

Bohumil Bydžovský

Über zwei neue ebene Konfigurationen $(12_4, 16_3)$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 3, 193–218

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100109>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1954

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER ZWEI NEUE EBENE KONFIGURATIONEN (12₄, 16₃)

BOHUMIL BYDŽOVSKÝ, Praha.

(Eingegangen am 18. Dezember 1953.)

In einer Arbeit in den „Mathematischen Nachrichten“¹⁾ hat Prof. *M. Zacharias* eine Konfiguration (12₄, 16₃) studiert, die von den vier schon bekannten Konfigurationen dieser Art verschieden ist. Ich habe im Kapitel I. der vorliegenden Arbeit diese Konfiguration einer näheren Untersuchung unterworfen und dabei gefunden, dass die zugehörige Inzidenztafel eine zweite Lösung zulässt. Den Eigenschaften dieser so gefundenen Konfiguration ist Kapitel II. gewidmet. Die diesbezüglichen Betrachtungen haben zu einer weiteren Fragestellung geführt; die Antwort ist eine weitere Konfiguration, der Kapitel III. dieser Arbeit gewidmet ist.

I.

Ich werde die von Prof. *M. Zacharias* eingeführte Bezeichnung beibehalten und reproduziere in Fig. 1 seine Inzidenztafel, die in einer weiteren

	<i>a</i>	<i>a</i> ₁	<i>a</i> ₂	<i>a</i> ₃	<i>b</i> ₁	<i>b</i> ₂	<i>b</i> ₃	<i>c</i> ₁	<i>c</i> ₂	<i>c</i> ₃	<i>d</i> ₁	<i>d</i> ₂	<i>d</i> ₃	<i>e</i> ₁	<i>e</i> ₂	<i>e</i> ₃
<i>A</i> ₁	×				×	×	×									
<i>A</i> ₂	×							×	×	×						
<i>A</i> ₃	×										×	×	×			
<i>B</i> ₁		×						×			×			×		
<i>B</i> ₂		×							×			×			×	
<i>B</i> ₃		×								×			×			×
<i>C</i> ₁			×		×			×								×
<i>C</i> ₂			×			×			×					×		
<i>C</i> ₃			×				×			×					×	
<i>D</i> ₁				×	×						×				×	
<i>D</i> ₂				×		×						×				×
<i>D</i> ₃				×			×						×	×		

Fig. 1.

¹⁾ Mathematische Nachrichten, 1. Band, Heft 5, Sept./Okt. 1948, S. 332.

²⁾ Mathematische Nachrichten, 8. Band, 1952, Sonderabdruck S. 5.

seiner Arbeit auf S. 5 enthalten ist²). Da alle vier oben angeführten Konfigurationen die Eigenschaft besitzen, dass ihre Punkte auf einer kubischen Kurve liegen, so habe ich zunächst untersucht, ob und inwiefern eine durch diese Inzidenztafel definierte Konfiguration diese Eigenschaft besitzt. Zu diesem Zwecke führe ich auf einer Kurve 3. Ordnung vom Geschlechte Eins in wohlbekannter Weise einen elliptischen Parameter ein in der Weise, dass die Kollinearität von drei Punkten der Kurve dadurch ausgedrückt ist, dass die Summe der den Punkten angehörigen Parameter kongruent Null modd. per, ist. Es sei u_i der Parameter des Punktes A_i , v_i der Parameter des Punktes B_i , w_i der Parameter des Punktes C_i und t_i der Parameter des Punktes D_i . Dann sind die Inzidenzen der Tafel durch folgende sechzehn Kongruenzen ausgedrückt, und zwar entspricht

der Geraden a	die Kongruenz	$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0$,
der Geraden a_1	die Kongruenz	$v_1 + v_2 + v_3 \equiv 0$,
der Geraden a_2	die Kongruenz	$w_1 + w_2 + w_3 \equiv 0$,
der Geraden a_3	die Kongruenz	$t_1 + t_2 + t_3 \equiv 0$,
der Geraden b_1	die Kongruenz	$u_1 + w_1 + t_1 \equiv 0$,
der Geraden b_2	die Kongruenz	$u_1 + w_2 + t_2 \equiv 0$,
der Geraden b_3	die Kongruenz	$u_1 + w_3 + t_3 \equiv 0$,
der Geraden c_1	die Kongruenz	$u_2 + v_1 + w_1 \equiv 0$,
der Geraden c_2	die Kongruenz	$u_2 + v_2 + w_2 \equiv 0$,
der Geraden c_3	die Kongruenz	$u_2 + v_3 + w_3 \equiv 0$,
der Geraden d_1	die Kongruenz	$u_3 + v_1 + t_1 \equiv 0$,
der Geraden d_2	die Kongruenz	$u_3 + v_2 + t_2 \equiv 0$,
der Geraden d_3	die Kongruenz	$u_3 + v_3 + t_3 \equiv 0$,
der Geraden e_1	die Kongruenz	$v_1 + w_2 + t_3 \equiv 0$,
der Geraden e_2	die Kongruenz	$v_2 + w_3 + t_1 \equiv 0$,
der Geraden e_3	die Kongruenz	$v_3 + w_1 + t_2 \equiv 0$.

Jede Kongruenz soll kurz durch denjenigen Buchstaben bezeichnet werden, welcher die ihr entsprechende Gerade bezeichnet. Durch Addition der Kongruenzen b_1, b_2, b_3 bekommt man

$$3u_1 + w_1 + w_2 + w_3 + t_1 + t_2 + t_3 \equiv 0,$$

woraus durch Benutzung von Kongruenz a_2 und a_3 folgt

$$3u_1 \equiv 0.$$

Ganz ähnlich bekommt man

$$3u_2 \equiv 0, \quad 3u_3 \equiv 0.$$

Es sind also A_1, A_2, A_3 drei (in einer Geraden liegende) Inflexionspunkte der Kurve. Durch Addition von c_1, d_1 , bekommt man

$$u_2 + u_3 + 2v_1 + w_1 + t_1 \equiv 0$$

und mit Rücksicht auf b_1 :

$$u_2 + u_3 + 2v_1 - u_1 \equiv 0,$$

woraus mit Rücksicht auf a folgt

$$2v_1 - 2u_1 \equiv 0.$$

Es ist jedoch

$$-2u_1 \equiv u_1,$$

die vorletzte Kongruenz besagt also, dass

$$2v_1 + u_1 \equiv 0.$$

Ganz ähnlich folgt aus c_2, d_2, b_2, a

$$2v_2 + u_1 \equiv 0$$

und aus c_3, d_3, b_3, a

$$2v_3 + u_1 \equiv 0.$$

Dies besagt bekanntlich, dass die Punkte v_i , d. h. die Punkte B_i , Berührungspunkte der vom Punkte A_1 an die Kurve gelegten Tangenten sind. Wendet man dasselbe Verfahren auf die Kongruenzen b_i, c_i, d_i, a , bezw. b_i, d_i, c_i, a an, so kommt

$$2w_i + u_3 \equiv 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3,$$

und

$$2t_i + u_2 \equiv 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3,$$

was besagt, dass die Punkte C_i , bezw. D_i Berührungspunkte der vom Punkte A_3 , bzw. A_2 an die Kurve gelegten Tangenten sind. Da u_1 Inflexionspunkt ist, kann sein Parameter als kongruent Null angenommen werden und der Parameter des Punktes u_2 kongruent $2\omega_1/3$, wo $2\omega_1$ eine Periode der in Betracht kommenden elliptischen Funktion ist. Dann ist der Parameter des Punktes u_3 kongruent $4\omega_1/3$. Die Kongruenz

$$2v + u_1 \equiv 0$$

hat dann drei Lösungen, die kongruent den Halbperioden ω_i der elliptischen Funktion sind; wir nehmen an, dass

$$v_i \equiv \omega_i.$$

Dann folgt aus c_i

$$w_i \equiv -\frac{2\omega_1}{3} - \omega_i \equiv \frac{4\omega_1}{3} + \omega_i$$

und aus d_i

$$t_1 \equiv -\frac{4\omega_1}{3} - \omega_i \equiv \frac{2\omega_i}{3} + \omega_1$$

Damit sind die Parameter aller Punkte der Konfiguration festgelegt; wir stellen sie zusammen:

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv 0, & u_2 &\equiv \frac{2\omega_1}{3}, & u_3 &\equiv \frac{4\omega_1}{3}, \\ v_1 &\equiv \omega_1, & v_2 &\equiv \omega_2, & v_3 &\equiv \omega_3, \\ w_1 &\equiv \frac{4\omega_1}{3} + \omega_1, & w_2 &\equiv \frac{4\omega_1}{3} + \omega_2, & w_3 &\equiv \frac{4\omega_1}{3} + \omega_3, \\ t_1 &\equiv \frac{2\omega_1}{3} + \omega_1, & t_2 &\equiv \frac{2\omega_1}{3} + \omega_2, & t_3 &\equiv \frac{2\omega_1}{3} + \omega_3. \end{aligned} \tag{I}$$

Diese Lösung hat sich aus den Kongruenzen a, a_i, b_i, c_i, d_i ergeben; man bestätigt ohne weiters, dass dieselbe diese Kongruenzen tatsächlich erfüllt. Man überzeugt sich aber auch leicht, dass die gefundenen Parameterwerte auch den bei der Berechnung nicht benutzten Kongruenzen e_i genügen. Es hat sich also Folgendes ergeben:

Auf einer kubischen Kurve vom Geschlecht Eins gibt es eine der Inzidenztafel 1. entsprechende Konfiguration. Dieselbe besteht aus drei in einer Geraden liegenden Inflexionspunkten und den neun Berührungspunkten der von diesen Inflexionspunkten an die Kurve gelegten Tangenten.

Diese Berührungspunkte sind bekanntlich sog. sextaktische Punkte der Kurve. Nun liefern jedoch die soeben erwähnten 12 Punkte eine Hesse'sche Konfiguration auf der Kurve. Man bekommt bekanntlich eine Hesse'sche Konfiguration, wenn man die zwölf Berührungspunkte der, von drei in einer Geraden liegenden Punkten der Kurve, an die Kurve gelegten Tangenten betrachtet. In unserem Falle ist diese Konfiguration insofern spezialisiert, als die drei in einer Geraden liegenden Ausgangspunkte mit unter die Konfigurationspunkte zu zählen sind, da von den vier Berührungspunkten der von einem Punkte der Kurve an dieselbe gelegten Tangenten einer mit dem Ausgangspunkt, der ein Inflexionspunkt ist, zusammenfällt. Eine weitere Spezialisierung besteht darin, dass die je drei übrigen Berührungspunkte auf einer Geraden liegen, was eine bekannte Eigenschaft der Inflexionspunkte der kubischen Kurve ausdrückt. Diese drei Geraden gehören jedoch nicht zur Hesse'schen Konfiguration, da die Konfigurationsgeraden dieser Konfiguration je drei Berührungspunkte verbinden, die verschiedene Tangentialpunkte besitzen. Dagegen gehören zu dieser Hesse'schen Konfiguration drei Geraden, die in der Inzidenztafel nicht enthalten sind, nämlich die Geraden $B_1C_3D_2, B_2C_1D_3, B_3C_2D_1$. Tatsächlich bestätigt man leicht auf Grund der Tafel (I), dass die

drei Punkte v_1, w_3, t_2 , bzw. v_2, w_1, t_3 ; v_3, w_2, t_1 je in einer Geraden liegen. Diesen Tatbestand kann man folgendermassen zusammenfassen:

Drei in einer Geraden liegende Inflexionspunkte einer kubischen Kurve vom Geschlecht Eins, sammt den neun Berührungspunkten der von diesen Inflexionspunkten an die Kurve gelegten Tangenten, bilden eine Gruppe von zwölf Punkten, die zu je dreien auf neunzehn Geraden liegen. Lässt man von diesen Geraden je drei passend gewählte fort, so erhält man entweder eine Hesse'sche Konfiguration oder eine der Inzidenztafel 1. entsprechende Konfiguration.

Wie die drei fortzulassenden Geraden gewählt werden müssen, ergibt sich sofort aus den obigen Erwägungen. Um die Hesse'sche Konfiguration zu erhalten, muss man diejenigen drei Geraden fortlassen, welche je drei denselben Tangentialpunkt besitzende Berührungspunkte enthalten, also, um zu unserer Bezeichnung zurückzukommen, die Geraden $B_1B_2B_3, C_1C_2C_3, D_1D_2D_3$. Um die der Inzidenztafel entsprechende Konfiguration zu erhalten, muss man folgendermassen vorgehen: durch jeden Berührungspunkt gehen zwei Geraden, die noch je zwei Berührungspunkte enthalten, deren Tangentialpunkte verschieden sind von dem, welcher dem gewählten Berührungspunkt zugehört. Von diesen zwei Geraden muss eine fortgelassen werden; ist dies für einen Berührungspunkt geschehen, so folgt aus den Konfigurationsregeln ohne Weiteres, welche weitere zwei Geraden fortgelassen werden sollen. So sind z. B. $B_1C_2D_3, B_1C_3D_2$ die zwei oben erwähnten Geraden für den Punkt B_1 . Wird die zweite fortgelassen, so muss von den durch B_2 gehenden Geraden die Gerade $B_2C_1D_3$ fortgelassen werden, da anderenfalls durch C_3 nur drei Konfigurationsgeraden gehen würden. Aus ähnlichem Grunde muss dann die Gerade $B_3C_2D_1$ fortgelassen werden. So erhält man genau den in unserer Inzidenztafel vorgesehenen Fall. Wird dagegen $B_1C_2D_3$ fortgelassen, so müssen auch die Geraden $B_2C_3D_1, B_3C_1D_2$ fortgelassen werden und an ihre Stelle treten im Konfigurationsschema dann die Geraden $B_1C_3D_2, B_2C_1D_3, B_3C_2D_1$, was natürlich eine Konfiguration desselben Typus ergibt.

Die so gewonnene, von der Hesse'schen verschiedene Konfiguration ist identisch mit der von Prof. M. Zacharias betrachteten, was ohne grosse Schwierigkeiten aus bekannten Eigenschaften der kubischen Kurve gefolgert werden kann. Doch wird dies durch die weiter folgenden Betrachtungen unmittelbar erwiesen werden. Im Einklang damit und im Anschluss an eine von Prof. Zacharias gewählte Bezeichnung werde ich weiterhin eine durch die Inzidenztafel 1. definierte Konfiguration, deren Punkte auf einer kubischen Kurve liegen, kurz als Konfiguration Z bezeichnen.

Nachdem im Vorhergehenden eine geometrische Lösung der Inzidenztafel gefunden worden ist, erübrigt es nun zu untersuchen, ob es die einzig mögliche Lösung ist. Das werde ich rechnerisch durchführen und zu diesem Zwecke ein geeignetes Koordinatensystem wählen. Hierbei werde ich von der Eigenschaft Gebrauch machen, dass die drei Geraden $B_1B_2B_3, C_1C_2C_3, D_1D_2D_3$ sich in

einem Punkte treffen.³⁾ Diesen Punkt wähle ich als den Punkt $O_1(1, 0, 0)$ weiterhin habe der Punkt B_1 die Koordinaten $0, 1, 0$, was durch die Bezeichnung $B_1(0, 1, 0)$ ausgedrückt sein mag. Desgleichen gelte $D_1(0, 0, 1)$ und $C_1(1, 1, 1)$. Hiedurch ist das Koordinatensystem festgelegt und aus der soeben erwähnten Eigenschaft folgt, dass $B_2(y, 1, 0)$ ist, wo y einen von Null verschiedenen Wert hat. Desgleichen sei $B_3(y', 1, 0)$, $D_2(z, 0, 1)$, $D_3(z', 0, 1)$, $C_2(u, 1, 1)$, $C_3(u', 1, 1)$. Es ist $A_1C_1D_1$ (d. h. diese drei Punkte liegen in einer Geraden), und desgleichen $A_1C_2D_2$. Der Punkt A_1 ist also Schnittpunkt der Geraden

$$C_1D_1 \dots x_1 - x_2 = 0, \quad C_2D_2 \dots x_1 + x_2(z - u) - zx_3 = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$A_1(z, z, 1 + z - u).$$

Es ist weiter $A_2B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und daraus folgt in ähnlicher Weise

$$A_2(y, 1 + y - u, y)$$

und aus $A_3B_1D_1$, $A_3B_2D_2$ folgt $A_3(0, z, -y)$. Der Punkt A_2 liegt auch auf der Geraden

$$B_3C_3 \dots x_1 - y'x_2 + x_3(y' - u') = 0,$$

was die Bedingung ergibt

$$uy' - u'y + y - y' = 0. \quad (1)$$

Der Punkt A_3 liegt auch auf der Geraden

$$B_3D_2 \dots x_1 - y'x_2 - z'x_3 = 0,$$

was zur Bedingung führt

$$yz' - y'z = 0. \quad (2)$$

Dass der Punkt A_1 auch auf der Geraden

$$C_3D_3 \dots x_1 + x_2(z' - u') - z'x_3 = 0$$

liegt, wird durch die Bedingung ausgedrückt

$$uz' - u'z + z - z' = 0.$$

Diese folgt jedoch sofort aus den Gleichungen (1), (2) durch Elimination von y, y' (was eine einfache geometrische Bedeutung hat), sodass die letzte Gleichung keine neue Bedingung bedeutet. Es ist auch nicht notwendig auszudrücken, dass die drei Punkte A_1, A_2, A_3 in einer Geraden liegen, denn das folgt aus dem Desarguesschen Satze über perspektive Dreiecke.

Es muss noch ausgedrückt werden, dass $B_1C_2D_3$ ist; dies gibt die Bedingung

$$z' - u = 0, \quad (3)$$

³⁾ S. die in Anm. ¹⁾ angeführte Arbeit S. 333.

ebenso folgt aus $B_2C_3D_1$

$$u' - y = 0 \quad (4)$$

und aus $B_3C_1D_2$

$$y' + z - 1 = 0. \quad (5)$$

Die sechs Zahlen y, z, u, y', z', u' genügen also den fünf Gleichungen (1) bis (5), die leicht zu lösen sind. Man substituiere aus den letzten drei Gleichungen für y', z', u' in (1) und (2); man erhält so

$$\begin{aligned} y^2 - z - u + uz - y + 1 &= 0, \\ uy - (1 - z)z &= 0. \end{aligned} \quad (5')$$

Durch Elimination von u ergibt sich hieraus die Gleichung

$$(z - y)[z^2 + z(y - 2) + y^2 - y + 1] = 0, \quad (6)$$

aus welcher folgt als erste Lösung:

I. $z = y$. Hieraus folgt dann weiter:

$$u = 1 - y, \quad y' = 1 - y, \quad z' = 1 - y, \quad u' = y.$$

Ist y reel, so ist dann die ganze Konfiguration reel und ich bezeichne diese erste Lösung kurz als die „reelle“. Die Konfigurationspunkte sind:

$$\begin{array}{lll} A_1(1, 1, 2), & A_2(1, 2, 1), & A_3(0, 1, -1), \\ B_1(0, 1, 0), & B_2(y, 1, 0), & B_3(1 - y, 1, 0), \\ C_1(1, 1, 1), & C_2(1 - y, 1, 1), & C_3(y, 1, 1), \\ D_1(0, 0, 1), & D_2(y, 0, 1), & D_3(1 - y, 0, 1) \end{array}$$

und diese genügen unserer Inzidenztafel. Man überzeugt sich leicht, dass auch $B_1C_3D_2, B_2C_1D_3, B_3C_2D_1$ ist.

Als zweite Lösung ergibt sich aus 6):

$$\text{II.} \quad z^2 + z(y - 2) + y^2 - y + 1 = 0.$$

Hieraus folgt

$$z = 1 + \alpha y,$$

wo α eine imaginäre dritte Wurzel aus 1 bezeichnet. Man bekommt weiter

$$u = -\alpha(1 + \alpha y), \quad y' = -\alpha y, \quad z' = -\alpha(1 + \alpha y), \quad u' = y. \quad (7)$$

Diese Lösung bezeichne ich kurzerhand als die „imaginäre“, da sie in keinem Falle zu einer geometrisch reellen Konfiguration führt. Die Konfigurationspunkte sind in diesem Falle:

$$\begin{array}{lll} A_1(1 + \alpha y, 1 + \alpha y, 1 - \alpha^2 - y), & A_2(y, -\alpha^2 - \alpha y, y), & A_3(0, 1 + \alpha y, -y), \\ B_1(0, 1, 0), & B_2(y, 1, 0), & B_3(-\alpha y, 1, 0), \\ C_1(1, 1, 1), & C_2(-\alpha - \alpha^2 y, 1, 1), & C_3(y, 1, 1), \\ D_1(0, 0, 1), & D_2(1 + \alpha y, 0, 1), & D_3(-\alpha - \alpha^2 y, 0, 1) \end{array}$$

und man überzeugt sich leicht, dass sie unserer Inzidenztafel genügen. Dagegen gilt in diesem Falle weder $B_1C_3D_2$ noch $B_2C_1D_3$ noch $B_3C_2D_1$. Soll nämlich $B_1C_3D_2$ gelten, so muss

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ 1 + \alpha y & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \alpha y - y = 0.$$

Hieraus folgt

$$y = \frac{1}{1 - \alpha} \text{ und dann } z = \frac{1}{1 - \alpha} = y.$$

Das ist jedoch ein Fall der reellen Lösung (der natürlich zu keiner reellen Konfiguration führt, da y imaginär ist). Bei der imaginären Lösung treten also keine der Konfiguration fremde Verbindungsgeraden von je drei Punkten auf, wie es bei der reellen Lösung geschieht. Daraus folgt auch, dass die Punkte einer der imaginären Lösung entsprechenden Konfiguration auf keiner Kubik liegen, denn sollte dies der Fall sein, so müsste $B_1C_3D_2$ usw. gelten, wie wir oben gefunden haben.

Zusammenfassend können wir also folgenden Satz aussprechen:

Der Inzidenztafel 1. kann durch zwei verschiedene geometrische Lösungen genügt werden. Die Konfigurationen der ersten Lösung haben die Eigenschaft, dass alle ihre Punkte auf einer Kubik vom Geschlechte Eins liegen; unter ihnen gibt es sowohl reelle als auch imaginäre Konfigurationen. Dabei treten drei Verbindungsgeraden von je drei Konfigurationspunkten auf, die nicht zur Konfiguration gehören. Die Konfigurationen der zweiten Lösung sind immer imaginär, ihre Punkte liegen auf keiner Kubik und es treten keine der Konfiguration fremde Geraden auf, es gibt jedoch einen der Konfiguration fremden Punkt (s. weiter unten).

Hieraus folgt nun sofort, dass die Konfiguration Z zur reellen Lösung gehört, dass also ihre Punkte auf einer Kubik liegen.

Angesichts des Umstandes, dass die Punkte aller bisher bekannten (fünf) Konfigurationen (12_4 , 16_3) auf einer Kubik liegen, ist es bemerkenswert, dass durch die imaginäre Lösung unserer Inzidenztafel das erste Beispiel einer Konfiguration dieser Art geliefert wird, deren Punkte auf keiner Kubik liegen.

Ich füge noch einige Bemerkungen hinzu.

Auf S. 333 seiner in Anm.¹⁾ erwähnten Arbeit hat Prof. Zacharias die Frage offengelassen, ob es andere Konfigurationen gibt als die von ihm angegebene, welche seiner Inzidenztafel in Fig. 1 auf derselben Seite genügen. Diese Frage ist durch den soeben ausgesprochenen Satz bejahend und restlos beantwortet, da die soeben erwähnte Inzidenztafel mit der in dieser Arbeit betrachteten äquivalent ist.

In einer Konfiguration (12₄, 16₃) ist ein jeder Punkt mit acht Punkten verbunden, da durch denselben vier Konfigurationsgeraden gehen, und also von drei Punkten getrennt. Die gegenseitige Lage dieser drei Punkte ist für die Konfiguration kennzeichnend. In der durch die Inzidenztafel 1. definierten Konfiguration gibt es drei Punkte (nämlich die Punkte A_i) von solcher Beschaffenheit, dass ein jeder von je drei in einer Konfigurationsgeraden liegenden Punkten getrennt ist. Was die übrigen Punkte anbelangt, so ist z. B. der Punkt B_1 von den Punkten A_1, C_3, D_2 getrennt; von diesen sind A_1, C_3 und A_1, D_2 verbunden (denn es ist $A_1C_3D_3$ und $A_1C_2D_2$), dagegen C_3, D_2 getrennt. Ähnliches gilt von den Punkten B_1, B_3 und auch von allen Punkten C_i, D_i , da alle diese Punkte äquivalent sind. Das bedeutet, da es in diesem Falle kein Quadrupel von gegenseitig getrennten Punkten gibt, während in den vier bisher bekannten Konfigurationen wenigstens ein solches Quadrupel vorkommt.

Würde man in der Inzidenztafel den Ansatz $B_1C_2D_3, B_2C_3D_1, B_3C_1D_2$ mit dem Ansatz $B_1C_3D_2, B_2C_1D_3, B_3C_2D_1$ vertauschen, so würde man die gleiche Konfiguration Z bekommen, doch eine andere der imaginären Lösung, natürlich von demselben Typus.

II.

Als kennzeichnende Eigenschaft der von ihm betrachteten Konfiguration gibt Prof. Zacharias⁴⁾ gewisse perspektivische Beziehungen zwischen den Konfigurationspunkten an. Dieselben bleiben natürlich geltend auch im imaginären Falle, doch ist bemerkenswert, dass da noch weitere solche Beziehungen auftreten, sodass die Konfiguration in diesem Falle als Lösung einer Aufgabe über mehrfache Perspektivitäten aufgefasst werden kann.

Zunächst betrachten wir die drei Geraden $B_1C_2D_3, B_2C_3D_1, B_3C_1D_2$. Ihre Gleichungen sind

$$x_1 - ux_3 = 0, \quad x_1 - yx_2 = 0, \quad x_1 + x_2(z - 1) - zx_3 = 0.$$

Die Determinante dieser drei Geraden lautet, wenn man für u aus (5') einsetzt:

$$\begin{vmatrix} y & 0 & z(z-1) \\ 1 & -y & 0 \\ 1 & z-1 & -z \end{vmatrix} = z[z^2 + z(y-2) + y^2 - y + 1]$$

und ist also Null im Falle der imaginären Lösung. Das bedeutet, dass die drei oben genannten Geraden sich in einem Punkte schneiden. Dieser Punkt S hat die Koordinaten uy, u, y oder, wenn man jetzt (7) benutzt:

$$-\alpha y(1 + \alpha y), \quad -\alpha(1 + \alpha y), \quad y.$$

⁴⁾ S. Anm. 1), S. 333.

Nun ist die Gleichung der Geraden $A_1A_2A_3$:

$$x_1(x^2 - 1) + yx_2 + x_3(1 + \alpha y) = 0$$

und man überzeugt sich leicht, dass die Koordinaten des Punktes S dieser Gleichung genügen. Der Punkt S ist also Schnittpunkt von vier Konfigurationsgeraden, gehört aber nicht zur Konfiguration. Es treten also, wie wir sahen, im imaginären Fall keine fremden Geraden auf, dagegen ein fremder Punkt, der nicht zur Konfiguration zu zählen ist.

Die Perspektivitätseigenschaft der durch Inzidenztafel 1. definierten Konfiguration besteht darin, dass die Dreiecke $B_1C_1D_1$, $B_2C_2D_2$, $B_3C_3D_3$ paarweise perspektiv sind und zwar so, dass diese Perspektivitäten denselben Mittelpunkt und dieselbe Achse besitzen. Ich werde weiterhin kurz von drei gleichartig perspektiven Dreiecken sprechen. Nun überzeugt man sich leicht, dass im Falle der imaginären Lösung auch die Dreiecke $B_1C_3D_2$, $B_2C_1D_3$, $B_3C_2D_1$ gleichartig perspektiv sind, wobei der gemeinsame Mittelpunkt derselbe ist, wie im ersten Falle, und auch die beiden gemeinsamen Achsen zusammenfallen. Durch eine ganz elementare und uninteressante Rechnung findet man, dass sich die Geraden C_3D_2 , C_1D_3 , C_2D_1 im Punkte

$$A'_1(-\alpha(1 + \alpha y)^2, \quad 1 + \alpha y, \quad 1 - \alpha + 2\alpha y)$$

treffen, desgleichen die Geraden B_1C_3 , B_2C_1 , B_3C_2 im Punkte

$$A'_2(y^2, \quad 2y - 1, \quad y)$$

und die Geraden B_1D_2 , B_2D_3 , B_3D_1 im Punkte

$$A'_3(\alpha y(1 + \alpha y), \quad -(1 + \alpha y), \quad \alpha y)$$

und dass diese drei Punkte tatsächlich in der Geraden $A_1A_2A_3$ liegen. Es sind also im imaginären Falle die neun Punkte B_i , C_i , D_i in solcher gegenseitiger Lage, dass sie auf zweifache Art in drei Dreiecke verteilt werden können, die perspektiv mit derselben Achse sind, wobei in beiden Fällen die Achse dieselbe ist. (Es ist ein Leichtes sich zu überzeugen, dass nicht solches im reellen Fall vorkommt). Nun ist die Frage nahe, inwiefern diese Verhältnisse für die Konfiguration unserer imaginären Lösung charakteristisch sind. Diese Frage werde ich beantworten.

Es seien also umgekehrt neun Punkte gegeben und es sollen die Bedingungen untersucht werden, unter welchen diese neun Punkte sich auf zweierlei Art in drei Dreiecke verteilen lassen, welche gleichartig perspektiv sind, wobei in beiden Fällen der gemeinsame Mittelpunkt und die gemeinsame Achse dieselben sind. (Daraus folgt schon auch, dass drei einander entsprechende Punkte in einer Geraden liegen und drei einander entsprechende Geraden sich in einem Punkte treffen). Sind also drei Dreiecke gleichartig perspektiv, so liegen ihre Ecken zu je dreien auf drei durch den Mittelpunkt gehenden Geraden und ihre Seiten schneiden sich zu je dreien in drei auf der Achse

liegenden Punkten. Indem ich die im vorigen Kapitel benutzte Bezeichnung beibehalte, bezeichne ich die Ecken der drei perspektiven Dreiecke mit B_i , $C_i D_i$ wobei B_1, B_2, B_3 in einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden liegen und das Gleiche von C_1, C_2, C_3 , bezw. D_1, D_2, D_3 gilt, und $B_i C_i$, bezw. $C_i D_i, B_i D_i$ die entsprechenden¹ Dreiecksseiten sind. Ich wähle den gemeinsamen Mittelpunkt als den Punkt $O_1(1, 0, 0)$ des Koordinatensystems; ist dann wiederum $B_1(0, 1, 0), D_1(0, 0, 1), C_1(1, 1, 1)$, so ist auch $B_2(y, 1, 0), C_2(u, 1, 1), D_2(z, 0, 1), B_3(y', 1, 0), C_3(u', 1, 1), D_3(z', 0, 1)$. Es schneiden sich die drei Seiten $C_i D_i$ in einem Punkte A_1 , die drei Seiten $B_i C_i$ in einem Punkte A_2 , die drei Seiten $B_i D_i$ in einem Punkte A_3 . Die drei Punkte A_1, A_2, A_3 liegen in der gemeinsamen Perspektivitätsachse. Sind die Punkte $B_1, C_1, D_1, B_2, C_2, D_2$ gegeben, so ist durch einen beliebig auf $B_1 B_2$ gegebenen Punkt B_3 der Punkt C_3 eindeutig bestimmt, da auf der Geraden $B_3 C_3$ der Schnittpunkt A_2 der Geraden $B_1 C_1, B_2 C_2$ liegt; dies liefert die obige Bedingung (1), d. h.

$$uy' - u'y + y - y' = 0. \quad (8)$$

Durch den Punkt B_3 ist eindeutig auch der Punkt D_3 bestimmt, da auf der Geraden $B_3 D_3$ der Schnittpunkt A_3 der Geraden $B_1 D_1, B_2 D_2$ liegt; dies liefert die obige Bedingung (2), also

$$yz' - y'z = 0. \quad (9)$$

Dass dann auch die Gerade $C_3 D_3$ den Schnittpunkt A_1 der Geraden $C_1 D_1, C_2 D_2$ enthält, folgt aus dem Desarguesschen Satze. Sind also die beiden gefundenen Bedingungen erfüllt, so sind die Dreiecke $B_1 C_1 D_1, B_2 C_2 D_2, B_3 C_3 D_3$ gleichartig perspektiv. Durch eine einfache Rechnung findet man die Gleichung der gemeinsamen Achse dieser drei gleichartig perspektiven Dreiecke in der Form

$$(y + z - u + 1)x_1 - yx_2 - zx_3 = 0. \quad (10)$$

Sollen nun die neun Punkte B_i, C_i, D_i noch auf eine zweite Art auf drei gleichartig perspektive Dreiecke verteilt werden können, und zwar so, dass der Mittelpunkt und die Achse dieselben sind, wie im vorigen Falle, so seien z. B. $B_1 C_3 D_2, B_2 C_1 D_3, B_3 C_2 D_1$ die zu betrachtenden Dreiecke. Man betrachte zunächst die beiden ersten Dreiecke. Diese sind perspektiv, der Geraden

$$B_1 C_3 \dots x_1 - u'x_3 = 0$$

entspricht die Gerade

$$B_2 C_1 \dots x_1 - yx_2 + x_3(y - 1) = 0$$

und ihr Schnittpunkt ist

$$P_1(u'y, u' + y - 1, y).$$

Der Geraden

$$C_3 D_2 \dots x_1 + x_2(z - u') - zx_3 = 0$$

entspricht die Gerade

$$C_1 D_3 \dots x_1 + x_2(z' - 1) - z'x_3 = 0$$

und ihr Schnittpunkt ist

$$P_2(u'z' - z, z' - z, u' + z' - z - 1).$$

Endlich entspricht der Geraden

$$B_1D_2 \dots x_1 - zx_3 = 0$$

die Gerade

$$B_2D_3 \dots x_1 - yx_2 - z'x_3 = 0$$

und ihr Schnittpunkt ist

$$P_3(yz, z - z', y).$$

Nun sollen die drei Punkte P_1, P_2, P_3 auf der Geraden (10) liegen. Es genügt zu fordern, dass dies für zwei dieser Punkte der Fall sei, z. B. P_1, P_3 . Dies gibt weitere zwei Bedingungen:

$$u'(y + z - u) - y - z + 1 = 0, \quad (11)$$

$$z' + z(y + z - u - 1) = 0. \quad (12)$$

Nun soll das Dreieck $B_3C_2D_1$ zusammen mit den beiden vorigen drei gleichartig perspektive Dreiecke liefern. Es müssen sich also die Geraden B_1C_3, B_2C_1 und

$$B_3C_2 \dots x_1 - y'x_2 + x_3(y' - u) = 0$$

in einem Punkte treffen; dies liefert die Bedingung

$$y(u - u') - y'(1 - u') = 0. \quad (13)$$

Ebenso müssen sich die Geraden B_1D_2, B_2D_3 und

$$B_3D_1 \dots x_1 - y'x_2 = 0$$

in einem Punkte treffen, was zur Bedingung führt

$$y'z - yz - y'z' = 0. \quad (14)$$

Wir haben also sechs Bedingungen gefunden dafür, dass die neun Punkte B_i, C_i, D_i auf zweierlei Art auf drei gleichartig perspektive Dreiecke verteilt werden können, mit demselben gemeinsamen Mittelpunkt und derselben gemeinsamen Achse. Diese Bedingungen sind notwendig und auch hinreichend, doch sind sie nicht unabhängig, wie sich sofort zeigen wird.

Aus (9) folgt

$$y' = my, \quad z' = mz;$$

wenn man dies in (14) einsetzt, so kommt — da $z \neq 0$ ist —

$$m^2 - m + 1 = 0.$$

Dies bedeutet, dass

$$m = -\alpha,$$

wo α eine imaginäre dritte Wurzel aus der Einheit ist. Dies in (13) eingesetzt ergibt

$$u' = -\alpha^2 - \alpha u. \quad (15)$$

Setzt man dies in (8) ein, so bekommt man identisch Null, d. h. (8) folgt aus (9), (14), (13). Setzt man aus (15) in (11) ein, so bekommt man zunächst

$$-\alpha^2 y - \alpha^2 z + \alpha^2 u - \alpha u y - \alpha u z + \alpha u^2 - y - z + 1 = 0.$$

Setzt man hier überall $-\alpha - 1$ für α^2 , so bekommt man nach einfacher Umformung

$$(1 - u)(y + z - u + \alpha^2) = 0.$$

Es ist jedoch, wie man sofort einsieht, $u \neq 1$, also gilt

$$y - z - u + \alpha^2 = 0. \quad (16)$$

Setzt man jedoch für z' in (12) ein, so bekommt man dasselbe Ergebnis, d. h., von den beiden Bedingungen (11), (12) ist nur eine unabhängig. Die gefundenen Bedingungen sind also durch die folgenden Formeln gelöst:

$$u = y + z + \alpha^2, \quad y' = -\alpha y, \quad z' = -\alpha z, \quad u' = -\alpha(y + z - 1), \quad (17)$$

wie man leicht durch Berücksichtigung von (12) und (15) erhält. Hierbei sind y, z willkürlich.

Nun bestätigt man leicht, dass auch $B_1C_2D_3, B_2C_3D_1, B_3C_1D_2$ drei gleichartig perspektive Dreiecke sind, wobei der gemeinsame Mittelpunkt und die gemeinsame Achse dieselben sind, wie in den vorigen Fällen. Diese Achse hat die Gleichung (10), die jetzt unter Benutzung von (17) die Form annimmt:

$$(1 - \alpha^2)x_1 - yx_2 - zx_3 = 0. \quad (18)$$

Es hat die Gerade B_1C_2 die Gleichung

$$x_1 - (y + z + \alpha^2)x_3 = 0,$$

die Gerade B_2C_3 die Gleichung

$$x_1 - yx_2 + x_3(-\alpha^2y + \alpha z - \alpha) = 0$$

und die Gerade B_3C_1 die Gleichung

$$x_1 + \alpha y x_2 - x_3(\alpha y + 1) = 0$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $-\alpha^2$ und addiert sie dann zur zweiten, so bekommt man die Gleichung (18); addiert man zur ersten mit $-\alpha^2$ multiplizierten Gleichung die zweite, multipliziert durch $-\alpha$, so bekommt man die dritte. Dies bedeutet, dass die drei Geraden sich in einem Punkte der Achse $A_1A_2A_3$ schneiden. Desgleichen haben die Geraden C_2D_3, C_3D_1, C_1D_2 bzw. die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2(-y + \alpha^2z - \alpha^2) + \alpha z x_3 &= 0, \\ x_1 + \alpha(y + z - 1)x_2 &= 0, \\ x_1 + x_2(z - 1) - z x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die zweite mal $-\alpha^2$ addiert zur dritten gibt die Gleichung (18), die zweite mal $-\alpha$ addiert zur dritten mal $-\alpha$ gibt die erste, d. h., die drei Geraden treffen sich in einem Punkte der Achse $A_1A_2A_3$. Damit ist die oben angedeu-

tete Perspektivität bewiesen. Zusammenfassend kann man also Folgendes behaupten:

Es gibt Gruppen von neun Punkten von der Eigenschaft, dass sie sich auf drei verschiedene Arten in je drei Dreiecke verteilen lassen, welche gleichartig perspektiv sind derart, dass der gemeinsame Mittelpunkt und die gemeinsame Achse jeweils dieselben sind. Neun Punkte von dieser Beschaffenheit liegen zu je dreien auf drei Geraden eines Büschels und erfüllen weitere vier Bedingungen, gemäss den Formeln (17). Ist die Verteilung auf zwei Arten möglich, so folgt daraus schon, dass sie auf eine weitere Art möglich ist.

Kehren wir nun zu unserer Konfiguration des imaginären Falles zurück, so erinnern wir uns daran, dass ihre neun Punkte B_i, C_i, D_i sich auf zwei Arten in je drei gleichartig perspektive Dreiecke verteilen lassen, nämlich so, dass $B_1C_1D_1, B_2C_2D_2, B_3C_3D_3$, bzw. $B_1C_3D_2, B_2C_1D_3, B_3C_2D_1$ die drei perspektiven Dreiecke sind. Ausserdem jedoch liegen die Punkte $B_1, C_2, D_3; B_2, C_3, D_1; B_3, C_1, D_2$ je in einer Geraden, diese Geraden treffen die gemeinsame Achse in demselben Punkte. In diesem Falle können also die Dreiecke $B_1C_2D_3, B_2C_3D_1, B_3C_1D_2$ als singular betrachtet werden, nämlich als Dreiecke, deren Ecken in einer Geraden liegen, und dann besteht ihre gleichartige Perspektivität eben darin, dass sich die betreffenden drei Geraden in einem Punkte der gemeinsamen Achse treffen. Die Gruppe von neun Punkten, von welchen die obige Aussage gilt, ist also im Falle unserer Konfiguration in der soeben angegebenen Weise spezialisiert. In der Tat, liegen die drei Punkte B_1, C_2, D_3 in einer Geraden, so gilt augenscheinlich

$$z' = u,$$

woraus dann mit Rücksicht auf die Formeln (17)

$$z = \alpha y + 1$$

folgt und die Formeln (17) in die oben gefundenen, für unsere Konfigurationen geltenden Formeln (7) übergehen.

Es gilt also das folgende Ergebnis:

Die durch die Inzidenztafel 1. definierte Konfiguration $(12_4 16_3)$ besteht im imaginären Falle aus drei in einer Geraden liegenden Punkten A_1, A_2, A_3 und aus weiteren neun Punkten, welche auf drei Arten in je drei gleichartig perspektive Dreiecke verteilt werden können derart, dass der gemeinsame Mittelpunkt und die gemeinsame Achse jeweils dieselben sind, wobei die eine Art in dem Sinne singular ist, dass die betreffenden Dreiecke in je eine Gerade übergehen. Die Punkte A_1, A_2, A_3 sind dann die Treffpunkte der einander entsprechenden Seiten von einer Gruppe gleichartig perspektiver Dreiecke.

Es leuchtet ohne Weiteres ein, dass auch die Punkte P_1, P_2, P_3 mit den Punkten B_i, C_i, D_i (unter Ausscheidung der Punkte A_i), natürlich in der angegebenen Weise spezialisiert, unsere Konfiguration ergeben.

III.

Die Konfiguration Z sowie die weitere hier betrachtete Konfiguration unterscheidet sich von den bisher bekannten dadurch, dass sie Punkte enthält, für welche die drei von ihnen getrennten Punkte jeweils in einer Konfigurationsgeraden liegen. Doch sind diese Konfigurationen nicht „rein“, da im ersten Falle drei der Konfiguration fremde Geraden auftreten, im zweiten Falle ein der Konfiguration fremder Punkt vorhanden ist. Ich habe versucht eine Konfiguration zu finden, welche die angeführte kennzeichnende Eigenschaft in irgendeiner Weise besitzen würde, ohne fremde Elemente zu enthalten. Dies ist mir gelungen und in Inzidenztafel Fig. 2. ist diese Konfiguration definiert.

1	×	×	×	×															
2	×				×	×	×												
3	×							×	×	×									
4		×			×			×			×								
5			×			×		×					×						
6			×		×				×					×					
7						×					×				×		×		×
8							×			×				×	×				
9									×			×			×	×			
10				×						×	×						×		
11		×													×		×	×	
12				×			×							×					×

Fig. 2.

Die Konfiguration kann reel geometrisch realisiert werden, wie ich nachweisen werde. Vorerst soll die Konfiguration beschrieben werden. Die Konfigurationspunkte sind kurz mit $1, 2, \dots, 12$ bezeichnet und zwar so, dass $1, 2, 3$ die Punkte sind, welche die Eigenschaft haben, dass die jeweils von ihnen getrennten drei Punkte in einer Konfigurationsgeraden liegen. Und zwar ist der Punkt 1 von den in einer Geraden liegenden Punkten $7, 8, 9$ getrennt, der Punkt 2 von den in einer Geraden liegenden Punkten $9, 10, 11$ und der Punkt 3 von den in einer Geraden liegenden Punkten $11, 12, 7$. Diese drei Geraden treffen einander in Konfigurationspunkten, worin diese Konfiguration wesentlich von der Konfiguration Z abweicht. Durch den Punkt 1 gehen weitere drei Konfigurationsgeraden, welche die Punkte $10, 11, 12$ enthalten. Hier sind nun verschiedene Ansätze denkbar; ohne alle untersucht zu haben, habe ich einen Ansatz versucht, der zur Tafel 2. geführt hat, nämlich: die Punkte $7, \dots, 12$ liegen auf den Seiten eines Dreieckes, dessen Ecken $7, 9, 11$ sind. Ich habe den Ansatz gemacht, dass je zwei von diesen sechs Punkten, die nicht Ecken sind, verbunden sind, dass also notwendig $1\ 10\ 12$

ist und dann auf $1\ 11$ ein weiterer Punkt 4 liegen muss. Desgleichen ist dann $2\ 8\ 12$ und $2\ 7\ 5$, $3\ 8\ 10$ und $3\ 9\ 6$. Durch den Punkt 1 geht dann noch eine Konfigurationsgerade, diese ist notwendig $1\ 5\ 6$, ebenso ist $2\ 4\ 6$ und $3\ 4\ 5$. Auf solche Weise hat man schon dreizehn Konfigurationsgeraden festgesetzt, von denen je vier durch die Punkte $1, 2, 3$ gehen, dagegen nur je drei durch die übrigen neun Punkte. Diese drei Geraden müssen also je drei verschiedene von den neun Punkten $4, \dots, 12$ verbinden. Da boten sich zwei Möglichkeiten, von denen ich $4\ 7\ 10$, $5\ 6\ 12$, $6\ 8\ 11$ wählte. Auf solche Weise entstand die Inzidenztafel.

Gemäss dieser Tafel ist

der Punkt 1 von den Punkten $7\ 8\ 9$,
 der Punkt 2 von den Punkten $9\ 10\ 11$,
 der Punkt 3 von den Punkten $11\ 12\ 7$,
 der Punkt 4 von den Punkten $8\ 9\ 12$,
 der Punkt 5 von den Punkten $8\ 10\ 11$,
 der Punkt 6 von den Punkten $7\ 10\ 12$,
 der Punkt 7 von den Punkten $1\ 3\ 6$,
 der Punkt 8 von den Punkten $1\ 4\ 5$,
 der Punkt 9 von den Punkten $1\ 2\ 4$,
 der Punkt 10 von den Punkten $2\ 5\ 6$,
 der Punkt 11 von den Punkten $2\ 3\ 5$,
 der Punkt 12 von den Punkten $3\ 4\ 6$

getrennt. Für die Punkte $1, 2, 3$ liegen die von ihnen getrennten Punkte in je einer Konfigurationsgeraden, was doch der Ausgangspunkt für diese Konfiguration war. Dagegen sind die von einem jeden der übrigen neun Punkte getrennten Punkte im Dreieck verbunden, d. h., je zwei sind verbunden, ohne dass alle drei in einer Geraden liegen.

Es ist ein Leichtes sich zu überzeugen, dass die Punkte dieser Konfiguration nicht auf einer kubischen Kurve liegen. Ist u_i der Parameter des Punktes i , so geben die 1., 2., 6., 9., 11., 13. Konfigurationsgeraden die folgenden Kongruenzen:

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0, \quad (1)$$

$$u_1 + u_4 + u_{11} \equiv 0, \quad (2)$$

$$u_2 + u_5 + u_7 \equiv 0, \quad (3)$$

$$u_3 + u_8 + u_{10} \equiv 0, \quad (4)$$

$$u_4 + u_7 + u_{10} \equiv 0, \quad (5)$$

$$u_6 + u_8 + u_{11} \equiv 0. \quad (6)$$

Addiert man die Kongruenzen (2), (3), (4) unter Benutzung der Kongruenz (1), so bekommt man

$$u_4 + u_5 + u_7 + u_8 + u_{10} + u_{11} \equiv 0.$$

Die Addition von (5), (6) ergibt

$$u_4 + u_6 + u_7 + u_8 + u_{10} + u_{11} \equiv 0.$$

Aus diesen zwei Kongruenzen folgt

$$u_5 \equiv u_6,$$

was unzulässig ist.

Nichtsdestoweniger existiert die Konfiguration, was man rechnerisch nachweisen kann in einer Weise, die ganz analog derjenigen ist, welche im Kapitel I. angewandt wurde. Man wähle ein Koordinatensystem derart, dass

$$7(1, 0, 0), \quad 9(0, 1, 0), \quad 11(0, 0, 1), \quad 4(1, 1, 1)$$

gilt. Aus 7 8 9 folgt dann $8(y, 1, 0)$, aus 9 10 11 und 4 7 10 folgt $10(0, 1, 1)$, aus 7 11 12 folgt $12(u, 0, 1)$, aus 1 4 11 folgt $1(1, 1, z)$, aus 6 8 11 folgt $6(y, 1, v)$, aus 5 9 12 folgt $5(u, t, 1)$, aus 2 5 7 folgt $2(w, t, 1)$, aus 3 6 9 folgt $3(x, y, v)$. 1 10 12 führt zur Bedingung

$$1 + u - uz = 0, \quad (1)$$

1 2 3 führt zur Bedingung

$$tv + y + wxz - tyz - x - vw = 0, \quad (2)$$

1 5 6 führt zur Bedingung

$$tv + y + uz - tyz - 1 - uv = 0, \quad (3)$$

2 4 6 führt zur Bedingung

$$vw + ty + 1 - y - w - tv = 0, \quad (4)$$

2 8 12 führt zur Bedingung

$$w - u - ty = 0, \quad (5)$$

3 4 5 führt zur Bedingung

$$y + ux + tv - uv - ty - x = 0, \quad (6)$$

3 8 10 führt zur Bedingung

$$1 + v - x = 0, \quad (7)$$

da $y \neq 0$. Aus (7) folgt

$$x = 1 + v, \quad (8)$$

aus (5) folgt

$$w = u + ty, \quad (9)$$

aus (1) folgt

$$uz = 1 + u. \quad (10)$$

Setzt man dies in (2) ein, so bekommt man nach kurzer Rechnung

$$(u + y)(tv + u) = 0. \quad (11)$$

Die erste Lösung $u = -y$ ist unzulässig. Die Gleichung der Geraden 1 10 12 ist nämlich

$$x_1 + ux_2 - ux_3 = 0.$$

Setzt man hier die Koordinaten von $\delta(y, 1, 0)$ ein, so bekommt man auf der linken Seite $y + u$; sollte dies gleich Null sein, so würde der Punkt δ auf der Geraden $I 10 12$ liegen, was unzulässig ist. Es gilt also nur die Lösung

$$tv + u = 0. \quad (12)$$

Wir setzen nun aus (8), (9), (10), (12) in (3), (4), (6) ein; so kommt

$$uy + vy + y - uv^2 = 0, \quad (3')$$

$$uy - uv - 1 + y = 0, \quad (4')$$

$$uy + vy - v - v^2 = 0. \quad (6')$$

Die Gleichung (4') ist in v linear, es ist also leicht aus (3') und (4') und aus (6') und (4') v zu eliminieren. Das führt zu den Gleichungen

$$uy^2(u + 1) - y(u^2 + 3u + 1) + 1 = 0, \quad (13)$$

$$y^2(u + 1) + y(-u^3 + u^2 - 2) - u + 1 = 0. \quad (14)$$

Die Gleichung (13), multipliziert mit $(u - 1)$, addiert zur Gleichung (14), multipliziert mit $(u + 1)$, gibt nach kurzer Rechnung

$$(y - u)[uy(u^2 + u + 1) + y + u - 1] = 0. \quad (15)$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist also

$$\text{I.} \quad y = u.$$

Die zweite

$$uy(u^2 + u + 1) + y + u - 1 = 0$$

addiert zu (14) gibt

$$y(u + 1)(y + 2u - 1) = 0.$$

Nun ist $y \neq 0$ (sonst würde $\delta \equiv 9$ sein) und auch $u \neq -1$. Denn anderenfalls würde $z = 0$ sein [nach (10)] und der Punkt $I(1, 1, z)$ würde auf $7 8 9$ liegen, was unzulässig ist. Es ist also

$$\text{II.} \quad y = 1 - 2u$$

die zweite Lösung.

I. Setzt man $y = u$ in die Gleichung (13), so bekommt man

$$(u + 1)(u^3 - u^2 - 2u + 1) = 0,$$

also nach Ausschluss der unzulässigen Lösung $u = -1$ als eigentliche Lösung der obigen Bedingungen

$$u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0. \quad (16)$$

II. Setzt man $y = 1 - 2u$ in die Gleichung (13), so kommt, nach Ausschluss der unzulässigen Lösung $u = 0$, als eigentliche Lösung der obigen Bedingungen

$$2u^2 + u + 1 = 0. \quad (17)$$

Diese Gleichung hat imaginäre Wurzeln, führt also nur zu imaginären Konfigurationen.

Dagegen hat die Gleichung (16) drei reelle Wurzeln, und zwar, wie man sofort einsieht, je eine in den Intervallen:

$$(-2, -1), \quad (0, 1), \quad (1, 2).$$

Sind also die Punkte 7, 9, 11, 4 gegeben, so existieren drei reelle Konfigurationen gemäss der Inzidenztafel 2. Diese reellen Konfigurationen sollen zunächst untersucht werden. Die Gleichung (16) ist irreduzibel; denn sollte sie reduzibel sein, so hätte sie notwendig eine der Wurzeln 1, -1, was nicht der Fall ist.

Es soll jetzt die Lösung $y = u$ in die früheren Formeln eingesetzt werden. So folgt aus (4')

$$uv = u^2 + u - 1.$$

Nach (16) ist jedoch

$$u^2 + u - 1 = w^3 - u;$$

also

$$v = u - 1. \tag{18}$$

Dann liefert (12) die Gleichung

$$t(u^2 - 1) = -u.$$

Multipliziert man hier zu beiden Seiten mit $(u - 1)$ und benützt dann die Gleichung (16), so kommt

$$t = 1 - u. \tag{19}$$

Aus (8) folgt dann weiter

$$x = u^2 \tag{20}$$

und aus (9)

$$w = u(2 - u). \tag{21}$$

Endlich folgt aus (10)

$$z = (1 + u) : u. \tag{22}$$

Auf Grund dieser Ergebnisse schreiben wir nun die Koordinaten der Konfigurationspunkte auf. Es ist:

$$\begin{aligned} &1(u, u, u + 1), \quad 2(u(2 - u), 1 - u, 1), \quad 3(u, u^2, u^2 - 1), \\ &4(1, 1, 1), \quad 5(u, 1 - u, 1), \quad 6(u, 1, u - 1), \quad 7(1, 0, 0), \\ &8(u, 1, 0), \quad 9(0, 1, 0), \quad 10(0, 1, 1), \quad 11(0, 0, 1), \quad 12(u, 0, 1). \end{aligned}$$

Als Gleichungen der Konfigurationsgeraden findet man dann:

$$\begin{array}{ll} 1\ 2\ 3 & x_1 u(u + 1) - x_2 + x_3(1 - 2u) = 0, \\ 1\ 4\ 11 & x_1 - x_2 = 0, \\ 1\ 5\ 6 & x_1(u^2 - 1) + ux_2 + x_3(1 - 2u) = 0, \\ 1\ 10\ 12 & x_1 + ux_2 - ux_3 = 0, \\ 2\ 4\ 6 & x_1 + x_2 u(u - 2) - x_3(u - 1)^2 = 0, \\ 2\ 5\ 7 & x_2 + x_3(u - 1) = 0, \\ 2\ 8\ 12 & x_1 - ux_2 - ux_3 = 0, \end{array}$$

3 4 5	$ux_1 + x_2(u - 1) + x_3(1 - 2u) = 0,$
3 8 10	$x_1 - ux_2 + ux_3 = 0,$
3 6 9	$x_1 - x_3(u - 1) = 0,$
4 7 10	$x_2 - x_3 = 0,$
5 9 12	$x_1 - ux_3 = 0,$
6 8 11	$x_1 - ux_2 = 0,$
7 8 9	$x_3 = 0,$
9 10 11	$x_1 = 0,$
7 11 12	$x_2 = 0.$

Bei der Ableitung und namentlich Vereinfachung dieser Gleichungen ist von der Gleichung (16) Gebrauch gemacht worden. Als einziges Beispiel führe ich da die Gleichung der Geraden 3 6 9 an. Diese Gerade verbindet den Punkt 9 mit dem Punkte 3 und hat also die Gleichung

$$x_1(u^2 - 1) - ux_3 = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $(u - 1)$, so bekommt man bei x_1 den Koeffizienten

$$(u^2 - 1)(u - 1) = u^3 - u^2 - u + 1 = u \quad (\text{gemäss (16)})$$

und dies führt zu der oben angegebenen Form dieser Gleichung.

Mit Ausnahme von 2, 3, 6 sind die Koordinaten der Konfigurationspunkte linear in u ; wird u als ein Parameter angesehen, so bedeutet dies, dass die betreffenden Punkte auf einer Geraden liegen. Das ist nichts überraschendes bei dem Punkte 1, der auf der Geraden 4 11 liegt, und den Punkten 8, 12, die je auf einer Koordinatenachse liegen. Es überrascht aber beim Punkte 5. Dieser bewegt sich also, bei veränderlichem u , auf der Geraden, wie man leicht nachrechnet,

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad (23)$$

was für die Konstruktion der Konfiguration von Bedeutung ist, wie man im weiteren sehen wird.

Auch unter den Konfigurationsgeraden gibt es solche, deren Gleichungen den Parameter u linear enthalten, was dann bedeutet, dass die betreffende Gerade in einem Büschel liegt. Das ist selbstverständlich bei den Geraden 1 1 0 12, 2 5 7, 3 8 10, 3 6 9, 5 9 12, 6 8 11, die je durch einen festen Punkt hindurchgehen, überraschend ist es bei der Geraden

$$2 8 12 \quad x_1 - ux_2 - ux_3 = 0.$$

Diese enthält den festen Punkt $(0, 1, -1)$, was wieder für die Konstruktion der Konfiguration von Bedeutung ist.

Noch Eins geht aus der Tafel der Gleichungen hervor: durch Subtraktion der Gleichungen 5 9 12, 6 8 11 bekommt man Gleichung 4 7 10; dies bedeutet, dass diese drei Geraden durch denselben Punkt hindurchgehen; es ist der Punkt $S(u, 1, 1)$.

Nun überzeugt man sich zunächst, dass die gefundenen 12 Punkte alle voneinander verschieden sind. Da ist ohne weiters klar, dass die Punkte 7 bis 12 voneinander und von den übrigen sechs Punkten verschieden sind. Ebenso leuchtet ein, dass der Punkt 4 von allen übrigen verschieden ist. Die Punkte 1, 3, 5, 6 haben dieselbe erste Koordinate und verschiedene zweite Koordinaten, sind also alle verschieden. Eine kleine Rechnung zeigt dann, dass der Punkt 2 von den Punkten 1, 3, 5, 6 verschieden ist.

Auf ähnliche Weise überzeugt man sich leicht, dass auch die gefundenen Konfigurationsgeraden voneinander verschieden sind.

Nun muss untersucht werden, ob es nicht vorkommt, dass mehr als drei Konfigurationspunkte in einer Konfigurationsgeraden liegen. Man sieht sofort, dass der Punkt 4 nicht auf der Geraden 1 2 3 liegt, da seine Koordinaten der Gleichung dieser Geraden nicht genügen. Dann kann auch der Punkt 5 nicht auf dieser Geraden liegen, da 3 4 5 ist. Das Gleiche gilt von den Punkten 6 und 11. Daraus folgt dann auf Grund derselben Schlussweise, dass auch keiner der übrigen Punkte auf dieser Geraden liegen kann. Ganz ähnlich zeigt man dann, dass auch keine der übrigen Konfigurationsgeraden einen weiteren Punkt enthalten kann.

Aus dem letzten Ergebnis folgt nun, dass es ausser den Konfigurationsgeraden keine Gerade gibt, welche drei der Konfigurationspunkte verbinden würde. In der Tat, eine solche Gerade würde notwendig drei Punkte verbinden, die alle gegenseitig nach der Inzidenztafel getrennt sind, denn anderenfalls wäre diese Gerade mit einer Konfigurationsgeraden identisch, auf welcher mehr als drei Konfigurationspunkte liegen würden, was ausgeschlossen ist. Nun aber sind keine zwei Konfigurationspunkte, die von einem Konfigurationspunkte getrennt sind, von einander getrennt, wie wir oben gefunden haben. Es gibt also kein Tripel gegenseitig getrennter Punkte und also keine der Konfiguration „fremde“ Gerade.

Es gibt auch keinen der Konfiguration „fremden“ Punkt, das heisst, ausser den zwölf Konfigurationspunkten keinen Punkt, der Treffpunkt von vier Konfigurationsgeraden wäre. Gäbe es nämlich einen solchen Punkt, so würden die einander in diesem Punkte treffenden Konfigurationsgeraden alle zwölf Konfigurationspunkte enthalten. Nun gibt es, wie man aus der Inzidenztafel leicht ersieht, nur ein Quadrupel von Geraden, die alle zwölf Konfigurationspunkte enthalten, nämlich die vier Geraden 1 2 3, 4 7 10, 5 9 12, 6 8 11. Die drei Geraden 4 7 10, 5 9 12, 6 8 11 gehen durch den Punkt $S(u, 1, 1)$ (s. oben). Setzt man diese Koordinaten in die Gleichung von 1 2 3 ein, so bekommt man auf linker Seite

$$u^3 + u^2 - 2u,$$

was nicht gleich Null ist, da die linke Seite von (16) irreduzibel ist und also mit dem hier aufgeschriebenen Polynom keinen Teiler gemein hat.

Die hier betrachtete Konfiguration ist also frei von „fremden“ Punkten und „fremden“ Geraden.

Dies ersieht man übrigens auch sofort aus der Fig. 3, wo unsere Konfiguration konstruiert ist, und zwar für die im Intervalle (1,2) liegende Wurzel von Gleichung (16). Der Wert dieser Wurzel ist

$$u = 1,80$$

auf zwei Dezimalstellen genau. Die Konfiguration ist durch die Punkte 7, 9, 11, 4 bestimmt, denn sind diese vier Punkte gewählt worden, so sind u und somit alle Punkte der Konfiguration bestimmt. Auch leuchtet ein, dass es eine kubische Konstruktion geben muss, die zu der Konfiguration führt, wenn die vier erwähnten Punkte gegeben sind. Dies soll nicht weiter ausgeführt werden. Die Figur beruht auf rechnerischer Grundlage. Das Dreieck 7 9 11 ist als

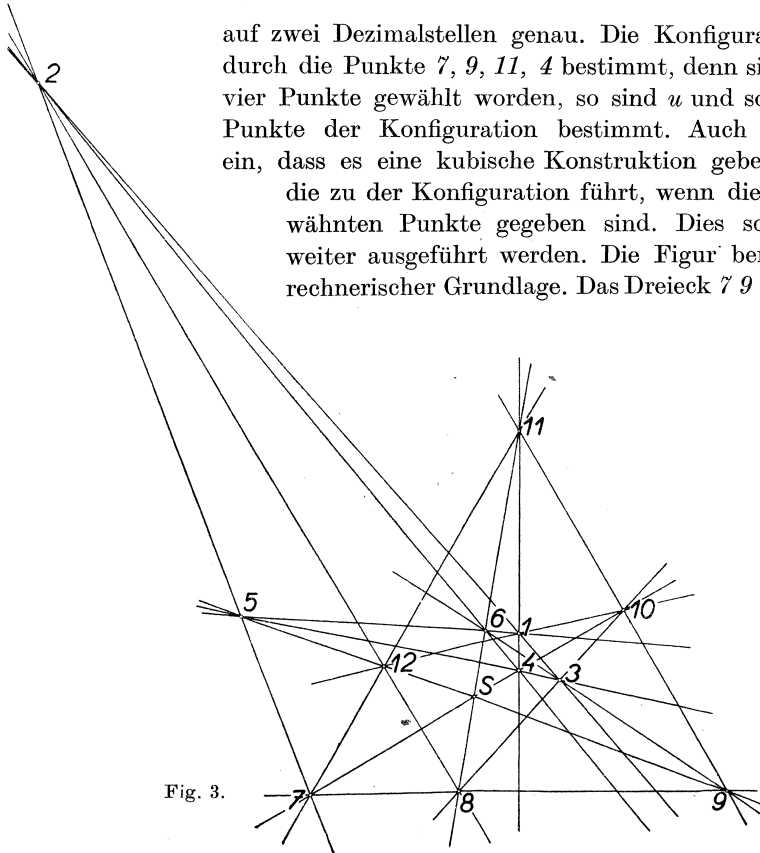


Fig. 3.

gleichseitig angenommen worden und der Punkt 4 in seine Mitte gelegt. Dann wurde der Punkt $8(1, 80; 1; 0)$ auf Grund seiner Koordinaten aufgetragen in 7 9; hernach sind alle weiteren Konstruktionen nur mit dem Lineal ausführbar. Es ist zunächst der Punkt 10 als Schnittpunkt von 4 7 und 9 11 bestimmt. Weiterhin bestimmen die Geraden 8 11 und 4 7 den Punkt $S(u, 1, 1)$ und $S 9$ bestimmt dann auf 7 11 den Punkt 12. Man konstruiert dann weiter die Gerade (23); diese enthält den Punkt 10 und den Treffpunkt von 4 9 und 7 11 und ist als ihre Verbindungsgerade bestimmt. (In der Figur ist diese Hilfs-

gerade nicht eingezeichnet.) Die Gerade $9\ 12$ schneidet dann diese Gerade im Punkte 5 . Jetzt ergänzt man die Figur durch den Punkt 1 als Schnittpunkt von $4\ 11$ und $10\ 12$, den Punkt 3 als Schnittpunkt von $4\ 5$ und $8\ 10$, den Punkt 2 als Schnittpunkt von $1\ 3$ und $5\ 7$ und den Punkt 6 als Schnittpunkt von $8\ 11$ und $1\ 5$. Die übrigen Koinzidenzen dienen zur Kontrolle der Präzision der Zeichnung.

Die imaginäre Lösung unserer Inzidenztafel bekommt man, wenn

$$y = 1 - 2u$$

gesetzt wird, wo dann, wie oben gefunden, u der quadratischen Gleichung

$$2u^2 + u + 1 = 0 \quad (17)$$

genügt; diese Gleichung hat imaginäre Wurzeln. Wir setzen für y jetzt in die früheren Formeln ein. Gleichung (4') gibt

$$uv = uy + y - 1 = -2u^2 - u,$$

also

$$v = -1 - 2u. \quad (24)$$

Weiterhin ist

$$tv + u = 0,$$

also

$$t = u : (1 + 2u).$$

Aus (17) folgt

$$-u = 1 : (1 + 2u),$$

also

$$t = -u^2 = (u + 1) : 2. \quad (25)$$

Weiterhin ist

$$x = 1 + v = -2u, \quad (26)$$

$$uz = 1 + u = -2u^2, \quad (\text{mit Rücksicht auf (17)})$$

also

$$z = -2u. \quad (27)$$

Endlich ist

$$w = u + ty = u - u^2(1 - 2u) = u(1 - u + 2u^2)$$

und durch Benutzung von (17)

$$w = -2u^2 = u + 1. \quad (28)$$

Auf Grund dieser Ergebnisse kann man nun die Koordinaten der Konfigurationspunkte angeben. Es ist:

$$\begin{aligned} &1(1, 1, -2u), \quad 2(2(u + 1), u + 1, 2), \quad 3(2u - 1, 2u, 2u + 1), \\ &4(1, 1, 1), \quad 5(2u, u + 1, 2), \quad 6(2u - 1, -1, 2u + 1), \\ &7(1, 0, 0), \quad 8(2u - 1, -1, 0), \quad 9(0, 1, 0), \quad 10(0, 1, 1), \\ &11(0, 0, 1), \quad 12(u, 0, 1), \end{aligned}$$

wo u eine Wurzel von (17) ist.

Als Gleichungen der Konfigurationsgeraden findet man dann:

$$\begin{array}{ll}
 1\ 2\ 3 & x_1 - x_2(2u + 1) - x_3 = 0, \\
 1\ 4\ 11 & x_1 - x_2 = 0, \\
 1\ 5\ 6 & ux_1 - x_2 + x_3(u + 1) = 0, \\
 1\ 10\ 12 & x_1(2u + 1) - x_2 + x_3 = 0, \\
 2\ 4\ 6 & x_1(u + 1) - x_2 - ux_3 = 0, \\
 2\ 5\ 7 & 2x_2 - x_3(u + 1) = 0, \\
 2\ 8\ 12 & x_1 + x_2(2u - 1) - ux_3 = 0, \\
 3\ 4\ 5 & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\
 3\ 8\ 10 & x_1 + x_2(2u - 1) - x_3(2u - 1) = 0, \\
 3\ 6\ 9 & x_1 - x_3(2u + 1) = 0, \\
 4\ 7\ 10 & x_2 - x_3 = 0, \\
 5\ 9\ 12 & x_1 - ux_3 = 0, \\
 6\ 8\ 11 & x_1 + x_2(2u - 1) = 0, \\
 7\ 8\ 9 & x_3 = 0, \\
 9\ 10\ 11 & x_1 = 0, \\
 11\ 12\ 7 & x_2 = 0.
 \end{array}$$

Ganz ähnlich wie im reellen Falle kann bewiesen werden, dass diese Konfiguration weder fremde Punkte noch fremde Geraden enthält.

Die Konfiguration lässt sich quadratisch konstruieren. Eine solche Konstruktion soll angegeben werden. Alle gefundenen Koordinaten sind linear in u , wenn also u als Parameter angesehen wird, so bedeutet dies, dass ein jeder Punkt der Konfiguration sich auf einer Geraden bewegt. So sieht man, dass das für die Punkte 3, 5 die Gerade

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad (29)$$

ist. Als geometrischen Ort des Punktes 2 bekommt man

$$x_1 - 2x_2 = 0. \quad (30)$$

Diese Gerade verbindet den Punkt 11 mit dem Punkte $P(2, 1, 0)$. Der Punkt 6 bewegt sich auf der Geraden

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \quad (31)$$

Die Punkte 7, 9, P , $P'(1, 1, 0)$ (P' ist Treffpunkt von 7 9 und 11 4) bilden ein harmonisches Quadrupel und auch die Geraden (29), (30), (31) bilden mit der Geraden 7 9 ein harmonisches Quadrupel, was bei der Konstruktion zu benutzen ist.

Auch die Koordinaten der Konfigurationsgeraden sind linear in u ; das bedeutet, dass eine jede dieser Geraden bei veränderlichem u durch einen festen Punkt hindurchgeht. Für die Gerade 1 2 3 ist dieser feste Punkt $Q(1, 0, 1)$, also Schnittpunkt von 7 11 und 4 9.

Das lineare Verhalten ist für einige der Konfigurationspunkte und Konfigurationsgeraden die Folge von (17), muss also nicht gelten, solange u nicht dieser Gleichung genügt. Dagegen ist die Linearität der Koordinaten des Punktes 6 unabhängig von (17), denn dieser Punkt hat die Koordinaten — s. weiter oben — $(y, 1, v)$ und die Werte von y und v sind durch die Gleichung (17) nicht beeinflusst worden. Dasselbe also gilt auch von der Geraden (31), auf welcher sich der Punkt 6 bewegt. Wenn wir also diesen Punkt als Ausgangspunkt für die Konstruktion nehmen, so wissen wir, dass durch die Inzidenz von 6 und (31) die durch die Gleichung (17) gelieferte Lösung nicht schon vorweg genommen wurde. Man wähle also 6 beliebig auf (31), konstruiere dann Punkt 2 als Schnittpunkt von $4\ 6$ und (30), dann den Punkt 5 als Schnittpunkt von $7\ 2$ und (29), dann den Punkt 1 als Schnittpunkt von $4\ 11$ und $Q\ 2$. Da sieht man, dass da perspektivische Punktreihen entstehen, sodass speziell die Punktreihen 1 und 5 projektiv sind. Ihre Verbindungslinie $1\ 5$ umhüllt also einen Kegelschnitt, der durch die angewandten Perspektivitäten eindeutig bestimmt ist. Es sei $6'$ der Schnittpunkt von $1\ 5$ mit (31). Es ist ohne weiters klar, dass zwischen den Punkten $6, 6'$ eine Verwandtschaft (1,2) besteht, welche drei Deckpunkte besitzt. Einer davon ist der Punkt P . Denn ist $6 \equiv P$, so ist $2 \equiv P$ und $5 \equiv P$, der Punkt 1 liegt dann auf einer Geraden durch den Punkt P und $1\ 5$ schneidet also die Gerade (31) wiederum im Punkte P . Die beiden übrigen Wurzeln lösen unsere Aufgabe.

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, dass man, wie eben die bisherigen Arbeiten über die Konfiguration $(12_4, 16_3)$ zeigen, versuchsweise zu neuen Konfigurationen gelangen kann, dass es jedoch wünschenswert wäre, irgend ein Ordnungsprinzip einzuführen, das gestatten würde, in irgendeinem Maasse Übersicht über die ganze Materie zu gewinnen. In dieser Hinsicht sind gewisse Beobachtungen wichtig: es gibt Konfigurationen der betrachteten Art, die durch die Inzidenztabelle eindeutig bestimmt sind, und solche, wo dies nicht der Fall ist. Es gibt Konfigurationen, deren Punkte auf einer kubischen Kurve liegen, und solche, die diese Eigenschaft nicht besitzen. Einige der bisher bekannten Konfigurationen, so z. B. die Konfiguration Z , sind durch fünf ihre Punkte bestimmt, während die zuletzt betrachtete Konfiguration bereits durch vier ihre Punkte bestimmt ist. Die früher bekannten Konfigurationen haben mindestens einen Vierer von gegenseitig getrennten Punkten; die in diesem Aufsätze behandelten Konfigurationen besitzen keine solche Punktgruppe. Diese und ähnliche Beobachtungen könnten zur Lösung der oben angedeuteten allgemeinen Aufgabe einigermassen beitragen.

Резюме.

О ДВУХ НОВЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ (12₄, 16₃)

Б. БЫДЖОВСКИЙ (B. Bydžovský), Прага.

(Поступило в редакцию 18/XII 1953.)

Проф. М. Захариас в своей работе, которую он издал в журнале *Mathematische Nachrichten*, 1. Band, Heft 5, Sept./Okt. 1948, S. 332, изучает конфигурацию иного вида, чем до сих пор известные четыре конфигурации указанного типа. Автор в I-ой главе предлагаемой вниманию читателя работы подвергнул эту новую конфигурацию более глубокому исследованию и обнаружил, что соответствующая таблица инцидентности допускает еще другое решение. Исследованию свойств найденной таким образом конфигурации посвящена II-ая глава настоящей работы. Подобного рода рассуждения привели автора к вопросу о существовании других конфигураций с определенными свойствами. Ответ на этот вопрос дан в III-ей главе, которая посвящена изучению дальнейшей конфигурации.