Ján Jakubík

Прямые разложения вполне дистрибутивных структур

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 4, 488–491

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100164`

ПРЯМЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВПОЛНЕ ДИСТРИБУТИВНЫХ СТРУКТУР

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице.

(Поступило в редакцию 1/IV 1955 г.)

В работе доказывается теорема: всякая вполне дистрибутивная полная структура допускает разложение на прямое произведение неразложимых факторов.

Понятие прямого разложения структур мы будем считать известным (см. [1], более подробную формулировку для бесконечного числа факторов см. в [4]. Мы пользуемся теми же обозначениями, как и в [4]). Любые два прямых разложения структуры обладают общим уплотнением (см. [2], [3]); отсюда следует, что разложение структуры на прямое произведение неразложимых факторов (если такое разложение вообще существует) однозначно. Вообще говоря, однако, 1. структура S может обладать прямым фактором S_1 таким, что каждый прямой фактор структуры S_1 разложим, и 2. может случиться, что каждый прямой фактор S_i структуры S содержит неразложимый прямой фактор S_i^0 структуры S, причем, однако, структура S не изоморфна прямому произведению ΠS_i^0 всех своих неразложимых факторов S_i^0.

В настоящей заметке доказывается, что упомянутые „патологические" случаи не могут встретиться у вполне дистрибутивных полных структур, другими словами: всякая полная и вполне дистрибутивная структура может быть разложена на прямое произведение неразложимых факторов. Далее приводится более слабая форма этой теоремы, справедливая для полных структур.

Пусть S[1]) — структура, пусть S изоморфно прямому произведению структур ΠS_i $(i \in M)$ (1). Возьмем фиксированный элемент $e \in S$; пусть $S_i(e)$ есть множество всех элементов $x \in S$, j-е составляющие которых в разложении (1) $(j \in M,\ j \neq i)$ равны j-ым составляющим элемента e в этом прямом разложении. Очевидно, что структура $S_i(e)$ изоморфна структуре

[1]) Для структур, содержащих только один элемент, последующее исследование является тривиальным; такие структуры нами в дальнейшем рассматриваться не будут.

S_i, так что $S \simeq \Pi S_i(e)$ (2). Притом, если $x \in S_i(e)$, то i-я составляющая элемента x в прямом разложении (2) равна элементу x, а j-я составляющая ($j \neq i$) равна элементу e. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямые разложения вида (2). Если S обладает наименьшим элементом 0, то положим $e = 0$. Для краткости запишем $S_i(e) = S_i$. Легко установить справедливость утверждения: если фактор S_0 встречается в двух прямых разложениях

$$S \simeq \Pi S_i (i \in M) , \quad S \simeq \Pi S'_i (i \in N)$$

и $x \in S$, то составляющая элемента x в факторе S_0 будет для обоих разложений одна и та же.

Теорема 1. *Каждую вполне дистрибутивную полную структуру можно разложить на прямое произведение неразложимых факторов.*

Доказательство. Пусть S — вполне дистрибутивная полная структура. Наименьший и наибольший элемент структуры S обозначим соответственно через 0 и 1. Пусть

$$S \simeq \Pi A_i(i \in M) \tag{1}$$

есть произвольное разложение структуры S на прямое произведение. Тогда каждая из структур A_i должн асодержать наибольший элемент x^i_m, и имеет место

$$1 = \dot{\bigcup} x^m_i(i \in M) \tag{2}$$

(см. [4]). Согласно теореме 5, [4], существует прямое разложение элемента 1

$$1 = \dot{\bigcup} z_i(i \in N) , \tag{3}$$

в котором $z_i \neq 0$ для $i \in N$ и которое является уплотнением всех прямых разложений элемента 1. Обозначим $Z_i = \langle 0, z_i \rangle (i \in N)$. Отнеся каждому элементу $x \in S$ функцию f_x, определенную на N так, что $f_x(i) = x \cap z_i$, мы получим, очевидно, изоморфизм

$$S \simeq \Pi Z_i(i \in N) \tag{4}$$

(это следует из полноты и полной дистрибутивности структуры S). Так как прямое разложение единицы (3) является уплотнением прямого разложения единицы (2), то будет

$$x^m_k = \dot{\bigcup} z_i(i \in N_k) , \quad N_k \subset N ,$$

так что удовлетворяется соотношение (по тем же причинам, как и соотношение (4))

$$A_k \simeq \Pi Z_i(i \in N_k) , \quad N_k \subset N . \tag{5}$$

Так как прямое разложение (1) может быть выбрано произвольно, то из соотношения (5) следует, что прямое разложение (4) представляет уплотнение всех прямых разложений структуры S. Следовательно, каждый фактор Z_i $(i \in N)$ является неразложимым.

В частности, если S есть алгебра Буля, мы получаем в виде следствия предыдущей теоремы утверждение (см. [5]):

Пусть S — полная и вполне дистрибутивная алгебра Буля. Тогда S атомарна.

Доказательство. По условию и согласно теореме 1, структуру S можно разложить на прямое произведение неразложимых факторов ΠS_i. Структуры S_i являются алгебрами Буля; так как они неразложимы, каждая из них должна содержать два элемента. Отсюда видно, что алгебра Буля S атомарна.

Теорема 2. *Пусть S — полная структура, пусть $\{S_i\}(i \in M)$ — множество всех неразложимых факторов структуры S. Соотношение $S \simeq \simeq \Pi S_i(i \in M)$ справедливо тогда и только тогда, если центр структуры S является вполне дистрибутивной полной структурой.*

Доказательство. а) Пусть центр C полной структуры S — вполне дистрибутивная полная структура. В то же время C является алгеброй Буля, так что согласно предыдущему замечанию, $C \simeq \Pi C_i(i \in M)$, где каждая структура C_i содержит два элемента. Пусть c_i — наибольший элемент структуры C_i, пусть S_i есть интервал $\langle 0, c_i \rangle$ в структуре S. Так как c_i — элемент центра, то структура S_i является прямым фактором структуры S. Элемент c_i покрывает 0 в структуре C, значит структура S_i неразложима. Множество $\{S_i\}$ $(i \in M)$ содержит, очевидно, каждый неразложимый фактор структуры S. Отнесем каждому элементу $x \in S$ функцию f_x, определенную на M так, что значение функции $f_x(i)$ равно составляющей элемента x в структуре S_i. Соответствие

$$x \to f_x \tag{1}$$

отображает структуру S в структуру ΠS_i $(i \in M)$ так, что $x \leq y \Rightarrow f_x \leq f_y$. Пусть f — какой-либо элемент структуры $\Pi S_i(i \in M)$. Обозначим $x = = \bigcup f(i)(i \in M)$. Докажем, что

$$x \to f\,. \tag{2}$$

Возьмем фиксированный индекс $i \in M$. Для структуры S_i существует структура S_i' так, что имеет место $S \simeq S_i \times S_i'$ (3). Наибольший элемент c_i' структуры S_i' является дополнением элемента c_i, следовательно, $c_i' = \bigcup c_k$ $(k \in M,\ k \neq i)$. Обозначим

$$f(j) = x_j(j \in M)\,, \quad \bigcup x_j(j \in M, j \neq i) = x_i'\,.$$

Имеем $x = x_i \cup x_i'$, $x_i' \leq c_i'$, $x_i' \in S_i'$. Значит, по соотношению (3) составляющей элемента x в факторе S_i будет x_i. Этим доказано соотношение (2). Отображение (1) является, следовательно, отображением структуры S на структуру $\Pi S_i(i \in M)$. Если $x, y \in S$, $f_x = f_y$, то по предыдущему $x = = \bigcup f_x(i)(i \in M)$, $y = \bigcup f_x(i)(i \in M)$, т. е. $x = y$. Наконец, если $f_x \leq f_y$, то

$x \leqq y$. В общем мы доказали таким образом, что отображение (1) является изоморфным отображением структуры S на структуру $\Pi S_i (i \in M)$.

б) Пусть S — полная структура, пусть $S \simeq \Pi S_i (i \in M)$, пусть структуры S_i неразложимы. Пусть C — центр структуры S. Очевидно, будет $C \simeq \Pi C_i$ $(i \in M)$, где C_i есть структура, содержащая только элемент 0 и наибольший элемент c_i структуры S_i. Структура C является прямым произведением полных и вполне дистрибутивных структур, следовательно, C — полная и вполне дистрибутивная структура.

Замечание. Если S — структура, не имеющая наименьшего или наибольшего элемента, то может случиться, что каждый интервал этой структуры допускает разложение на прямое произведение неразложимых факторов, причем структуру S нельзя разложить на прямое произведение неразложимых факторов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, New York, 1948.

[2] *J. Hashimoto:* On direct product decomposition of partially ordered sets, Ann. of Math. *2* (*54*), 315—318 (1951).

[3] *J. Jakubík:* Jednoznačnosť rozkladu sväzu na direktný súčin, Matem.-fyz. sborník SAVU, *1*, 45—50 (1951).

[4] *Ян Якубик:* Прямые разложения единицы в модулярных структурах, Чехослов. мат. журнал, *5* (*80*), 399-411.

[5] *S. Enomoto:* Boolean lattices and set lattices, Sûgaku 5, 1—10 (1953). (Math. Reviews *15* (1954), 389.)

Summary

DIRECT DECOMPOSITIONS OF COMPLETELY DISTRIBUTIVE COMPLETE LATTICES

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Received April 1, 1955.)

In the note there is proved the theorem:

Every completely distributive complete lattice is a direct union of directly indecomposable factors.