Cyril Palaj

L'invariant Θ_{n+1} comme un invariant simultané fondamental d'une jusqu'à $n+1$ hyperquadriques dans l'espace à n dimensions

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 3, 345–354

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100150

L'INVARIANT Θ_{n+1} COMME UN INVARIANT SIMULTANÉ FONDAMENTAL D'UNE JUSQU'À $n+1$ HYPERQUADRIQUES DANS L'ESPACE À n DIMENSIONS

CYRIL PALAJ, Zvolen.

(Reçu le 9 juin 1954).

L'ouvrage présent généralise la théorie exposée par l'auteur dans l'ouvrage „Sur la signification géométrique de certains invariants simultanés des coniques et des quadriques", publié dans le № 3 du journal „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky", *75*, 1950, Praha. On y trouve démontrée la signification géométrique de l'invariant Θ_{n+1}. Cet invariant simultanné puit être considéré comme un invariant fondamental de $(n+1)$ hyperquadriques, puisque tous les invariants simultanés de 2 jusqu'á $n+1$ hyperquadriques dans l'espace á n dimensions en découlent comme cas spéciaux, avec leurs significations géométriques, ainsi que les dicriminants eux-mêmes de ces hyperquadriques.

Soient dans l'espace à n dimensions, $n+1$ hyperquadriques dont les équations sont $k_v^{(n)} = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{vij}x_ix_j = 0$, $v = 1, 2, \ldots, n+1$. Leurs discriminants sont $D_v = |a_{vij}|$, $v = 1, 2, \ldots, n+1$. Formons une matrice cubique avec les matrices de ces discriminants de telle façon que la matrice du discriminant de l'hyperquadrique $k_1^{(n)}$ fasse la $1^{\text{ère}}$ couche de la matrice cubique, la matrice du discriminant de l'hyperquadrique $k_2^{(n)}$ sa 2^{e} couche, etc, la matrice de la dernière hyperquadrique $k_{n+1}^{(n)}$ sa dernière couche. Le déterminant de cette matrice cubique est le déterminant cubique

$$\Theta_{n+1} = |a_{1ij}|a_{2ij}|a_{3ij}|\ldots|a_{nij}|a_{n+1,i,j}| \,.$$

Le développement du déterminant Θ_{n+1} est le multiple par $[(n+1)!]^2$ de l'alternation de son terme principal d'après les $2^{\text{ès}}$ et $3^{\text{ès}}$ indices. On a

$$\Theta_{n+1} = [(n+1)!]^2 \,.\, a_{1[1[1}a_{|2|22}a_{|3|33} \ldots a_{|n+1|n+1]n+1]} \,.$$

La construction de l'expression Θ_{n+1} montre que c'est un invariant simultané des formes quadratiques $k_v^{(n)}$. L'étude de la signification géométrique de l'invariant Θ_{n+1} pour $n = 1;\ 2;\ 3$ est faite dans l'ouvrage de l'auteur cité ci-dessus. L'ouvrage présent généralise la théorie de l'ouvrage cité pour un entier n arbitraire.

Coupons les hyperquadriques $k_v^{(n)} \equiv \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{vij} = 0,\ v = 1, 2, \ldots, n$ par un hyperplan $\varrho^{(n)} \equiv \sum_1^{n+1} u_i x_i = 0$. L'hyperplan $\varrho^{(n)}$ coupe les hyperquadriques $k_v^{(n)}$ en des hyperquadriques de l'espace à $n - 1$ dimensions. Cherchons l'enveloppe des hyperplans $\varrho^{(n)}$ coupant les hyperquadriques $k_v^{(n)}$ en des hyperquadriques $k_v^{(n-1)}$ qui sont liées par la relation $\Theta_n = 0$.

En éliminant la variable x_{n+1} de l'équation de l'hyperplan $\varrho^{(n)}$ et de l'équation de l'hyperquadrique $k_1^{(n)}$, on obtient l'équation de la projection du sommet Θ_{n+1} dans l'hyperplan $x_{n+1} = 0$ de l'hyperquadrique d'intersection $k_1^{(n-1)}$ dans l'espace à $n - 1$ dimensions. De l'équation de l'hyperplan $\varrho^{(n)} \equiv \sum_1^{n+1} u_i x_i = 0$ on tire

$$x_{n+1} = -\frac{1}{u_{n+1}} \sum_1^n u_i x_i \,.$$

En portant dans l'équation de l'hyperquadrique

$$k_1^{(n)} \equiv \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{1ij} x_i x_j = 0$$

il vient

$$\begin{aligned}
& a_{111} x_1^2 + a_{122} x_2^2 + \ldots + a_{1,n+1,n+1} \frac{1}{u_{n+1}^2} \left(\sum_1^n u_i x_i \right)^2 + 2 \sum_{j=2}^n a_{11j} x_1 x_j + \\
& + 2 a_{1,1,n+1} x_1 \frac{-1}{u_{n+1}} \sum_1^n u_i x_i + 2 \sum_{j=3}^n a_{12j} x_2 x_j + 2 a_{1,2,n+1} x_2 \frac{-1}{u_{n+1}} \sum_1^n u_i x_i + \\
& + 2 \sum_{j=4}^n a_{13j} x_3 x_j + 2 a_{1,3,n+1} x_3 \frac{-1}{u_{n+1}} \sum_1^n u_i x_i + \ldots + \\
& + 2 a_{1,n\,n+1} x_n \frac{-1}{u_{n+1}} \sum_1^n u_i x_i = 0
\end{aligned}$$

et en ordonnant

$$\begin{aligned}
& \left(a_{111} + a_{1,n+1,n+1} \frac{u_1^2}{u_{n+1}^2} - 2 a_{1,1,n+1} \frac{u_1}{u_{n+1}} \right) x_1^2 + \\
& + \left(a_{122} + a_{1,n+1,n+1} \frac{u_2^2}{u_{n+1}^2} - 2 a_{1,2,n+1} \frac{u_2}{u_{n+1}} \right) x_2^2 + \\
& + \left(a_{133} + a_{1,n+1,n+1} \frac{u_3^2}{u_{n+1}^2} - 2 a_{1,3,n+1} \frac{u_3}{u_{n+1}} \right) x_3^2 + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + 2 \left(a_{1,n+1,n+1} \frac{u_1 u_2}{u_{n+1}^2} \right) + a_{112} - a_{1,1,n+1} \frac{u_2}{u_{n+1}} - a_{1,2,n+1} \frac{u_1}{u_{n+1}} \Bigg) x_1 x_2 +
\end{aligned}$$

$$+ 2\left(a_{1,n+1,n+1}\frac{u_1u_3}{u_{n+1}^2} + a_{113} - a_{1,1,n+1}\frac{u_3}{u_{n+1}} - a_{1,3,n+1}\frac{u_1}{u_{n+1}}\right)x_1x_3 +$$

$$+ 2\left(a_{1,n+1,n+1}\frac{1}{u_{n+1}^2}u_1u_4 + a_{114} - a_{1,1,n+1}\frac{u_4}{u_{n+1}} - a_{1,4,n+1}\frac{u_1}{u_{n+1}}\right)x_1x_4 +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ 2\left(a_{1,n+1,n+1}\frac{1}{u_{n+1}^2}u_2u_3 + a_{123} - a_{1,2,n+1}\frac{1}{u_{n+1}}u_3 - a_{1,3,n+1}\frac{u_2}{u_{n+1}}\right)x_2x_3 +$$

$$+ 2\left(a_{1,n+1,n+1}\frac{1}{u_{n+1}^2}u_2u_4 + a_{124} - a_{1,2,n+1}\frac{u_4}{u_{n+1}} - a_{1,4,n+1}\frac{u_2}{u_{n+1}}\right)x_2x_4 +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ 2\left(a_{1,n+1,n+1}\frac{1}{u_{n+1}^2}u_ru_s + a_{1rs} - a_{1,r,n+1}\frac{u_s}{u_{n+1}} - a_{1,s,n+1}\frac{u_r}{u_{n+1}}\right)x_rx_s +$$

$$+ \ldots = 0\,,$$

c. à d.

$$\sum_{r,s=1}^{n}\left(a_{1,n+1,n+1}\frac{1}{u_{n+1}^2}u_ru_s + a_{1rs} - a_{1,r,n+1}\frac{1}{u_{n+1}}u_s - a_{1,s,n+1}\frac{u_r}{u_{n+1}}\right)x_rx_s = 0\,.$$

En multipliant la dernière équation par le facteur u_{n+1}^2, l'équation de la projection de l'intersection $k_1^{(n-1)}$ de l'hyperquadrique $k_1^{(n)}$ par l'hyperplan $\varrho^{(n)}$, projection du sommet O_{n+1} dans l'hyperplan $x_{n+1} = 0$,

est

$$\sum_{r,s=1}^{n}(a_{1,n+1,n+1}u_ru_s + a_{1rs}u_{n+1}^2 - a_{1,r,n+1}u_su_{n+1} - a_{1,s,n+1}u_ru_{n+1})\,x_rx_s = 0\,. \quad (1)$$

Si dans cette équation on remplace les coefficients a_{1ij} successivement par les coeficients a_{2ij}, a_{3ij}, a_{4ij}, $\ldots$, a_{nij}, on obtient les équations des projections des intersections $k_2^{(n-1)}, k_3^{(n-1)}, \ldots, k_n^{(n-1)}$ des hyperquadriques $k_2^{(n)}, k_3^{(n)}, \ldots, k_n^{(n)}$ par l'hyperplan $\varrho^{(n)}$ du sommet O_{n+1} dans l'hyperplan $x_{n+1} = 0$, c. à d. le système d'équations

$$\sum_{r,s=1}^{n}(a_{i,n+1,n+1}u_ru_s + a_{irs}u_{n+1}^2 - a_{i,r,n+1}u_su_{n+1} - 2a_{i,s,n+1}u_ru_{n+1})\,x_rx_s = 0\,,$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, n\,. \quad (2)$$

Pour simplifier les calculs, passons à la symbolique d'Aronhold.

Le système (2) donne

$$\sum_{r,s=1}^{n}(a_{i,n+1,n+1}u_ru_s + a_{irs}u_{n+1}^2 - a_{i,r,n+1}u_su_{n+1} - a_{i,s,n+1}u_ru_{n+1})\,x_rx_s \equiv$$

$$\equiv \sum_{r,s=1}^{n}(a_{i,n+1}a_{i,n+1}u_ru_s + a_{ir}a_{is}u_{n+1}^2 - a_{ir}a_{i,n+1}u_su_{n+1} - a_{is}a_{i,n+1}u_su_{n+1})\,x_rx_s =$$

$$\doteq \sum_{r,s=1}^{n} (u_s a_{i,n+1}(a_{i,n+1}u_r - a_{ir}u_{n+1}) - a_{is}u_{n+1}(a_{i,n+1}u_r - u_{n+1}a_{ir}))\, x_r x_s =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{n} (a_{i,n+1}u_r - a_{ir}u_{n+1})(u_s a_{i,n+1} - a_{is}u_{n+1})\, x_r x_s =$$

$$= \sum_{s,s=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{i,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{ir} & , u_r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{ir}, & u_s \end{vmatrix} x_r x_s =$$

$$= \sum_{r,s=1}^{n} A_{irs} x_r x_s = 0 \,,$$

$$A_{irs} = \begin{vmatrix} a_{i,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{ir} & , u_r \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{ir} & , u_s \end{vmatrix} .$$

Le système (2) a pris la forme

$$\sum_{r,s=1}^{n} A_{irs} x_r x_s = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{3}$$

Afin qu'il existe, entre les projections des intersections $k_1^{(n-1)}, k_2^{(n-1)}, \ldots, k_n^{(n-1)}$ des hyperquadriques $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \ldots, k_n^{(n)}$ par l'hyperplan $\varrho^{(n)}$, la relation géométrique exprimée par la condition $\Theta_n = 0$, il suffit, comme il s'agit d'une relation projective, de lier par cette condition les équations des projections des intersections de ces hyperquadriques avec l'hyperplan $\varrho^{(n)}$ dans l'hyperplan $x_{n+1} = 0$. Ainsi à la relation demandée suffit la condition

$$\Theta_n = |A_{1rs}|A_{2rs}|A_{3rs}|\ldots|A_{nrs}| = 0 \,, \tag{4}$$

où se trouvent entre les traits les matrices des discriminants des hyperquadriques (3).

Le terme principal du déterminant cubique (4) est

$$\begin{vmatrix} a_{1,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{11} & , u_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{11} & , u_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{22} & , u_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{22} & , u_2 \end{vmatrix} \ldots$$

$$\ldots \begin{vmatrix} a_{n,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{nn} & , u_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{n,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{nn} & , u_n \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{vmatrix} a_{1,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{11} & , u_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{22} & , u_2 \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} a_{n,n+1}, & u_{n+1} \\ a_{nn} & , u_n \end{vmatrix} \right]^2 =$$

$$[(a_{1,n+1}u_1 - a_{11}u_{n+1}) \cdot (a_{2,n+1}u_2 - a_{22}u_{n+1}) \ldots (a_{n,n+1}u_n - a_{nn}u_{n+1})]^2 \,. \tag{5}$$

Tous les termes du développement du déterminant cubique (4) s'obtienent par l'alternation du terme principal d'après ses 2^es indices de la lettre a et d'après l'indice de la lettre u, tant que ceux-ci n'ont pas la valeur $n + 1$. Après l'alternation, la relation (5) ne contient que les termes obtenus par l'alternation du terme

$$a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}u_{n+1}^{n} \,,$$

en sorte qu'il reste

$$[a_{11}a_{22}a_{33}\ \dots\ a_{nn}u_{n+1}]^2 \cdot u_{n+1}^{2(n-1)} .$$

Ainsi la condition $\Theta_n = 0$ donne la condition

$$[a_{11}a_{22}a_{33}\ \dots\ a_{nn}u_{n+1}]^2 \cdot u_{n+1}^{2(n-1)} = 0 .$$

Comme u_{n+1} n'est pas constamment nul, il en vient

$$P_n \equiv [a_{11}a_{22}a_{33}\ \dots\ a_{nn}u_{n+1}]^2 = 0 .$$

L'expresion P_n, renferme $[(n+1)!]^2$ termes, est un déterminant cubique du $(n+1)^{\text{ème}}$ degré

$$P_n = |a_{1ij}|a_{2ij}|\ \dots\ |a_{nij}|u_iu_j| = 0 . \tag{6}$$

$P_n = 0$ est l'équation de l'enveloppe cherchée des hyperplans coupant les hyperquadriques $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \dots, k_n^{(n)}$ en des hyperquadriques $k_1^{(n-1)}, k_2^{(n-1)}, \dots, k_n^{(n-1)}$ qui sont dans une relations géométrique mutelle définie par la condition $\Theta_n = 0$.

Prenons une autre hyperquadrique $k_{n+1}^{(n)}$ de l'espace à n dimensions. Pour que l'hyperquadrique $k_{n+1}^{(n)}$ soit polairement circonscrite a la quadrique P_n, il faut que la somme des produits des coefficients correspondants de l'équation ponctuelle de l'hyperquadrique $k_{n+1}^{(n)}$ et de l'équation tangentielle de l'hyperquadrique P_n soit nulle, c. à d. il faut que

$$\Theta_{n+1} = |a_{1ij}|a_{2ij}|a_{3ij}|\ \dots\ |a_{n+1,i,j}| = 0 , \tag{7}$$

c. à d.

$$\Theta_{n+1} = |a_{kij}| = 0, \quad k, i, j = 1, 2, \dots, n+1 . \tag{8}$$

Nous trouverons la même condition, si nous cherchons l'enveloppe des hyperplans de l'espace à n dimensions, coupant les n hyperquadriques choises arbitrairement parmi les hyperquadriques $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \dots, k_{n+1}^{(n)}$ en des hyperquadriques de l'espace à $n-1$ dimensions, liées par la relation $\Theta_n = 0$, et si nous demandons que l'hyperquadrique restante $k_r^{(n)}$ soit polairement circonscrite à cette enveloppe. L'enveloppe des hyperplans coupant les hyperquadriques $k_r^{(n)}$, $r = 1, 2, \dots, n+1$, sauf $r = r_m$, en des hyperquadriques liées par la relation $\Theta_n = 0$, a pour équation

$$|a_{1ij}|a_{2ij}|a_{3ij}|\ \dots\ |a_{n+1,i,j}|u_iu_j| = 0 ,$$
$$r = 1, 2, \dots, n+1, \quad \text{sauf} \quad r = r_m .$$

Pour que cette hyperquadrique soit polairement circonscrite à l'hyperquadrique $k_{r_m}^{(n)}$, il faut que

$$|a_{1ij}|a_{2ij}|a_{3ij}|\ \dots\ |a_{n+1,i,j}| = 0 ,$$

c. à d.

$$\Theta_{n+1} = 0 .$$

Pour chaque r on aboutit à la même condition $\Theta_{n+1} = 0$.

Réciproquement, si $\Theta_{n+1} = 0$, l'hyperquadrique $k_r^{(n)}$ est polairement circonscrite à l'enveloppe des hyperplans

$$|a_{1ij}|a_{2ij}| \dots |a_{r-1,i,j}|a_{r+1,i,j}|a_{r+2,i,j}| \dots |a_{n+1,i,j}|u_i u_j| = 0$$

pour chaque $r = 1, 2, \dots, n+1$.

Ainsi nous avons généralisé le théorème XI de l'ouvrage cité pour un entier n arbitraire. Nous avons montré que, si un théorème analogue au théorème XI est valable pour un certain nombre n d'hyperquadriques, dans l'espace à $n-1$ dimensions, il est valable aussi pour $n+1$ hyperquadriques de l'espace à n dimensions et ainsi il est valable pour chaque $n \geqq 2$, entier et positif. Ainsi nous avons la généralisation:

Si $n+1$ hyperquadrique de l'espace à n dimensions sont dans une position mutuelle telle que chacume d'elles est polairement circonscrite à l'enveloppe des hyperplans coupant les n autres hyperquadriques, en n hyperquadriques de l'espace à $n-1$ dimensions dont chacune est à son tour, ciconscrite polairement à l'enveloppe des hyperplans de l'espace à $n-1$ dimensions coupant les autres $n-1$ des n hyperquadriques en $n-1$ hyperquadriques de l'espace à $n-2$ dimensions qui sont dans une position analogue, et ainsi de suite jusqu'à ce que finalement on aboutit à trois coniques dans le plan dont chacune est polairement circonscrite à l'enveloppe des droites coupant les deux autres coniques en des couples de points conjugués harmoniques, alors ces $n+1$ hyperquadriques de l'espace a n dimensions sont liées par la relation $\Theta_{n+1} = 0$. Et réciproquement. Et aussi duellement.

Si quelques-unes des $n+1$ hyperquadriques données coïncident, on arrive à des cas spéciaux intéressants du théorème trouvé. Posons par exemple $a_{n+1,i,j} = a_{nij}$. La condition $\Theta_{n+1} = 0$ donne la condition

$$|a_{1ij}|a_{2ij}| \dots |a_{nij}|a_{nij}| = 0\ ,$$

qui montre que l'hyperquadrique dont les coefficients se trouvent dans deux couches du déterminant cubique Θ_{n+1}, à savoir l'hyperquadrique $k_n^{(n)}$, est polairement circonscrite à l'hyperquadrique

$$|a_{1ij}|a_{2ij}| \dots |a_{nij}|u_i u_j| = 0\ ,$$

c. à d. à l'enveloppe des hyperplans coupant toutes les hyperquadriques données en des hyperquadriques de l'espace à $n-1$ dimensions qui sont dans la relation caractérisée par la relation $\Theta_n = 0$. Et duellement.

Si les hyperquadriques $k_1^{(n)} \equiv \sum a_{1ij} x_i x_j = 0$ et $k_2^{(n)} \equiv \sum a_{2ij} x_i x_j = 0$ ont un $(n+1)$-èdre polaire commun, prenons-le pour polyèdre de référence. Pour que toutes les hyperquadriques $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \dots, k_{n+1}^{(n)}$ soient dans une position mutuelle telle que chacune d'elles soit polairement circonscrite à la surface P des n autres hyperquadriques, il faut que

$$\Theta_{n+1} = \left| \begin{array}{cccc|cccc|cccc} a_{111} & 0 & \dots & 0 & a_{211} & 0 & \dots & 0 & a_{311} & \dots & & a_{3,1,n+1} \\ 0 \dots & a_{122} & \dots & 0 & 0 \dots & a_{222} & \dots & 0 & a_{312} & \dots & & a_{3,2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & & & a_{1,n+1,n+1} & 0 \dots & & & a_{2,n+1,n+1} & a_{3,1,n+1}, & a_{3,2,n+1}, & \dots, & a_{3,n+1,n+1} \end{array} \right| \dots$$

$$\dots \left| a_{n+1,i,j} \right| = 0\,. \tag{11}$$

En développant le déterminant du premier membre de cette équation, on obtient

$$\begin{aligned} & a_{111}\,[a_{222}|a_{kij}| + a_{233}|a_{kij}| + \dots + a_{2,n+1,n+1}|a_{kij}|] + \\ & + a_{122}\,[a_{211}|a_{kij}| + a_{233}|a_{kij}| + \dots + a_{2,n+1,n+1}|a_{kij}|] + \\ & + a_{133}\,[a_{211}|a_{kij}| + a_{222}|a_{kij}| + \dots \quad a_{2,n+1,n+1}|a_{kij}|] + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + a_{1,n+1,n+1}\,[a_{211}|a_{kij}| + a_{222}|a_{kij}| + \dots + a_{2nn}|a_{kij}|] = 0\,, \end{aligned} \tag{12}$$

où $|a_{kij}|$ sont les compléments des déterminants mineurs cubiques

$$\left| \begin{array}{cc|cc} a_{1ii} & 0 & a_{2ii} & 0 \\ 0 & a_{1jj} & 0 & a_{2jj} \end{array} \right|, \quad i \neq j,\, i, j = 1, 2, \dots, n+1$$

dans le déterminant cubique (11). On peut satisfaire à l'équation (12) aussi en égalant à zero chaque déterminant cubique $|a_{kij}|$ se trouvant dans cette équation, c. à d. en égalant à zero

$$|a_{3ij}|a_{4ij}| \dots |a_{n+1,i,j}| = 0, \quad i \leqq j, \tag{13}$$

i prenant $n-1$ valeurs des nombres 1, 2, ..., n et j prenant $n-1$ valeurs des nombres 2, 3, ..., $n+1$. Le premier membre de cette équation est l'invariant simultané Θ_{n-1} des équation

$$\Sigma a_{3ij}x_i x_j = 0, \quad \Sigma a_{4ij}x_i x_j = 0, \quad \dots, \quad \Sigma a_{n+1,i,j}x_i x_j = 0$$

qui donnent les intersections des hyperplans de reférence correspondants aux sommets O_r, O_s avec les hyperquadriques $k_3^{(n)}$, $k_n^{(n)}$, ..., $k_{n+1}^{(n)}$, r, s étant des nombres ne se trouvant pas parmi les indices i, j dans l'équation correspondante. En désignant l'intersection de deux hyperplans de référence par l'arête du polyèdre de référence, on a:

S'il existe un $(n+1)$-èdre polaire commun a deux hyperquadriques $k_1^{(n)}$, $k_2^{(n)}$ de l'espace a n dimensions, dont chaque arête coupe les hyperquadriques $k_3^{(n)}$, $k_4^{(n)}$, ..., ..., $k_{n+1}^{(n)}$ en des hyperquadriques de l'espace a $n-2$ dimensions qui satisfont a la relation $\Theta_{n-1} = 0$, toutes les hyperquadriques $k_1^{(n)}$, $k_2^{(n)}$, ..., $k_{n+1}^{(n)}$ sont dans la relation mutuelle donnée par $\Theta_{n+1} = 0$.

Si, dans (11), nous posons $a_{3ij} = a_{4ij} = \ldots = a_{n+1,i,j}$, la condition (11) prend la forme

$$\Theta^{(3)}_{n+1} = \left|\begin{array}{cccc|cccc} a_{111} & 0 & \ldots & 0 & a_{211} & 0 & \ldots & 0 \\ 0\ldots & a_{122} & 0\ \ldots & 0 & 0\ldots & a_{222} & 0\ \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ldots & 0 & & a_{1,n+1,n+1} & 0\ldots & 0 & & a_{2,n+1,n+1} \end{array}\right| \underbrace{a_{3ij}\,|\,a_{3ij}\,|\ldots|\,a_{3ij}\,|}_{n-1 \text{ fois}} = 0 \qquad (14)$$

et les formules (11) donnent les formules

$$(n-1)!\ |a_{kij}| = 0,\ k = 3,\ i \leqq j\ ,$$

i prenant $n-1$ valeurs des nombres $1, 2, \ldots, n$ et j prenant $n-1$ valeurs des nombres $2, 3, \ldots, n+1$, c. à d.

$$|a_{3ij}| = 0\ , \qquad (15)$$

qui est un déterminant plan du $(n-1)^{\text{ème}}$ degré.

Le premier membre de la formule (15) est le discriminat des hyperquadriques

$$\Sigma a_{3ij} x_i x_j = 0 \qquad (16)$$

donnant les intersections des hyperplans de réference correspondantes aux sommets O_r, O_s avec l' hyperquadrique $k_3^{(n)}$, r, s étant des nombres ne se trouvant pas parmi les indices i, j dans l'équation correspondante. Ainsi, pour trois hyperquadriques, nous avons trouvé:

S'il existe, pour trois hyperquadriques $k_1^{(n)}$, $k_2^{(n)}$, $k_3^{(n)}$ un $(n+1)$-èdre commun aux hyperquadriques $k_1^{(n)}$, $k_2^{(n)}$, dont les arêtes sont tangentes a l'hyperquadrique $k_3^{(n)}$, ces trois hyperquadriques sont liées par $\Theta^{(3)}_{n+1} = 0$.

Donc si parmi les quadriques $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \ldots, k_{n+1}^{(n)}$ il y en a qui se répètent plusieurs fois, l'invariant Θ_{n+1} donne des invariants spéciaux. On obtient ainsi tout un système d'invariants simultanés dont les significations géométriques découlent de l'invariant fondamental Θ_{n+1} comme cas spéciaux correspondants. Ainsi pour $n = 2$ nous obtenons les invariants simultanés Θ_1, Θ_2, Θ_3 de même que les discriminants d'une jusqu'à trois coniques; pour $n = 3$ on obtient les invariants Θ_1, Θ_2, Φ, $\Theta_3^{(1)}$, $\Theta_3^{(2)}$, $\Theta_3^{(3)}$, Θ_4 et les dicriminants d'une jusqu'à quatre quadriques avec leurs significations géométriques. Donc l'invariant Θ_{n+1} peut être considéré comme un invariant simultané fondamental de $n+1$ hyperquadriques de l'espace à n dimensions. Comme cas spéciaux correspondants en découlent tous les invariants simultanés de deux jusqu à $n+1$ hyperquadriques de cet espace avec leurs significations géométriques générales, et les discriminants eux-mêmes de ces hyperquadriques.

Резюме

ИНВАРИАНТ Θ_{n+1} В КАЧЕСТВЕ ОСНОВНОГО СОВМЕСТНОГО ИНВАРИАНТА ОДНОЙ ДО $n+1$ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

КИРИЛЛ ПАЛАЙ, (Cyril Palaj), Зволен.

(Поступило в редакцию 9/VI 1954 г.)

Работа опирается на работу автора: ,,*Sur la significatin géométrique de certains invariants simultanés des coniques et des quadriques*", опубликованную в журнале *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč.* 75 (1950) номер 3. В работе обобщена теория цитированной работы для общего натурального n, в ней найдено общее геометрическое значение основного совместного инварианта Θ_{n+1} для $n+1$-арных квадратических форм, образована система производных инвариантов, найдена единая точка зрения для инвариантов системы. Теория разработана применением кубических определителей. Для геометрического значения основного совместного инварианта, выраженного кубическим определителем

$$\Theta_{n+1} = |a_{1ij}|\ a_{2ij}\ |a_{3ij}| \dots |a_{n+1,i,j}|$$

где между вертикальными отрезками находятся матрицы дискриминантов $n+1$ гиперповерхностей второго порядка, найдено:

Если $n+1$ гиперповерхностей второго порядка n-мерного пространства находятся в таком взаимном положении, что каждая из них полярно описана огибающей гиперплоскостей, пересекающих остальные n-гиперповерхности второго порядка в n-гиперповерхностях второго порядка $n-1$-мерного пространства, из которых каждая опять полярно описана огибающей гиперплоскостей $n-1$-мерного пространства, пересекающих остальные $n-1$ из этих n-гиперповерхностей второго порядка в $n-1$ гиперповерхностях второго порядка $n-2$-мерного пространства, которые находятся в аналогическом отношении и т. д., наконец приходим к трем кривым второго порядка в плоскости, из которых каждая полярно описана огибающей прямых, пересекающих две остальные кривые второго порядка в гармонических четверках точек, для этих $n+1$ гиперплоскостей второго порядка n-мерного пространства $\Theta_{n+1} = 0$. И наоборот, и двойственно.

Для огибающей гиперплоскостей $\Sigma u_i x_i = 0$, пересекающих n-гиперповерхностей второго порядка $n+1$-мерного пространства в n-гиперповерхностях второго порядка $n-1$-мерного пространства, для которых $\Theta_n = 0$ найдено:

$$P_n = |a_{1ij}|\ a_{2ij}|a_{3ij}| \dots |a_{nij}|\ u_i u_j| = 0\ .$$

Дальше найдено:

Существует ли общий полярный $n + 1$-эдр двух гиперповерхностей второго порядка $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}$ n-мерного пространства, каждая грань которого пересекает гиперповерхности второго порядка $k_3^{(n)}, k_4^{(n)}, \ldots, k_{n+1}$ в гиперповерхностях второго порядка $n - 2$-мерного пространства, для которых $\Theta_{n-1} = 0$, то все гиперповерхности второго порядка $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \ldots k_{n+1}^{(n)}$ находятся во взаимном положении, для которого $\Theta_{n+1} = 0$.

Если из гиперповерхностей второго порядка $k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \ldots, k_{n+1}^{(n)}$ некоторые встречаются кратно, из инварианта Θ_{n+1} возникают специальные инварианты. Таким образом получается целый ряд совместных инвариантов, геометрические значения которых получаются соответствующей специализацией из основного инварианта Θ_{n+1}.