Alois Švec

Déformations projectives des surfaces à réseau conjugué dans S_5

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 1, 118–124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100182

DÉFORMATIONS PROJECTIVES DES SURFACES À RÉSEAU CONJUGUÉ DANS S_5

ALOIS ŠVEC, Praha.

(Reçu le 30 septembre 1955.)

L'auteur étudie le sens géométrique des conditions — trouvées par M. A. TERRACINI — pour qu'une surface à un seul réseau conjugué dans S_5 soit projectivement déformable (déformation de troisième ordre). Ce travail constitue le point de départ d'un autre travail dont le but sera d'établir le degré de généralité de ces surfaces. En liaison avec le travail antérieur *Déformati·· s projectives de certaines surfaces à réseau conjugué* le présent travail donne une solution complète du problème principal de la déformation des surfaces considérées.

Le problème que je résous ici m'a été présenté par M. E. ČECH, je tiens à lui exprimer mes remercîments pour ses conseils nombreux.

1. Dans son excellent travail *Nuove ricerche sull'incidenza di piani infinitamente vicini* (Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. *73*, 1937-38-XVI) M. A. TERRACINI a trouvé des conditions analytiques pour qu'une surface F dans S_5 qui représent alors la solution d'une seule équation de Laplace de type non parabolique et par là n'a qu'un seul réseau conjugué, soit projectivement déformable (déformation de troisième ordre, c'est-à-dire C_3). Je vais citer son résultat fondamental — qui n'est d'ailleur fondamental que du point de vue de la déformabilité des surfaces, car ce sont justement ces surfaces-là qui ne jouent qu'un rôle auxiliaire (quoique bien important) dans les profondes études de M. Terracini concernant la caractérisation géométrique de certains systèmes de plans.

Je considère une surface (y) du type F dans S_5 comme une surface focale de la congruence L formée par les droites $p = [y, z]$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$; la possibilité d'un tel point de vue étant supposée connue. La congruence L dans S_5 peut alors être déterminée de façon analytique par le système

$$y_u = mz\,, \quad z_v = ny\,, \tag{1}$$

$$y_{vvv} = ay + bz + cy_v + dz_u + \varrho y_{vv} + \varepsilon z_{uu}\,, \tag{2}$$

$$z_{uuu} = Ay + Bz + Cy_v + Dz_u + \tau y_{vv} + \omega z_{uu}\,,$$

où l'on suppose

$$(y, z, y_v, z_u, y_{vv}, z_{uu}) \neq 0 \,. \tag{3}$$

Le système (1) + (2) détermine, il est vrai, une congruence nonparabolique quelconque dans S_5, or, comme (y) est une surface focale et non pas une courbe directrice, on a nécessairement

$$m \neq 0 \,. \tag{4}$$

Les conditions d'intégrabilité du système (1) + (2) sont

$$\begin{gathered} d_u + \varepsilon D + b = 0 \,, \\ d + \varepsilon_u + \varepsilon\omega = 0 \,, \\ 3m_{vv}n + 3m_v n_v + mn_{vv} = a_u + cmn + \varrho(2m_v n + mn_v) + \varepsilon A \,, \\ m_{vvv} = am + b_u + cm_v + \varrho m_{vv} + \varepsilon B \,, \\ 3m_v n + 2mn_v = c_u + \varrho mn + \varepsilon C \,, \\ \varrho_u = mn - \varepsilon\tau \end{gathered} \tag{5}$$

et les équations (5') qu'on obtient en échangeant mutuellement les paramètres u, v tout en échangeant respectivement les coefficients du système (1) + (2).

Le résultat cité de M. Terracini sera alors:

La condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces $S \equiv (y)$ et $\bar{S} \equiv (\bar{y})$ du type F dans l'espace S_5 soient en déformation projective d'ordre 3 (c'est-à-dire en correspondance C_3) *est que* — si les réseaux conjugués sont formés par les courbes paramétriques et que les surfaces soient en correspondance $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$; les congruences correspondantes L, $\bar{L}$ étant formées par les droites yy_u, $\bar{y}\bar{y}_u$, données par les systèmes de la forme (1) + (2) — *il soit possible de transformer l'expression analytique de telle sorte que*

$$\bar{m} = m, \bar{n} = n, \bar{b} = b, \bar{c} = c, \bar{d} = d, \bar{\varrho} = \varrho, \bar{\varepsilon} = \varepsilon, \tag{6}$$

alors il s'ensuivera déjà nécessairement des conditions d'intégrabilité que

$$\bar{A} = A \,, \quad \bar{C} = C \,, \quad \bar{D} = D \,, \quad \bar{\tau} = \tau \,, \quad \bar{\omega} = \omega \,. \tag{7}$$

Il s'ensuit de là que si certaines surfaces focales de deux congruences sont en déformation projective C_3 leurs k-ièmes transformations de Laplace y sont également (à condition qu'elles existent et qu'elles soient des surfaces).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface $S \equiv (y)$ soit projectivement déformable est que

$$mn = \varepsilon\tau \,, \tag{8}$$

$$\left(\log \frac{\varepsilon}{m}\right)_{uv} = 0 \,, \tag{9}$$

donc $\varepsilon : m = \psi(v) : \varphi(u)$; la surface la plus générale qui soit en déformation avec la surface donnée par (1) + (2) + (8) + (9) *s'obtient alors comme une surface* *focale d'une nouvelle congruence donnée également par* (1) + (2) *mais où l'on considère au lieu des coefficients* a *et* B *de nouveaux coefficients* $a - k\psi(v)$, $B + k\varphi(u)$ — k *étant une constante arbitraire* — *les autres coefficients restant inchangés.*

2. Mon but principal est d'établir le degré de généralité des surfaces projectivement déformables de type F. Pendant ces considérations je vais me borner uniquement aux surfaces qui ont une „*pseudonormale*", c'est-à-dire telles que la droite d'intersection des troisièmes espaces osculateur des courbes du réseau conjuqué existe dans chaque point de la surface mais n'est pas située dans l'hyperplan osculateur dans ce point.

Peut-être serait-il possible de procéder par la méthode dont s'est servi E. Cartan en 1920 en établissant le degré de généralité des surfaces R, mais cette méthode serait très difficile à employer du point de vue technique; surtout si l'on se rend compte du fait qu'elle exige même encore plus qu'une spécialisation complète du repère. Le procédé dont je vais me servir sera tout autre: je détermine le sens géométrique des conditions (8) et (9) et je chercherai alors le degré de généralité des surfaces jouissant de ces propriétés; or cela constituera l'objet d'un autre travail.

Considérons la congruence (1) + (2) + (4). La première transformation de Laplace du point y est le point $y_1 = z$; je détermine maintenant le point $y_{-1} = k_1 y + k_2 y_v$. Il faut qu'on ait

$$(y_{-1})_u = k_{1u} y + k_{2u} y_v + k_1 mz + k_2(m_v z + mny) = l_1 y + l_2 y_v ,$$

ou bien

$$k_1 m + k_2 m_v = 0 .$$

De là s'ensuit déjà

$$y_{-1} = m_v y - m y_v . \tag{10}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $(y_1) \equiv (z)$ soit une surface est que

$$n \neq 0 . \tag{11}$$

De (10) s'ensuit

$$\begin{aligned} (y_{-1})_u &= (m_{uv} - m^2 n)\, y - m_u y_v , \\ (y_{-1})_v &= m_{vv} y - m y_{vv} . \end{aligned} \tag{12}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que (y_{-1}) soit une surface est évidemment

$$\begin{vmatrix} m_v & m & 0 \\ m_{uv} - m^2 n & m_u & 0 \\ m_{vv} & 0 & m \end{vmatrix} = m(m_u m_v - m m_{uv} + m^2 n) \neq 0 ,$$

ou bien en vertu de (4)

$$n \neq (\log m)_{uv} . \tag{13}$$

Le plan tangent à la surface (y) est évidemment $[y, z, y_v]$, l'hyperplan osculateur $[y, z, y_v, z_u, y_{vv}]$, ensuite on a

$$\mathrm{d}^3 y \equiv (m\,\mathrm{d}u^3 + \varepsilon\,\mathrm{d}v^3)\, z_{uu} \quad (\mathrm{mod}\; y, z, y_v, z_u, y_{vv}) \tag{14}$$

de sorte que l'équation des *courbes principales* de la surface (y) est

$$m\,\mathrm{d}u^3 + \varepsilon\,\mathrm{d}v^3 = 0\,. \tag{15}$$

En supposant que $(y_1) \equiv (z)$ soit une surface on obtient pour l'équation de ses courbes principales l'équation

$$\tau\,\mathrm{d}u^3 + n\,\mathrm{d}v^3 = 0\,. \tag{16}$$

La condition (8) est remplie si et seulement si les courbes principales des surfaces (y) et (z) se correspondent respectivement; dans ce cas là la congruence L constitue un certain pendant des congruences W de S_3 et en suivant M. A. Terracini (*Sulla teoria delle congruenze* W, Rendiconti Ist. Lombardo, *60*, 1927 et *Nuove ricerche sulle congruenze* W, Atti Ist. Veneto, *87*, 1927) je l'appelerai *congruence* W. On voit aisément que la congruence formée par les droites $[y, y_{-1}]$ sera une congruence W également (à condition que (y_{-1}) soit une surface) mais il ne s'ensuit pas de cela que toute surface dont deux congruences correspondantes sont des congruences W est projectivement déformable — ce qui reste donc encore à démontrer.

Soit (y_1) une surface; le plan tangent à cette surface sera $[y, y_v, y_{vv}]$, l'hyperplan osculateur $[y, y_v, y_{vv}, y_{vvv}, z]$. Ensuite on a $(\mathrm{mod}\; y, y_v, y_{vv}, y_{vvv}, z)$

$$\begin{gathered} y_u \equiv 0\,, \quad y_{uu} \equiv m z_u\,, \quad y_{uuu} \equiv 2m_u z_u + m z_{uu}\,, \\ y_v \equiv y_{vv} \equiv 0\,, \quad y_{vvv} \equiv \mathrm{d} z_u + \varepsilon z_{uu} \equiv 0\,, \\ y_{uv} \equiv 0\,, \quad y_{uuv} \equiv m_v z_u\,, \quad y_{uuuv} \equiv 2m_{uv} z_u + m_v z_{uu} + m^2 n z_u\,, \\ y_{vvvv} \equiv (d_v + \varrho d + \varepsilon m n)\, z_u + (\varepsilon_v + \varrho\varepsilon)\, z_{uu}\,. \end{gathered}$$

De là s'ensuit que, en posant $\tilde{y}_{-1} = m^{-1} y_{-1} = (\log m)_v\, y - y_v$, j'obtiens

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^3 \tilde{y}_{-1} \equiv {} & [3(\log m)_{uv}\, m z_u + (\log m)_v\, (2m_u z_u + m z_{uu}) - \\ & - (2m_{uv} z_u + m_v z_{uu} + m^2 n z_u)]\, \mathrm{d}u^3 - [(d_v + \varrho d + \varepsilon m n)\, z_u + \\ & + (\varepsilon_v + \varrho\varepsilon)\, z_{uu}]\, \mathrm{d}v^3 \end{aligned}$$

de sorte que l'équation des courbes principales sur la surface (y_{-1}) est

$$\begin{gathered} [(m\,(\log m)_v - m_v)\,\mathrm{d}u^3 - (\varepsilon_v + \varrho\varepsilon)\,\mathrm{d}v^3]\, d - [(3m(\log m)_{uv} + \\ + 2m_u(\log m)_v - 2m_{uv} - m^2 n)\,\mathrm{d}u^3 - (d_v + \varrho d + \varepsilon m n)\,\mathrm{d}v^3]\, \varepsilon = 0 \end{gathered}$$

ou bien

$$\begin{gathered} [md(\log m)_v - m_v d - 3\varepsilon m(\log m)_{uv} - 2\varepsilon m_u(\log m)_v + \\ + 2\varepsilon m_{uv} + \varepsilon m^2 n]\,\mathrm{d}u^3 - (\varepsilon_v d - \varepsilon d_v - \varepsilon^2 m n)\,\mathrm{d}v^3 = 0\,. \end{gathered}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence formée par les droites $[y, y_v]$ soit une congruence W est

$$\begin{aligned} &md\varepsilon_v - md_v\varepsilon - \varepsilon^2 m^2 n - \varepsilon dm(\log m)_v - \varepsilon dm_v - \\ &- 3\varepsilon^2 m(\log m)_{uv} - 2\varepsilon^2 m_u(\log m)_v + 2\varepsilon^2 m_{uv} + \varepsilon^2 m^2 n = 0\,. \end{aligned} \tag{17}$$

De même, en vertu de (5_2), $(5'_6)$ on aura

$$\begin{aligned} md\varepsilon_v - md_v\varepsilon &= md\varepsilon_v + m\varepsilon(\varepsilon_{uv} + \varepsilon_v\omega + \overline{\varepsilon mn - \varepsilon\tau}) = \\ &= m\varepsilon\varepsilon_{uv} + \varepsilon^2 m^2 n - \varepsilon^3\tau m + md\varepsilon_v - m\varepsilon_v(d + \varepsilon_u) = \\ &= m\varepsilon\varepsilon_{uv} - m\varepsilon_u\varepsilon_v + \varepsilon^2 m^2 n - \varepsilon^3\tau m\,. \end{aligned}$$

L'équation (17) devient alors

$$\begin{aligned} &m\varepsilon\varepsilon_{uv} - m\varepsilon_u\varepsilon_v - \varepsilon^2\tau m - 3\varepsilon^2 m_{uv} + 3\varepsilon^2 m^{-1} m_u m_v - \\ &- 2\varepsilon^2 m^{-1} m_u m_v + 2\varepsilon^2 m_{uv} + \varepsilon^2 m^2 n = 0\,. \end{aligned} \tag{18}$$

En supposant $\varepsilon \neq 0$ on obtient en divisant par $m\varepsilon^2$ l'équation

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_{uv} - \varepsilon_u\varepsilon_v}{\varepsilon^2} - \frac{mm_{uv} - m_u m_v}{m^2} + mn - \varepsilon\tau = 0\,,$$

ou bien encore

$$\left(\log\frac{\varepsilon}{m}\right)_{uv} + mn - \varepsilon\tau = 0\,. \tag{19}$$

Or, la condition $\varepsilon \neq 0$ est toujours remplie par les surfaces (y) considérées. Les troisièmes espaces osculateurs de deux courbes du réseau conjugué passant par le point y sont $[y, y_v, y_{vv}, y_{vvv}]$ et $[y, z, z_u, z_{uu}]$. L'équation (2_1) implique

$$-ay - cy_v - \varrho y_{vv} + y_{vvv} = bz + dz_u + \varepsilon z_{uu}$$

de sorte que la pseudonormale est $[y, bz + dz_u + \varepsilon z_{uu}]$; si elle n'est pas située dans l'hyperplan osculateur, on a nécessairement $\varepsilon \neq 0$.

Enfin il est clair que les systèmes (8) + (9) et (8) + (19) sont équivalent.

3. On peut énoncer le théorème évident:

Supposons que les deux transformations de Laplace (y_1), (y_{-1}) d'une surface (y) soient elles-aussi des surfaces. Alors la condition nécessaire et suffisante de la déformabilité projective d'ordre 3 de la surface (y) est que les deux congruences formées par les droites $[y, y_1]$ et $[y, y_{-1}]$ respectivement soient des congruences W.

Supposons maintenant que la première transformation de Laplace (y_1) de la surface (y) soit une courbe, mais la seconde (y_{-1}) une surface. Alors, on a $n = 0$, et de (8) s'ensuite que

$$\tau = 0\,. \tag{20}$$

Dans ce cas, les systèmes (8) + (9) et (19) + (20) coïncident. La congruence formée par les droites $[y, y_{-1}]$ est alors une congruence W. Il me faut encore caractériser la condition (20) d'une manière géométrique, or cela est déjà facile. Le plan tangent à la surface (y) et le plan osculateur de la courbe (y_1) se trouvent évidemment les deux situés dans l'hyperplan $[y, z, y_v, z_u, z_{uu}]$. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Supposons que la transformation de Laplace (y_1) *de la surface* (y) *soit une courbe et que la transformation* (y_{-1}) *soit une surface. Alors, la condition nécessaire et suffisante de la déformabilité projective d'ordre* 3 *de la surface* (y) *est que la congruence formée par les droites* $[y, y_{-1}]$ *soit une congruence* W *et que le troisième espace osculateur de la courbe* (y_1) *soit situé dans l'hyperplan contenant le plan osculateur de la même courbe (au même point) ainsi que le plan tangent à la surface* (y) *au point correspondant.*

Il nous reste à considérer le cas où toutes les deux transformations de Laplace de la surface (y) sont des courbes. Dans ce cas-là, on a de nouveau $n = 0$ mais aussi $(\log m)_{uv} = 0$. En vertu de (8) + (9), ou bien de (19) + (20) j'obtiens (20) et

$$(\log \varepsilon)_{uv} = 0\ . \tag{21}$$

L'hyperplan contenant le plan tangent à la surface (y) et le plan osculateur de la courbe (y_{-1}) au point correspondant est évidemment $\xi = [y, z, y_v, y_{vv}, dz_u + \varepsilon z_{uu}]$. Ensuite on a

$$(\tilde{y}_{-1})_{vvv} \equiv - d_v z_u - \varepsilon_v z_{uu} \pmod{\xi}\ .$$

Maintenant, en vertu de (5_2), $(5'_6)$

$$(\xi(\tilde{y}_{-1})_{vvv}) = \varepsilon_v d - \varepsilon d_v = \varepsilon_v d + \varepsilon\varepsilon_{uv} + \varepsilon\varepsilon_v\omega + \varepsilon^2\omega_v = \varepsilon\varepsilon_{uv} - \varepsilon_u\varepsilon_v =$$
$$= \varepsilon^2(\log \varepsilon)_{uv}\ .$$

De là découle immédiatement:

Supposons que les deux transformations de Laplace de la surface (y) *soient des courbes. Alors la condition nécessaire et suffisante de la déformabilité projective d'ordre* 3 *de la surface* (y) *est que le troisième espace osculateur de la transformation de Laplace se trouve dans l'hyporplane contenant le plan osculateur (au même point) de la même courbe et le plan tangent à la surface* (y) *au point correspondant.*

Резюме

ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ С СОПРЯЖЕННОЙ СЕТЬЮ В S_5

АЛОИС ШВЕЦ (ALOIS ŠVEC), Прага.

(Поступило в редакцию 30/IX 1955 г.)

А. Террачини в своей работе *Nuove ricerche sull'incidenza di piani infinitamente vicini* (Atti della Reale Accademie vol. 73, 1937-38) установил необходимые и достаточные условия для того, чтобы поверхность с одной сопряженной сетью и 3-слоем асимптотических γ_{23} в S_5 допускала проективное изгибание (3-го порядка C_3). Этим условиям можно дать простое геометрическое истолкование.

В случае, когда оба преобразования Лапласа (y_1), (y_{-1}) проективно изгибаемой поверхности (y) являются также поверхностями, конгруэнции $[yy_1]$, $[yy_{-1}]$ будут конгруэнциями W и наоборот. Притом под конгруэнцией W мы понимаем в смысле А. Террачини (*Sulla teoria delle congruenze W*, Rendic. Ist. Lomb. 60, 1927 и *Nuove ricerche sulle congruenze W*, Atti Ist. Veneto 87, 1927) конгруэнции в S_5, на фокальных поверхностях которых соответствуют друг другу асимптотические γ_{23}. Если же, далее, напр. (y_1) является кривой, то ее третье соприкасающееся пространство лежит в гиперплоскости, содержащей соприкасающуюся плоскость той же кривой (в той же точке) и касательную плоскость к поверхности (y) в точке, которой соответствует y_1; наконец, если (y_{-1}) — кривая, то для нее наступит аналогичное положение вещей; если же она — поверхность, то $[yy_{-1}]$ представляет собой конгруэнцию W.

Геометризация условий Террачини позволит мне произвести общее исследование проективно изгибаемых (изгибание 3-го порядка) поверхностей с сопряженной сетью в S_5, чему будет посвящена одна из последующих работ.