Vojtěch Jarník

К метрической теории цепных дробей

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 4, 318–329

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100120

Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79) 1954

К МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

ВОЙТЕХ ЯРНИК (Vojtěch Jarník), Прага.

(Поступило в редакцию 3/V 1954 г.)

В статье изучается размерность (по Хаусдорффу) некоторых множеств вещественных чисел, характеризуемых определенными свойствами соответствующих разложений в цепную дробь.

Пусть ϑ — иррациональное число, $0 < \vartheta < 1$; пусть

$$\vartheta = \{0; a_1, a_2, \ldots\} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

— разложение числа ϑ в непрерывную дробь (a_i — натуральные числа). Пусть p_n, q_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) — подходящие числители и знаменатели этой дроби. Известно, что

$$p_0 = 0, q_0 = 1, p_1 = 1, q_1 = a_1, p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (1)$$
$$(k = 2, 3, \ldots),$$

$$1 = q_0 \leqq q_1 < q_2 < q_3 < \ldots, \; q_k \geqq 2^{\frac{1}{2}(k-1)}, \; p_{k-1}q_k - p_k q_{k-1} = (-1)^k . \quad (2)$$

При $\delta > 0$ обозначаем через N_δ множество тех ϑ ($0 < \vartheta < 1$), для которых

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n^{1+\delta}} > 0, \text{ т. е. } \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{q_n^\delta} > 0 \ ;$$

M_δ будет множество тех ϑ ($0 < \vartheta < 1$), для которых

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n^{1+\delta}} > 0, \quad \text{т. е.} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{q_n^\delta} > 0 \ ;$$

P_∞ будет множество тех ϑ ($0 < \vartheta < 1$), для которых

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = +\infty , \quad \text{т. е.} \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty .$$

Наконец, для натурального $b > 1$, обозначим через P_b множество тех ϑ ($0 < \vartheta < 1$), для которых $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \geqq b$, т. е. $a_n \geqq b$ для всех достаточно больших n.

Мы будем заниматься размерностью (Хаусдорффа) этих множеств. Размерность $\dim M$ множества $M \neq \emptyset$ вещественных чисел можно определить так: Пусть ζ — вещественное число, $\varrho > 0$. Пусть

$$\mathfrak{S} : l_1, l_2, \ldots \tag{3}$$

— последовательность (конечная или бесконечная) промежутков таких, что

$$M \subset \bigcup_i l_i\,, \quad |l_i| < \varrho \tag{4}$$

($|l|$ означает длину промежутка или сегмента l). Точную нижнюю границу чисел

$$L(\mathfrak{S}) = \sum_i |l_i|^\zeta$$

для всех последовательностей $\mathfrak{S}$ со свойствами (4) обозначим через $L_\varrho = L_\varrho(M; x^\zeta)$. Если $0 < \varrho_1 < \varrho$, то $L_{\varrho_1} \geqq L_\varrho$; итак, существует предел

$$0 \leqq \lim_{\varrho \to 0+} L_\varrho(M; x^\zeta) = \mu(M; x^\zeta) \leqq +\infty\,.$$

Очевидно, существует такое число η $(0 \leqq \eta \leqq 1)$, что $\mu(M; x^\zeta) = +\infty$ для $\zeta < \eta$, $\mu(M; x^\zeta) = 0$ для $\zeta > \eta$; полагаем $\eta = \dim M$.

Известно, что $\dim N_\delta = \dfrac{2}{2+\delta}$ ($\delta > 0$; см. [1], [2], [3]). Здесь мы докажем следующую теорему:

Теорема.

$$\dim M_\delta = \tfrac{1}{2} \dim N_\delta = \frac{1}{2+\delta} \quad \text{для } \delta > 0\,; \tag{5}$$

$$\dim P_\infty = \tfrac{1}{2}\,; \tag{6}$$

$$\tfrac{1}{2} < \dim P_b < 1 \text{ для натуральных } b > 1; \tag{7}$$

$$\lim_{b \to \infty} \dim P_b = \tfrac{1}{2}\,. \tag{8}$$

§ 1. Обозначения.

Если задана конечная или бесконечная последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, то через p_n, q_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ будем обозначать числа, определенные в (1). Введем еще следующие обозначения ($\langle a, b\rangle$ обозначает замкнутый сегмент; r, s—натуральные числа, $r < s$):

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left\langle \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}\,,\ \frac{p_n}{q_n} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{(a_n+1)p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n+1)q_{n-1} + q_{n-2}}\,,\ \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} \right\rangle; \tag{9}$$

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_n; {}^s_r) = \bigcup_{a_{n+1}=r}^{s-1} I(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) =$$

$$= \left\langle \frac{rp_n + p_{n-1}}{rq_n + q_{n-1}}, \frac{sp_n + p_{n-1}}{sq_n + q_{n-1}} \right\rangle; \tag{10}$$

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_n; {}^\infty_r) = \left\langle \frac{rp_n + p_{n-1}}{rq_n + q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n} \right\rangle. \tag{11}$$

Очевидно,

$$\left\{ \begin{matrix} I(a_1, \ldots, a_n) \\ I(a_1, \ldots, a_n; {}^s_r) \\ I(a_1, \ldots, a_n; {}^\infty_r) \end{matrix} \right\}$$

содержит в точности те иррациональные числа $\vartheta = \{0; u_1, u_2, \ldots\}$, для которых

$$\left\{ \begin{matrix} u_1 = a_1, \ldots, u_n = a_n \\ u_1 = a_1, \ldots, u_n = a_n, r \leqq u_{n+1} < s \\ u_1 = a_1, \ldots, u_n = a_n, r \leqq u_{n+1} \end{matrix} \right\}$$

(и, кроме того, уже только некоторые рациональные числа). В символе $\langle a, b \rangle$ в (9), (10), (11) $a < b$ для нечетного, $a > b$ для четного n. Напишем еще длину сегментов (9), (10), (11), пользуясь формулой (2):

$$|I(a_1, \ldots, a_n)| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}, \tag{12}$$

$$|I(a_1, \ldots, a_n; {}^s_r)| = \frac{s - r}{(rq_n + q_{n-1})(sq_n + q_{n-1})}, \tag{13}$$

$$|I(a_1, \ldots, a_n; {}^\infty_r)| = \frac{1}{(rq_n + q_{n-1})\, q_n}. \tag{14}$$

§ 2. Верхняя оценка чисел $\dim M_\delta$, $\dim P_b$, $\dim P_\infty$.

Пусть $0 < \alpha < \delta$. Пусть $M_{\alpha,m}$ (m — натуральное) — множество тех $\vartheta = \{0; a_1, a_2, \ldots\}$, для которых имеет место

$$a_{n+1} > q_n^\alpha \quad \text{для всех} \quad n \geqq m.$$

Очевидно, $M_\delta \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} M_{\alpha,m}$. Докажем, что

$$\mu(M_{\alpha,m}; x^\gamma) = 0 \quad \text{для} \quad \gamma > \frac{1}{\alpha + 2}. \tag{15}$$

Отсюда $\dim M_\delta \leqq \frac{1}{\alpha + 2}$ для $0 < \alpha < \delta$, итак,

$$\dim M_\delta \leqq \frac{1}{\delta + 2} \text{ для } \delta > 0. \tag{16}$$

Чтобы доказать (15), выберем β так, чтобы $\gamma > \beta > \dfrac{1}{\alpha+2}$. Сегменты $I(a_1, \ldots, a_n; {\scriptstyle\infty \atop r})$, в которых

$$n \geqq m\,, \quad a_{k+1} > q_k^\alpha \quad \text{для} \quad m \leqq k < n\,,$$
$$r = [q_n^\alpha] + 1\,,$$

назовем сегментами порядка n. Для всякого $n \geqq m$ соединение всех сегментов порядка n содержит $M_{\alpha,m}$. Ясно, что всякий сегмент $I(a_1, \ldots, a_n; {\scriptstyle\infty \atop r})$ порядка n $(n > m)$ является частью сегмента $I(a_1, \ldots, a_{n-1}; {\scriptstyle\infty \atop r'})$ $(r' = [q_{n-1}^\alpha] + 1)$ порядка $n - 1$.

Пусть $H = I(a_1, \ldots, a_n; {\scriptstyle\infty \atop r})$ какой-нибудь сегмент порядка n; рассмотрим все сегменты $H(a_{n+1}) = I(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}; {\scriptstyle\infty \atop R})$ порядка $n+1$, содержащиеся в H (т. е. $a_{n+1} \geqq r$, $R = [q_{n+1}^\alpha] + 1$). Тогда будет при $n \to \infty$

$$|H|^\beta = \left(\frac{1}{q_n(rq_n + q_{n-1})}\right)^\beta \sim \left(\frac{1}{q_n^{2+\alpha}}\right)^\beta,\ ^{1)}$$

$$\begin{aligned}\sum_{a_{n+1}=r}^{\infty} |H(a_{n+1})|^\beta &= \sum_{a_{n+1}=r}^{\infty} \left(\frac{1}{q_{n+1}(Rq_{n+1} + q_n)}\right)^\beta \sim \sum_{a_{n+1}=r}^{\infty} \left(\frac{1}{q_{n+1}^{2+\alpha}}\right)^\beta \sim \\ &\sim \sum_{a_{n+1}=r}^{\infty} \frac{1}{(a_{n+1}q_n)^{(2+\alpha)\beta}} \sim |H|^\beta \sum_{a_{n+1} > q_n^\alpha} \frac{1}{a_{n+1}^{(2+\alpha)\beta}}\,.\end{aligned} \tag{17}$$

Но $(2+\alpha)\beta > 1$, $q_n \geqq 2^{\frac{1}{2}(n-1)}$; следовательно, из (17) вытекает, что существует такое нарутальное $N > m$, что

$$\sum_{a_{n+1}=r}^{\infty} |I(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}; {\scriptstyle\infty \atop R})|^\beta < |I(a_1, \ldots, a_n; {\scriptstyle\infty \atop r})|^\beta \tag{18}$$
$$(r = [q_n^\alpha] + 1\,, \quad R = [q_{n+1}^\alpha] + 1)$$

для всякого $n \geqq N$ и всякого сегмента $I(a_1, \ldots, a_n; {\scriptstyle\infty \atop r})$ порядка n.

Пусть $I = I(a_1, \ldots, a_N; {\scriptstyle\infty \atop r})$ (где $r = [q_N^\alpha] + 1$) — какой-нибудь сегмент порядка N,

$$M_{\alpha,m}(a_1, \ldots, a_N) = M_{\alpha,m} \cap I\,;$$

из (18) очевидно следует, что

$$\mu(M_{\alpha,m}(a_1, \ldots, a_N); x^\beta) \leqq |I|^\beta < +\infty\,,$$

итак,

$$\mu(M_{\alpha,m}(a_1, \ldots, a_N); x^\gamma) = 0\,,$$

откуда следует (15).

---

[1]) Знак $\sim$ значит: Всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое N, что для всех $n \geqq N$ и всех допустимых значений $a_1, \ldots, a_n$ имеет место

$$\left|(|H| q_n^{2+\alpha})^\beta - 1\right| < \varepsilon.$$

Это вытекает из того, что

$$q_{n-1} \leqq q_n, \quad q_n \geqq 2^{\frac{1}{2}(n-1)}, \quad r = [q_n^\alpha] + 1, \quad \alpha > 0.$$

Оценка числа $\dim P_b$ получается подобным путем. Пусть $b > 1$ — натуральное число и пусть $P_{b,m}$ — множество тех $\vartheta = \{0; a_1, a_2, \ldots\}$, для которых имеет место

$$a_{n+1} \geqq b \quad \text{при всех} \quad n \geqq m$$

(m — натуральное). Сегментами порядка n ($n \geqq m$) мы назовем теперь все сегменты $I(a_1, \ldots, a_n; \overset{\infty}{b})$, где $a_k \geqq b$ при $m<k \leqq n$. Пусть $H = I(a_1, \ldots, a_n; \overset{\infty}{b})$ — какой-нибудь сегмент порядка $n > m+1, H(a_{n+1}) = I(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}; \overset{\infty}{b})$. Пусть $\beta > \frac{1}{2}$. Тогда

$$|H|^\beta = \left(\frac{1}{q_n(bq_n + q_{n-1})}\right)^\beta > \left(\frac{1}{(b + b^{-1})\, q_n^2}\right)^\beta$$

(так как $q_n > a_n q_{n-1} \geqq b q_{n-1}$),

$$\sum_{a_{n+1}=b}^{\infty} |H(a_{n+1})|^\beta = \sum_{a_{n+1}=b}^{\infty} \left(\frac{1}{q_{n+1}(bq_{n+1} + q_n)}\right)^\beta < \frac{1}{b^\beta} \sum_{a_{n+1}=b}^{\infty} \frac{1}{q_{n+1}^{2\beta}} <$$

$$< \frac{1}{b^\beta q_n^{2\beta}} \sum_{a_{n+1}=b}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}^{2\beta}} < |H|^\beta ,$$

если

$$\frac{1}{b^\beta} \sum_{a_{n+1}=b}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1}^{2\beta}} < \frac{1}{(b + b^{-1})^\beta} . \tag{19}$$

Отсюда теми же рассуждениями, как и в случае множества M_δ следует: Если (19) имеет место, то

$$\dim P_b \leqq \beta .$$

Но

$$\sum_{a_{n+1}=b}^{\infty} a_{n+1}^{-2\beta} < b^{-2\beta} + \int_b^\infty x^{-2\beta}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b^{2\beta}} + \frac{1}{(2\beta - 1)\, b^{2\beta-1}} .$$

Значит, (19) непременно имеет место, если

$$\left(1 + \frac{1}{b^2}\right)^\beta \left(\frac{1}{b^{2\beta}} + \frac{1}{(2\beta - 1)\, b^{2\beta-1}}\right) < 1 . \tag{20}$$

Пусть сначала $b = 2$; тогда левая часть в (20) имеет для $\beta \to 1$ предел $\frac{15}{16} < 1$. Значит, существует такое $\beta < 1$, что (20) имеет место; итак,

$$\dim P_2 < 1 . \tag{21}$$

Пусть, во-вторых, задано $\beta > \frac{1}{2}$; тогда левая часть в (20) имеет для $b \to \infty$ предел 0. Значит, существует такое b, что $\dim P_b \leqq \beta$. Следовательно,

$$\lim_{b\to\infty} \dim P_b \leqq \tfrac{1}{2} . \tag{22}$$

Так как $P_\infty \subset P_b$, то мы получаем

$$\dim P_\infty \leqq \tfrac{1}{2} . \tag{23}$$

§ 3. Нижняя оценка чисел $\dim M_\delta$, $\dim P_b$, $\dim P_\infty$.

Так как оба случая множеств

$$\text{A)}\ M_\delta\,,\quad \text{B)}\ P_b$$

аналогичны, то мы будем рассматривать их совместно.

А) Пусть задано $\delta > 0$; выберем натуральное число $c > 2$ и назовем сегментом порядка n $(n = 1, 2, \ldots)$ всякий сегмент

$$I(a_1, \ldots, a_{n;\,r}^{\;s})\,,$$

где

$$[q_{k-1}^\delta] < a_k \leqq [cq_{k-1}^\delta] \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, n, \quad r = [q_n^\delta] + 1, \quad s = [cq_n^\delta] + 1\,.$$

В) Пусть задано натуральное число $b > 1$; выберем натуральное число $c > 2$ и назовем сегментом порядка n $(n = 1, 2, \ldots)$ всякий сегмент

$$I(a_1, \ldots, a_{n;\,b}^{\;cb+1})\,,$$

где

$$b \leqq a_k \leqq cb \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

В обоих случаях обозначим через Q_n соединение всех сегментов порядка n,

$$Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n\,.$$

Ясно, что существуют сегменты всех порядков и что каждый сегмент порядка n содержит по крайней мере два сегмента порядка $n+1$; далее, число сегментов определенного порядка конечно, следовательно, Q_n, Q являются совершенными, непустыми множествами. Далее ясно, что все иррациональные числа из Q принадлежат множеству M_δ (в случае А) или множеству P_b (в случае В); отсюда

$$\dim Q \leqq \dim M_\delta \ \text{в случае А)},$$
$$\dim Q \leqq \dim P_b \ \text{в случае В)}\,.$$

Пусть H — сегмент порядка n, т. е.

$$H = I(a_1, \ldots, a_{n;\,r}^{\;s})\,,\quad r = [q_n^\delta] + 1, \quad s = [cq_n^\delta] + 1$$

в случае А),

$$H = I(a_1, \ldots, a_{n;\,b}^{\;cb+1})$$

в случае В).

В случае А) положим

$$H(a_{n+1}) = I(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1;\,R}^{\;\;S})$$
$$(r \leqq a_{n+1} < s\,,\quad R = [q_{n+1}^\delta] + 1\,,\quad S = [cq_{n+1}^\delta] + 1)\,;$$

в случае B) положим

$$H(a_{n+1}) = I(a_1, \ldots, a_{n+1}; {}^{cb+1}_{b}) \quad (b \leqq a_{n+1} \leqq cb) .$$

В случае A) имеем для $\beta = \dfrac{1}{2+\delta}$

$$|H|^\beta = \left(\frac{s-r}{(rq_n + q_{n-1})(sq_n + q_{n-1})}\right)^\beta \sim \left(\frac{c-1}{c}\,\frac{1}{q_n^{2+\delta}}\right)^\beta \sim \left(\frac{c-1}{c}\right)^\beta \cdot \frac{1}{q_n}$$

[см. (13)]; аналогично

$$|H(a_{n+1})|^\beta \sim \left(\frac{c-1}{c}\right)^\beta \frac{1}{q_{n+1}} \sim \left(\frac{c-1}{c}\right)^\beta \frac{1}{q_n a_{n+1}} .$$

$$\sum_{a_{n+1}=r}^{s-1} |H(a_{n+1})|^\beta \sim |H|^\beta \sum_{a_{n+1}=r}^{s-1} \frac{1}{a_{n+1}} \sim |H|^\beta \log \frac{s}{r} \sim |H|^\beta \log c .$$

Но $c \geqq 3$, $\log c > 1$. Итак, *существует такое натуральное число n_0, что*

$$|H|^\beta < \sum_{a_{n+1}=r}^{s-1} |H(a_{n+1})|^\beta \tag{24}$$

для всякого сегмента H порядка n, если $n \geqq n_0$.

Аналогично в случае B). Здесь

$$|H| = \frac{(c-1)\,b+1}{(bq_n + q_{n-1})((cb+1)\,q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{bq_n^2} ,$$

$$|H(a_{n+1})| = \frac{(c-1)\,b+1}{(bq_{n+1} + q_n)((cb+1)\,q_{n+1} + q_n)} > \frac{bc}{8b^2cq_{n+1}^2} >$$

$$> \frac{1}{32bq_n^2a_{n+1}^2} > \frac{|H|}{32a_{n+1}^2} .$$

Пусть $\frac{1}{2} < \beta < 1$; тогда

$$\sum_{a_{n+1}=b}^{cb} \frac{1}{a_{n+1}^{2\beta}} > \int_b^{cb} \frac{dx}{x^{2\beta}} = \frac{1}{2\beta-1} \cdot \frac{1}{b^{2\beta-1}}\left(1 - \frac{1}{c^{2\beta-1}}\right) ;$$

следовательно,

$$\sum_{a_{n+1}=b}^{cb} |H(a_{n+1})|^\beta > \varrho |H|^\beta ,$$

где

$$\varrho = \frac{1}{32^\beta} \cdot \frac{1}{2\beta-1} \cdot \frac{1}{b^{2\beta-1}}\left(1 - \frac{1}{c^{2\beta-1}}\right) .$$

Очевидно, мы можем выбрать β ($\frac{1}{2} < \beta < 1$) и целое $c > 2$ так, чтобы $\varrho > 1$; *тогда будет*

$$|H|^\beta < \sum_{a_{n+1}=b}^{cb} |H(a_{n+1})|^\beta \tag{25}$$

для всякого сегмента H какого-нибудь порядка $n \geqq 1$.

В дальнейшем мы опять будем рассматривать оба случая A) B) одновременно. В случае A) положим $\beta = \frac{1}{2+\delta}$, $c = 3$ и выберем n_0 так, чтобы (24) имело место для всякого сегмента H порядка $n \geqq n_0$. В случае B) выберем β ($\frac{1}{2} < \beta < 1$) и целое $c > 2$ так, чтобы (25) имело место для всякого сегмента H какого-нибудь порядка $n \geqq 1$ и положим $n_0 = 1$. Заметим, что для всякого n существует только конечное число сегментов порядка n и что сегменты того же самого порядка дизьюнктны. Существует, следовательно, такое положительное число — которое в дальнейшем обозначается через ε — что расстояние между двумя какими-нибудь сегментами порядка n_0 больше ε.

Нашей целью является доказательство неравенства

$$\mu(Q; x^\beta) > 0 \,. \tag{26}$$

В самом деле, отсюда следует в случае A)

$$\dim M_\delta \geqq \beta = \frac{1}{2+\delta} \tag{27}$$

и в случае B)

$$\dim P_b \geqq \beta > \tfrac{1}{2}\,; \tag{28}$$

далее, $P_\infty \supset M_\delta$ для всякого $\delta > 0$; итак,

$$\dim P_\infty \geqq \tfrac{1}{2}\,. \tag{29}$$

Из (16), (21), (22), (23), (27), (28), (29) вытекают все утверждения нашей теоремы.

Доказательство неравенства (26). Пусть X — точная нижняя граница чисел

$$L(\mathfrak{S}) = \sum_i |l_i|^\beta$$

для всех конечных или бесконечных последовательностей открытых промежутков

$$\mathfrak{S}\colon \quad l_1, l_2, l_3, \ldots,$$

для которых

$$Q \subset \bigcup_i l_i\,, \quad |l_i| < \varepsilon$$

(число ε было определено выше).

Достаточно доказать, что $X > 0$. По теореме Бореля мы можем ограничиться тем случаем, когда $\mathfrak{S}$ состоит из конечного числа промежутков, причем можно еще предполагать, что $Q \cap l_i \neq \emptyset$ для всякого l_i. Пусть задана такая конечная последовательность $\mathfrak{S}$. Очевидно, всякое множество $Q \cap l_i$ бесконечно. Заменим каждый l_i замкнутым сегментом $l_i' = \langle a_i, b_i \rangle$, где a_i и b_i — точная нижняя и верхняя граница множества $Q \cap l_i$; имеем $a_i < b_i$, $a_i \in Q$, $b_i \in Q$. Очевидно,

$$Q \subset \bigcup_i l'_i \,, \quad |l'_i| < \varepsilon \,, \quad \sum_i |l'_i|^\beta \leqq \sum_i |l_i|^\beta \,.$$

Назовем **нормальным** всякий сегмент $l = \langle a, b \rangle$ такой, что $|l| < \varepsilon$, $a \in Q$, $b \in Q$, и множество $Q \cap l$ — бесконечно. Конечную последовательность $\mathfrak{S}$: $l_1, \ldots, l_q$ нормальных сегментов назовем **нормальной системой**, если $Q \subset \bigcup_{i=1}^{p} l_i$. Ясно, что X является точной нижней границей чисел $L(\mathfrak{S})$ для всех нормальных систем.

Пусть теперь l — нормальный сегмент. Так как $|l| < \varepsilon$, то l имеет общие точки только с одним сегментом порядка n_0. Тогда существует число $n \geqq n_0$ такое, что l содержится в определенном сегменте H порядка n, но имеет общие точки по крайней мере с двумя сегментами порядка $n + 1$. Пусть

$$H = I(a_1, \ldots, a_{n;\, r}^{\;s}) \,,$$

где

$$r = [q_n^\delta] + 1 \,, \quad s = [cq_n^\delta] + 1$$

в случае A), $r = b$, $s = cb + 1$ в случае B). Сегменты порядка $n + 1$, содержащиеся в H, имеют вид

$$H(a_{n+1}) = I(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1;\, R}^{\;S}) \quad (r \leqq a_{n+1} < s) \,,$$

где $R = [q_{n+1}^\delta] + 1$, $S = [cq_{n+1}^\delta] + 1$ в случае A), $R = b$, $S = cb + 1$ в случае B).

Пусть

$$H(u) \,, \quad H(u + 1), \ldots, H(v - 1) \tag{30}$$

— те сегменты порядка $n + 1$, которые имеют общие точки с l; тогда

$$r \leqq u < v - 1 \leqq s - 1 \,.$$

Сравним теперь числа

$$|l|^\beta \,, \sum_{a_{n+1}=u}^{v-1} |H(a_{n+1})|^\beta = V \,.$$

Оценим сначала расстояние $\mathrm{d}(a_{n+1})$ между $H(a_{n+1})$ и $H(a_{n+1} + 1)$ $(u \leqq \leqq a_{n+1} < v - 1)$.

Для определенности предположим n четным. Тогда $H(a_{n+1} + 1)$ содержится в сегменте $I(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} + 1)$, правым концом которого является число [см. (9)]

$$C_1 = \frac{(a_{n+1} + 1)\, p_n + p_{n-1}}{(a_{n+1} + 1)\, q_n + q_{n-1}} \,.$$

С другой стороны, левым концом сегмента $H(a_{n+1})$ является число [см. (10)]

$$C_2 = \frac{Rp_{n+1} + p_n}{Rq_{n+1} + q_n} = \frac{(Ra_{n+1} + 1)\, p_n + Rp_{n-1}}{(Ra_{n+1} + 1)\, q_n + Rq_{n-1}} .$$

Отсюда (ввиду $p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1} = (-1)^k$)

$$C_2 - C_1 = \frac{R-1}{((a_{n+1} + 1)\, q_n + q_{n-1})((Ra_{n+1} + 1)\, q_n + Rq_{n-1})} ;$$

итак,

$$\mathrm{d}(a_{n+1}) > \frac{1}{18a_{n+1}^2 q_n^2} > \frac{1}{18(v-1)^2 q_n^2} .$$

Отсюда очевидно вытекает

$$|l| \geqq \sum_{a_{n+1}=u}^{v-2} \mathrm{d}(a_{n+1}) > \frac{v-u}{36(v-1)^2 q_n^2} \tag{31}$$

(так как $v - u - 1 \geqq \frac{1}{2}(v-u)$).

С другой стороны [см. (13)]

$$|H(a_{n+1})| = \frac{S-R}{(Rq_{n+1} + q_n)(Sq_{n+1} + q_n)} < \frac{1}{Rq_{n+1}^2} \leqq \frac{1}{Rr^2q_n^2} \tag{32}$$

(так как $a_{n+1} \geqq r$).

В случае B) имеем $r = R = b$, $v - 1 \leqq cb$, $2 \leqq v - u \leqq cb$; итак,

$$|l|^\beta > \left(\frac{1}{18c^2b^2q_n^2}\right)^\beta, \quad V < \frac{cb}{(b^3q_n^2)^\beta}$$

и, окончательно,

$$|l|^\beta > KV , \quad \text{где} \quad K = \frac{1}{(18c^2b^2)^\beta} \cdot \frac{b^{3\beta}}{cb} . \tag{33}$$

В случае A) имеем

$$a_{n+1} \geqq r > q_n^\delta , \quad R > q_{n+1}^\delta > a_{n+1}^\delta q_n^\delta > q_n^{\delta(1+\delta)} ,$$
$$v - u < v - 1 \leqq s - 1 \leqq cq_n^\delta < cr .$$

Значит, [см. (31), (32)]

$$|l|^\beta > \frac{(v-u)^\beta}{36^\beta c^{2\beta} r^{2\beta} q_n^{2\beta}} ,$$

$$V = \sum_{a_{n+1}=u}^{v-1} |H(a_{n+1})|^\beta < \frac{v-u}{q_n^{\delta\beta(1+\delta)} r^{2\beta} q_n^{2\beta}} ,$$

$$|l|^\beta > \frac{1}{36^\beta c^{2\beta}} \frac{q_n^{\delta\beta(1+\delta)}}{(v-u)^{1-\beta}} V .$$

Но $(v-u)^{1-\beta} < c^{1-\beta} q_n^{\delta(1-\beta)}$, $\beta(2+\delta) = 1$; итак,

$$\delta\beta(1+\delta) - \delta(1-\beta) = \beta\delta(2+\delta) - \delta = 0 .$$

Значит,

$$|l|^\beta > KV, \quad \text{где} \quad K = \frac{1}{36^\beta c^{1+\beta}}. \tag{34}$$

Закончим теперь доказательство в обоих случаях A), B) совместно. Систему $\mathfrak{S}$: $j_1, \ldots, j_q$ конечного числа сегментов назовем **канонической**, если $Q \subset \bigcup_{k=1}^{q} j_k$ и если всякий сегмент j_k является сегментом какого-нибудь порядка $m_k \geqq n_0$. Число $m = \operatorname{Max}(m_1, \ldots, m_q)$ назовем **порядком** канонической системы $\mathfrak{S}$.

Пусть Y — точная нижняя граница чисел $L(\mathfrak{S})$ для всех канонических систем; притом мы можем ограничиться **дизъюнктными** каноническими системами (т. е. $j_a \cap j_b = \emptyset$ для $a \neq b$); действительно, если $m_a \leqq m_b$ и $j_a \cap j_b \neq \emptyset$, то $j_b \subset j_a$, и мы можем выпустить j_b, не увеличивая числа $L(\mathfrak{S})$.

Заметим, что существует только одна дизъюнктная каноническая система порядка n_0: она состоит из всех сегментов порядка n_0.

Пусть $\mathfrak{S}$: $l_1, \ldots, l_p$ — нормальная система; заменим каждый сегмент l_i сегментами (30), выбраными так, как было описано выше: Если l_i содержится в сегменте H порядка n, но имеет общие точки точно с $v - u$ $(v - u > 1)$ сегментами порядка $n + 1$, отмеченными в (30), то заменим l_i этими $v - u$ сегментами. Таким образом мы получим каноническую систему $\mathfrak{T}$ и, вследствие (33) или (34), будет $L(\mathfrak{S}) > KL(\mathfrak{T}) \geqq KY$, откуда вытекает $X \geqq KY$. Итак, достаточно доказать, что $Y > 0$.

Для этой цели, пусть $\mathfrak{T}$ будет какая-нибудь дизъюнктная каноническая система порядка m (имеем $m \geqq n_0$); пишем $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_m$.

Пусть $m > n_0$ и пусть $I = I(a_1, \ldots, a_m; {}^{s}_{R})$—какой-нибудь сегмент порядка m, содержащийся в $\mathfrak{T}_m$. Тогда $\mathfrak{T}_m$ не может содержать никакого сегмента порядка $n < m$, содержащего I. Итак, $\mathfrak{T}_m$ содержит все сегменты порядка m, содержащиеся в сегменте $H = I(a_1 \ldots, a_{m-1}; {}^{s}_{r})$ (порядка $m - 1$), который, в свою очередь, содержит I. Заменив эти сегменты сегментом H, мы не увеличим числа $L(\mathfrak{T}_m)$ [см. (24), (25)]. Итак, заменив в $\mathfrak{T}_m$ все сегменты порядка m соответствующими сегментами порядка $m - 1$, мы получим дизъюнктную каноническую систему $\mathfrak{T}_{m-1}$ порядка $m - 1$, так что $L(\mathfrak{T}_m) \geqq L(\mathfrak{T}_{m-1})$. Повторяя этот процесс, мы получим, наконец, дизъюнктную каноническую систему $\mathfrak{T}_{n_0}$ порядка n_0, так что

$$L(\mathfrak{T}) = L(\mathfrak{T}_m) \geqq L(\mathfrak{T}_{n_0}) > 0.$$

Но, как было сказано выше, существует только одна каноническая система порядка n_0; значит, $Y \geqq L(\mathfrak{T}_{n_0}) > 0$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *V. Jarník:* Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass, Матем. Сборник *36*, 371—382 (1929).
[2] *V. Jarník:* Über die simultanen diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr. *33*, 505—543 (1931).
[3] *A. S. Besicovitch:* Sets of fractional dimensions IV: On rational approximation to real numbers. Journ. London Math. Soc. *9*, 126—131 (1934).

Résumé

CONTRIBUTION À LA THÉORIE MÉTRIQUE DES FRACTIONS CONTINUES

VOJTĚCH JARNÍK, Praha.

(Reçu le 3 mai 1954.)

Si $\vartheta = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$ est un nombre irrationnel ($0 < \vartheta < 1$, a_i — nombres entiers positifs), désignons par p_n, q_n les numérateurs et les dénominateurs de ses réduites (voir (1)).

M étant un ensemble de nombres réels, désignons par dim M sa dimension (au sens de Hausdorff). Pour $\delta > 0$, soit N_δ (resp. M_δ) l'ensemble de tous les nombres ϑ tels que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{q_n^\delta} > 0 \text{ (resp. } \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{q_n^\delta} > 0);$$

soit P_∞ l'ensemble de tous les nombres ϑ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Enfin, pour $b > 1$ entier soit P_b l'ensemble de tous les nombres ϑ tels que $a_n \geqq b$ à partir d'un certain n. On sait que dim $N_\delta = \dfrac{2}{2+\delta}$ (voir [1], [2], [3]); ici, on démontre que $M_\delta = \frac{1}{2}$ dim N_δ, dim $P_\infty = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} <$ dim $P_b < 1$ pour $b > 1$, $\lim\limits_{b\to\infty}$ dim $P_b = \frac{1}{2}$.