans l'hyperplan osculateur de la surface.

Des considérations précedents on déduit que *si le troisième espace osculateur de la courbe $\omega_1 = 0$ (resp. $\omega_2 = 0$) est contenu (resp. n'est pas contenu) dans l'hyperplan tangent de la surface, le troisième espace osculateur de la courbe $\omega_1 = 0$ est contenu dans l'espace qui joint le plan osculateur de la courbe $\omega_1 = 0$ avec le plan tangent de la surface.*

Dans le cas $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ il résulte de (31)

$$d[A_0A_1A_2A_3A_4] = (\ldots)[A_0A_1A_2A_3A_4]$$

et la surface (A_0) est plongée dans un S_4. Je ne m'occuperai pas de ce cas.

6. Dans ce qui suit *je me limiterai aux surfaces qui possèdent une* 3-*couche des courbes principales* et qui ont été examiné dans n. 4. Pour ces surfaces les troisièmes espaces osculateurs des courbes du réseau conjugué passant par le point A_0 ont une droite d'intersection qui n'est pas contenue dans l'hyperplan osculateur de la surface (A_0) au point A_0.

Pour ces surfaces on a (4), (15), (36) et (38). En différentiant extérieurement $(38_{3,6})$ j'obtiens

$$\begin{aligned} &[(dM_3 - \eta_1 M_3 - \omega_{40})\,\omega_1] - [(dM_4 - \eta_2 M_4 - \omega_{51})\,\omega_2] = 0\,,\\ &[(dN_2 - \eta_3 N_2 + \omega_{52})\,\omega_1] - [(dN_3 - \eta_4 N_3 + \omega_{30})\,\omega_2] = 0 \end{aligned} \tag{49}$$

où les formes η_i ne m'intérèssent pas. Si je pose $\eta_i(\delta) = f_i$, j'ai

$$\begin{aligned} \delta M_3 &= f_1 M_3 + e_{40}\,,\\ \delta M_4 &= f_2 M_4 + e_{51}\,,\\ \delta N_2 &= f_3 N_2 - e_{52}\,,\\ \delta N_3 &= f_4 N_3 - e_{30}\,. \end{aligned} \tag{50}$$

D'après l'indépendance linéaire des formes e_{30}, e_{40}, e_{51}, e_{52} on peut poser

$$M_3 = M_4 = N_2 = N_3 = 0\,, \tag{51}$$

ce qui simplifie considérablement (38). Après cela on a

$$\begin{aligned} dA_1 &= -\,N_4\omega_2 A_0 + \omega_{11}A_1 + \omega_1 A_3\,,\\ dA_2 &= M_2\omega_1 A_0 + \omega_{22}A_2 + \omega_2 A_4 \end{aligned} \tag{52}$$

ce qui met en évidence que (A_1) et (A_2) sont les transformations de Laplace de la surface (A_0). On a $N_4 = 0$ si et seulement si (A_1) est une courbe, et pareillement pour $M_2 = 0$ et (A_2).

Je suppose que (A_1) est une surface, alors $[A_0A_1A_3]$ est son plan tangent. En outre nous avons

$$d^2A_1 \equiv -\,N_4\omega_2^2 A_2 + \omega_1^2 A_5 \quad (\text{mod}\ A_0, A_1, A_3) \tag{53}$$

et l'espace osculateur de la surface (A_1) est $[A_0A_1A_2A_3A_5]$. On a ensuite

$$d^3A_1 \equiv (-\,N_4\omega_2^3 + N_1\omega_1^3)\,A_4 \quad (\text{mod}\ A_0, A_1, A_2, A_3, A_5)\,. \tag{54}$$

L'équation des courbes principales de la surface (A_1) est alors

$$N_1\omega_1^3 - N_4\omega_2^3 = 0\,. \tag{55}$$

Pareillement on déduit que (si (A_2) est une surface) l'équation des courbes principales en est

$$M_2\omega_1^3 - M_5\omega_2^3 = 0\,. \tag{56}$$

Je cherche le degré de généralité des *surfaces* (A_0) *pour lesquelles toutes les deux premières transformations de Laplace sont des surfaces et les congruences qui sont engendrées par les droites* $[A_0A_1]$ *et* $[A_0A_2]$ *sont des congruences* W, c'est-à-dire que les courbes principales des surfaces (A_0), (A_1) et (A_2) se correspondent mutuellement (voir A. Terracini, *Sulla teoria delle congruenze* W, Rendiconti Ist. Lombardo, *60*, 1927 et *Nuove ricerche sulle congruenze* W, Atti Ist. Veneto, *87*, 1927). Les courbes principales de (A_0) étant (40), on a

$$N_1 + N_4 = 0\,, \quad M_2 + M_5 = 0 \tag{57}$$

pour les surfaces considérées. Je pose

$$M = M_2 = -M_5\,, \quad N = N_1 = -N_4\,. \tag{58}$$

D'après (38) on a

$$\begin{aligned} 3\omega_{31} &= M_1\omega_1 + 3N\omega_2\,, \\ 3\omega_{42} &= 3M\omega_1 - N_5\omega_2\,. \end{aligned} \tag{59}$$

Si je pose

$$M_1 = 3\alpha\,, \quad -N_5 = 3\beta\,, \tag{60}$$

j'obtiens le système (38) dans la forme

$$\begin{aligned} \omega_{31} &= \alpha\omega_1 + N\omega_2\,, \\ \omega_{20} &= M\omega_1\,, \\ \omega_{41} &= 0\,, \\ \omega_{53} &= \qquad\quad M\omega_2\,, \\ \omega_{54} &= N\omega_1\,, \\ \omega_{32} &= 0\,, \\ \omega_{10} &= \qquad\quad N\omega_2\,, \\ \omega_{42} &= M\omega_1 + \beta\omega_2\,, \\ \omega_{55} - \omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{00} &= P\omega_1\,, \\ \omega_{55} - \omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{00} &= \qquad\quad Q\omega_2\,. \end{aligned} \tag{61}$$

Par différentiation extérieure on déduit

$$\begin{aligned} [(\mathrm{d}\alpha + \ldots)\,\omega_1] + [(\mathrm{d}N + \overline{N\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}})\,\omega_2] &= 0\,, \\ [(\mathrm{d}M + \overline{M2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}})\,\omega_1] + [\omega_{40}\omega_2] &= 0\,, \\ [\omega_{40}\omega_1] - [\omega_{51}\omega_2] &= 0\,, \\ -[\omega_{51}\omega_1] + [(\mathrm{d}M + \overline{M\omega_{00} + \omega_{33} - \omega_{22} - \omega_{55}})\,\omega_2] &= 0\,, \\ [(\mathrm{d}N + \overline{N\omega_{00} + \omega_{44} - \omega_{11} - \omega_{55}})\,\omega_1] - [\omega_{52}\omega_2] &= 0\,, \\ -[\omega_{52}\omega_1] + [\omega_{30}\omega_2] &= 0\,, \\ [\omega_{30}\omega_1] + [(\mathrm{d}N + \overline{N2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}})\,\omega_2] &= 0\,, \\ [(\mathrm{d}M + \overline{M\omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}})\,\omega_1] + [(\mathrm{d}\beta + \ldots)\,\omega_2] &= 0\,, \\ [(\mathrm{d}P + \ldots)\,\omega_1] &= 0\,, \\ [(\mathrm{d}Q + \ldots)\,\omega_2] &= 0\,. \end{aligned} \tag{62}$$

Pour abréger je pose

$$\begin{aligned}\varphi &= \mathrm{d}M + M(2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22})\,,\\ \varphi_1 &= \mathrm{d}M + M(\omega_{00} + \omega_{33} - \omega_{22} - \omega_{55})\,,\\ \varphi_2 &= \mathrm{d}M + M(\omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44})\,;\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}\psi &= \mathrm{d}N + N(2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22})\,,\\ \psi_1 &= \mathrm{d}N + N(\omega_{00} + \omega_{44} - \omega_{11} - \omega_{55})\,,\\ \psi_2 &= \mathrm{d}N + N(\omega_{00} + \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33})\end{aligned} \tag{64}$$

ensuite on a de (61_9), (36_8), (61_{10}) et (36_7)

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_1 &= M(\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{33} + \omega_{55}) = MP\omega_1\,,\\ \varphi - \varphi_2 &= M(\omega_{00} + \omega_{44} - 2\omega_{22}) = 0\,;\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}\psi - \psi_1 &= N(\omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{44} + \omega_{55}) = NQ\omega_2\,,\\ \psi - \psi_2 &= N(\omega_{00} + \omega_{33} - 2\omega_{11}) = 0\,.\end{aligned} \tag{66}$$

En posant enfin

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \mathrm{d}\alpha + \dots\,, \quad \Theta_2 = \mathrm{d}\beta_2 + \dots\,,\\ \Theta_3 &= \mathrm{d}P + \dots\,, \quad \Theta_4 = \mathrm{d}Q + \dots\,,\end{aligned} \tag{67}$$

le système (62) devient

$$\begin{aligned}[\Theta_1\omega_1] + [\psi\omega_2] &= 0\,,\\ [\varphi\omega_1] + [\omega_{40}\omega_2] &= 0\,,\\ [\omega_{40}\omega_1] - [\omega_{51}\omega_2] &= 0\,,\\ -[\omega_{51}\omega_1] + [\varphi\omega_2] - MP[\omega_1\omega_2] &= 0\,,\\ [\psi\omega_1] - [\omega_{52}\omega_2] + NQ[\omega_1\omega_2] &= 0\,,\\ -[\omega_{52}\omega_1] + [\omega_{30}\omega_2] &= 0\,,\\ [\omega_{30}\omega_1] + [\psi\omega_2] &= 0\,,\\ [\varphi\omega_1] + [\Theta_2\omega_2] &= 0\,,\\ [\Theta_3\omega_1] &= 0\,,\\ [\Theta_4\omega_2] &= 0\end{aligned} \tag{68}$$

et on s'assure facilement que d'après le lemme de Cartan on a

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= g_1\omega_1 + g_2\omega_2\,,\\ \Theta_2 &= g_3\omega_1 + g_4\omega_2\,,\\ \Theta_3 &= g_5\omega_1\,,\\ \Theta_4 &= g_6\omega_2\,,\\ \omega_{40} &= g_3\omega_1 - g_7\omega_2\,,\\ \omega_{51} &= g_7\omega_1 + g_8\omega_2\,,\\ \omega_{52} &= g_9\omega_1 - g_{10}\omega_2\,,\\ \omega_{30} &= g_{10}\omega_1 + g_2\omega_2\,,\\ \varphi &= (MP - g_8)\,\omega_1 + g_3\omega_2\,,\\ \psi &= g_2\omega_1 + (NQ - g_9)\,\omega_2\,.\end{aligned} \tag{69}$$

Les surfaces considérées sont donc données par le système fermé (4) + (15) + + (36) + (61) + (68); ce système étant en involution on a:

Les surfaces (A_0) avec deux premières transformations de Laplace non dégénérées (A_1), (A_2), les congruences $[A_0A_1]$, $[A_0A_2]$ étant W, existent et dépendent de dix fonctions d'une variable.

7. Enfin je vais trouver le degré de généralité des *surfaces avec les propriétés suivantes*:

1. *la transformation de Laplace (A_2) de la surface (A_0) est de noveau une surface et la congruence engendrée par les droites $[A_0A_2]$ est une congruence W;*
2. *la transformation de Laplace (A_1) de la surface (A_0) est une courbe, le troisième espace osculateur de laquelle au point A_1 étant contenu dans l'espace qui joint le plan tangent de la surface (A_0) au point A_0 et le plan osculateur de la courbe (A_1) au point A_1.*

Du fait que la congruence $[A_0A_2]$ est W on déduit comme précédemment

$$M_2 + M_5 = 0 \tag{70}$$

et je peux encore poser

$$M = M_2 = - M_5 . \tag{71}$$

(A_1) étant une courbe, on doit avoir d'après (52)

$$N_4 = 0 . \tag{72}$$

Le plan tangent de la surface (A_0) est $[A_0A_1A_2]$, le plan osculateur de la courbe (A_1) est d'après (52_1) et (53) $[A_1, A_3, (\ldots)\ A_0 + A_5]$, par conséquent le troisième espace osculateur de la courbe (A_1) doit être contenu dans l'hyperplan $[A_0A_1A_2A_3A_5]$. D'après (54) on doit donc avoir

$$N_1 = 0 . \tag{73}$$

En procédant tout-à-fait comme précédemment on peut mettre le système (38) sous la forme

$$\begin{aligned}
\omega_{31} &= \alpha\omega_1 , \\
\omega_{20} &= M\omega_1 , \\
\omega_{41} &= 0 , \\
\omega_{53} &= \qquad M\omega_2 , \\
\omega_{54} &= 0 , \\
\omega_{32} &= 0 , \\
\omega_{10} &= 0 , \\
\omega_{42} &= M\omega_1 + \beta\omega_2 , \\
\omega_{55} - \omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{00} &= P\omega_1 , \\
\omega_{55} - \omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{00} &= \qquad Q\omega_2
\end{aligned} \tag{74}$$

avec les conditions d'integrabilité

$$\begin{aligned}
[(\mathrm{d}\alpha + \ldots)\,\omega_1] &= 0 , \\
[(\mathrm{d}M + M\overline{2\omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22})}\,\omega_1] + [\omega_{40}\omega_2] &= 0 , \\
[\omega_{40}\omega_1] - [\omega_{51}\omega_2] &= 0 , \\
- [\omega_{51}\omega_1] + [(\mathrm{d}M + M\overline{\omega_{00} + \omega_{33} - \omega_{22} - \omega_{55})}\,\omega_2] &= 0 ;
\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned} [\omega_{52}\omega_2] &= 0\,, \\ [\omega_{52}\omega_1] - [\omega_{30}\omega_2] &= 0\,, \\ [\omega_{30}\omega_1] \qquad\qquad &= 0\,; \end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned} [(\mathrm{d}M + M\omega_{00} + \omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44})\,\omega_1] + [(\mathrm{d}\beta + \ldots)\,\omega_2] &= 0\,, \\ [(\mathrm{d}P + \ldots)\,\omega_1] &= 0\,, \\ [(\mathrm{d}Q + \ldots)\,\omega_2] &= 0\,. \end{aligned} \tag{77}$$

De (76) on déduit

$$\omega_{30} = r\omega_1\,, \quad \omega_{52} = -\,r\omega_2\,. \tag{78}$$

Par différentiation extérieure d'une de ces équations on trouve facilement qu'on peut choisir

$$r = 0\,. \tag{79}$$

On obtient donc

$$\omega_{30} = \omega_{52} = 0 \tag{80}$$

et par différentiation extérieure

$$[\omega_{50}\omega_1] = [\omega_{50}\omega_2] = 0\,. \tag{81}$$

Ceci nous donne

$$\omega_{50} = 0\,, \tag{82}$$

la dernière équation étant complètement integrable. Je signale le fait que $M \neq 0$ puisque (A_2) est une surface — voir (52_2). En rappelant les équations (63), (67) et ces conséquences (65), je transcris les équations (75) + (77) + (81) dans la forme

$$\begin{aligned} [\Theta_1\omega_1] &= 0\,, \\ [\varphi\omega_1] + [\omega_{40}\omega_2] &= 0\,, \\ [\omega_{40}\omega_1] - [\omega_{51}\omega_2] &= 0\,, \\ -\,[\omega_{51}\omega_1] + [\varphi\omega_2] - MP[\omega_1\omega_2] &= 0\,, \\ [\varphi\omega_1] + [\Theta_2\omega_2] &= 0\,, \\ [\Theta_3\omega_1] &= 0\,, \\ [\Theta_4\omega_2] &= 0 \end{aligned} \tag{83}$$

d'où après le lemme de Cartan

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= h_1\omega_1\,, \\ \Theta_2 &= h_2\omega_1 + h_3\omega_2\,, \\ \Theta_3 &= h_4\omega_1\,, \\ \Theta_4 &= \qquad\quad h_5\omega_2\,, \\ \varphi &= h_6\omega_1 + h_2\omega_2\,, \\ \omega_{40} &= h_2\omega_1 - h_7\omega_2\,, \\ \omega_{51} &= h_7\omega_1 - (h_6 - MP)\,\omega_2\,. \end{aligned} \tag{84}$$

Les surfaces considérées sont donc données par le système fermé (4) + (15) + + (36) + (74) + (80) + (82) qui est en involution. *Les surfaces examinées dépendent donc de sept fonctions d'une variable.*

Резюме

ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С СОПРЯЖЕННОЙ СЕТЬЮ В S_5

АЛОИС ШВЕЦ (ALOIS ŠVEC), Прага.
(Поступило в редакцию 30/IX 1955 г.)

В своей работе *Проективное изгибание поверхностей с сопряженной сетью в* S_5 (настоящий журнал) я охарактеризовал с геометрической точки зрения все поверхности с одной сопряженной сетью и тройным слоем асимптотических γ_{23} в S_5, которые допускают проективное изгибание (3-го порядка). В настоящей статье на основании указанных геометрических свойств исследуется общий случай рассматриваемых поверхностей со следующими результатами:

I. *Оба первых преобразований Лапласа рассматриваемой поверхности является поверхностями. Проективно изгибаемые поверхности этого типа зависят от десяти функций одного переменного.*

II. *Одно преобразование Лапласа рассматриваемой поверхности является поверхностью, другое же вырождается в кривую. Проективно изгибаемые поверхности этого типа зависят от семи функций одного переменного.*

III. Случай, когда *оба первых преобразований Лапласа данной поверхности вырождаются в кривые*, был подробно исследован в моей работе *Проективное изгибание некоторых поверхностей с сопряженной сетью* (Чехословацкий мат. журнал, т. 5(80) 1955), где были в явном виде найдены дифференциальные уравнения этих поверхностей и другие их геометрические свойства.