Czechoslovak Mathematical Journal

Miloslav Jiřina

# Условные вероятности на $\sigma$-алгебрах со счетным базисом

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 4 (1954), No. 4, 372–380

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100124

Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79) 1954

# УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ НА $\sigma$-АЛГЕБРАХ СО СЧЕТНЫМ БАЗИСОМ

МИЛОСЛАВ ИРЖИНА (Miloslav Jiřina), Прага.

(Поступило в редакцию 20. 4. 1954.)

В статье выведены некоторые достаточные условия для того, чтобы условная вероятность обладала всеми свойствами вполне аддитивной меры.

**1. Обозначения.** Во всей статье $X$ обозначает данное множество и слово класс — некоторый класс его подмножеств. Класс $\mathbf{A}$ назовем *структурой*, если $0 \in \mathbf{A}$ $X \in \mathbf{A}$ и если $\mathbf{A}$ содержит соединение и пересечение любых двух своих элементов. $\mathbf{A}$ назовем *полуалгеброй*, если $0 \in \mathbf{A}$, $X \in \mathbf{A}$, если $\mathbf{A}$ содержит пересечение любых двух своих элементов и если дополнение любого множества из $\mathbf{A}$ является конечным соединением непересекающихся множеств из $\mathbf{A}$. *Алгебра* и *$\sigma$-алгебра* определены обыкновенным способом. Через $s(\mathbf{A})$ (или $s_0(\mathbf{A})$) обозначим класс всех конечных соединений (или всех конечных непересекающихся соединений) множеств из $\mathbf{A}$. Если $\mathbf{B}$ тоже класс, то положим $d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{A - B : A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}$, $d_0(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \{A - B : A \supset B,\ A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}$, и далее $c(\mathbf{A}) = \{A' : A \in \mathbf{A}\}$ ($A'$ — дополнение относительно $X$). Через $a(\mathbf{A})$ (или $\sigma(\mathbf{A})$) обозначим наименьшую алгебру (или $\sigma$-алгебру), содержащую класс $\mathbf{A}$. Если $A$ — фиксированное подмножество $X$, то положим $\mathbf{A} \cap A = \{B \cap A : B \in \mathbf{A}\}$. Функцию, которая переменной $a$ ставит в соответствие значение $f(a)$, будем кроме обыкновенного $f$ обозначать тоже через $f(.)$ и аналогично $f(., .)$ для двух переменных.

Если $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — классы, $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ и $\mu$ — некоторая функция множества, определенная на $\mathbf{B}$, то скажем, что класс $\mathbf{C}$ *аппроксимирует* $\mathbf{A}$ *относительно* $\mu$ и $\mathbf{B}$ *снизу* (*сверху*), если для любого $A \in \mathbf{A}$ и $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathbf{B}$ и $C \in \mathbf{C}$ так, что $B \subset C \subset A$ и $\mu(A) \leq \mu(B) + \varepsilon$ (так, что $B \supset C \supset A$ и $\mu(A) \geq \mu(B) - \varepsilon$). Далее скажем, что пара классов $(\mathbf{C}, \mathbf{G})$ *аппроксимирует* $\mathbf{A}$ *относительно* $\mu$ и $\mathbf{B}$, если $\mathbf{C}$ аппроксимирует $\mathbf{A}$ снизу и если $\mathbf{G}$ аппроксимирует $\mathbf{A}$ сверху относительно $\mu$ и $\mathbf{B}$. Для классов $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ будем писать $\mathbf{C} \prec \mathbf{G}$, если для произвольного $C \in \mathbf{C}$ всякое счетное покрытие множества $C$ множествами из $\mathbf{G}$ содержит конечное покрытие.

В параграфе 3. восполуъземся следующей леммой (см. [11] стр. 190).

**Лемма.** *Пусть* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}_0$ — *алгебры и* $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}_0$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ — *классы такие, что* $\mathbf{C} \precsim \mathbf{G}$ *и* $\mu$ — *конечная, неотрицательная и аддитивная функция, определенная на* $\mathbf{A}_0$. *Пусть* $(\mathbf{C}, \mathbf{G})$ *аппроксимирует* $\mathbf{A}$ *относительно* $\mu$ *и* $\mathbf{A}_0$; *тогда существует однозначное, неотрицательное и вполне аддитивное расширение функции* $\mu$ *на* $\sigma(\mathbf{A})$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mu$ вполне аддитивна на $\mathbf{A}$. Пусть $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ непересекающиеся множества из $\mathbf{A}$ такие, что $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{A}$. Для $\varepsilon > 0$ существуют такие $B \in \mathbf{A}_0, B_n \in \mathbf{A}_0, C \in \mathbf{C}$ и $G_n \in \mathbf{G}$, что $B \subset C \subset A$, $A_n \subset G_n \subset B_n$, $\mu(A) \leq \mu(B) + \frac{1}{2}\varepsilon$, $\mu(A_n) \geq \mu(B_n) - \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}$; Из $C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ следует, что существует $k$ такое, что $C \subset \bigcup_{n=1}^{k} G_n$ и, следовательно, $B \subset \bigcup_{n=1}^{k} B_n$. Тогда $\mu(A) \leq \mu(B) + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \sum_{n=1}^{k}\mu(B_n) + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) + \varepsilon$, т. е. $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. Обратное неравенство очевидно.

**2. Условные вероятности.** В этом и следующих параграфах предположим, что для данного множества $X$ определено пространство вероятностей $\{X, \mathbf{S}, \pi\}$, т. е. некоторая $\sigma$-алгебра $\mathbf{S}$ подмножеств $X$ и вероятность $\pi$ на $\mathbf{S}$ (т. е. вполне аддитивная, неотрицательная функция на $\mathbf{S}$ такая, что $\pi(X) = 1$).

**Определение.** *Пусть* $\mathbf{A}$ — *алгебра,* $\mathbf{B}$ — $\sigma$-*алгебра,* $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$. *Всякую функцию* $\pi(\,.\,, \,.\, \mid \mathbf{A}, \mathbf{B})$, *определенную на* $\mathbf{A} \times X$ *назовем условной вероятностью (у. в.), если для любого* $A \in \mathbf{A}$ *функция* $\pi(A, \,.\, \mid \mathbf{A}, \mathbf{B})$ $\mathbf{B}$ — *измерима, и если для любых* $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$ *имеет место*

$$\pi(A \cap B) = \int_B \pi(A, x \mid \mathbf{A}, \mathbf{B})\,\mathrm{d}\pi(x)\,.$$

Это определение условной вероятности (относительно $\sigma$-алгебры) равносильно определению Колмогорова ([8] стр. 41—44), но оно для формулировки теорем этой статьи более удобно. Насколько автору известно, это определение впервые приведено в [5] стр. 388 и подробно рассматривается в [3], § 7.

Для фиксированных $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ будем иногда писать $\pi(\,.\,, \,.\,)$ вместо $\pi(\,.\,, \,.\mid \mathbf{A}, \mathbf{B})$. Известно, что при сделанных нами предположениях функции $\pi(\,.\,, \,.\, \mid \mathbf{A}, \mathbf{B})$ всегда существуют и что имеют место следующие отношения (см. напр. [3] — стр. 25).

$$\pi(0, x) = 0 \quad \text{для почти всех } x, \tag{1}$$

$$\pi(X, x) = 1 \quad \text{для почти всех } x. \tag{2}$$

Для фиксированных $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{A}$ таких, что $A \cap B = 0$,

$$\pi(A \cup B, x) = \pi(A, x) + \pi(B, x) \quad \text{для почти всех } x\,. \tag{3}$$

Для фиксированных $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{A}$ таких, что $A \subset B$,

$$\pi(A, x) \leq \pi(B, x) \quad \text{для почти всех } x\,. \tag{4}$$

Условную вероятность $\pi(.,.\mid \mathbf{A}, \mathbf{B})$ назовем *регулярной*, если $\mathbf{A}$ — $\sigma$-алгебра, а $\pi(., x \mid \mathbf{A}, \mathbf{B})$ является для всякого $x \in X$ вероятностью на $\mathbf{A}$.

В следующих параграфах выведены некоторые достаточные условия для существования регулярной условной вероятности (*р. у. в.*).

### 3. Регулярные условные вероятности.

**Теорема I.** *Пусть* $\mathbf{A}$ — *счетная полуалгебра*, $\mathbf{B}$ — *$\sigma$-алгебра*, $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$ *и пусть пара классов* $(\mathbf{C}, \mathbf{G})$ *таких, что* $\mathbf{C} \prec \mathbf{G}$, *аппроксимирует* $\mathbf{A}$ *относительно* $\pi$ *и* $\mathbf{S}$; *тогда существует р. у. в.* $\pi(.,.\mid \sigma(\mathbf{A}), \mathbf{B})$.

Доказательство. Прежде всего видим, что $s(\mathbf{C}) \prec s(\mathbf{G})$ и что $(s(\mathbf{C}), s(\mathbf{G}))$ аппроксимирует $s_0(\mathbf{A}) = a(\mathbf{A})$ относительно $\pi$ и $\mathbf{S}$. Из этого следует, (так как $\sigma(a(\mathbf{A})) = \sigma(\mathbf{A})$), что можем предполагать, что $\mathbf{A}$ — счетная алгебра.

Пусть $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$. Для всяких $k$ и $n$ существуют такие $A_{k,n}^{(1)} \in \mathbf{S}$, $A_{k,n}^{(2)} \in \mathbf{S}$, $C_{k,n} \in \mathbf{C}$, $G_{k,n} \in \mathbf{G}$, что $A_{k,n}^{(1)} \subset C_{k,n} \subset A_n \subset G_{k,n} \subset A_{k,n}^{(2)}$ и

$$\pi(A_{k,n}^{(2)}) - \frac{1}{k} \leq \pi(A_n) \leq \pi(A_{k,n}^{(1)}) + \frac{1}{k}\,. \tag{5}$$

Положим $\mathbf{A}_0 = a(\mathbf{A} \cup \{A_{k,n}^{(1)}\} \cup \{A_{k,n}^{(2)}\})$ и $s_n = \sup\limits_k \pi(A_{k,n}^{(1)})$, $i_n = \inf\limits_k \pi(A_{k,n}^{(2)})$. Из (5) следует, что $s_n = \pi(A_n) = i_n$. Теперь фиксируем некоторую условную вероятность $\pi_0(.,.\mid \mathbf{A}_0, \mathbf{B})$, которую будем далее обозначать через $\pi_0(.,.)$, и положим $s_n(x) = \sup\limits_k \pi_0(A_{k,n}^{(1)}, x)$, $i_n(x) = \inf\limits_k \pi_0(A_{k,n}^{(2)}, x)$. Функции $i_n(.)$, $s_n(.)$ $\mathbf{B}$-измеримы, и из (4) вытекает, что

$$\pi_0(A_{k,n}^{(1)}, x) \leq s_n(x) \leq \pi_0(A_n, x) \leq i_n(x) \leq \pi_0(A_{k,n}^{(2)}, x) \tag{6}$$

для всех $k$, $n$ и почти всех $x \in X$. Интегрируя, получаем

$$\pi(A_{k,n}^{(1)}) \leq \int\limits_X s_n(x)\, \mathrm{d}\pi(x) \leq \pi(A_n) \leq \int\limits_X i_n(x)\, \mathrm{d}\pi(x) \leq \pi(A_{k,n}^{(2)})$$

и из этого

$$s_n \leq \int\limits_X s_n(x)\, \mathrm{d}\pi(x) \leq \int\limits_X i_n(x)\, \mathrm{d}\pi(x) \leq i_n\,.$$

При помощи соотношения $i_n = s_n$ и (6) отсюда вытекает

$$\pi_0(A_n, x) = s_n(x) = i_n(x) \tag{7}$$

для всех $n$ и почти всех $x \in X$. Ввиду того, что алгебра $\mathbf{A}_0$ счетна и ввиду (1)—(4) и (7), существуют такие $\pi$-нулевые множества $X_i \in \mathbf{B}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) что:

а) $\pi_0(0, x) = 0$ и $\pi_0(X, x) = 1$ для всех $x \operatorname{non} \in X_1$,

б) $0 \leq \pi(A, x) \leq 1$ для всех $A \in \mathbf{A}_0$ и всех $x \operatorname{non} \in X_2$,

в) $\pi_0(A \cup B, x) = \pi_0(A, x) + \pi_0(B, x)$ для всех $A$, $B \in \mathbf{A}_0$ таких, что $A \cap B = 0$ и всех $x \operatorname{non} \in X_3$,

г) $\pi_0(A_n, x) = s_n(x) = i_n(x)$ для всех $n$ и всех $x \operatorname{non} \in X_4$.

Теперь положим $X_0 = \bigcup_{i=1}^{4} X_4$ и определим для $A \in \mathbf{A}_0$

$$\mu(A, x) = \pi_0(A, x)\,, \quad \text{если } x \operatorname{non} \in X_0\,,$$
$$\mu(A, x) = \pi(A)\,, \quad \text{если } x \in X_0\,.$$

Так как $\mu(., x)$ удовлетворяет для всякого $x \in X$ условиям леммы (§ 1), то для всякого $x \in X$ существует вполне аддитивная мера $\pi(., x)$ на $\sigma(\mathbf{A})$ такая, что $\pi(A, x) = \mu(A, x)$ для всех $A \in \mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{A}_1$ — класс всех $A \in \sigma(\mathbf{A})$, для которых $\pi(A, .)$ $\mathbf{B}$ — измерима и для которых равенство

$$\pi(A \cap B) = \int_B \pi(A, x)\, \mathrm{d}\pi(x)$$

имеет место для всех $B \in \mathbf{B}$.

Очевидно, что $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}_1$ и что $\mathbf{A}_1$ — монотонный класс (в смысле определения [6], § 6). В силу [6], теорема 6B, из этого следует, что $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbf{A}_1$, т. е. $\sigma(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_1$. Но тогда $\pi(., . \mid \sigma(\mathbf{A}), \mathbf{B}) = \pi(., .)$ есть регулярная условная вероятность.

**Теорема II.** *Пусть* $\mathbf{A}$ — *счетная структура*, $\mathbf{B}$ — *$\sigma$-алгебра*, $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$, *и пусть пара классов* $(\mathbf{C}, \mathbf{G})$ *таких, что* $d(\mathbf{C}, \mathbf{G}) \prec d_0(\mathbf{G}, \mathbf{C})$, *аппроксимирует* $\mathbf{A}$ *относительно* $\pi$ *и* $\mathbf{S}$; *тогда существует р. у. в.* $\pi(., . \mid \sigma(\mathbf{A}), \mathbf{B})$.

Доказательство. Если положить $\mathbf{A}_1 = d_0(\mathbf{A}, \mathbf{A})$, то $\mathbf{A}_1$ — счетная полуалгебра, и выполняются предположения теоремы I, если заменить $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ на $\mathbf{A}_1$, $d(\mathbf{C}, \mathbf{G})$, $d_0(\mathbf{G}, \mathbf{C})$ соответственно. (См. [11], лемма на стр. 190).

**4. Компактные классы.** В предыдущем параграфе мы пользовались парой классов $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ таких, что $\mathbf{C} \prec \mathbf{G}$. В этом параграфе мы докажем, пользуясь только одним классом, теорему III, аналогичную теореме I., и выведем некоторые ее следствия. Теорему III докажем при помощи теоремы I, хотя ее можно доказать тоже прямо таким же путем, как и теорему I.

Класс $\mathbf{C}$ назовем *компактным*, если для любой последовательности $C_n \in \mathbf{C}$ такой, что $C_1 \cap C_2 \ldots \cap C_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, также $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq 0$. (См. [9], стр. 115.)

**Теорема III.** *Пусть* $\mathbf{A}$ — *счетная полуалгебра*, $\mathbf{B}$ — *$\sigma$-алгебра*, $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$, *и пусть компактный класс* $\mathbf{C}$ *аппроксимирует* $\mathbf{A}$ *снизу относительно* $\pi$ *и* $\mathbf{S}$; *тогда существует р. у. в.* $\pi(., . \mid \sigma(\mathbf{A}), \mathbf{B})$.

Доказательство. Прежде всего видим, что $s(\mathbf{C})$ аппроксимирует $s_0(\mathbf{A})$ снизу относительно $\pi$ и $\mathbf{S}$. Так как $s(\mathbf{C})$ есть также компактный класс (см. [9], т. 2 на стр. 116) и $s_0(\mathbf{A})$ — алгебра, то можем предполагать, что $\mathbf{A}$ — алгебра.

Положим $\mathbf{G} = c(\mathbf{C})$ и докажем, что $\mathbf{C} \prec \mathbf{G}$. Пусть $C_0 \in \mathbf{C}$, $G_n \in \mathbf{G}$ и $C_0 \subset \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Существуют $C_n \in \mathbf{C}$ так, что $G_n = C'_n$, и тогда $C_0 \subset X - \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, т. е. $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = 0$. $\mathbf{C}$ — компактный класс и, следовательно, существует $k$ так, что $\bigcap_{n=0}^{k} C_n = 0$, и для этого $k$ $\bigcup_{n=1}^{k} G_n = X - \bigcap_{n=1}^{k} C_n \supset C_0$. Далее из того, что $\mathbf{C}$ аппроксимирует $\mathbf{A}$ снизу и что $\mathbf{A}$ — алгебра, следует, что $\mathbf{G}$ аппроксимирует $\mathbf{A}$ сверху. Этим доказано, что выполняются все предположения теоремы I.

**Следствие I.** *Пусть вероятность $\pi$ совершенна (в смысле [4], стр. 22—23), $\mathbf{A}$ — $\sigma$-алгебра со счетным базисом, $\mathbf{B}$ — $\sigma$-алгебра, $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$; тогда существует р. у. в. $\pi(.,.\mid \mathbf{A}, \mathbf{B})$.*

Доказательство. Из [10], теорема VI и III, следует, что существует компактный класс $\mathbf{C}$, который аппроксимирует $\mathbf{A}$ снизу относительно $\pi$ и $\mathbf{S}$, и доказательство сводится к теореме III.

Прежде чем выскажем второе следствие, приведем некоторые определения. Пусть $Y$ — некоторое множество и $\mathbf{T}$ — некоторая $\sigma$-алгебра его подмножеств. Если $T$ — измеримое (относительно $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$) отображение $X$ в $Y$ и $\mathbf{E}$ — некоторая система подмножеств $Y$, то положим $T^{-1}(\mathbf{E}) = \{T^{-1}(E) : : E \in \mathbf{E}\}$. Вероятность $\nu$ на $\mathbf{T}$ назовем *компактной*, если существует компактный класс $\mathbf{C}_1$ (подмножеств $Y$) такой, что $\mathbf{C}_1$ аппроксимирует $\mathbf{T}$ снизу относительно $\nu$ и $\mathbf{T}$. $\{Y, \mathbf{T}\}$ назовем *компактным пространством*, если $\mathbf{T}$ — $\sigma$-алгебра со счетным базисом, и если всякая вероятность $\nu$ на $\mathbf{T}$ компактна. Примером компактнохо пространства служит полное сепарабельное (или $\sigma$-компактное) метрическое пространство и $\sigma$-алгебра всех его борелевских подмножеств (см. § 5, следствие III). Далее, через $\nu_T$ обозначим вероятность на $\mathbf{T}$, определенную соотношением $\nu_T(E) = \pi(T^{-1}(E))$, и через $\bar{\nu}_T$ — соответствующее пополнение вероятности $\nu_T$ (см. [6] § 13 — completion). Соответствующую пополненную $\sigma$-алгебру (т. е. систему множеств вида $E \cup N$, где $E \in \mathbf{T}$, а $N$ — подмножество некоторыго $\nu_T$ — нулевого множества из $\mathbf{T}$) обозначим через $\mathbf{T}_T$. Следующее следствие является обобщением теоремы 9.5 в [3] стр. 31 (см. тоже добавление к § 9 этой книги, стр. 623).

**Следствие II.** *Пусть $\mathbf{B}$ — $\sigma$-алгебра, $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$, $\{Y, \mathbf{T}\}$ — компактное пространство и $T$ — измеримое относительно $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ отображение $X$ в $Y$. Пусть существует $X_0 \in \mathbf{S}$ так, что $\pi(X_0) = 1$ и $T(X_0) \in \mathbf{T}_T$; тогда существует р. у. в. $\pi(.,.\mid T^{-1}(\mathbf{T}), \mathbf{B})$.*

Доказательство. Очевидно, что $T^{-1}(\mathbf{T})$ — $\sigma$-алгебра со счетным базисом. Существует $E \in \mathbf{T}$ так, что $T(X_0) \subset E$ и $\bar{\nu}_T(T(X_0)) = \nu_T(E)$. Тогда $T^{-1}(E) \supset X_0$ и $\bar{\nu}_T(T(X_0)) = \nu_T(E) \geq \pi(X_0) = 1$. Так как вероятность $\nu_T$ компактна, то существует компактный класс $\mathbf{C}_1$, который аппроксимирует $\mathbf{T}$ снизу относительно $\nu_T$. Нетрудно видеть, что компактный класс $\mathbf{C}_2 = \{C_1 : C_1 \in \mathbf{C}_1, C_1 \subset T(X_0)\}$ также аппроксимирует $\mathbf{T}$ снизу относительно $\nu_T$. Но тогда $\mathbf{C} = T^{-1}(\mathbf{C}_2)$ — компактный класс, и мы докажем, что $\mathbf{C}$ аппроксимирует $T^{-1}(\mathbf{T})$ снизу относительно $\pi$ и $T^{-1}(\mathbf{T})$. Действительно, для $A \in T^{-1}(\mathbf{T})$ существует $E \in \mathbf{T}$ так, что $A = T^{-1}(E)$ Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеются $F \in \mathbf{T}$, $C_2 \in \mathbf{C}_2$ такие, что $F \subset C_2 \subset E$ и $\nu_T(F) \geq \nu_T(E) - \varepsilon$. Тогда $T^{-1}(F) \subset T^{-1}(C\ ) \subset T^{-1}(E) = A$, $\pi(T^{-1}(F)) = \nu_T(F) \geq \nu_T(E) - \varepsilon = \pi(A) - \varepsilon$, и доказательство следует из теоремы III.

**5. Условные вероятности в метрических пространствах.** В этом параграфе будем предполагать, что $X$ — метрическое пространство и $\mathbf{S}$ — $\sigma$-алгебра всех борелевских множеств пространства $X$. Через $\mathbf{C}$ обозначим класс всех компактных множеств пространства $X$. $\mathbf{C}$ есть компактный класс в смысле § 4.

Вероятность $\pi$ назовем в этом параграфе *компактной*, если $\mathbf{C}$ аппроксимирует $\mathbf{S}$ снизу относительно $\pi$ и $\mathbf{S}$. Так как $\mathbf{C} \subset \mathbf{S}$, то это равносильно соотношению

$$\pi(A) = \sup\{\pi(C) : C \subset A, C \in \mathbf{C}\}\,. \tag{8}$$

Ввиду того, что (8) имеет место для всех $\pi$, если заменить класс $\mathbf{C}$ на класс всех замкнутых множеств (см. напр. [6] — 43.3d, стр. 183), то $\pi$ будет копмактно тогда и только тогда, когда будет существовать $\sigma$-компактное множество $X_0$ (т. е. множество, которое является соединением счетного числа компактных множеств) такое, что $\pi(X_0) = 1$.

**Теорема IV.** *Если вероятность $\pi$ компактна, то для любой $\sigma$-алгебры $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$ существует р. у. в. $\pi(.\,,\,.\mid \mathbf{S}, \mathbf{B})$.*

Доказательство. Пусть $X_0$ — $\sigma$-компактное множество такое, что $\pi(X_0) = 1$, $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S} \cap X_0$, $\mathbf{S}_1 = \sigma(\mathbf{S}_0) = \mathbf{S}_0 \cup c(\mathbf{S}_0)$. Так как $X_0$ — сепарабельное метрическое пространство и $X_0 \in \mathbf{S}$, то $\mathbf{S}_1$ — $\sigma$-алгебра со счетным базисом и $\mathbf{S}_1 \subset \mathbf{S}$. По теореме III существует р. у. в. $\pi(.\,,\,.\mid \mathbf{S}_1, \mathbf{B})$, и, так как $X_0 \in \mathbf{S}_1$ и $\pi(X_0) = 1$, можем предполагать, что $\pi(X_0, x \mid \mathbf{S}_1, \mathbf{B}) = 1$ для всех $x \in X$. Далее будем писать $\pi_1(.\,,\,.)$ вместо $\pi(.\,,\,.\mid \mathbf{S}_1, \mathbf{B})$. Если для $A \in \mathbf{S}$ положим $\pi(A, x) = \pi_1(A \cap X_0, x)$ для всех $x \in X$, то $\pi(.\,, x)$ будет вероятностью на $\mathbf{S}$ для всех $x$ и для $A \in \mathbf{S}$, $B \in \mathbf{B}$ имеет место

$$\int_B \pi(A, x)\,\mathrm{d}\pi(x) = \int_B \pi_1(A \cap X_0, x)\,\mathrm{d}\pi(x) = \pi(A \cap X_0 \cap B) = \pi(A \cap B)\ .$$

Из этого следует, что $\pi(.\,,.\,)$ есть р. у. в. $\pi(.\,,\,.\mid \mathbf{S}, \mathbf{B})$.

**Следствие III**. *Если $X$ — полное сепарабельное (или $\sigma$-компактное) метрическое пространство, то для любой $\sigma$-алгебры* $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$ *существует р. у. в.* $\pi(.\,,\,.\mid \mathbf{S}, \mathbf{B})$.

Доказательство следует из того, что для этих простанств всякая вероятность $\pi$ компактна (см. на пр. [6] — 43.3е, стр. 183).

Замечание: В этом замечании построим пример, который показывает, что теорема IV. неправильна, если предположение компактности вероятности не выполняется, даже в том случае, когда $X$ — сепарабельное метрическое пространство. Известен пример пространства вероятностей $\{X, \mathbf{S}, \pi\}$ (Dieudonné), в котором $\mathbf{S}$ — $\sigma$-алгебра со счетным базисом и в котором для некоторой $\sigma$-алгебры $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$ все у. в. $\pi(.\,,\,.\mid \mathbf{S}, \mathbf{B})$ нерегулярны (см. [2] или [6] 48.4, стр. 210). В этом примере $X$ — метрическое пространство (сегмент $\langle 0\ 1\rangle$), но $\mathbf{S}$ содержит тоже неизмеримые (по Борелю) множества. Но тот факт, что существует поле вероятностей $\{X, \mathbf{S}, \pi\}$, где $X$ — метрическое сепарабельное пространство, и $\mathbf{S}$ — $\sigma$-алгебра всех его борелевских подмножеств, и где при некоторой $\sigma$-алгебре $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$ все у. в. $\pi(.\,,\,.\mid \mathbf{S}, \mathbf{B})$ нерегулярны, следует из примера, который противоречит утверждению о построении меры в бесконечных произведениях множеств (Andersen-Jessen, см. [1] или [6] 49.3, стр. 214), и из теоремы, которая утверждает, что в случае регулярных условных вероятностей это построение всегда возможно (см. [7]).

Чтобы это показать прямо, достаточно воспользоваться первыми двумя составляющими пространствами этого примера. Пусть $X_1 = \langle 0\ 1\rangle$, $\mathbf{S}_1$ — класс всех борелевских множеств этого пространства, $\mu$ — лебеговская мера на $\mathbf{S}_1$ и $X_2 \subset X_1$ — такое множество, что его внешняя лебеговская мера равна 1 и внутренняя лебеговская мера равна 0. Далее положим $\mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1 \cap X_2$, $X = X_1 \times X_2$ и $\mathbf{S} = \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathbf{S}_1, A_2 \in \mathbf{S}_2\})$. Очевидно, что $X$ — метрическое пространство (с обыкновенной метрикой двумерного евклидова пространства) и $\mathbf{S}$ — класс всех его борелевских подмножеств. На $\mathbf{S}_2$ определяется вероятность $\nu$ соотношением $\nu(A_2) = \mu(A_1)$ если $A_2 = A_1 \cap X_2$, $A_1 \in \mathbf{S}_1$.

Пусть $T$ — отображение $X_2$ в $X$, определенное соотношением $T(x_2) = (x_2, x_2)$ для всех $x_2 \in X_2$ и пусть $\pi(A) = \nu(T^{-1}(A))$ для всех $A \in \mathbf{S}$. Очевидно, что $\pi$ — вероятность на $\mathbf{S}$. Теперь положим $\mathbf{B} = \{A_1 \times X_2 : A_1 \in \mathbf{S}_1\}$ и будем предполагать, что существует р. у. в. $\pi(.\,,\,.\mid \mathbf{S}, \mathbf{B})$. Если $D = T(X_2)$, $Y = \{(x_1, x_2) : \pi(D, (x_2, x_2)) \neq 1\}$, то $\pi(D) = \nu(X_2) = 1$ и, следовательно, $\pi(Y) = 0$. Так как $\mathbf{B}$ — $\sigma$-алгебра со счетным базисом, то $\pi(A, (x_1, x_2)) = \chi_A(x_1, x_2)$ одновременно для всех $A \in \mathbf{B}$ и для всех $(x_1, x_2)$ non $\in Z$ для некоторого $Z \in \mathbf{B}$ такого, что $\pi(Z) = 0$. Из этого вытекает для $Z_0 = \{(x_1, x_2) : \pi(\{x_1\} \times X_2, (x_1, x_2)) \neq 1\}$, что $Z_0 \subset Z$. Потому что $Y, Z \in \mathbf{B}$, существуют $Y_1, Z_1 \in \mathbf{S}_1$ такие, что $Y = Y_1 \times X_2$, $Z = Z_1 \times X_2$ и очевидно,

$\mu(Y_1 \cup Z_1) = 0$. Для любого $x_1 \in (Y_1 \cup Z_1)'$ — $\pi(D \cap (\{x_1\} \times X_2), (x_1, x_2)) = 1$ для всех $x_2 \in X_2$ и, следовательно, $D \cap (\{x_1\} \times X_2) \neq 0$. Но тогда $(Y_1 \cup Z_1)' \subset X_2$ находится в противотечии с тем, что внутренняя лебеговская мера множества $X_2$ равна 0.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] *E. Sparre Andersen - B. Jessen*: On the introduction of measures in infinite product sets. Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd. *22* (1948), No 14.

[2] *J. Dieudonné*: Sur le théorème de Lebesgue — Nikodym (III). Ann. Univ. Grenoble *23* (1948), p. 25—53.

[3] *J. L. Doob*: Stochastic Processes. New York 1953.

[4] *Б. В. Гнеденко-А. Н. Колмогоров:* Предельные распределения для сумм независимых величин. Москва-Ленинград 1949.

[5] *P. R. Halmos*: The decomposition of measures. Duke Math. Jour. *8* (1941), p. 386 to 392.

[6] *P. R. Halmos*: Measure theory. New York 1950.

[7] *C. T. Ionescu Tulcea*: Mesures dans les espaces produits. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (Ser. 8.) *7* (1949), p. 205—208.

[8] *A. Kolmogoroff*: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1933.

[9] *E. Marczewski*: On compact measures. Fund. Math. *40* (1953), p. 111—124.

[10] *C. Ryll-Nardzewski*: On quasi-compact measures. Fund. Math. *40* (1953), p. 125—130.

[11] *B. J. Pettis*: On the extension of measures. Annals of Math. *54* (1951), p. 186—197.


## Summary

# CONDITIONAL PROBABILITIES ON STRICTLY SEPARABLE $\sigma$-ALGEBRAS


MILOSLAV JIŘINA, Praha.



(Received 20. 4. 1954.)



Let a probability space $\{X, \mathbf{S}, \pi\}$ be given. If $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ are $\sigma$-algebras such that $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$, then every function defined on $\mathbf{A} \times X$ and denoted by $\pi(.,. \mid \mathbf{A}, \mathbf{B})$ is called *conditional probability* if $\pi(A, . \mid \mathbf{A}, \mathbf{B})$ is $\mathbf{B}$-measurable for every $A \in \mathbf{A}$ and if the relation $\pi(A \cap B) = \int_B \pi(A, x \mid \mathbf{A}, \mathbf{B}) \, d\pi(x)$ holds for every $A \in \mathbf{A}$ and every $B \in \mathbf{B}$. The conditional probability is called *regular* if, for every $x \in X$, the function $\pi(., x \mid \mathbf{A}, \mathbf{B})$ is a $\sigma$-additive probability measure on $\mathbf{A}$. In this paper the following sufficient conditions for the regularity of the conditional probability are proved:

*Let $\mathbf{A}$ be a denumerable semi-ring such that $0 \in \mathbf{A}$, $X \in \mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a $\sigma$-algebra, $\mathbf{A} \subset \mathbf{S}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{S}$ and let $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ be classes of subsets of $X$ such that, for every $C \in \mathbf{C}$ and every denumerable covering of $C$ by subsets from $\mathbf{G}$, there exists a finite sub-*

*covering. Suppose that, for every $\varepsilon > 0$ and every $E \in$ **A**, there exist $A_1, A_2 \in$ **S**, $C \in$ **C** and $G \in$ **G** such that $A_1 \subset C \subset A \subset G \subset A_2$ and $\pi(A_2) - \varepsilon \leq \pi(A) \leq \leq \pi(A_1) + \varepsilon$. Then there exists a regular conditional probability $\pi(.,. \mid \sigma($**A**$),$ **B**$)$, where $\sigma($**A**$)$ denotes the smallest $\sigma$-algebra generated by* **A** (**Theorem I.**).

A similar theorem holds if **A** is a denumerable lattice instead of a semi-ring. (**Theorem II.**)

The classes **C**, **G** in theorem I. can be replaced by one class **C** only if we suppose that **C** is compact in the sense of [9] p. 115 and if, for every $A \in$ **A** and every $\varepsilon > 0$, there exist $B \in$ **A**, $C \in$ **C** such that $B \subset C \subset A$ and $\pi(A) \leq \leq \pi(B) + \varepsilon$ (**Theorem III.**).

As a consequence of theorem III. we obtain the following statement (**Corollary I.**): *Let $\pi$ be perfect in the sense of* [4] *p. 22—23. Then, for every strictly separable $\sigma$-algebra* **A** *and every $\sigma$-algebra* **B** *such that* **A** $\subset$ **S**, **B** $\subset$ **S**, *there exists a regular conditional probability $\pi(.,. \mid$* **A**, **B**$)$. The **Corollary II.** is a generalisation of the theorem 9.5 of [3] p. 31.

For metric spaces we obtain the following **theorem IV.**: *Let $X$ be a metric space, $S$ the $\sigma$-algebra of all Borel sets of $X$,* **C** *the class of all compact subsets of $X$ and $\pi$ a probability measure on* **S** *such that the relation* (8) *holds for every $A \in$* **S**. *Then, for every $\sigma$-algebra* **B** $\subset$ **S**, *there exists a regular conditional probability $\pi(.,. \mid$* **S**, **B**$)$.