Zbyněk Nádeník

Поверхности, аналогичные кривым Бертрана

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 2, 194–219

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100142

Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

ПОВЕРХНОСТИ, АНАЛОГИЧНЫЕ КРИВЫМ БЕРТРАНА

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага.

(Поступило в редакцию 27/IX 1954 г.)

Пусть в обыкновенном пространстве даны две поверхности (A) и (B), не имеющие ни особых, ни омбилических точек. Пусть D_A (D_B) репер Дарбу поверхности (A) $((B))$ в точке A (B) (т. е. репер, образованный нормалью и главными касательными этой поверхности). Между точками этих поверхностей существует взаимно-однозначное соответствие C такое, что пара реперов Дарбу D_A и D_B в соответствующих друг другу точках A и B образует образ неизменяемого вида, только тогда, если поверхности (A) и (B) параллельны. Это утверждение является неопубликованным результатом академика Э. Чеха. По его инициативе автор занимался вопросом, существуют ли, напр., в случае, если отказаться от требования постоянного расстояния между соответствующими точками A, B, пары поверхностей, между точками которых было бы возможно установить нетривиальным образом указанное выше соответствие C. Эти проблемы остаются до сих пор открытыми.

Автор заменил реперы Дарбу D_A и D_B произвольными реперами T_A и T_B, одно ребро которых совпадает с нормалью поверхности, и обнаружил, что именно только между парами W-поверхностей, Гауссова и средняя кривизна которых связаны линейным неоднородным соотношением с постоянными коэффициентами, можно установить взаимно-однозначное соответствие C такое, что в соответствующих точках A и B можно подобрать реперы T_A и T_B так, чтобы эти выбранные пары составляли образ неизменяемого вида. В настоящей работе и исследуются упомянутые пары W-поверхностей.

Все исследования будем проводить в трехмерном евклидовом пространстве; прямоугольные декартовы координаты обозначим через x_1, x_2, x_3. Вектор, с началом в точке (0, 0, 0) и оканчивающийся в точке (x_1, x_2, x_3), назовем „радиус-вектором $\boldsymbol{r}$“. Вместо выражения „точка, радиус-вектор которой есть $\boldsymbol{r}$“ будем пользоваться более коротким: „точка $\boldsymbol{r}$“. Будем рассматривать только действительные геометрические образы.

Возьмем две различные поверхности и обозначим соответственно через

$\boldsymbol{r}$ и $'\boldsymbol{r}$ радиус-векторы их точек, так что их уравнения можно будет сокращенно записать

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) \tag{1,1}$$

и соответственно

$$'\boldsymbol{r} = '\boldsymbol{r}('u, 'v) , \tag{1,1'}$$

где u, v, соотв. $'u$, $'v$ — криволинейные координаты. Углы в касательных плоскостях этих поверхностей мы ориентируем так, что угол между параметрической v-кривой и параметрической u-кривой (соотв. между $'v$-кривой и $'u$-кривой) считаем положительным (причем касательные векторы кривых ориентируем, как обычно, в направлении возрастающего параметра).

Пусть все точки поверхностей (1,1) и (1,1′) являются обыкновенными, и если какая-нибудь из этих поверхностей — неразвертывающаяся, то пусть ни одна из ее точек не будет параболической.

При всех последующих исследованиях мы будем предполагать, что все производные, введенные в наши вычисления, существуют и непрерывны.

Пусть теперь на поверхности (1,1), равно как и на поверхности (1,1′), имеются ортогональные конгруэнции кривых, которые мы на поверхности (1,1) обозначим через O_1, O_2, а на поверхности (1,1′) через $'O_1$, $'O_2$. (Под конгруэнцией кривых на поверхности мы всегда подразумеваем такую систему кривых на ней, что через каждую ее точку проходит в точности одна кривая этой системы, имеющая в этой точке касательную.) Пусть угол между кривыми конгруэнции O_1 ($'O_1$) и кривыми конгруэнции O_2 ($'O_2$) будет $+\frac{1}{2}\pi$. Обозначим символом R репер, образованный в точке $\boldsymbol{r}$ поверхности (1,1) единичными касательными векторами $\mathbf{t}_i$ кривых конгруэнций O_i ($i = 1, 2$) в точке $\boldsymbol{r}$ и единичным вектором $\boldsymbol{N}$, выходящим из точки $\boldsymbol{r}$ и перпендикулярным к касательной плоскости поверхности (1,1) в точке $\boldsymbol{r}$; пусть при этом

$$[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \boldsymbol{N}] = 1 .$$

Аналогично символом $'R$ обозначим репер, образованный подобным же образом в точке $'\boldsymbol{r}$ поверхности (1,1′) из единичных перпендикулярных друг другу векторов $'\mathbf{t}_1$, $'\mathbf{t}_2$, $'\boldsymbol{N}$, причем опять

$$['\mathbf{t}_1, '\mathbf{t}_2, '\boldsymbol{N}] = 1 .$$

Дадим теперь следующее определение:

Определение (1,1). *Пусть между точками* $\boldsymbol{r}$ *и* $'\boldsymbol{r}$ *поверхностей* (1,1) *и* (1,1′) *можно установить соответствие* C,

$$'\boldsymbol{r} = C\boldsymbol{r} , \tag{1,2}$$

обладающее следующими тремя свойствами:

I. *Оно является простым отображением поверхности* (1,1) *на поверхность* (1,1′).

II. *Нормали поверхностей* (1,1) *и* (1,1′) *в соответствующих точках* $\mathbf{r}$ *и* $'\mathbf{r} = C\mathbf{r}$ *нигде не совпадают и не параллельны друг другу.*

III. *Пара реперов* R *и* $'R$ *в соответствующих точках* $\mathbf{r}$ *и* $'\mathbf{r} = C\mathbf{r}$ *поверхностей* (1,1) *и* (1,1′) *образует образ, инвариантный по отношению к паре взаимно соответствующих точек* $\mathbf{r}$ *и* $'\mathbf{r}$.

В таком случае поверхности (1,1) *и* (1,1′) *назовем* B*-поверхностями, а ортогональные конгруэнции* O_i *и* $'O_i$ ($i = 1, 2$) B*-конгруэнциями.* B*-поверхность* (1,1′), *соотв.* (1,1) *назовем сопряженной как с* B*-поверхностью* (1,1), *соотв.* (1,1′), *так и с конгруэнциями* O_1, O_2, *соотв.* $'O_1$, $'O_2$ B*-поверхности* (1,1) *соотв.* (1,1′). *Точно так же и* B*-конгруэнции* O_1, O_2 *будем обозначать как сопряженные с* B*-конгруэнциями* $'O_1$, $'O_2$ *и наоборот.*

Замечание 1. Если бы мы отказались от требования II, налагаемого на соответствие C, то каждая пара параллельных поверхностей была бы хоть в некоторых областях парой сопряженных B-поверхностей.

Тривиальным случаем сопряженных B-поверхностей являются, очевидно, концентрические сферические поверхности. Поэтому в дальнейшем под B-поверхностью мы будем всегда подразумевать поверхность, отличную от (области) сферической поверхности, и задачу, которую мы будем решать, сформулируем так:

Проблема: *Найти все пары сопряженных* B*-поверхностей.*

Теоремы раздела I являются вспомогательными; полное решение нашей проблемы, использующее методы Э. Картана, дано в разделе II и свойства B-поверхностей в разделе III.

Теорема (1,1). *Пусть поверхности* (1,1) *и* (1,1′) — *сопряженные* B*-поверхности с сопряженными* B*-конгруэнциями* O_1, O_2 *и* $'O_1$, $'O_2$.

Тогда для пары соответствующих точек $\mathbf{r}$ *и* $'\mathbf{r} = C\mathbf{r}$ *и реперов* R *и* $'R$ *в них имеет место*

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \varrho_1\mathbf{t}_1 + \varrho_2\mathbf{t}_2 + \varrho_3\mathbf{N}; \tag{1,3}$$

$$\left.\begin{aligned} '\mathbf{t}_1 &= \lambda_1\mathbf{t}_1 + \lambda_2\mathbf{t}_2 + \lambda_3\mathbf{N}\,, \\ '\mathbf{t}_2 &= \mu_1\mathbf{t}_1 + \mu_2\mathbf{t}_2 + \mu_3\mathbf{N}\,, \\ '\mathbf{N} &= \nu_1\mathbf{t}_1 + \nu_2\mathbf{t}_2 + \nu_3\mathbf{N}\,, \end{aligned}\right\} \tag{1,4}$$

где $\varrho_i, \lambda_i, \mu_i, \nu_i$ ($i = 1, 2, 3$) — *постоянные, для которых*

$$(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)(\nu_1^2 + \nu_2^2) \neq 0 \tag{1,5}$$

и матрица

$$(\lambda\mu\nu) \tag{1,6}$$

ортогональна.

Наоборот, имеем

$$\mathbf{r} = {}'\mathbf{r} + {}'\varrho_1{}'\mathbf{t}_1 + {}'\varrho_2{}'\mathbf{t}_2 + {}'\varrho_3\,{}'\mathbf{N}\,; \tag{1,3'}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= {}'\lambda_1{}'\mathbf{t}_1 + {}'\lambda_2{}'\mathbf{t}_2 + {}'\lambda_3{}'\mathbf{N}\,, \\ \mathbf{t}_2 &= {}'\mu_1{}'\mathbf{t}_1 + {}'\mu_2{}'\mathbf{t}_2 + {}'\mu_3{}'\mathbf{N}\,, \\ \mathbf{N} &= {}'\nu_1{}'\mathbf{t}_1 + {}'\nu_2{}'\mathbf{t}_2 + {}'\nu_3{}'\mathbf{N}\,, \end{aligned}\right\} \tag{1,4'}$$

где

$${}'\varrho_1 = -\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\varrho_i\,, \quad {}'\varrho_2 = -\sum_{i=1}^{3}\mu_i\varrho_i\,, \quad {}'\varrho_3 = -\sum_{i=1}^{3}\nu_i\varrho_i\,, \tag{1,7}$$

и матрица

$$({}'\lambda{}'\mu{}'\nu) \tag{1,6'}$$

обратна к матрице (1,6).

Доказательство весьма просто.

Отнесем теперь к каждой точке $\mathbf{r}$, соотв. $'\mathbf{r}$ поверхности (1,1), соотв. (1,1') реперы, образованные тремя единичными взаимно перпендикулярными векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, соотв. $'\mathbf{e}_1, {}'\mathbf{e}_2, {}'\mathbf{e}_3$, выходящими из точки $\mathbf{r}$, соотв. $'\mathbf{r}$ и ориентированными так, что

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = [{}'\mathbf{e}_1, {}'\mathbf{e}_2, {}'\mathbf{e}_3] = 1\,.$$

Для этих реперов имеют место общие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r} &= \sum_{i=1}^{3}\omega_i\mathbf{e}_i\,, \\ \mathrm{d}\mathbf{e}_i &= \sum_{j=1}^{3}\omega_{ij}\mathbf{e}_j\,, \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3)\,; \end{aligned}\right\} \tag{1,8}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}{}'\mathbf{r} &= \sum_{i=1}^{3}\overline{\omega}_i{}'\mathbf{e}_i\,, \\ \mathrm{d}{}'\mathbf{e}_i &= \sum_{j=1}^{3}\overline{\omega}_{ij}{}'\mathbf{e}_j\,, \quad \overline{\omega}_{ij} = -\overline{\omega}_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3)\,, \end{aligned}\right\} \tag{1,8'}$$

где ω_i, ω_{ij}, соотв. $\overline{\omega}_i$, $\overline{\omega}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ — дифференциальные формы от дифференциалов криволинейных координат u, v, соотв. $'u$, $'v$ (возможно и дальнейших вторичных параметров) и удовлетворяют известным уравнениям структуры трехмерного евклидова пространства.

Подчиним эти реперы следующим условиям:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}_1\,, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{t}_2\,; \quad {}'\mathbf{e}_1 = {}'\mathbf{t}_1\,, \quad {}'\mathbf{e}_2 = {}'\mathbf{t}_2\,. \tag{1,9}$$

Для выбранных таким образом реперов поверхности (1,1) имеет место:

$$\omega_3 = 0\,, \tag{1,10}$$

$$[\omega_1\omega_2] \neq 0\,; \tag{1,11}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_{12} &= f_1\omega_1 + f_2\omega_2\,, \\ \omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2\,, &\quad \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2\,; \end{aligned}\right\} \tag{1,12}$$

$$K = ac - b^2\,, \quad H = a + c\,; \tag{1,13}$$

$$\left.\begin{aligned} &[\mathrm{d}\omega_1] = f_1[\omega_1\omega_2]\,, \quad [\mathrm{d}\omega_2] = f_2[\omega_1\omega_2]\,;\\ &[\mathrm{d}a - 2b\omega_{12}, \omega_1] + [\mathrm{d}b + \overline{a-c}\,\omega_{12}, \omega_2] = 0\,,\\ &[\mathrm{d}b + \overline{a-c}\,\omega_{12}, \omega_1] + [\mathrm{d}c + 2b\omega_{12}, \omega_2] = 0\,,\\ &[\mathrm{d}\omega_{12}] = -K[\omega_1\omega_2]\,. \end{aligned}\right\} \tag{1,14}$$

В этих соотношениях ω_1, ω_2 являются, конечно, линейно независимыми линейными комбинациями дифференциалов $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$. a, b и f_1 представляют соответственно нормальную кривизну, геодезическое кручение и геодезическую кривизну в точке $\boldsymbol{r}$ кривой конгруэнции O_1, для которой $\omega_2 = 0$; c, $-b$ и f_2 представляют соответственно нормальную кривизну, геодезическое кручение и геодезическую кривизну в точке $\boldsymbol{r}$ кривой конгруенции O_2, для которой $\omega_1 = 0$. K есть гауссова и H — средняя кривизна поверхности.

Точно так же фиксированы и реперы поверхности (1,1′), для которой имеют место аналогичные соотношения:

$$\bar\omega_3 = 0\,, \tag{1,10′}$$

$$[\bar\omega_1\bar\omega_2] \neq 0\,; \tag{1,11′}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar\omega_{12} &= {}'f_1\bar\omega_1 + {}'f_2\bar\omega_2\,,\\ \bar\omega_{13} = {}'a\bar\omega_1 + {}'b\bar\omega_2\,, &\quad \bar\omega_{23} = {}'b\bar\omega_1 + {}'c\bar\omega_2\,; \end{aligned}\right\} \tag{1,12′}$$

$${}'K = {}'a'c - {}'b^2\,, \quad {}'H = {}'a + {}'c\,. \tag{1,13′}$$

Формы $\bar\omega_1$, $\bar\omega_2$ и скалярные функции $'a$, $'b$, $'c$, $'f_1$, $'f_2$, $'K$, $'H$ имеют для кривых конгруэнций $'O_1$, $'O_2$ поверхности (1,1′) и для нее самой тот же смысл, как и ω_1, ω_2, a, b, c, f_1, f_2, K, H на поверхности (1,1), и связаны кроме того соотношениями, аналогичными (1,14).

Теорема (1,2). *Аналитически проблема полностью исчерпывается системой Σ дифференциальных уравнений Пфаффа*

$$\omega_3 = 0\,, \tag{1,10}$$

$$\bar\omega_3 = 0\,; \tag{1,10′}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar\omega_{12} &= \nu_3\omega_{12} - \nu_2\omega_{13} + \nu_1\omega_{23}\,,\\ \bar\omega_{13} &= -\mu_3\omega_{13} + \mu_2\omega_{13} - \mu_1\omega_{23}\,,\\ \bar\omega_{23} &= \lambda_3\omega_{13} - \lambda_2\omega_{13} + \lambda_1\omega_{23}\,; \end{aligned}\right\} \tag{1,15}$$

$$\left.\begin{aligned} -\varrho_2\omega_{12} - \varrho_3\omega_{13} + \omega_1 &= \lambda_1\bar\omega_1 + \mu_1\bar\omega_2\,,\\ \varrho_1\omega_{12} - \varrho_3\omega_{23} + \omega_2 &= \lambda_2\bar\omega_1 + \mu_2\bar\omega_2\,,\\ \varrho_1\omega_{13} + \varrho_2\omega_{23} &= \lambda_3\bar\omega_1 + \mu_3\bar\omega_2 \end{aligned}\right\} \tag{1,16}$$

при условиях

$$[\omega_1\omega_2] \neq 0\,, \tag{1,11}$$

$$[\bar\omega_1\bar\omega_2] \neq 0\,. \tag{1,11′}$$

Доказательство. Смысл соотношений (1,10), (1,10′), (1,11), (1,11′) очевиден. Уравнения (1,15) и (1,16) мы получим, дифференцируя уравнения (1,3) и (1,4) и использовав соотношения (1,8), (1,8′) и (1,9), (1,10), (1,10′).

Замечание 2. Система, образованная уравнениями (1,15) является, очевидно, вполне интегрируемой.

Замечание 3. Если ослабить требование II, наложенное на соответствие C, и потребовать только, чтобы нормали поверхностей (1,1) и (1,1′) в соответствующих точках $\mathbf{r}$ и $'\mathbf{r} = C\mathbf{r}$ не совпадали друг с другом, то пары сопряженных B-поверхностей с параллельными нормалями в соответствующих точках будут представлены произвольной парой параллельных развертывающихся поверхностей (точнее некоторыми их областями) и только такой парой. Действительно, при $\nu_1 = \nu_2 = 0$ в матрице (1,6) будет $\lambda_3 = \mu_3 = 0$, $\nu_3 = 1$, так что, согласно (1,15) и $(1,16_3)$, обе сопряженные B-поверхности (1,1) и (1,1′) будут развертывающиеся, и для прямых поверхности (1,1) будет $\varrho_2\omega_1 - \varrho_1\omega_2 = 0$, если она не плоскостью.

II.

Определение (2,1). *Пусть поверхности* (1,1) *и* (1,1′) *образуют пару сопряженных B-поверхностей. Такую пару назовем парой первого или второго типа, смотря по тому, будут ли нормали B-поверхностей* (1,1) *и* (1,1′) *в соответствующих точках* $\mathbf{r}$ *и* $'\mathbf{r} = C\mathbf{r}$ *скрещиваться или пересекаться.*

Теорема (2,1). *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы неразвертывающаяся поверхность*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{1,1}$$

была B-поверхностью из пары неразвертывающихся сопряженных B-поверхностей первого типа, следующее:

На поверхности (1,1) *имеются такие ортогональные конгруэнции* O_1, O_2, *для кривых которых в каждой ее точке имеют место соотношения*

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= pa + qb + r_1\,, \\ f_2 &= pb + qc + r_2\,; \end{aligned}\right\} \tag{2,1}$$

$$r_1 r_2 (a - c) + (-r_1^2 + r_2^2)\, b \neq 0\,; \tag{2,2}$$

p, q, r_1, r_2 *являются произвольными постоянными*, $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$.

Эти конгруэнции обладают тогда следующими свойствами:

1. *Они являются B-конгруэнциями B-поверхности* (1,1), *с которыми сопряжена вторая B-поверхность упомянутой пары.*

2. *B-поверхность* (1,1) *с конгруэнциями* O_1, O_2 *является поверхностью Вейнгартена; ее гауссова и средняя кривизны связаны соотношением*

$$(p^2 + q^2 + 1) K + (pr_1 + qr_2) H + r_1^2 + r_2^2 = 0 . \tag{2,3}$$

3. *На всякой неразвертывающейся W-поверхности, определенной соотношением* (2,3), *имеется область, в которой они существуют.*

Доказательство. При

$$\varrho_1\nu_2 - \varrho_2\nu_1 \neq 0$$

из уравнений (1,16) следует

$$\omega_{12} = p\omega_{13} + q\omega_{23} + r_1\omega_1 + r_2\omega_2 , \tag{2,4}$$

где мы положили

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\varrho_3\nu_1 - \varrho_1\nu_3}{\varrho_1\nu_2 - \varrho_2\nu_1}, \quad q = \frac{\varrho_3\nu_2 - \varrho_2\nu_3}{\varrho_1\nu_2 - \varrho_2\nu_1}, \\ r_1 &= -\frac{\nu_1}{\varrho_1\nu_2 - \varrho_2\nu_1}, \quad r_2 = -\frac{\nu_2}{\varrho_1\nu_2 - \varrho_2\nu_1} . \end{aligned}\right\} \tag{2,5}$$

Из (2,5) получается прежде всего

$$\nu_1 : \nu_2 : \nu_3 = r_1 : r_2 : (r_1q - r_2p) , \tag{2,6}$$

и затем так же

$$r_1\varrho_2 - r_2\varrho_1 = 1 . \tag{2,7}$$

Система Σ из теоремы (1,2) заканчивается уравнениями, возникающими путем внешнего дифференцирования уравнений (1,10) и (2,4):

$$\left.\begin{aligned} [\omega_{13}\omega_1] + [\omega_{23}\omega_2] = 0 , \\ (p^2 + q^2 + 1)[\omega_{13}\omega_{23}] + (pr_1 + qr_2)\{[\omega_{13}\omega_2] - [\omega_{23}\omega_1]\} + (r_1^2 + r_2^2)[\omega_1\omega_2] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2,8}$$

Так как, согласно (1,15) и (1,16),

$$[\overline{\omega}_{13}\overline{\omega}_{23}] = \{\nu_1\nu_2 a + (-\nu_1^2 + \nu_2^2) b - \nu_1\nu_2 c\}[\omega_1\omega_2] \neq 0 , \tag{2,9}$$

$$[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2] = \{\varrho_1\varrho_2 a + (-\varrho_1^2 + \varrho_2^2) b - \varrho_1\varrho_2 c\}[\omega_1\omega_2] \neq 0 , \tag{2,10}$$

и, кроме того,

$$[\omega_{13}\omega_{23}] \neq 0 , \quad [\omega_1\omega_2] \neq 0 ,$$

то система Σ находится в инволюции и ее решение зависит от двух функций одного аргумента. Особое решение приводит к исключенной нами из рассмотрения сферической поверхности.

Отсюда и из соотношений (1,11)—(1,13), (2,4), (2,6), ($2,8_2$) и (2,9) уже вытекают утверждения теоремы, если принять еще во внимание, что при выборе

$$\varrho_1 = -\frac{r_2}{r_1^2 + r_2^2} , \quad \varrho_2 = \frac{r_1}{r_1^2 + r_2^2} ,$$

допустимом ввиду (2,7), получим вследствие (2,2) в каждой точке поверхности (1,1)

$$\varrho_1\varrho_2 a + (-\varrho_1^2 + \varrho_2^2) b - \varrho_1\varrho_2 c \neq 0 . \tag{2,11}$$

З а м е ч а н и е 4. Система Σ из теоремы (1,2) остается в силе при замене в ней форм

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{12}$$

формами

$$\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3, \overline{\omega}_{13}, \overline{\omega}_{23}; \overline{\omega}_{12}$$

и наоборот, при одновременной замене нештрихованных постоянных штрихованными. (См. теорему (1,1).) Отсюда следует, что для такой B-поверхности, сопряженной с B-поверхностью (1,1), которая с этой B-поверхностью (1,1) образует пару сопряженных B-поверхностей из теоремы (2,1), и для ее B-конгруэнций $'O_1$, $'O_2$, сопряженных с B-конгруэнциями O_1, O_2, будут иметь место соотношения, которые получаются из соотношений (2,1)—(2,3) после замены в них величин

$$a, b, c, f_1, f_2;\ K, H;\ p, q, r_1, r_2;\ \varrho_1, \varrho_2$$

величинами

$$'a, 'b, 'c, 'f_1, 'f_2;\ 'K, 'H;\ 'p, 'q, 'r_1, 'r_2;\ '\varrho_1, '\varrho_2,$$

причем $'\varrho_1$, $'\varrho_2$ даны в (1,7), а, согласно (2,5) и (1,7),

$$'p = \frac{'\varrho_3 {}'\nu_1 - {}'\varrho_1 {}'\nu_3}{'\varrho_1 {}'\nu_2 - {}'\varrho_2 {}'\nu_1} = \frac{\varrho_1\mu_2 - \varrho_2\mu_1}{\varrho_1\nu_2 - \varrho_2\nu_1}$$

и так далее.

Аналогичное замечание, если понадобится с соответствующими изменениями, относится и к последующим случаям.

Теорема (2,2). *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы развертывающаяся поверхность*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{1,1}$$

была В-поверхностью из пары сопряженных В-поверхностей первого типа, из которых вторая В-поверхность не является развертывающейся, следующее:

На поверхности (1,1) *имеются такие ортогональные конгруэнции* O_1, O_2, *для кривых которых в каждой точке этой поверхности справедливы соотношения* (2,1) *и* (2,2) *в которых* p, q, r_1, r_2 *являются опять-таки произвольными постоянными, подчиняющимися условию*

$$pr_1 + qr_2 \neq 0\,. \tag{2,12}$$

Эти конгруэнции обладают тогда следующими свойствами:

1. *Они являются В-конгруэнциями В-поверхности* (1,1), *с которыми сопряжена неразвертывающаяся В-поверхность упомянутой пары.*

2. *Они существуют только в областях цилиндрической поверхности вращения радиуса*

$$\frac{|pr_1 + qr_2|}{r_1^2 + r_2^2}\,.$$

3. *Они не образованы ни системами линий кривизны, ни их α-траекториями,* $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$.

Доказательство. В этом случае система Σ из теоремы (1,2) дополненая уравнением

$$[\omega_{13}\omega_{23}] = 0 \tag{2,13}$$

заканчивается опять уравнениями (2,8); неравенства (2,9) и (2,10) и (1,11), конечно, остаются в силе. Из $(2,8_2)$, (2,13) и (2,7) непосредственно следует (2,12).

Так как

$$K = ac - b^2 = 0\,, \quad H = a + c = -\frac{r_1^2 + r_2^2}{pr_1 + qr_2} = \text{const.} \neq 0\,, \tag{2,14}$$

то путем продолжений можно получить вполне интегрируемую систему уравнений

$$\mathrm{d}a = 2b\omega_{12}\,, \quad \mathrm{d}b = (c - a)\,\omega_{12}\,, \quad \mathrm{d}c = -2b\omega_{12}\,. \tag{2,15}$$

Согласно (2,14), поверхность (1,1) представляет область цилиндрической поверхности вращения радиуса $\dfrac{1}{|H|}$. Если бы ортогональные B-конгруэнции O_1, O_2 на ней были образованы линиями кривизны или их α-траекториями, то их кривые были бы геодезическими и, следовательно, по (2,1) было бы

$$pa + qb + r_1 = 0\,,$$
$$pb + qc + r_2 = 0\,.$$

Из этих уравнений следует $r_2a - r_1b = r_2b - r_1c = 0$, что противоречит соотношению (2,2).

Теорема (2,3). *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы неразвертывающаяся поверхность*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{1,1}$$

была B-поверхностью из пары сопряженных B-поверхностей первого типа, в которой вторая B-поверхность — развертывающаяся, следующее:

На поверхности (1,1) *имеются такие ортогональные конгруэнции O_1, O_2, что в каждой точке поверхности для кривых этих конгруэнций справедливы соотношения* (2,1) *и*

$$r_1r_2(a - c) + (-r_1^2 + r_2^2)\,b = 0\,, \tag{2,16}$$

в которых p, q, r_1, r_2 — произвольные постоянные, $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$.

Тогда эти конгруэнции O_1, O_2 являются B-конгруэнциями B-поверхности (1,1), *с которыми сопряжена развертывающаяся B-поверхность упомянутой пары, и существуют только на W-поверхностях, на которых верно соотношение* (2,3).

Доказательство. Теперь нужно рассмотреть систему Σ из теоремы (1,2), пополненную еще уравнением

$$[\overline{\omega}_{13}\overline{\omega}_{23}] = 0 \tag{2,17}$$

при неравенствах $[\omega_{13}\omega_{23}] \neq 0$, (1,11) и (1,11′). По теореме (2,2) существуют решение этой системы.

Уже из этого после доказательств предыдущих двух теорем следуют утверждения теоремы (2,3). Уравнение (2,16) является следствием (2,9), (2,6) и (2,17), и неравенство (2,11) по теореме (2,2) выполняется для каждой пары чисел ϱ_1, ϱ_2, удовлетворяющих уравнению (2,7), за исключением

$$\varrho_1 = -\frac{r_2}{r_1^2 + r_2^2}, \quad \varrho_2 = \frac{r_1}{r_1^2 + r_2^2}.$$

Замечание 5. Пары сопряженных B-поверхностей и B-конгруэнции из теорем (2,3) и (2,3) будут еще объектом изучения в разделе III г).

Теорема (2,4). *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы поверхности* (1,1) и (1,1′) *были развертывающимися В-поверхностями из пары сопряженных В-поверхностей первого типа, следующее:*

Поверхности (1,1) *и* (1,1′) *являются цилиндрическими поверхностями вращения, имеющими ту же ось вращения.*

Тогда В-конгруэнции образованы на них системами их линий кривизны или их α-траекториями.

Доказательство. К системе Σ нужно теперь присоединить еще уравнения (2,13) и (2,17), так что получаются опять соотношения (2,15) и (2,16), из которых следует

$$\{(r_1^2 - r_2^2)(a - c) + 4r_1r_2b\}\,\omega_{12} = 0\,.$$

Множитель в скобках, вследствие (2,16) и (2,7), отличен от нуля, так что $\omega_{12} = 0$. Согласно (2,15), этим доказана нетривиальная часть теоремы (2,4).

Теорема (2,5). *Пусть* (1,1) *есть В-поверхность с ортогональными В-конгруэнциями O_1, O_2, для кривых которых в каждой ее точке справедливы соотношения* (2,1).

Если

$$r_1q - r_2p \neq 0 \tag{2,18}$$

или

$$r_1q - r_2p = 0\,, \tag{2,19}$$

то каждая сопряженная с ними В-поверхность дана уравнением

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \varrho_1\mathbf{t}_1 + \varrho_2\mathbf{t}_2 + (\varrho_1q - \varrho_2p)\mathbf{N} \tag{2,20}$$

или, соответственно,

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \varrho_1\mathbf{t}_1 + \varrho_2\mathbf{t}_2 - \frac{r_1p + r_2q}{r_1^2 + r_2^2}\,\mathbf{N}\,, \tag{2,21}$$

причем ϱ_1, ϱ_2 — *некоторые постоянные, связанные уравнением*

$$r_1\varrho_2 - r_2\varrho_1 = 1 \tag{2,7}$$

и удовлетворяющие (в каждой точке В-поверхности (1,1)*) неравенству* (2,11).

Каждые две различные В-поверхности (2,20), *соотв.* (2,21), *параллельны друг другу.*

Доказательство. Ввиду (2,18), соотв. (2,19), из (2,5) и (2,6) легко следует

$$\varrho_3 = \varrho_1 q - \varrho_2 p, \text{ соотв. } \varrho_3 = -\frac{r_1 p + r_2 q}{r_1^2 + r_2^2},$$

что, согласно (1,3), дает (2,20), соотв. (2,21).

Уравнение (2,20) можно, согласно (2,18), $(1,4_3)$, (2,5) и (2,6), записать так:

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{p}{r_1 q - r_2 p}\mathbf{t}_1 + \frac{q}{r_1 q - r_2 p}\mathbf{t}_2 + (.)\,'\mathbf{N}.$$

Уравнение (2,21) (в котором путем соответствующей нумерации B-конгруэнций O_1, O_2 можно всегда достигнуть того, чтобы $r_1 \neq 0$) можно, ввиду (2,19), $(1,4_3)$, (2,5) и (2,6), переписать в виде

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{1}{r_1}\mathbf{t}_2 - \frac{p}{r_1}\mathbf{N} + (.)\,'\mathbf{N}.$$

Отсюда непосредственно следует последнее утверждение.

Замечание 6. Ясно, что на каждой из B-поверхностей (2,20) или (2,21) ортогональные B-конгруэнции $'O_1$, $'O_2$, сопряженные с ортогональными B-конгруэнциями O_1, O_2 B-поверхности (1,1), зависят еще от одного параметра.

Теорема (2,6). *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы поверхность*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{1,1}$$

была В-поверхностью из пары сопряженных В-поверхностей второго типа, следующее:

Поверхность (1,1) *является областью трубчатой поверхности без омбилических точек.*

В-конгруэнции O_1, O_2 *на этой В-поверхности* (1,1) *тогда образуются системами ее линий кривизны или их* α*-траекториями,*

$$0 < \alpha < \tfrac{1}{2}\pi.$$

Доказательство. При условии

$$\varrho_1\nu_2 - \varrho_2\nu_1 = 0 \tag{2,22}$$

из (1,16) опять вытекает

$$(\varrho_1\nu_3 - \varrho_3\nu_1)\,\omega_{13} + (\varrho_2\nu_3 - \varrho_3\nu_2)\,\omega_{23} + \nu_1\omega_1 + \nu_2\omega_2 = 0\,, \qquad (2,23)$$

где, согласно (1,5) и (1,11),

$$(\varrho_1\nu_3 - \varrho_3\nu_1)^2 + (\varrho_2\nu_3 - \varrho_3\nu_2)^2 \neq 0\,.$$

Следовательно, можно предположить, например, что

$$\varrho_1\nu_3 - \varrho_3\nu_1 \neq 0\,. \qquad (2,24)$$

Если бы $\nu_1 = 0$, то, согласно (2,24) и (2,22), было бы и $\nu_2 = 0$ в противоречии с (1,5). Поэтому

$$\nu_1 \neq 0$$

и можно положить

$$s = \frac{\varrho_3\nu_2 - \varrho_2\nu_3}{\varrho_1\nu_3 - \varrho_3\nu_1} = -\frac{\nu_2}{\nu_1}\,, \quad t = -\frac{\nu_1}{\varrho_1\nu_3 - \varrho_3\nu_1} \neq 0\,, \qquad (2,25)$$

так что соотношение (2,23) можно теперь записать так:

$$\omega_{13} = s\omega_{23} + t\omega_1 - st\omega_2\,. \qquad (2,26)$$

Внешним дифференцированием отсюда получаем

$$[\omega_{12}, \omega_{23} - t\omega_2] = 0\,. \qquad (2,27)$$

Так как мы исключили сферическую поверхность, то, согласно (2,26), будет

$$\omega_{23} - t\omega_2 \neq 0\,.$$

На поверхности (1,1) линии кривизны даны уравнением

$$\omega_{23}\omega_1 - \omega_{13}\omega_2 = (\omega_{23} - t\omega_2)(\omega_1 - s\omega_2) = 0\,. \qquad (2,28)$$

Для линий кривизны

$$s\omega_1 + \omega_2 = 0 \qquad (2,29)$$

будет, согласно (2,26)—(2,28),

$$\mathrm{d}(\mathbf{t}_1 - s\mathbf{t}_2) = t(1 + s^2)\,\omega_1\boldsymbol{N}\,,$$

так что линии кривизны (2,29) являются плоскими геодезическими на поверхности (1,1) и их кривизна в точке $\boldsymbol{r}$ будет

$$\frac{\omega_{13}\omega_1 + \omega_{23}\omega_2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = t\,.$$

Итак, кривые (2,29) являются окружностями (или их дугами) одинакового радиуса $\dfrac{1}{|t|}$. Отсюда уже следует утверждение теоремы.

Достаточность условия очевидна.

Замечание 7. Для кривых ортогональных B-конгруэнций O_1, O_2 на B-поверхности из теоремы (2,6) в каждой точке этой поверхности имеет место, если $s \neq 0$ (т. е. если они не являются линиями кривизны),

$$a = sb + t\,, \quad c = \frac{1}{s}\,b + t\,,$$

$$f_1 = sf_2\,,$$

где s, t имеют ясный геометрический смысл. Нетрудно сформулировать и обратное утверждение.

Теорема (2,7). *Любые две сопряженные B-поверхности второго типа параллельны между собой.*

Доказательство. Согласно (1,3), (2,22) и (2,25_1), будет

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \varrho_1(\mathbf{t}_1 - s\mathbf{t}_2) + \varrho_3\mathbf{N}\,,$$

откуда сразу же следует наша теорема, если принять во внимание, что $\mathbf{t}_1 - s\mathbf{t}_2$ есть касательный вектор линий кривизны (2,29) трубчатой поверхности (1,1).

Теорема (2,8). *Каждая B-поверхность*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

является W-поверхностью; на ней справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} k_1K + k_2H + 1 = 0\,,\\ k_1 = \text{const.} > 0\,, \quad k_2 = \text{const.}\,,\\ k_1 - k_2^2 \geqq 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{2,30}$$

причем в случае трубчатых B-поверхностей (и только таких) имеет место (или этого можно достигнуть) знак равенства в последнем соотношении.

Наоборот, на всякой W-поверхности, определенной соотношениями (2,30), *имеется область, являющаяся B-поверхностью.*

Доказательство следует непосредственно из теорем (2,1)—(2,4) и (2,6).

III.

Пара сопряженных B-поверхностей, образованная параллельными трубчатыми поверхностями, дает более или менее тривиальное решение нашей проблемы. Поэтому на протяжении всего третьего раздела под B-поверхностью мы будем разуметь только B-поверхность из пары сопряженных B-поверхностей первого типа. В дальнейшем выяснится, которые из последующих теорем остаются в силе и для B-поверхностей из пары сопряженных B-поверхностей второго типа; доказательства всех таких теорем для этих поверхностей весьма просты.

а)

Теорема (3,1). *Пусть*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{1,1}$$

и

$$'\mathbf{r} = '\mathbf{r}('u, 'v) \tag{1,1'}$$

две сопряженные неразвертывающиеся B-поверхности.

В уравнениях

$$k_1K + k_2K + 1 = 0\,, \tag{3,1}$$

$$'k_1'K + 'k_2'H + 1 = 0\,, \tag{3,1'}$$

выполняющихся на этих сопряженных B-поверхностях, постоянные k_1, k_2, $'k_1$, $'k_2$ связаны соотношением

$$k_1 - k_2^2 = 'k_1 - 'k_2^2\,(> 0)\,. \tag{3,2}$$

Доказательство. Если на упомянутых B-поверхностях выбрать еще сопряженные B-конгруэнции O_1, O_2 и $'O_1$, $'O_2$, то, по теореме (2,1) и в силу замечания 4, будет

$$(p^2 + q^2 + 1)K + (pr_1 + qr_2)H + r_1^2 + r_2^2 = 0\,, \tag{2,3}$$

$$('p^2 + 'q^2 + 1)'K + ('p'r_1 + 'q'r_2)'H + 'r_1^2 + 'r_2^2 = 0\,, \tag{2,3'}$$

и нетрудно убедиться в справедливости тождеств

$$r_1^2 + r_2^2 = 'r_1^2 + 'r_2^2\,,$$

$$(1 + p^2 + q^2)(r_1^2 + r_2^2) - (pr_1 + qr_2)^2 = (1 + 'p^2 + 'q^2)('r_1^2 + 'r_2^2) -$$
$$- ('p'r_1 + 'q'r_2)^2\,.$$

Теорема (3,2). *Пусть* (1,1) *и* (1,1′) — *две сопряженные неразвертывающиеся B-поверхности с соотношениями* (3,1) *и* (3,1′).

На B-поверхности (1,1) *всегда имеется область Ω, обладающая следующим свойством:*

Множество точек $\mathbf{r}^*$,

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + ('k_2 - k_2)\,\mathbf{N}\,, \tag{3,3}$$

где точка $\mathbf{r}$ пробегает область Ω, является B-поверхностью, сопряженной с областью $'\Omega = C\Omega$ B-поверхности (1,1′). *Ее гауссова кривизна K^* и средняя кривизна H^* связаны в каждой ее точке соотношением*

$$'k_1K^* + 'k_2H^* + 1 = 0\,. \tag{3,4}$$

Доказательство. На B-поверхности (1,1) существует по теореме (2,8) область Ω, для которой в каждой ее точке

$$('k_2 - k_2)^2 K - ('k_2 - k_2) H + 1 \neq 0 \, .$$

Множество точек (3,3) образует, следовательно, поверхность неимеющую особых точек.

Между скалярами K, H и K^*, H^* в области Ω имеют место соотношения

$$K = \frac{K^*}{('k_2 - k_2)^2 K^* + ('k_2 - k_2) H^* + 1} \, ,$$

$$H = \frac{H^* + 2('k_2 - k_2) K^*}{('k_2 - k_2)^2 K^* + ('k_2 - k_2) H^* + 1} \, ,$$

$$('k_2 - k_2)^2 K^* + ('k_2 - k_2) H^* + 1 \neq 0 \, .$$

Подстановка последнего в (3,1) приводит, ввиду (3,2), к соотношению (3,4).

Замечание 8. Нетрудно видеть, как нужно было бы изменить формулировку последних двух теорем в случае, если бы какая-нибудь из сопряженных B-поверхностей (1,1) и (1,1′) была развертывающейся поверхностью.

Теорема (3,3). *Пусть* (1,1) *есть B-поверхность с ортогональными B-конгруэнциями O_1, O_2, для кривых которых в каждой ее точке справедливы соотношения* (2,1) *и* (2,2).

Поверхность

$$'\mathbf{r} = \mathbf{r} + \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \{- r_2 \mathbf{t}_1 + r_1 \mathbf{t}_2 - (p r_1 + q r_2) \mathbf{N}\} \qquad (3,5)$$

является единственной B-поверхностью с постоянной отрицательной гауссовой кривизной $'K$, сопряженной с B-поверхностью (1,1) *и с ее ортогональными B-конгруэнциями O_1, O_2. Ее кривизна $'K$ дана выражением*

$$'K = - \frac{(r_1^2 + r_2^2)^2}{r_1^2 + r_2^2 + (r_1 q - r_2 p)^2} \, . \qquad (3,6)$$

Доказатеьлство. Соотношение (2,3′) можно переписать в виде

$$(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) 'K + (\varrho_1 \nu_1 + \varrho_2 \nu_2) 'H + \nu_1^2 + \nu_2^2 = 0 \, , \qquad (3,7)$$

где постоянные ϱ_1, ϱ_2 должны удовлетворять соотношениям (2,7) и (2,11). Кривизна B-поверхности (1,1′), сопряженной с B-поверхностью (1,1) и с B-конгруэнциями O_1, O_2, будет, следовательно, $'K = \text{const.} \neq 0$ в силу (2,6) тогда и только тогда, если (см. также доказательство теоремы (3,4)) будет

$$r_1 \varrho_1 + r_2 \varrho_2 = 0 \, .$$

Ввиду (2,7), будет

$$\varrho_1 = - \frac{r_2}{r_1^2 + r_2^2} \, , \quad \varrho_2 = \frac{r_1}{r_1^2 + r_2^2} \, , \qquad (3,8)$$

так что неравенству (2,11) будет, согласно (2,2), удовлетворено в любой точке B-поверхности (1,1). Из (2,20), (2,21) и (3,8) следует (3,5), а из (3,7), (3,8) и (2,6) вытекает (3,6).

Теорема (3,4). *Не существует B-поверхности, имеющей постоянную положительную гауссову кривизну.*

Доказательство следует из теоремы (2,8), если вдобавок принять во внимание, что гауссова и средняя кривизна одновременно постоянны и что гауссова кривизна не обращается в нуль только на сферической поверхности.

Теорема (3,5). *Не существует B-поверхности, которая не была бы неразвертывающейся поверхностью и имела бы постоянную среднюю кривизну.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы (3,4).

б)

В этой части будем символами O_1^*, O_2^* обозначать ортогональные конгруэнции B-поверхности (1,1), отличные от ее ортогональных B-конгруэнций O_1, O_2, а скаляры их кривых, аналогичные скалярам

$$a, b, c, f_1, f_2$$

кривых конгруэнций O_1, O_2, связанным уравнениями (2,1), обозначим через

$$a^*, b^*, c^*, f_1^*, f_2^* .$$

Теорема (4,1). *Пусть* (1,1) — *неразвертывающаяся B-поверхность, на которой, следовательно, выполняется соотношение*

$$\left.\begin{array}{c} k_1K + k_2H + 1 = 0\,, \\ k_1 = \mathrm{const.} > 0\,, \quad k_2 = \mathrm{const.}, \quad k_1 - k_2^2 > 0\,, \end{array}\right\} \qquad (3,1)$$

и на которой даны ортогональные B-конгруэнции O_1, O_2.

Тогда будет

$$p = k_2r_1 + \varepsilon r_2\sqrt{D}\,, \quad q = k_2r_2 - \varepsilon r_1\sqrt{D}\,,$$

где $\varepsilon = \pm 1$ *и*

$$D = k_1 - k_2^2 - \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} \geqq 0\,.$$

Доказательство получим сравнением соотношений (2,3) и (3,1).

Замечание 9. На неразвертывающихся (развертывающихся) B-поверхностях ортогональные B-конгруэнции зависят, следовательно, от двух (трех) параметров.

Определение (4,1). *Ортогональные B-конгруэнции O_1, O_2 B-поверхности* (1,1) *назовем специальными, если*

$$r_1q - r_2p = 0\,. \qquad (4,1)$$

Теорема (4,2). *Две сопряженные В-поверхности* (1,1) *и* (1,1′) *имеют в соответствующих точках* **r** *и* ′**r** = *C***r** *взаимно перпендикулярные нормали тогда и только тогда, если В-поверхность* (1,1′) *сопряжена со специальными В-конгруэнциями В-поверхности* (1,1).

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы В-конгруэнции O_1, O_2 *В-поверхности* (1,1) *из предыдущей теоремы были специальными, следующее:*

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{k_1 - k_2^2} .$$

Доказательство. Первое утверждение легко вытекает из ($1,4_3$), (2,6) и (4,1). Второе является следствием теоремы (4,1), так как, согласно последней,

$$r_1 q - r_2 p = -\varepsilon(r_1^2 + r_2^2)\sqrt{D} .$$

Теорема (4,3). *α-траектории* ($0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$) *В-конгруэнций* O_1, O_2 *В-поверхности* (1,1) *образуют опять В-конгруэнции* O_1^*, O_1^*, *и для их кривых в каждой точке поверхности имеет место*

$$\begin{aligned} f_1^* &= p^*a^* + q^*b^* + r_1^* , \\ f_2^* &= p^*b^* + q^*c^* + r_2^* , \end{aligned} \tag{4,2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} p^* &= p\cos\alpha + q\sin\alpha , \\ q^* &= -p\sin\alpha + q\cos\alpha ; \end{aligned}\right\} \tag{4,3}$$

$$\left.\begin{aligned} r_2^* &= r_1\cos\alpha + r_2\sin\alpha , \\ r_2^* &= -r_1\sin\alpha + r_2\cos\alpha . \end{aligned}\right\} \tag{4,4}$$

Доказательство проводится путем вычисления нормальных кривизн, геодезических кручений и геодезических кривизн кривых

$$\omega_1\cos\alpha + \omega_2\sin\alpha = 0 , \quad -\omega_1\sin\alpha + \omega_2\cos\alpha = 0 ,$$

$0 < \alpha = \mathrm{const.} < \frac{1}{2}\pi$, с использованием уравнений (2,1).

По теореме (4,1) ортогональные B-конгруэнции O_1, O_2 на данной неразвертывающейся B-поверхности определяются постоянными r_1, r_2 (удовлетворяющими последнему соотношению теоремы) или двузначно, или однозначно. Если они определяются однозначно, то являются, согласно теореме (4,2), специальными и наоборот. Если же они определяются двузначно, то назовем их на момент в теореме (4,4) комплементарными.

Теорема (4,4). *Пусть на неразвертывающейся В-поверхности* (1,1) *даны различные ортогональные В-конгруэнции* O_1, O_2 *и* O_1^*, O_2^*, *не являющиеся комплементарными; для их кривых выполняются соответственно уравнения* (2,1) *и* (4,2). *Пусть*

$$r_1^{*2} + r_2^{*2} = r_1^2 + r_2^2 . \tag{4,5}$$

Тогда B-конгруэнции O_1^*, O_2^* образованы α-траекториями $(0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi)$ B-конгруэнций O_1, O_2 или комплементарных к ним ортогональных B-конгруэнций.

Доказательство. Из (4,5) следует существование такого числа α, $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, что соотношения (4,4) удовлетворяются. Далее, для постоянных p^*, q^* из уравнений (4,2) по (4,4) и по теореме (4,1) справедливы соотношения (4,3). Отсюда и из теоремы (4,3) уже следует теорема (4,4).

Теорема (4,5). *B-поверхность (1,1) с ортогональными B-конгруэнциями O_1, O_2 имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну тогда и только тогда, если*

$$r_1 p + r_2 q = 0 . \tag{4,6}$$

Доказательство вытекает уз уравнения (2,3) и из того, что было уже сказано в доказательстве теоремы (3,4).

Теорема (4,6). *У специальных B-конгруэнций O_1, O_2 на B-поверхности (1,1) с постоянной отрицательной гауссовой кривизной геодезическая кривизна всех кривых одной и той же конгруэнции постоянна и одинакова на всех кривых, причем*

$$f_1^2 + f_2^2 = -K .$$

Доказательство нетрудно получить из (4,1), (4,6), (2,1) и (2,3).

Замечание 10. На B-поверхности с постоянной отрицательной гауссовой кривизной можно, следовательно, подобрать ортогональные B-конгруэнции O_1, O_2 так, чтобы кривые B-конгруэнции O_1 были геодезическими, а кривые ортогональной B-конгруэнции O_2 имели постоянную геодезическую кривизну $\sqrt{-K}$.

в)

В теоремах (5,1)—(5,6) будем предполагать, что поверхности (1,1) и (1,1′) являются сопряженными B-поверхностями с определенными сопряженными B-конгруэнциями O_1, O_2 и $'O_1$, $'O_2$, и исследуем некоторые соотношения, имеющие место в соответствующих точках $\boldsymbol{r}$ и $'\boldsymbol{r} = C\boldsymbol{r}$ этих двух B-поверхностей. При этом обозначим символами $\frac{1}{T}$ и $\frac{1}{'T}$ геодезическое кручение соответственно в точках $\boldsymbol{r}$ и $'\boldsymbol{r}$, производимое в направлении проекции линии, соединяющей точки $\boldsymbol{r}$, $'\boldsymbol{r}$, на касательную плоскость в точках $\boldsymbol{r}$ и $'\boldsymbol{r}$ соответственно. Очевидно,

$$\frac{1}{T} = \frac{\varrho_1\varrho_2(c - a) + (\varrho_1^2 - \varrho_2^2)\, b}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} \neq 0 ,$$

$$\frac{1}{'T} = \frac{'\varrho_1{}'\varrho_2('c - 'a) + ('\varrho_1^2 + '\varrho_2^2)\, 'b}{'\varrho_1^2 + '\varrho_2^2} \neq 0 .$$

Теорема (5,1). *В точке $'\boldsymbol{r} = C\boldsymbol{r}$, соответствующей точке $\boldsymbol{r}$ B-поверхности* (1,1), *для гауссовой кривизны и средней кривизны поверхности* (1,1′) *имеет место:*

$$\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{T} \,.\, 'K = \nu_1\nu_2(c - a) + (\nu_1^2 - \nu_2^2)\, b\,, \tag{5,1}$$

$$\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{T} \,.\, 'H = (\varrho_1\nu_2 + \varrho_2\nu_1)(a - c) + 2(-\varrho_1\nu_1 + \varrho_2\nu_2)\, b\,. \tag{5,2}$$

Доказательство. Последние формулы мы получим, если при помощи уравнений (1,15) и (1,16) вычислим еще $[\overline{\omega}_{13}, \overline{\omega}_2]$, $[\overline{\omega}_{23}, \overline{\omega}_1]$, а затем вместе с (2,9) и (2,10) подставим в соотношения

$$'K = \frac{[\overline{\omega}_{13}\overline{\omega}_{23}]}{[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2]}\,, \quad H' = \frac{[\overline{\omega}_{13}\overline{\omega}_2] - [\overline{\omega}_{23}\overline{\omega}_1]}{[\overline{\omega}_1\overline{\omega}_2]}\,.$$

Замечание 11. Гауссова, соотв., средняя кривизна B-поверхности (1,1′) в точке $'\boldsymbol{r} = C\boldsymbol{r}$ равна, следовательно, с точностью до постоянного ненулевого множителя, частному от деления геодезических кручений в точке $\boldsymbol{r}$ в двух направлениях, образующих с касательными кривых B-конгруэнций O_1, O_2 в точке $\boldsymbol{r}$ постоянные углы.

Теорема (5,2). *В соответствующих точках $\boldsymbol{r}$ и $'\boldsymbol{r} = C\boldsymbol{r}$ B-поверхностей* (1,1) *и* (1,1′) *справедливо равенство*

$$\frac{1}{T^2}\,('H_2 - 4'K) = \left(\frac{\varrho_1\nu_2 - \varrho_2\nu_1}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}\right)^2 (H^2 - 4K)\,. \tag{5,3}$$

Доказательство проводится вычислением из формул (5,1) и (5,2).

Теорема (5,3). *В точках $\boldsymbol{r}$ и $'\boldsymbol{r} = C\boldsymbol{r}$ сопряженных B-поверхностей* (1,1) *и* (1,1′) *имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned}\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{T} \,.\, 'a = {} & (\varrho_1\lambda_1 + \varrho_2\lambda_2 + \varrho_3\lambda_3)(\varrho_1\mu_1 + \varrho_2\mu_2 + \varrho_3\mu_3)\, K - \\ & - \lambda_3(\varrho_1\mu_1 + \varrho_2\mu_2 + \varrho_3\mu_3)\, H + \\ & + \varrho_1\nu_2 a + (-\varrho_1\nu_1 + \varrho_2\nu_2)\, b - \varrho_2\nu_1 c + \lambda_3\mu_3\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{T} \,.\, 'b = {} & -(\varrho_1\lambda_1 + \varrho_2\lambda_2 + \varrho_3\lambda_3)^2 K + \lambda_3(\varrho_1\lambda_1 + \varrho_2\lambda_2 + \varrho_3\lambda_3)\, H - \lambda_3^2 = \\ = {} & (\varrho_1\mu_1 + \varrho_2\mu_2 + \varrho_3\mu_3)^2 K - \mu_3(\varrho_1\mu_1 + \varrho_2\mu_2 + \varrho_3\mu_3)\, H + \mu_3^2\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{T} \,.\, 'c = {} & -(\varrho_1\lambda_1 + \varrho_2\lambda_2 + \varrho_3\lambda_3)(\varrho_1\mu_1 + \varrho_2\mu_2 + \varrho_3\mu_3)\, K + \\ & + \mu_3(\varrho_1\lambda_1 + \varrho_2\lambda_2 + \varrho_3\lambda_3)\, H + \\ & + \varrho_1\nu_2 a + (-\varrho_1\nu_1 + \varrho_2\nu_2)\, b - \varrho_2\nu_1 c - \lambda_3\mu_3\,.\end{aligned}$$

Доказательство. Для получения нормальной кривизны и геодезического кручения в точке $'\boldsymbol{r} = C\boldsymbol{r}$ кривых B-конгруэнций $'O_1$, $'O_2$, нужно в направлениях $\overline{\omega}_1 = 0$ и $\overline{\omega}_2 = 0$, для которых справедливы уравнения (1,16), вычислить скаляры

$$\frac{\overline{\omega}_1\overline{\omega}_{13} + \overline{\omega}_2\overline{\omega}_{23}}{\overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_2^2}, \quad \frac{\overline{\omega}_1\overline{\omega}_{23} - \overline{\omega}_2\overline{\omega}_{13}}{\overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_2^2};$$

$\overline{\omega}_{13}$ и $\overline{\omega}_{23}$ были уже определены в (1,15). Используя уравнения (2,5) и (2,6) и убедившись в том, что соотношение (2,3) может быть записано также в виде

$$\{(\varrho_1\lambda_1 + \varrho_2\lambda_2 + \varrho_3\lambda_3)^2 + (\varrho_1\mu_1 + \varrho_2\mu_2 + \varrho_3\mu_3)^2\} K -$$
$$- \{\lambda_3(\varrho_1\lambda_1 + \varrho_2\lambda_2 + \varrho_3\lambda_3) + \mu_3(\varrho_1\mu_1 + \varrho_2\mu_2 + \varrho_3\mu_3)\} H + \lambda_3^2 + \mu_3^2 = 0,$$

получим как раз формулы, фигурирующие в теореме.

Теорема (5,4). *В соответствующих точках* $\mathbf{r}$ *и* $'\mathbf{r} = C\mathbf{r}$ *сопряженных* B*-поверхностей* (1,1) *и* (1,1′) *справедливы соотношения*

$$\frac{1}{T} \cdot \frac{1}{'T} = \frac{(\varrho_1\nu_2 - \varrho_2\nu_1)^2}{(\varrho_1^2 + \varrho_2^2)('\varrho_1^2 + '\varrho_2^2)};$$

$$\frac{1}{T} \cdot \{-'\varrho_1'\nu_2'a + ('\varrho_1'\nu_1 - '\varrho_2'\nu_2)'b + '\varrho_2'\nu_1'c\} =$$
$$= \frac{\varrho_1\nu_2 - \varrho_2\nu_1}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} \cdot \{-\varrho_1\nu_2 a + (\varrho_1\nu_1 - \varrho_2\nu_2) b + \varrho_2\nu_1 c\},$$

$$\frac{1}{T} \cdot \{-'\varrho_2'\nu_1'a + ('\varrho_1'\nu_1 - '\varrho_2'\nu_2)'b + '\varrho_1'\nu_2'c\} =$$
$$= \frac{\varrho_2\nu_1 - \varrho_1\nu_2}{\varrho_1^2 + \varrho_2^2} \cdot \{-\varrho_2\nu_1 a + (\varrho_1\nu_1 - \varrho_2\nu_2) b + \varrho_1\nu_2 c\}.$$

Доказательство. Соотношения можно проверить вычислением при помощи формул из теоремы (5,3).

Теорема (5,5). *Пусть* (1,1) *— развертывающаяся* B*-поверхность с ортогональными* B*-конгруэнциями* O_1, O_1, *с которыми сопряжена неразвертывающаяся* B*-поверхность* (1,1′).

Сопряженная B*-поверхность* (1,1′) *имеет в точке* $'\mathbf{r} = C\mathbf{r}$, *соответствующей точке* $\mathbf{r}$ B*-поверхности* (1,1), *следующие главные кривизны* $\frac{1}{'R_1}$ *и* $\frac{1}{'R_2}$ *:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{T} \cdot \frac{1}{'R_1} &= \varrho_2\nu_1 a + (-\varrho_1\nu_1 + \varrho_2\nu_2) b - \varrho_1\nu_2 c, \\ \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{T} \cdot \frac{1}{'R_2} &= \varrho_1\nu_2 a + (-\varrho_1\nu_1 + \varrho_2\nu_2) b - \varrho_2\nu_1 c. \end{aligned}\right\} \quad (5,4)$$

Доказательство. Главные кривизны B-поверхности (1,1′) в точке $'\mathbf{r}$ выполняют уравнение

$$\frac{1}{'R^2} - \frac{'H}{'R} + 'K = 0,$$

из которого при $K = 0$ вычислим, использовав соотношения (5,2) и (5,3), формулы (5,4).

Теорема (5,6). *В соответствующих точках* $\boldsymbol{r}$ *и* $'\boldsymbol{r} = C\boldsymbol{r}$ *B-поверхностей* (1,1) *и* (1,1') *имеет место*

$$('f_1'b - 'f_2'a) : ('f_1'c - 'f_2'b) : 'K = \{\lambda_1(f_1b - f_2a) + \lambda_2(f_1c - f_2b) + \lambda_3K\} : \\ : \{\mu_1(f_1b - f_2a) + \mu_2(f_1c - f_2b) + \mu_3K\} : \\ : \{\nu_1(f_1b - f_2a) + \nu_2(f_1c - f_2b) + \nu_3K\} .$$

Доказательство. Эти соотношения мы получим, вычислив по формулам (1,15), (1,12) и (1,12'), отношения

$$[\overline{\omega}_{12}\overline{\omega}_{13}] : [\overline{\omega}_{12}\overline{\omega}_{23}] : [\overline{\omega}_{13}\overline{\omega}_{23}] .$$

Замечание 12. Ясно, что соотношения из теоремы (5,6) справедливы уже в том случае, если вращение, переводящее один из реперов R, $'R$ в соответствующих точках $\boldsymbol{r}$ и $'\boldsymbol{r} = C\boldsymbol{r}$ поверхностей (1,1) и (1,1') в другой, не зависит от точки $\boldsymbol{r}$, т. е. если выполнены только соотношения (1,15). Легко проверить, что в таком случае обе поверхности (1,1) и (1,1') и, кроме того, одну из конгруэнций O_i, $'O_i$ ($i = 1, 2$) можно выбрать произвольно.

г)

Теперь обратимся к исследованию специальных пар сопряженных B-поверхностей, а именно таких, из которых только одна является развертывающейся поверхностью. Мы увидим, что на неразвертывающейся B-поверхности из такой пары важную роль играют линии кривизны.

Теорема (6,1). *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы на неразвертывающейся B-поверхности* (1,1) *линии кривизны образовали ортогональные B-конгруэнции, следующее:*

Существует развертывающаяся B-поверхность, сопряженная с B-поверхностью (1,1).

Доказательство. Пусть это условие выполнено. Пусть, далее, O_1, O_2 являются теми ортогональными B-конгруэнциями на B-поверхности (1,1), с которыми сопряжена упомянутая развертывающаяся B-поверхность (1,1'). По теореме (2,3) тогда будет

$$r_1r_2(c - a) + (r_1^2 - r_2^2)\, b = 0 ; \tag{2,16}$$

согласно (2,7), это соотношение не является тождеством.

Итак, линии кривизны поверхности (1,1) даны уравнением

$$(r_1\omega_1 + r_2\omega_2)(- r_2\omega_1 + r_1\omega_2) = 0 , \tag{6,1}$$

так что, согласно (6,1), они сами образуют B-конгруэнции O_1, O_2 (для которых, конечно, $\omega_1 = 0$, соотв. $\omega_2 = 0$), или являются их α-траекториями, т. е. также B-конгруэнциями.

Пусть, во-вторых, на неразвертывающейся B-поверхности (1,1) линии кривизны образуют ортогональные B-конгруэнции O_1, O_2. По второй формуле из теоремы (5,3) и согласно (1,7), на сопряженной B-поверхности (1,1') тогда будет (см. также замечание 4)

$$\varrho_1^{2\prime} K + \varrho_1 \nu_1' H + \nu_1^2 = \varrho_2^{2\prime} K + \varrho_2 \nu_2' H + \nu_2^2 = 0 \, .$$

Итак, если бы (1,1') была неразвертывающейся B-поверхностью, то, вследствие (1,5), она была бы трубчатой поверхностью, и, значит, не могла бы быть одной из пары B-поверхностей первого типа.

Теорема (6,2). *Пусть* (1,1) *и* (1,1') — *две сопряженные B-поверхности, из которых* (1,1') *есть развертывающаяся поверхность.*

B-поверхность (1,1') *сопряжена только с теми ортогональными B-конгруэнциями B-поверхности* (1,1), *которые образованы на ней линиями кривизны или их α-траекториями*, $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$.

Доказательство непосредственно вытекает из теорем (2,3) и (6,1).

Теорема (6,3). *Пусть* (1,1) *есть неразвертывающаяся B-поверхность, к которой существует развертывающаяся сопряженная B-поверхность.*

Тогда для линий кривизны B-поверхности (1,1), *рассматриваемых в качестве ортогональных B-конгруэнций* O_1, O_2 (*и при подходящей нумерации их*), *в каждой точке поверхности*

$$f_1 = pa + r_1 \, , \quad f_2 = qc \, ,$$
$$p, q = \text{const.} \, , \quad r_1 = \text{const.} \neq 0 \, .$$

Доказательство легко вытекает из соотношений (2,1) и (2,16).

Теорема (6,4). *Пусть* (1,1) — *неразвертывающаяся B-поверхность с такими ортогональными B-конгруэнциями* O_1, O_2 (для их кривых имеют, следовательно, место соотношения (2,1) в каждой точке поверхности), *что сопряженная с ними B-поверхность является развертывающейся поверхностью.*

Главные кривизны B-поверхности (1,1) *будут*

$$\frac{1}{R_1} = \frac{r_1 qa + (r_2 q - r_1 p)\, b - r_2 pc}{r_1 q - r_2 p} \, ,$$
$$\frac{1}{R_2} = \frac{r_2 pa + (r_2 q - r_1 p)\, b - r_1 qc}{r_2 p - r_1 q} \, ,$$

если B-конгруэнции O_1, O_2 *не являются специальными*; *если же они — специальные, то* (подходящей нумерацией их всегда можно достигнуть того, что $r_1 \neq 0$)

$$\frac{1}{R_1} = a + \frac{r_2}{r_1} b \, , \quad \frac{1}{R_2} = c - \frac{r_2}{r_1} b \, .$$

Доказательство. Используя формулы (5,4) и соотношения из теоремы (5,4), получим

$$\frac{1}{'R_1} = \frac{-'\varrho_2'\nu_1'a + ('\varrho_1'\nu_1 - '\varrho_2'\nu_2)\,'b + '\varrho_1'\nu_2'c}{'\varrho_1'\nu_2 - '\varrho_2'\nu_1}$$

и аналогичное выражение для $\frac{1}{'R_2}$. Подставив значения $'\varrho_1$, $'\varrho_2$, вытекающие дла них, согласно замечанию 4, из (2,5) и (2,6), и приняв во внимание, что по теореме (2,3), согласно соотношениям (2,6) и замечанию 4, имеет место

$$'\nu_1'\nu_2('a - 'c) + (-\nu_1'^2 + '\nu_2^2)\,'b = 0\,,$$

получим — опуская штрихи — как раз в теореме приведенные соотношения.

В теоремах (6,5), (6,7) и (6,8) символом Π обозначим псевдосферу, меридиональной кривой которой является дуга эволюты цепной линии без ее особой точки. Далее, для облегчения выражения мыслей введем следующие два условия: поверхностью вращения мы будем более обще считать и область поверхности вращения, а поверхностью, параллельной поверхности вращения, только такую область этой параллельной поверхности, которая не имеет особых точек.

Теорема (6,5). *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы неразвертывающаяся поверхность* (1,1) *была В-поверхностью вращения, сопряженной с развертывающейся В-поверхностью* (1,1), *следующее*:

Поверхность (1,1) *есть псевдосфера* П *или поверхность, ей параллельная.*

Доказательство. Пусть неразвертывающаяся B-поверхность вращения (1,1) сопряжена с развертывающейся B-поверхностью (1,1'). По теореме (6,3) тогда для линий кривизны одной системы на B-поверхности (1,1) (при надлежащей нумерации конгруэнций линий кривизны как ортогональных B-конгруэнций O_1, O_2) $r_1 \neq 0$ и

$$qc = 0\,. \tag{6,2}$$

Действительно, при $pa + r_1 = 0$ было бы $a = \text{const.}$, и из уравнения

$$k_1ac + k_2(a + c) + 1 = 0\,,$$

$$k_1 = \text{const.} > 0\,, \quad k_2 = \text{const.}\,, \quad k_1 - k_2^2 > 0\,,$$

имеющего место на B-поверхности (1,1), вытекало бы, ввиду $k_1 - k_2^2 > 0$, и $c = \text{const.}$, что невозможно. Далее, не может быть $c = 0$, ибо (1,1) есть неразвертывающаяся поверхность. Итак, согласно (6,2),

$$q = 0\,. \tag{6,3}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathrm{d}\left(\boldsymbol{r} + \frac{1}{r_1}\mathbf{t}_2 - \frac{p}{r_1}\mathbf{N}\right) = \omega_2\boldsymbol{W}\,,$$

где $\boldsymbol{W}$ — некоторый вектор, и $\omega_2 = 0$ представляет собой, конечно, уравнение параллелей B-поверхности (1,1). Точка

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{r_1}\boldsymbol{t}_2 - \frac{p}{r_1}\boldsymbol{N}$$

лежит, следовательно, свегда на оси поверхности (1,1). Множество точек

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} - \frac{p}{r_1}\boldsymbol{N} \tag{6,4}$$

образует поверхность без особых точек; в самом деле, если бы $p^2K + pr_1H + r_1^2 = 0$, то, ввиду (2,3), $r_2 = 0$ [см. теорему (6,3)] и ввиду (6,3), было бы $K = 0$, что противоречит предположению, что поверхность (1,1) не имеет параболических точек (см. стр. 195).

Точка $\boldsymbol{R}$ лежит на касательной плоскости точки $\boldsymbol{r}^*$ поверхности (6,4), причем расстояние между точками $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r}^*$ равно $\frac{1}{|r_1|}$. Отсюда и из известных свойств эволюты цепной линии следует, что поверхность (6,4) есть псевдосфера П.

Обратное утверждение так же легко следует из свойств меридиональной кривой псевдосферы П.

Теорема (6,6). *Пусть O_1, O_2 — ортогональные B-конгруэнции на развертывающейся B-поверхности* (1,1); *пусть сопряженная с ними B-поверхность — неразвертывающаяся.*

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы B-конгруэнции O_1, O_2 были специальными конгруэнциями, следующее:

Кривые B-конгруэнции O_1 пересекают параллели B-поверхности (1,1) *под одинаковыми углами (для двух различных параллелей, вообще говоря, различными).*

Доказательство. Пусть O_1, O_2 — B-конгруэнции на развертывающейся B-поверхности (1,1) такие, что сопряженная к ним B-поверхность есть неразвертывающаяся поверхность. Для их кривых справедливы соотношения (2,1). Параллели B-поверхности (1,1) даны уравнением $b\omega_1 - a\omega_2 = 0$, где $a, b \neq \text{const.}$, и кривые $\omega_2 = 0$ конгруэнции O_1 (конечно и O_2) пересекают их под одинаковыми углами тогда и только тогда, если

$$[\mathrm{d}a, b\omega_1 - a\omega_2] = 0\ .$$

Ввиду $(2,15_1)$, это соотношение выполняется тогда и только тогда, если $af_1 + bf_2 = 0$, откуда при помощи (2,1) получим

$$a(pH + r_1) + b(qH + r_2) = 0\ .$$

Это уравнение обязательно должно быть тождеством, что возможно только при

$$r_1q - r_2p = 0\ . \tag{4,1}$$

Так как

$$H = -\frac{r_1^2 + r_2^2}{pr_1 + qr_2},$$

наша теорема доказана.

Теорема (6,7). *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы неразвертывающаяся поверхность* (1,1) *была B-поверхностью, сопряженной со специальными B-конгруэнциями развертывающейся B-поверхности, следующее:*

Поверхность (1,1) *есть псевдосфера* П *или поверхность, ей параллельная.*

Доказательство. Пусть поверхность (1,1') есть развертывающаяся B-поверхность со специальными B-конгруэнциями $'O_1$, $'O_2$, с которыми сопряжена поверхность (1,1). По теореме (6,6) кривые B-конгруэнций $'O_1$, $'O_2$ пересекают параллели поверхности (1,1') под одинаковыми углами, в силу чего (1,1) является поверхностью вращения. По теореме (6,5) это псевдосфера П или параллельная ей поверхность.

Обратное утверждение легко вытекает из известных свойств псевдосферы П.

Теорема (6,8). *Линии кривизны образуют специальные B-конгруэнции именно только на псевдосфере* П *или на поверхности, ей параллельной.*

Доказательство следует непосредственно из предыдущих теорем.

ЛИТЕРАТУРА

E. Cartan: Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris 1945.

V. Hlavatý: Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung, Groningen-Batavia 1939.

Résumé

LES SURFACES ANALOGIQUES AUX COURBES DE BERTRAND

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

(Reçu le 27 septembre 1954.)

Donnons-nous dans l'espace euclidien à trois dimensions deux surfaces réelles sans les points singuliers et écrivons leurs équations symboliquement

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{1,1}$$

et

$$'\boldsymbol{r} = '\boldsymbol{r}('u, 'v)\,. \tag{1,1'}$$

Supposons encore que sur la surface (1,1) et aussi sur la surface (1,1') sont données les congruences orthogonales de courbes et désignons ces congruences sur la surface (1,1) par O_1, O_2 et sur la surface (1,1') par $'O_1$, $'O_2$. Soient $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$ les vecteurs unitaires portés par les tangentes des courbes des congruences O_1, O_2 dans le point $\boldsymbol{r}$ de la surface (1,1). Désignons par $\boldsymbol{N}$ le vecteur unitaire normal à la surface (1,1) dans le point $\boldsymbol{r}$. Soient encore $'\mathbf{t}_1$, $'\mathbf{t}_2$ et $'\boldsymbol{N}$ les vecteurs unitaires qui sont déterminés analogiquement dans le point $'\boldsymbol{r}$ de la surface (1,1').

Il s'agit de la résolution du problème suivant:

Sous quelles conditions existe entre les surfaces (1,1) et (1,1') une correspondance ponctuelle biunivoque C avec ces deux propriétés:

1. Les normales des surfaces (1,1) et (1,1') dans les points correspondants $\boldsymbol{r}$ et $'\boldsymbol{r} = C\boldsymbol{r}$ ne sont pas dans le même plan.

2. Pour chaque couple des points correspondants, on a les relations (1,3) et (1,4), dans lesquelles ϱ_i, λ_i, μ_i, ν_i $(i = 1, 2, 3)$ sont les constantes et la matrice (1,6) est orthogonale.

L'analogie avec les courbes de Bertrand est claire.

Nous appellerons chaque surface d'un couple de surfaces (1,1) et (1,1'), qui forme une solution de notre problème, une surface B. Dans ce cas, nous convenons encore d'appeler les congruences de courbes O_1, O_2 et $'O_1$, $'O_2$ les congruences B et la surface (1,1') la surface associée à la surface (1,1).

Désignons par f_1 la courbure géodésique, par a la courbure normale et par b la torsion géodésique d'une courbe de la congruence O_1 et les scalaires analogiques pour une courbe de la congruence O_2 soient f_2, c, $-b$.

Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface (1,1) — du moins dans certaine région — soit une surface B avec les congruences B formées par les congruences O_1, O_2, est:

Dans chaque point de la surface (1,1), on a les relations (2,1); p, q, r_1, r_2 sont les constantes, $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$.

Les congruences orthogonales de courbes, parmi les scalaires desquelles on a les relations (2,1), existent — du moins dans certaine région — sur chaque surface de Weingarten, qui est définie par la rélation (2,3), et seulement sur ces surfaces.

Il est remarquable, que la relation (2,3) est analogique à la relation, par laquelle sont liées la courbure et la torsion d'une courbe de Bertrand.

Dans le travail présent, on étude encore les propriétés diverses des surfaces B. Par exemple, si une surface B est développable, elle est nécessairement un cylindre de révolution. Et à une surface B (1,1) existe une surface B associée développable alors et alors seulement, si les lignes de courbure de la surface (1,1) forment les congruences B.