Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

DÉFORMATIONS PROJECTIVES DE CERTAINES SURFACES A RÉSEAU CONJUGUÉ

ALOIS ŠVEC, Praha.

(Reçu le 12 juillet 1955.)

L'auteur a étudié la déformation projective du 3^e ordre des surfaces à réseau conjugué dans S_5 et a résolu les principaux problèmes d'existence. Dans ce travail, il s'occupe des surfaces déformables projectivement, plongées dans S_5 qui sont des solutions de l'équation $x_{uv} = 0$. Ces surfaces dépendent de six fonctions d'une variable; on a trouvé les équations différentielles qui les déterminent et une certaine propriété géométrique qui en est caractéristique. D'autres propriétés géométriques seront contenues dans un autre travail qui traitera — par les méthodes d'É. CARTAN — le problème de la déformation projective du 3^e ordre d'une surface générale à réseau conjugué.

Un des plus simples objets que l'on considère en étudiant les surfaces dans les espaces projectifs à plusieurs dimensions est constitué par les surfaces F dans S_5 représentant la solution d'une (et une seule) équation de Laplace.

Il est naturel de généraliser toutes les notions de la théorie des déformations projectives des surfaces dans S_3 au cas des surfaces F et de résoudre pour celles-ci des problèmes analogues. Il se trouve alors que l'on peut se servir avec avantage de la méthode des transformations K-linéarisantes, dues à M. E. ČECH.

Toutes deux surfaces F sont en déformation projective d'ordre 2, mais le problème de la déformation projective du 3^e ordre n'est pourtant pas trivial. Je résous le problème relativement simple de la déformation projective des surfaces F_0 qui sont des solutions de l'équation $x_{uv} = 0$; ce problème est traité à fond et je donne une caractéristique géométrique des surfaces F_0 qui sont déformables projectivement.

En écrivant ce travail j'ai rencontré bien des problèmes qui voudraient être résolus. Il s'est trouvé, en particulier, qui'il peut exister, entre deux surfaces, une foule de relations différenciées d'une façon plus subtile que ne le sont les déformations projectives. J'ai rencontré le même phénomène en étudiant les surfaces réglées dans les espaces projectifs à dimension impaire.

1. J'appelle surface F dans l'espace projectif à cinq dimensions S_5 toute surface satisfaisant à une et une seule équation de Laplace

$$x_{uv} = \alpha x + \beta x_u + \gamma x_v \, . \tag{1}$$

Une surface F satisfaisant à l'équation (1) est caractérisée de façon géométrique par le fait que ses courbes paramétriques forment un réseau, ce qui veut dire que la surface réglée formée par les tangentes aux courbes de l'un système du réseau aux points situés sur une courbe quelconque de l'autre système est développable. En même temps, le réseau paramétrique est le seul réseau qui jouisse de cette propriété, on l'appelle réseau conjugué. Dans la suite je me bornerai, en raison de la simplicité grâce à laquelle il me sera possible de poursuivre les calculs principaux jusqu'au bout, aux surfaces pour lesquelles toutes les surfaces réglées développables signalées ci-dessus se réduisent aux cônes. Ces surfaces que je dénote par F_0 satisfont à l'équation

$$x_{uv} = 0 \, . \tag{2}$$

Je ne donne pas de démonstration de ce fait.

2. Je vais maintenant introduire certaines surfaces F_0 spéciales qui me permetteront de caractériser géométriquement les résultats obtenus plus tard.

Dans tout ce qui suit je me bornerai aux surfaces F à propriété suivante: l'intersection des troisièmes espaces osculateurs des deux courbes du réseau conjugué passant par un point arbitraire x de la surface, à ce point est une droite qui n'est pas plongée dans l'espace osculateur $\xi = [x x_u x_v x_{uu} x_{vv}]$ au point x de la surface. Cette droite d'intersection, je l'appelle *pseudonormale* de la surface au point x.

Maintenant, on a évidemment

$$(x x_u x_v x_{uu} x_{vv} x_{uuu}) \neq 0 \neq (x x_u x_v x_{uu} x_{vv} x_{vvv}) \tag{3}$$

et la surface F peut être déterminée comme la solution d'un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\begin{gathered} x_{uv} = \alpha x + \beta x_u + \gamma x_v \, , \\ x_{vvv} = a x + b x_u + c x_v + d x_{uu} + e x_{vv} + f x_{uuu} \, , \\ (f \neq 0) \, . \end{gathered} \tag{4}$$

Les pseudonormals aux points d'une courbe arbitraire de la surface F forment une certaine surface réglée. J'appellerai surface F_1 toute surface F_0 telle que les surfaces réglées des pseudonormales suivant une courbe arbitraire du réseau conjugué forment un cône. Il est évident qu'en définissant les surfaces F_1 il est inutile de se borner aux surfaces F_0; je ne le fais que parceque c'est seulement dans ce sens limité que les surfaces F_1 me seront nécessaires et que j'évite ainsi des calculs trainants.

Soit F_1 une surface donnée par le système

$$x_{uv} = 0\,,$$
$$x_{vvv} = ax + bx_u + cx_v + dx_{uu} + ex_{vv} + fx_{uuu}\,, \tag{5}$$

je vais trouver les conditions pour les coefficients $a, b, \ldots, f \neq 0$.

Avant de procéder à leur déduction je vais introduire quelques abréviations terminologiques: j'appelle *u-courbe* une courbe du réseau conjugué pour laquelle $v =$ const; la notion de la *v-courbe* sera introduite de manière analogue. J'appelle *u-point* le sommet du cône des pseudonormales d'une surface F_1 aux points d'une u-courbe; j'appelle *u-point de Laplace* le sommet du cône des tangentes aux v-courbes suivant une u-courbe d'une surface F_0.

Passons au calcul: de (5_2) on déduit

$$-\,cx_v - ex_{vv} + x_{vvv} = ax + bx_u + dx_{uu} + fx_{uuu}$$

de façon que la pseudonormale au point x est evidemment la droite

$$[x,\, -cx_v - ex_{vv} + x_{vvv}] = [x,\, bx_u + dx_{uu} + fx_{uuu}]\,. \tag{6}$$

Pour une surface F_1 il faut qu'il existe des fonctions $\lambda = \lambda(u, v)$, $\mu = \mu(u, v)$, $L = L(u, v)$, $M = M(u, v)$, telles que

$$(\lambda x + bx_u + dx_{uu} + fx_{uuu})_v = L(\lambda x + bx_u + dx_{uu} + fx_{uuu})\,,$$
$$(\mu x - cx_v - ex_{vv} - x_{vvv})_u = M(\mu x - cx_v - ex_{vv} + x_{vvv})\,.$$

En différentiant on obtient de (5_1)

$$\lambda_v x + b_v x_u + d_v x_{uu} + f_v x_{uuu} + \lambda x_v = L(\lambda x + bx_u + dx_{uu} + fx_{uuu})\,,$$
$$\mu_u x - c_u x_v - e_u x_{vv} + \mu x_u = M(\mu x - cx_v - ex_{vv} + x_{vvv})$$

et de (3)

$$\lambda = \mu = M = 0\,,$$
$$b_v = Lb,\ d_v = Ld,\ f_v = Lf\,, \tag{7}$$
$$c_u = e_u = 0\,. \tag{8}$$

On trouve immédiatement: la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface F_0 (5) soit une surface F_1 est: il existe une fonction $L = L(u, v)$ telle que (7) et (8) valent.

3. Je vais introduire une nouvelle notion des surfaces F_2; ce sont les surfaces F_1 à cette propriété géométrique: Les u-points correspondant à toutes les u-courbes forment une certaine courbe γ. A chaque u-courbe correspond un certain u-point $X = X(v)$ et un certain u-point de Laplace $x_v = x_v(v)$. J'exige maintenant que pour tout $v = v_0$ la tangente à la courbe $X = X(v)$ au point $X(v_0)$ passe par le u-point de Laplace $x_v(v_0)$; une situation analogue doit se présenter aussi pour chaque v-courbe.

Les conditions analytiques pour les surfaces F_2 sont données par (7), (8) et par les relations que je vais établir. Les u-points sont

$$X = -\,cx_v - ex_{vv} + x_{vvv}\,, \tag{9}$$

les v-points

$$Y = bx_u + dx_{uu} + fx_{uuu} \,. \tag{10}$$

En effet, il s'ensuit de (5_1), (7) et (8) que

$$X_u = 0, \ Y_v = LY \,.$$

De (5_2) on a

$$X = Y + ax \,. \tag{11}$$

Dans la définition des surfaces F_2 je me suis borné au cas général où les u-points et les v-points forment une courbe. Or, s'il n'en est pas ainsi, il doit y avoir des fonctions $\eta_1 = \eta_1(u, v)$, $\eta_2 = \eta_2(u, v)$ telles que

$$X_v = \eta_1 X, \ Y_u = \eta_2 Y \,. \tag{12}$$

De (11) et (12_1) on a

$$X_v = Y_v + a_v x + ax_v = L(bx_u + dx_{uu} + fx_{uuu}) + a_v x + ax_v \,,$$
$$X_v = \eta_1(-cx_v - ex_{vv} + x_{vvv}) = \eta_1(ax + bx_u + dx_{uu} + fx_{uuu}) \,,$$

d'où

$$a = 0 \,. \tag{13}$$

De façon analogue de (11) et (12_2) on a

$$Y_u = X_u - a_u x - ax_u = -a_u x - ax_u \,,$$
$$Y_u = \eta_2(bx_u + dx_{uu} + fx_{uuu}) \,,$$

d'où l'on déduit également (13). Le fait que je n'obtiens pas de nouvelles conditions s'ensuit de ce que toutes les pseudonormales des surfaces en considération passent par un point fixe.

Dans la suite je vais donc me borner au cas des surfaces pour lesquelles

$$a \neq 0 \,. \tag{14}$$

Les conditions caractéristiques des surfaces F_2 sont: le point x_v est situé sur la droite $[X, X_v]$ et le point x_u se trouve sur la droite $[Y, Y_u]$. On a d'abord

$$X_u = Y_u + a_u x + ax_u = 0 \,,$$

donc il faut que

$$a_u = 0 \,. \tag{15}$$

Ensuite on a

$$X_v = Y_v + a_v x + ax_v = LY + a_v x + ax_v$$

et il doit y avoir des fonctions σ_1, σ_2 telles que

$$\sigma_1 X + \sigma_2 X_v = x_v \,,$$

ce qui donne

$$\sigma_1(-cx_v - ex_{vv} + x_{vvv}) + \sigma_2(Lbx_u + Ldx_{uu} + Lfx_{uuu} + a_v x + ax_v) = x_v \,,$$
$$\sigma_1(ax + bx_u + dx_{uu} + fx_{uuu}) + \sigma_2(Lbx_u + Ldx_{uu} + Lfx_{uuu} + a_v x + ax_v) = x_v \,,$$

d'où il s'ensuit que

$$a_v = La \,. \tag{16}$$

De l'autre côté il est clair qu'une surface satisfaisant à (7), (8), (15) et (16) est nécessairement une surface F_2. Je vais résoudre ces équations. En vertu de (15) on a

$$a = V_1 , \tag{17}$$

où $V_1 = V_1(v)$; dans tout ce qui suit je désigne par U_i, V_i les fonctions des variables u et v respectivement. De manière analogue on déduit de (8) que

$$c = V_2 , \tag{18}$$

$$e = V_3 . \tag{19}$$

Vu que $a \neq 0$, il s'ensuit de (7_1), (16) et (17)

$$V_1 b_v - V_1' b = 0 ,$$

d'où

$$b = U_1 V_1 . \tag{20}$$

Semblablement, en partant de $(7_{2,3})$ on obtient

$$d = U_2 V_1 , \tag{21}$$

$$f = U_3 V_1 . \tag{22}$$

Toute surface F_2 est donc solution d'un système complètement intégrable de la forme

$$\begin{gathered} x_{uv} = 0 , \\ x_{vvv} = V_1 x + U_1 V_1 x_u + V_2 x_v + U_2 V_1 x_{uu} + V_3 x_{vv} + U_3 V_1 x_{uuu} \\ (U_3 V_1 \neq 0) . \end{gathered} \tag{23}$$

4. Afin de pouvoir donner, dans la suite, un exposé ininterrompu des déformations projectives des surfaces F_0, je procède des maintenant à établir les conditions d'intégrabilité du système (5). Pour des raisons de clarté, je les mets sous la forme suivante:

$$x = A,\ x_u = B,\ x_v = C,\ x_{uu} = D,\ x_{vv} = E,\ x_{uuu} = F , \tag{24}$$

$$\begin{gathered} A_u = B , \quad A_v = C , \\ B_u = D , \quad B_v = 0 , \\ C_u = 0 , \quad C_v = E , \\ D_u = F , \quad D_v = 0 , \\ E_u = 0 , \\ E_v = aA + bB + cC + dD + eE + fF , \\ F_u = -f^{-1}[a_u A + (b_u + a) B + c_u C + (d_u + b) D + e_u E + (f_u + d) F] , \\ F_v = 0 . \end{gathered} \tag{25}$$

On voit de même que

$$A_{uv} = A_{vu},\ B_{uv} = B_{vu},\ C_{uv} = C_{vu},\ D_{uv} = D_{vu},\ E_{uv} = E_{vu} , \tag{26}$$

la condition de l'intégrabilité du système (5) se réduit donc à la relation

$$F_{uv} = F_{vu} . \tag{27}$$

On trouve les conditions d'intégrabilité du système (5) exprimées par

$$\begin{aligned} a_{uv} + ae_u &= a_u\varphi , \\ b_{uv} + be_u + a_v &= (a + b_u)\,\varphi , \\ c_{uv} + ce_u + a_u &= c_u\varphi , \\ d_{uv} + de_u + b_v &= (b + d_u)\,\varphi , \\ e_{uv} + ee_u + c_u &= e_u\varphi , \\ f_{uv} + fe_u + d_v &= (d + f_u)\,\varphi \end{aligned} \tag{28}$$

où

$$\varphi = \frac{f_v}{f} = \frac{\partial}{\partial v}\log f . \tag{29}$$

Par là, j'ai terminé les raisonnements de caractère auxiliaire et je reviens à présent à l'étude particulière des déformations projectives des surfaces F_0.

5. Au début je peux considérer les surfaces F en général. Soient donc π et $\bar{\pi}$ deux surfaces F dans S_5 données par les systèmes

$$\begin{aligned} x_{uv} &= \alpha x + \beta x_u + \gamma x_v , \\ x_{vvv} &= ax + bx_u + cx_v + dx_{uu} + ex_{vv} + fx_{uuu} \quad (f \neq 0) , \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} y_{\bar{u}\bar{v}} &= \bar{\alpha} y + \bar{\beta} y_{\bar{u}} + \bar{\gamma} y_{\bar{v}} , \\ y_{\bar{v}\bar{v}\bar{v}} &= \bar{a} y + \bar{b} y_{\bar{u}} + \bar{c} y_{\bar{v}} + \bar{d} y_{\bar{u}\bar{u}} + \bar{e} y_{\bar{v}\bar{v}} + \bar{f} y_{\bar{u}\bar{u}\bar{u}} \quad (\bar{f} \neq 0) . \end{aligned} \tag{31}$$

Les courbes paramétriques des deux surfaces forment précisément les réseaux conjugués. Supposons ensuite qu'il *soit donné une correspondance biunivoque* C *entre les points des surfaces π et $\bar{\pi}$ qui fasse correspondre le réseau conjugué d'une surface au réseau conjugué de l'autre surface.* Une telle correspondance sera caractérisée de façon la plus simple par les relations

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} . \tag{32}$$

Soient données deux valeurs fixes des paramètres $u = u_0$, $v = v_0$. J'appelle *homographie tangente* (pour u_0 et v_0 donnés) de la correspondance donnée $\mathbf{C}$ toute transformation homographique $\mathbf{K}^1$ de l'espace S_5 en lui même qui jouit des propriétés suivantes:

1. $\mathbf{K}^1\, y(u_0, v_0) = x(u_0, v_0)$,

2. pour toute courbe γ passant par le point $y(u_0, v_0)$, les courbes $\mathbf{C}\gamma$ et $\mathbf{K}^1\gamma$ ont au point $x(u_0, v_0)$ un contact analytique d'ordre *1*. Une homographie tangente est donné, dans le cas le plus général, par les relations que voici:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^1 y &= x , \\ \mathbf{K}^1 y_u &= \lambda x + x_u , \\ \mathbf{K}^1 y_v &= \mu x + x_v , \\ \mathbf{K}^1 y_{uu} &= \alpha_0 x + \alpha_1 x_u + \alpha_2 x_v + \alpha_3 x_{uu} + \alpha_4 x_{vv} + \alpha_5 x_{uuu} , \\ \mathbf{K}^1 y_{vv} &= \beta_0 x + \beta_1 x_u + \beta_2 x_v + \beta_3 x_{uu} + \beta_4 x_{vv} + \beta_5 x_{uuu} , \\ \mathbf{K}^1 y_{uuu} &= \gamma_0 x + \gamma_1 x_u + \gamma_2 x_v + \gamma_3 x_{uu} + \gamma_4 x_{vv} + \gamma_5 x_{uuu} , \end{aligned} \tag{33}$$

car

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}^1 y &= x\,, \\
\boldsymbol{K}^1\, \mathrm{d}y &= \mathrm{d}x + (\lambda\, \mathrm{d}u + \mu\, \mathrm{d}v)\, x\,, \qquad (34) \\
\boldsymbol{K}^1\, \mathrm{d}^2 y &= \mathrm{d}^2 x + 2(\lambda\, \mathrm{d}u + \mu\, \mathrm{d}v)\, \mathrm{d}x + \\
&\quad + [\alpha_0\, \mathrm{d}u^2 + 2(\bar{\alpha} - \alpha + \bar{\beta}\lambda + \bar{\gamma}\mu)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + \beta_0\, \mathrm{d}v^2 + \lambda\, \mathrm{d}^2 u + \mu\, \mathrm{d}^2 v]\, x + \\
&\quad + [(\alpha_1 - 2\lambda)\, \mathrm{d}u^2 + 2(\bar{\beta} - \beta - \mu)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + \beta_1\, \mathrm{d}v^2]\, x_u + \\
&\quad + [\alpha_2\, \mathrm{d}u^2 + 2(\bar{\gamma} - \gamma - \lambda)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + (\beta_2 - 2\mu)\, \mathrm{d}v^2]\, x_v + \\
&\quad + [(\alpha_3 - 1)\, \mathrm{d}u^2 + \beta_3\, \mathrm{d}v^2]\, x_{uu} + \qquad (35) \\
&\quad + [\alpha_4\, \mathrm{d}u^2 + (\beta_4 - 1)\, \mathrm{d}v^2]\, x_{vv} + \\
&\quad + (\alpha_5\, \mathrm{d}u^2 + \beta_5\, \mathrm{d}v^2)\, x_{uuu}\,.
\end{aligned}$$

J'appelle *homographie osculatrice* (pour u_0, v_0 donnés) une homogrgphie qui réalise un contact analytique d'ordre 2 entre les surfaces π et $\bar{\pi}$. En vertu de (35) les homographies osculatrices sont donc caractérisées par

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K} y &= x\,, \\
\boldsymbol{K} y_u &= (\bar{\gamma} - \gamma)\, x + x_u\,, \\
\boldsymbol{K} y_v &= (\bar{\beta} - \beta)\, x + x_v\,, \\
\boldsymbol{K} y_{uu} &= \alpha_0 x + 2(\bar{\gamma} - \gamma)\, x_u + x_{uu}\,, \qquad (36) \\
\boldsymbol{K} y_{vv} &= \beta_0 x + 2(\bar{\beta} - \beta)\, x_v + x_{vv}\,, \\
\boldsymbol{K} y_{uuu} &= \gamma_0 x + \gamma_1 x_u + \gamma_2 x_v + \gamma_3 x_{uu} + \gamma_4 x_{vv} + \gamma_5 x_{uuu}\,.
\end{aligned}$$

6. Pour rendre les calculs plus simples je me bornerai dans ce qui suit à de tels couples de surfaces π et $\bar{\pi}$ qui satisfont à la même équation de Laplace. Ensuite je suppose partout qu'on ait dans (30) et (31)

$$\alpha = \bar{\alpha},\ \beta = \bar{\beta},\ \gamma = \bar{\gamma}\,. \qquad (37)$$

L'homographie osculatrice (36) est alors donnée par

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K} y &= x\,, \\
\boldsymbol{K} y_u &= x_u\,, \\
\boldsymbol{K} y_v &= x_v\,, \\
\boldsymbol{K} y_{uu} &= \alpha_0 x + x_{uu}\,, \qquad (38) \\
\boldsymbol{K} y_{vv} &= \beta_0 x + x_{vv}\,, \\
\boldsymbol{K} y_{uuu} &= \gamma_0 x + \gamma_1 x_u + \gamma_2 x_v + \gamma_3 x_{uu} + \gamma_4 x_{vv} + \gamma_5 x_{uuu}
\end{aligned}$$

et l'on a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}\, y &= x\,, \\
\boldsymbol{K}\, \mathrm{d}y &= \mathrm{d}x\,, \qquad (39) \\
\boldsymbol{K}\, \mathrm{d}^2 y &= \mathrm{d}^2 x + (\alpha_0\, \mathrm{d}u^2 + \beta_0\, \mathrm{d}v^2)\, x\,.
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la transformation de voisinages du troisième ordre on voit facilement que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}\, \mathrm{d}^3 y &= \mathrm{d}^3 x + 3(\alpha_0\, \mathrm{d}u^2 + \beta_0\, \mathrm{d}v^2)\, \mathrm{d}x + \delta x + \\
&\quad + \Phi_1 x_u + \Phi_2 x_v + \Phi_3 x_{uu} + \Phi_4 x_{vv} + \Phi_5 x_{uuu}\,, \qquad (40)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= (\gamma_1 - 3\varkappa_0)\,\mathrm{d}u^3 &&- 3\beta_0\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v^2 + (\bar{b} - b + \bar{f}\gamma_1)\,\mathrm{d}v^3\,,\\
\Phi_2 &= \gamma_2\,\mathrm{d}u^3 - 3\varkappa_0\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}v &&+ (\bar{c} - c + \bar{f}\gamma_2 - 3\beta_0)\,\mathrm{d}v^3\,,\\
\Phi_3 &= \gamma_3\,\mathrm{d}u^3 &&+ (\bar{d} - d + \bar{f}\gamma_3)\,\mathrm{d}v^3\,,\\
\Phi_4 &= \gamma_4\,\mathrm{d}u^3 &&+ (\bar{e} - e + \bar{f}\gamma_4)\,\mathrm{d}v^3\,,\\
\Phi_5 &= (\gamma_5 - 1)\,\mathrm{d}u^3 &&+ (\bar{f}\gamma_5 - f)\,\mathrm{d}v^3\,,
\end{aligned} \tag{41}$$

et δ ne m'intéresse pas.

Par le symbole $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5)$ je désigne la droite $[x, \Gamma_1 x_u + \Gamma_2 x_v + \Gamma_3 x_{uu} + \Gamma_4 x_{vv} + \Gamma_5 x_{uuu}]$, au lieu de $(\Gamma_1, \Gamma_2, 0, 0, 0)$, j'écris simplement (Γ_1, Γ_2).

La transformation

$$(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) \to (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5) = (\Phi) \tag{42}$$

sera appelée *transformation* **K**-*linéarisante*, (Φ) est la *droite* **K**-*linéarisante* de la tangente $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$. La tangente $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ sera appelée **K**-*caractéristique* s'il existe un nombre l tel que

$$\Phi_1 = l\,\mathrm{d}u,\ \Phi_2 = l\,\mathrm{d}v,\ \Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_5 = 0\,; \tag{43}$$

Si on a en plus

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_5 = 0\,, \tag{44}$$

alors $(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)$ est la tangente **K**-*principale*.

Je n'expose pas de propriétés simples des transformations **K**-linéarisantes, ou des tangentes **K**-caractéristiques et **K**-principales relatives à l'élévation de l'ordre du contact des courbes correspondantes $\mathbf{K}\gamma$ et $\mathbf{C}\gamma$, car elles se transporte textuellement de la théorie des transformations linéarisantes de correspondances entre des espaces entiers, crée par M. Čech.

La condition nécessaire et suffisante pour que les droites **K**-linéarisantes de toutes les tangentes soient situées dans l'espace osculateur de la surface au point $x(u_0, v_0)$ est exprinée par

$$\gamma_5 = 1\,, \tag{45}$$

$$\bar{f} = f\,. \tag{46}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les droites **K**-linéarisantes de toutes les tangentes soient situées dans le plan tangent à la surface au point $x(u_0, v_0)$ est qu'on ait, outre (45) et (46), encore

$$\gamma_3 = \gamma_4 = 0\,, \tag{47}$$

$$\bar{d} = d,\ \bar{e} = e\,. \tag{48}$$

Dans ce cas-là, l'équation des droites **K**-linéarisantes se présente sous la forme de

$$\Phi_1\,\mathrm{d}v = \Phi_2\,\mathrm{d}u\,,$$

ou bien encore

$$\gamma_2\,du^4 - \gamma_1\,du^3\,dv + (\bar{c} - c + \bar{f}\gamma_2)\,du\,dv^3 - (\bar{b} - b + \bar{f}\gamma_1)\,dv^4 = 0\,. \quad (49)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que chaque tangente soit $\mathbf{K}$-caractéristique est que l'on ait (45)—(48) et en plus

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0\,, \quad (50)$$

$$\bar{b} = b,\ \bar{c} = c\,. \quad (51)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que toute tangente soit $\mathbf{K}$-principale est que l'on ait (45)—(48), (50), (51) et en outre

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0\,. \quad (52)$$

7. Soient données deux surfaces générales F par les systèmes (30) et (31) respectivement. Je dis que les deux surfaces sont en *déformation projective* $\mathbf{C}_{hk}$ ($h \leq k$; si $h = k$, j'écris $\mathbf{C}_h$ tout simplement), s'il existe entre leurs points une correspondance biunivoque pouvant être exprimée par les relations

$$\bar{u} = \bar{u}(u, v),\ \bar{v} = \bar{v}(u, v) \quad (53)$$

et telle que pour chaque couple de valeurs des paramètres $u = u_0$, $v = v_0$ il existe une homographie $\mathbf{K}$ réalisant un contact analytique d'ordre h et un contact géométrique d'ordre k entre les courbes $\mathbf{K}\gamma$ et $\mathbf{C}\gamma$ passant par le point $x(u_0, v_0)$.

De ce qui précède on voit clairement que toutes *deux surfaces F sont en déformation projective d'ordre* 2: $\mathbf{C}_2$, ou $\mathbf{C}_{12}$. Il suffit pour cela de mettre à la place des équations (53) les équations (32) et le rôle de l'homographie signalée est joué par example par l'homographie osculatrice (36).

Un problème qui n'est pas banal est celui des déformations projectives d'ordre 3. Il y a trois espèces de déformation de cet ordre: $\mathbf{C}_3$, $\mathbf{C}_{23}$, $\mathbf{C}_{13}$. C'est un des problèmes fondamentaux de la théorie des déformations projectives que de déterminer toutes les surfaces déformables de façon non banale, c'est-à-dire les surfaces telles que toutes les surfaces qui sont en déformation projective (d'une certaine espèce) avec la surface donnée sans être homographiques avec elle.

En me bornaut an cas des déformations projectives $\mathbf{C}_3$, je ne résoudrai que le problème de déformabilité des surfaces F_0. Or, il s'ensuit immédiatement de ce qui précède que ce problème est équivalent à l'étude de la correspondance $\mathbf{C}_{23}$.

Ce qui est très important, c'est que *toutes les surfaces qui sont en déformation projective $\mathbf{C}_3$ avec une surface satisfaisant à* (1), *satisfont elles-aussi à cette équation.* Je ne le déduis pas ici, car ce fait découle directement des raisonnements contenus dans l'excellent travail de M. A. Terracini, Nuove ricerche sull'incidenza di piani infinitamente vicini (*Atti della Reale Academia delle Scienze di Torino*, Vol. *73*, 1937-38-XVI) où l'auteur se sert pour la détermination de la surface d'un système différent d'équations différentielles. Dans sa notation on a

$$y_u = mz,\ z_v = ny \quad (54)$$

et alors

$$y_{uv} = \frac{m_v}{m} y_u + mny \,. \tag{55}$$

Pour deux surfaces (y) et $(\bar{y})$ en déformation projective on a en particulier $m = \bar{m}$, $n = \bar{n}$, d'où s'ensuit directement ce que j'ai affirmé ci-dessus.

Il est évident que, dans le cas d'une déformation projective $\boldsymbol{C}_3$ de deux surfaces, les réseaux conjugués des deux surfaces se correspondent mutuellement. Mais ceci me permet justement d'appliquer la théorie des transformations **K**-linéarisantes développée ci-dessus.

8. Dans ce paragraphe je résous le problème que voici: Une surface F_0 étant donné par le système

$$\begin{gathered} x_{uv} = 0 \,, \\ x_{vvv} = ax + bx_u + cx_v + dx_{uu} + ex_{vv} + fx_{uuu} \\ (f \neq 0) \,, \end{gathered} \tag{56}$$

il s'agit de savoir *quand il existe des surfaces F_0*, non homographiques avec la surface (56) (relativement à la correspondance donnée), *qui soient en déformation projective $\boldsymbol{C}_3$ avec la surface* (55). En vertu de (46), (48) et (51) on trouve qu'une telle surface doit être la solution d'un système de la forme

$$\begin{gathered} x_{uv} = 0 \,, \\ x_{vvv} = \bar{a}x + bx_u + cx_v + dx_{uu} + ex_{vv} + fx_{uuu} \end{gathered} \tag{57}$$

où $\bar{a} = \bar{a}(u, v)$ est une fonction satisfaisant avec les fonctions $b, \ldots, f$ aux conditions d'intégrabilité. *Le problème de trouver toutes les déformations de la surface* (56) *est donc équivalent à celui de trouver toutes les fonctions $a = a(u, v)$ satisfaisant au système* (28), (29), *les fonctions b, c, d, e, f étant données*. La fonction a n'est contenue que dans les équations (28_{1-3}); les équations (28_{4-6}) étant satisfaites en vertu de l'existence de la surface (56). Je donne aux équations (28_{1-3}) la forme suivante

$$\begin{aligned} a_{uv} - \varphi a_u + e_u a &= 0 \,, \\ a_v - \varphi a + A &= 0 \,, \\ a_u + B &= 0 \end{aligned} \tag{58}$$

où

$$\begin{aligned} A &= b_{uv} + be_u - b_u\varphi \,, \\ B &= c_{uv} + ce_u - c_u\varphi \,. \end{aligned} \tag{59}$$

De $(58_{1,3})$ on a

$$a_{uv} = -\varphi B - e_u a \,,$$

de $(58_{2,3})$ on a

$$a_{uv} = \varphi_u a + \varphi a_u - A_u = \varphi_u a - \varphi B - A_u$$

et de (58_3)

$$a_{uv} = -B_v \,,$$

de façon que les conditions d'intégrabilité du système (58) relativement à la fonction inconnue a sont

$$\begin{aligned}(\varphi_u + e_u)\, a - A_u &= 0 \,, \\ e_u a + \varphi B - B_v &= 0 \,.\end{aligned} \tag{60}$$

Deux cas peuvent se présenter:

I. Les équations (60) ne sont pas satisfaites identiquement (en a). Alors il existe une et une seule fonction a satisfaisant au système (28), (29) et la surface (56) est *indéformable.*

II. Les équations (60) sont satisfaites identiquement (en a). Alors le système (58) est complétement intégrable et les fonctions $a(u, v)$ qui en sont la solution dépendent d'un paramètre. Ainsi donc:

Une surface (56) *pour laquelle on a*

$$e_u = 0, \ \varphi_u = 0, \ A_u = 0, \ \varphi B - B_v = 0 \tag{61}$$

est déformable d'une infinité (∞^1) *de façons.* Le problème de déterminer toutes les surfaces déformables (et cela nécessairement d'une infinité ∞^1 de façons) se réduit donc au problème de l'intégration du système (28), (29), (59), (61). Je m'intéresserai à ce problème au paragraphe suivant.

9. Je mets le système en question sous la forme suivante tout en utilisant déjà (61_1):

$$\begin{aligned}
a_{uv} \quad &= a_u\varphi \,, \\
b_{uv} + a_v &= (a + b_u)\, \varphi \,, \\
c_{uv} + a_u &= c_u\varphi \,, \\
d_{uv} + b_v &= (b + d_u)\, \varphi \,, \\
c_u &= 0 \,, \\
f_{uv} + d_v &= (d + f_u)\, \varphi \,, \\
e_u &= 0 \,, \\
\varphi_u &= 0 \,, \\
A_u &= 0 \,, \\
\varphi B - B_v &= 0 \,, \\
\varphi &= \frac{f_v}{f} \,, \\
A &= b_{uv} - b_u\varphi \,, \\
B &= c_{uv} - c_u\varphi \,.
\end{aligned} \tag{62}$$

Supposons, dans la suite, qu'on ait comme auparavant $U_i = U_i(u)$, $\overline{U}_i = \overline{U}_i(u)$, $V_i = V_i(v)$, $\overline{V}_i = \overline{V}_i(v)$. De ($62_{5,7}$) il s'ensuit aussitôt

$$c = \overline{V}_1 \,, \tag{63}$$

$$e = \overline{V}_2 \,. \tag{64}$$

En partant de $(62_{8,11})$ on a

$$\frac{f_v}{f} = \frac{\partial}{\partial v} \log f = \overline{V}_3$$

et

$$f = \overline{U}_1 \overline{V}_4 \neq 0 \tag{65}$$

où $\overline{V}_4 = \exp(\int \overline{V}_3 \, dv)$. J'obtiens donc

$$\varphi = \frac{\overline{V}_4'}{\overline{V}_4} \tag{66}$$

De $(62_{3,5})$ il s'ensuit que

$$a = \overline{V}_5 \, . \tag{67}$$

De (61_2) et (66) j'obtiens

$$(b_u + a)_v \overline{V}_4 - (b_u + a) \overline{V}_3' = 0$$

ce qui donne

$$\frac{b_u + a}{\overline{V}_4} = \overline{U}_3$$

et

$$b = \overline{U}_4 \overline{V}_4 - \overline{V}_5 u + \overline{V}_6 \tag{68}$$

où $\overline{U}_4 = \int \overline{U}_3 \, du$. Semblablement on déduit de (62_6) que

$$\frac{f_u + d}{\overline{V}_4} = \overline{U}_5$$

et

$$d = \overline{U}_5 \overline{V}_4 - \overline{U}_1' \overline{V}_4 = \overline{U}_6 \overline{V}_4 \, . \tag{69}$$

Les fonctions a, b, c, d, e, f sont définies de telle sorte qu'elles satisfont aux équations $(62_{2,3,5,6,7,8})$. En substituant dans le reste équations j'obtiens de nouvelles relations qui existent entre les fonctions $\overline{U}_i$ et $\overline{V}_i$. Les équations $(62_{1,9,10})$ étant satisfaites identiquement la seule condition qui puisse être tirée de (62) sera donnée par (62_4) qui peut être mise sous la forme de

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\overline{V}_6 - \overline{V}_5 u}{\overline{V}_4}\right) = 0 \, . \tag{70}$$

On a donc

$$\frac{\overline{V}_6 - \overline{V}_5 u}{\overline{V}_4} = - c_1 u + c_2$$

où c_1 et c_2 sont constantes. Mais de là on peut déduire que

$$\overline{V}_5 = c_1 \overline{V}_4 \, ,$$
$$\overline{V}_6 = c_2 \overline{V}_4$$

et l'on a

$$a = c_1 \overline{V}_4 \, , \tag{71}$$

$$b = \overline{U}_4 \overline{V}_4 - c_1 \overline{V}_4 u + c_2 \overline{V}_4 = \overline{U}_7 \overline{V}_4 \, . \tag{72}$$

En partant de (71), (72), (63), (69), (65), (66) j'obtiens après un changement de notation

$$
\begin{aligned}
&k = c_1\,, \\
V_1 &= \overline{V}_4, \quad V_2 = \overline{V}_1, \quad V_3 = \overline{V}_2\,, \\
U_1 &= \overline{U}_7, \quad U_2 = \overline{U}_6, \quad U_3 = \overline{U}_1\,,
\end{aligned}
\tag{73}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= kV_1, \quad b = U_1V_1, \quad c = V_2\,, \\
d &= U_2V_1, \quad e = V_3, \quad f = U_3V_1 \neq 0\,.
\end{aligned}
\tag{74}
$$

En comparant le résultat obtenu avec (23) je peux le formuler définitevement de la façon que voici:

L'ensemble des surfaces F_0 peut être décomposé en classes disjointes de la manière suivante: deux surfaces qui sont en déformation projective $\mathbf{C}_3$ appartiennent à la même classe. Chaque classe contient ou bien une seule ou bien ∞^1 de surfaces qui ne sont pas homographiques relativement à la correspondance donnée. Dans toute classe contenant ∞^1 de surfaces, il existe une et une seule surface dont toutes les pseudonormales passent par un point fixe (pour $k = 0$), toutes les autres surfaces sont précisément les surfaces F_2. De l'autre côté, toute surface F_2 est déformable projectivement et appartient à une certaine classe contenant plus d'une surface. Les surfaces F_2 dépendent alors de six fonctions d'une variable.

Резюме

ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С СОПРЯЖЕННОЙ СЕТЬЮ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага.

(Поступило в редакцию 12/VII 1955 г.)

Мною рассматривается проективное изгибание 3-го порядка (C_3 или C_{23}) тех поверхностей F_0 в S_5, которые имеют единственную сопряженную сеть, 3-слой асимптотик γ_{23}, и обе первые трансформации Лапласа которых вырождаются в кривые.

Такая поверхность задана системой

$$
\begin{gathered}
x_{uv} = 0\,, \\
x_{vvv} = ax + bx_u + c\,x_v + dx_{uu} + ex_{vv} + fx_{uuu}\,, \\
(f \neq 0)
\end{gathered}
\tag{5}
$$

выполняющей условия интегрируемости (28) + (29). При проективном изгибании 3-го порядка поверхность (5) перейдет в поверхность того же типа, при чем сопряженные сети перейдут друг в друга. Будет установлено, что проективно изгибаемыми (обязательно ∞^1 способами, как уже, впрочем, было установлено А. Террацини в 1938 г.) являются именно те поверхности типа (5), которые являются решением вполне интегрируемой системы

$$\begin{gathered} x_{uv} = 0\,, \\ x_{vvv} = kV_1x + U_1V_1x_u + V_2x_v + U_2V_1x_{uu} + V_3x_{vv} + U_3V_1x_{uuu}\,, \\ k = \text{const}\,, \quad U_i = U_i(u)\,, \quad V_j = V_j(v)\,, \quad U_3V_1 \neq 0\,. \end{gathered} \tag{23}$$

Все изгибания поверхности (23) я получаю таким образом, что k принимает значения всех действительных чисел.

Можно указать интересное геометрическое свойство поверхностей (23), для которых $k \neq 0$. Псевдонормалью я назову прямую, являющуюся пересечением третьих соприкасающихся пространств обеих кривых сопряженной сети, проходящих через точку x. Псевдонормали в точках любой кривой поверхности F_0 образуют определенную линейчатую поверхность. Поверхностью F_1 я назову каждую поверхность F_0, для которой вышеуказанные линейчатые поверхности псевдонормалей вдоль любой кривой сопряженной сети образуют конус. u-кривой я назову кривую $v = \text{const}$ сопряженной сети, u-точкой — вершину конуса псевдонормалей поверхности F_1 вдоль u-кривой, u-лапласовой точкой — вершину конуса касательных к v-кривым в точках u-кривой. Поверхностью F_2 является поверхность F_1, обладающая следующими свойствами: пусть u-точки для всех u-кривых образуют определенную кривую γ. Любой u-кривой соответствует определенная u-точка $X = X(v)$ и u-лапласова точка $x_v = x_v(v)$. Теперь я требую, чтобы для каждого $v = v_0$ касательная к кривой γ в точке $X(v_0)$ проходила через соответствующую u-лапласову точку $k_v(v_0)$; подобное положение пусть настанет и при замене u и v.

Поверхности (23), для которых $k \neq 0$, являются как раз поверхностями F_2. Дальнейшие геометрические свойства поверхностей (23) (и для $k = 0$) будут обнаружены в другой работе, в которой будет рассматриваться проективное изгибание 3-го порядка поверхностей общего вида с сопряженной сетью в S_5.