Czechoslovak Mathematical Journal

Miloslav Mikulík

Метрические структуры

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 4, 364–371

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100123

Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79) 1954

МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

МИЛОСЛАВ МИКУЛИК (Miloslav Mikulík), Брно.

(Поступило в редакцию 26/XI 1953 г.)

Настоящая работа посвящается введению метрики ϱ со свойствами (U 2), (U 3) в полной структуре, определенной на множестве S. Автор доказывает, что в этой метрической структуре метрическая сходимость, o-сходимость и $*$-сходимость тождественны. Далее доказывается, что если частичное упорядочение множества S определяет на непустом выпуклом множестве $A \subset S$ подструктуру, то эта подструктура будет замкнутой тогда и только тогда, если множество A компактно.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$x' = f(t, x) \,, \tag{1}$$

где $f(t, x)$ — равномерно непрерывная и ограниченная функция в двумерном интервале Δ: $|t - \xi| \leqq a$, $|x - \eta| < \infty$. Обозначим через M множество всех решений дифференциального уравнения (1), проходящих через все точки, которые можно представить в виде $[\xi, \eta + \lambda b]$, причем b — данная константа, а λ пробегает интервал $\langle -1, 1 \rangle$. Введем следующее частичное упорядочение множества M: Скажем, что между элементами $x, y \in M$ имеет место соотношение $x \leqq y$ $(y \leqq x)$, если для всех $t \in \langle \xi - a, \xi + a \rangle$ справедливо $x(t) \leqq y(t)$ $(x(t) \geqq y(t))$. Далее, мы определяем на множестве M метрику ϱ при помощи соотношения $\varrho(x, y) = \max |x(t) - y(t)|$, $t \in \langle \xi - a, \xi + a \rangle$. На множестве M мы определили таким образом метрическую структуру которую обозначим символом $\mathfrak{M}$. Она имеет следующие характерные свойства:

1. Множество M является относительно введенного частичного упорядочения полной структурой.

2. Множество M компактно относительно метрики ϱ.

3. Диаметр каждого множества $A \subset M$ равен расстоянию между его супремумом и инфимумом.

Проф. О. Борувка обратил мое внимание на эту метрическую структуру, в особенности на то обстоятельство, что расстояние между любыми двумя элементами $x, y \in M$ равно расстоянию между их супремумом и инфимумом.

Он выдвинул проблему: исследовать метрические структуры, к которым относится и метрическая структура $\mathfrak{M}$.[1])

Для того, чтобы наши рассуждения охватывали и метрическую структуру $\mathfrak{M}$, будем в дальнейшем предпологать, что дано непустое множество S со следующими свойствами:

(U 1) Множество S частично упорядочено. Относительно этого частичного упорядочения множество S является полной структурой.

(U 2) На множестве S введена метрика ϱ, относительно которой множество S компактно.

(U 3) Пусть A — произвольное непустое подмножество множества S. Пусть $d(A)$ — его диаметр относительно метрики ϱ. Пусть, далее, $l = \bigwedge\limits_{t \in A} t$ $(L = \bigvee\limits_{t \in A} t)$ — его инфимум (супремум) относительно частичного упорядочения множества S. Тогда имеет место соотношение $d(A) = \varrho(l, L)$.

В дальнейшем S будет обозначать непустое множество со свойствами (U 1), (U 2), (U 3). Структуру, определенную на множестве S, обозначим через $\mathfrak{S}$. Далее, X_n будет обозначать множество, содержащее все элементы последовательности $\{x_k\}_{k=n}^{\infty}$ и никаких других. Символом $\bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k$ $(\bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k)$ обозначим супремум (инфимум) множества X_n.

Лемма 1. *Пусть элементы $x, y, z \in S$ удовлетворяют соотношениям $x \leqq y \leqq z$. Тогда*

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z) ; \quad \varrho(y, z) \leqq \varrho(x, z) .$$

---

[1]) Метрические структуры исследовали, напр. *L. R. Wilcox* и *M. F. Smiley* (Metric lattices, Ann. of Math. *40* (1939), стр. 309). В этой работе в множестве G, на котором определена структура, вводится метрика следующим образом: на множестве G определяется действительная функция $v(x)$ и при помощи нее функция $\varrho_v(x, y)$ соотношением

$$\varrho_v(x, y) = 2v(x \vee y) - v(x) - v(y) .$$

В работе между прочим показано, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $\varrho_v(x, y)$ была метрикой на G, является следующее: если $x < y$, то $v(x) < v(y)$ и $v(x \vee y) + v(x \wedge y) \leqq v(x) + v(y)$. Использовав приведенные в упомянутой работе теоремы, можно показать, что на множестве M решений дифференциального уравнения (1) нельзя указанным способом ввести метрику $\varrho_v(x, y)$, тождественную с метрикой ϱ в $\mathfrak{M}$.

На множестве G, на котором определена структура, в книге *Г. Биркгофа Lattice theory* (1940), стр. 41, определяется действительная функция $v(x)$ со свойствами

1. $v(x) + v(y) = v(x \vee y) + v(x \wedge y)$,
2. если $x < y$, то $v(x) < v(y)$.

Посредством функции $v(x)$ далее определяется функция $\varrho(x, y)$ при помощи соотношения: $\varrho(x, y) = v(x \vee y) - v(x \wedge y)$. Функция $\varrho(x, y)$ является метрикой на G. Нетрудно показать, что введенная таким образом метрика является частным случаем метрики, которую приводят Л. Р. Вилькокс и М. Ф. Смайли в цитированной работе.

Одним из главных результатов, приведенных в упомянутой книге Биркгофа, является утверждение, что в метрических структурах при некоторых условиях метрическая сходимость совпадает с $*$-сходимостью. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы o-сходимость в σ-алгебрах множеств была метрической, установили *Й. Новак* и *М. Новотный* в работе: On the convergence in σ-algebras of point-sets. (Чехословацкий математический журнал, т. *3* (78) 1953, 291—296).

Доказательство. Обозначим через A множество, содержащее элементы x, y, z и никаких других. Тогда супремумом множества A будет z, а инфимумом множества A будет x. Далее, $d(A) = \max [\varrho(x, y),\ \varrho(x, z),\ \varrho(y, z)]$. Ввиду (U 3), получаем

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, z)\ ; \quad \varrho(y, z) \leqq \varrho(x, z)\ .$$

Обозначение. То обстоятельство, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из множества S сходится относительно метрики ϱ к элементу x, мы будем обозначать так: $x_n \underset{\varrho}{\to} x$.

Лемма 2. *Пусть дана неубывающая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из множества S. Пусть $x_n \underset{\varrho}{\to} x$; тогда*

$$x = \bigvee_{n=1}^{\infty} x_n\ .$$

Доказательство. Обозначим $\bigvee\limits_{k=1}^{\infty} x_k = L$. Покажем, что $x = L$. Очевидно, при любом фиксированном n будет $\lim\limits_{s \to \infty} \varrho(x_n, x_s) = \varrho(x_n, x)$. Для любого n имеем $\bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k = x_n$, $\bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k = L$. Используя лемму 1, получаем, что для любого фиксированного n будет $d(X_n) = \lim\limits_{s \to \infty} \varrho(x_n, x_s)$. Итак, согласно (U3) для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$d(X_n) = \varrho(x_n, L) = \lim_{s \to \infty} \varrho(x_n, x_s) = \varrho(x_n, x)\ . \tag{2}$$

Так как $x_n \underset{\varrho}{\to} x$, то элементы x, L, ввиду (2), тождественны.

Лемма 3. *Каждая неубывающая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из множества S является сходящейся относительно метрики ϱ. Ее пределом служит $x = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.*

Доказательство. Так как множество S компактно, то из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить частичную последовательность $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся в множестве S относительно метрики ϱ. Обозначим ее предел через x. По лемме 2 будет $x = \bigvee\limits_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой индекс N, что для всех $n_i \geqq N$ будет $\varrho(x_{n_i}, x) < \varepsilon$. Для любого элемента x_n, где $n \geqq N$, по лемме 1 $\varrho(x_n, x) \leqq \varrho(x_N, x) < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ также сходится к элементу x относительно метрики ϱ. По лемме 2 будет $x = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Лемма 4. *Каждая невозрастающая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов* *из множества S является сходящейся относительно метрики ϱ, и ее пределом будет $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.*

Доказательство. Лемма двойственна лемме 3.

Определение 1.[2]) *Пусть на множестве G определена полная структура. Мы говорим, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из множества G o-сходится к элементу x, и пишем $x_n \underset{o}{\to} x$, если $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k = x$.*

Определение 2.[3]) *Пусть на множестве G определена структура. Мы говорим, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из множества G $*$-сходится к элементу x и пишем $x_n \underset{*}{\to} x$, если из каждой частичной последовательности $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, выделенной из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, можно выделить частичную последовательность $\{x_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$, o-сходящуюся к элементу x.*

Лемма 5. *Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из множества S сходится относительно метрики ϱ к элементу x. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o-сходится к тому же элементу x.*

Доказательство. Покажем, что $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} \bigwedge\limits_{k=1}^{\infty} x_k = x$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $x_n \underset{\varrho}{\to} x$, то можно найти такой индекс N, чтобы для всех индексов $s, r \geqq N$ было

$$\varrho(x_r, x_s) < \varepsilon \,. \tag{3}$$

Итак, $d(X_n) = \sup\limits_{r,s \geqq n} \varrho(x_r, x_s) \leqq \varepsilon$ для всех $n \geqq N$. Обозначим $l_n = \bigwedge\limits_{k=n}^{\infty} x_k$, $L_n = \bigvee\limits_{k=n}^{\infty} x_k$. Согласно (U 3), будет $d(X_n) = \varrho(l_n, L_n)$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(l_n, L_n) = 0 \,. \tag{4}$$

По лемме 3 $l_n \underset{\varrho}{\to} \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} l_n$, а по лемме 4 $L_n \underset{\varrho}{\to} \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} L_n$. Итак, ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(L_n, l_n) = \varrho(\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} L_n, \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} l_n)$. Ввиду (4), будет $\varrho(\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} L_n, \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} l_n) = 0$. Отсюда следует, что $\bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} L_n = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} l_n$. Положим теперь $y = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} l_n = \bigwedge\limits_{n=1}^{\infty} L_n$. Покажем, что $x = y$. Из неравенства треугольника следует

$$\varrho(x, y) \leqq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, L_n) + \varrho(L_n, y) \,. \tag{5}$$

[2]) *G. Birkhoff*, Lattice theory (1940), стр. 29.

[3]) *P. S. Urysohn*, Sur les classes (L) de M. Fréchet, L'Enseignement mathématique 25 (1926), 77—83.

Так как $x_n \underset{\varrho}{\to} x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Так как $L_n \underset{\varrho}{\to} y$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(L_n, y) = 0$. Так как для любого n имеет место $l_n \leqq x_n \leqq L_n$, то из соотношения (4) и из леммы 1 вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_n, L_n) = 0$. Так как в (5) предел в правой части равен нулю при $n \to \infty$, то будет $\varrho(x, y) = 0$. Это значит, что $x = y$.

Лемма 6. *Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из множества S о-сходится к x. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $*$-сходится к тому же элементу x.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из определения o-сходимости и из определения $*$-сходимости.

Лемма 7. *Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из множества S $*$-сходится к элементу x. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится относительно метрики ϱ к тому же элементу x.*

Доказательство. Применим доказательство от противного. Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится относительно метрики ϱ к элементу x, то существует такая выделенная последовательность $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$, что

$$x_{n_i} \underset{\varrho}{\to} y \neq x\,, \tag{6}$$

так как множество S компактно. По определению $*$-сходимости из последовательности $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ можно выделить такую частичную последовательность $\{x_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$, что $x_{n_{i_j}} \underset{o}{\to} x$. Однако, ввиду (6), $x_{n_{i_j}} \underset{\varrho}{\to} y$. По лемме 5 $x_{n_{i_j}} \underset{o}{\to} y$. Это значит, что $x = y$. Это противоречит соотношению (6).

Определение 3.[4]) *Пусть в данном пространстве P определены сходимости k_1, k_2. Эти сходимости мы называем тождественными, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из данного пространства P имеет место: Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится относительно k_1 к элементу x тогда и только тогда, если она сходится относительно k_2 к тому же самому элементу x.*

Теорема 1. *В структуре с метрикой $\mathfrak{S}$ метрическая сходимость, о-сходимость и $*$-сходимость тожде твенны.*

Доказательство. Доказательство получим совместным применением лемм 5, 6, 7.

Определение 4.[5]) *Пусть на непустом множестве G определена структура. Множество $A \subset G$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя элементами x, y, для которых имеет место $x \leqq y$, оно содержит и все промежуточные элементы, т. е. все элементы z такие, что $x \leqq z \leqq y$.*

---

[4]) *Й. Новак* и *М. Новотный:* On the convergence in σ-algebras of point-sets, Чехословацкий математический журнал, т. *3* (78), 1953, 291—296.

[5]) *G. Birkhoff:* Lattice theory (1940), стр. 9.

[6]) *G. Birkhoff:* Lattice theory, (1948), стр. 50.

Определение 5.[6]) *Пусть на непустом множестве G определена полная структура $\mathfrak{G}$. Мы говорим, что полная структура $\mathfrak{G}$ определяет на множестве $A \subset G$ замкнутую подструктуру, если множество A содержит вместе с любым своим подмножеством X его супремум и его инфимум.*

Лемма 8. *Пусть дано непустое множество $A \subset S$. Пусть наибольшим элементом множества A относительно частичного упрордочения множества S будет элемент e, а наименьшим — элемент 0. Пусть множество A — выпуклое. Тогда частичное упорядочение множества S определяет на множестве A замкнутую подструктуру.*

Доказательство. Возьмем произвольное множество $X \subset A$. Очевидно, $0 \leqq \bigwedge_{t \in X} t \leqq \bigvee_{t \in X} t \leqq e$. Так как множество A — выпуклое, то оно содержит элементы $\bigwedge_{t \in X} t$, $\bigvee_{t \in X} t$. Итак, частичное упорядочение множества S определяет на множестве A замкнутую подструктуру.

Лемма 9. *Пусть дано непустое компактное множество $A \subset S$. Пусть частичное упорядочение множества S определяет на множестве A подструктуру структуры с метрикой $\mathfrak{S}$. Тогда множество A содержит наибольший и наименьший элемент.*

Доказательство. При доказательстве мы воспользуемся теоремой: Если A — компактное множество, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует конечное точечное множество $M'_\varepsilon \subset A$ такое, что для каждого $x \in A$ существует точка $y \in M'_\varepsilon$, для которой $\varrho(x, y) < \varepsilon$.

Возьмем произвольную нулевую последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел. По указанной выше теореме построим для каждого ε_n множество M'_{ε_n}. Положим $M_{\varepsilon_1} = M'_{\varepsilon_1}$, $M_{\varepsilon_n} = M'_{\varepsilon_n} + M_{\varepsilon_{n-1}}$ для $n = 2, 3, \ldots$ Таким образом мы получаем последовательность $\{M_{\varepsilon_n}\}_{n=1}^{\infty}$ конечных точечных подмножеств множества A. Для этих подмножеств имеет место: $M_{\varepsilon_1} \subset M_{\varepsilon_2} \subset M_{\varepsilon_3} \subset \ldots \subset A$. Значит, последовательность $\{\bigvee_{t \in M_{\varepsilon_n}} t\}_{n=1}^{\infty}$ $(\{\bigwedge_{t \in M_{\varepsilon_n}} t\}_{n=1}^{\infty})$ является неубывающей (невозрастающей). Для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ элементы $\bigvee_{t \in M_{\varepsilon_n}} t$, $\bigwedge_{t \in M_{\varepsilon_n}} t$ принадлежат множеству A. По лемме 4 последовательность $\{\bigwedge_{t \in M_{\varepsilon_n}} t\}_{n=1}^{\infty}$ сходится относительно метрики ϱ к элементу $l = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{t \in M_{\varepsilon_n}} t$. По лемме 3 последовательность $\{\bigvee_{t \in M_{\varepsilon_n}} t\}_{n=1}^{\infty}$ сходится относительно метрики ϱ к элементу $L = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{t \in M_{\varepsilon_n}} t$. Так как множество A компактно, то элементы l, L принадлежат множеству A. Для каждого элемента $y \in A$, принадлежащего одновременно некоторому множеству M_{ε_n}, $l \leqq y \leqq L$. Покажем, что для каждого элемента $x \in A$ будет $l \leqq x \leqq L$. Для этого возьмем произвольный элемент $x \in A$. Построим теперь последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся относительно метрики ϱ к элементу x, такую, что $x_n \in M_{\varepsilon_n}$. По теореме 1 последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o-сходится к x. Итак, если обозначить через L_n элемент $\bigvee_{k=n}^{\infty} x_k$, а через l_n — элемент $\bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k$, получим $\bigvee_{n=1}^{\infty} l_n = x = \bigwedge_{n=1}^{\infty} L_n$. Следовательно, $l_n \leqq x \leqq L_n$. Так как для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеет место $l \leqq \bigwedge_{t \in M_{\varepsilon_n}} t \leqq x_n \leqq \bigvee_{t \in M_{\varepsilon_n}} t \leqq L$, то будет $l \leqq \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k \leqq \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k \leqq L$. Следовательно, $l \leqq \bigwedge_{k=1}^{\infty} x_k \leqq l_n \leqq x \leqq L_n \leqq \bigvee_{k=1}^{\infty} x_k \leqq L$. Итак, l есть наименьший, а L — наибольший элемент множества A.

Лемма 10. *Пусть $A \subset S$ — непустое множество. Пусть частичное упорядочение множества S определяет на множестве A замкнутую подструктуру. Тогда множество A компактно.*

Доказательство. Лемма будет доказана, если нам удастся показать, что множество A замкнуто в смысле метрики ϱ. Итак, пусть $x_n \underset{\varrho}{\to} x$, где $x_n \in A$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$ По теореме 1 $x_n \underset{o}{\to} x$. Отсюда следует, что $x = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k$. Так как частичное упорядочение множества S определяет на множестве A замкнутую подструктуру, то элемент x принадлежит множеству A.

Теорема 2. *Пусть $A \subset S$ — непустое выпуклое множество. Пусть частичное упорядочение множества S определяет на множестве A подструктуру. Эта подструктура будет замкнутой тогда и только тогда, елси множество A компактно.*

Доказательство. Доказательство следует из лемм 8, 9, 10.

Summary

METRIC LATTICES

MILOSLAV MIKULÍK, Brno.

(Received November 26, 1953.)

Let us assume that the non-void set S has the following properties: (U1) The set S is partially ordered. With respect to this partial ordering it is a complete lattice. (U2) A metric ϱ is introduced in the set S, with respect to which the set S is compact. (U3) Let A be any non-void subset of the set S. Let $d(A)$ be its diameter with respect to the metric ϱ. Further let $l = \bigwedge_{t \in A} t$ $(L = \bigvee_{t \in A} t)$ be its infimum (supremum) with respect to the partial ordering of the set S.

Then $d(A) = \varrho(l, L)$. Hereby the lattice with metric on the set S is defined, to denote which I use the sign $\mathfrak{S}$. In my paper I establish that in the lattice with metric $\mathfrak{S}$ metrical convergence, o-convergence and $*$-convergence are identical. Furthermore I show that if a partial ordering of the set S determines the sublattice on a non-void convex set $A \subset S$, this sublattice is closed if and only if the set A is compact.