Jaroslav Růžička

О перестановках бесконечных рядов с гиперкомплексными числами

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 1, 23–73

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100068

О ПЕРЕСТАНОВКАХ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ С ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

ЯРОСЛАВ РУЖИЧКА (Jaroslav Růžička), Груба Скала.

(Поступило в редакцию 14/XI 1951 г.)

Если задан ряд гиперкомплексных чисел, можно построить множество всех предельных точек последовательности его частичных сумм. Соединение всех этих множеств для всевозможных перестановок заданного ряда мы назовем множеством сумм заданного ряда. Общий вид множества сумм был установлен *Берендом* [3]. Автор показывает каким способом зависит структура этого множества от заданного ряда. Главный результат настоящей работы высказан в конце § 1; в частном случае обычных комплексных чисел этот результат был уже получен Ярником. [2].

§ 1. Цель работы.

На протяжении всей работы малые греческие буквы означают гиперкомплексные числа, малые латинские буквы — действительные числа (также, как в работе *Э. Штейница* [1], в последнее время чаще применяется обратное обозначение). Готическими буквами обозначены множества чисел.

Пусть

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \tag{1}$$

есть бесконечный ряд, членами которого являются n-мерные гиперкомплексные числа (элементы n-мерного векторного пространства). Пусть

$$\sigma_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k,$$

тогда *граничным множеством* $\mathfrak{H}(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots)$ *ряда* (1) мы будем называть множество всех предельных точек последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ Пусть $\{z\} = (i_1, i_2, \dots)$ означает какую-либо перестановку натурального ряда чисел 1, 2, ..., $\mathfrak{Z}$ — множество всех этих перестановок и $\mathfrak{H}_{\{z\}} = \mathfrak{H}(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots)$ граничное множество ряда

$$\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots,$$

т. е. ряда, полученного перерастановкой ряда (1). Соединение всех множеств $\mathfrak{H}_{\{z\}}$ назовем *множеством сумм ряда* (1) и обозначим через $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Таким образом,

$$\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \bigcup_{\{z\} \in 3} \mathfrak{H}_{\{z\}}.$$

Случай, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, был рассмотрен *Э. Штейницом* в его работе [1]. В этом случае $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ является линейным пространством, т. е. множеством всех чисел вида

$$\alpha + c_1\tau_1 + c_2\tau_2 + \ldots + c_r\tau_r,$$

где $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ — постоянные линейно независимые числа, α — некоторое постоянное число (случай $\alpha = 0$ не исключается) и c_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ пробегают все вещественные числа. В этом случае даже можно для любого $\sigma \in \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ переместить члены ряда (1) таким образом, что он переходит в сходящийся ряд

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots,$$

причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i = \sigma.$$

Следовательно, теорема Штейница является обобщением теоремы Римана для рядов с вещественными членами.

В общем случае (когда соотношение $\lim \alpha_n = 0$ не предполагается) справедлива следующая теорема *Ф. Беренда* [3] (1933):

Множество сумм ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ или пусто или образует множество, названное им решеткой линейных пространств.

При этом под выражением „решетка (q-мерных) пространств" мы подразумеваем множество всех чисел вида

$$\alpha + k_1\varrho_1 + k_2\varrho_2 + \ldots + k_p\varrho_p + c_1\tau_1 + c_2\tau_2 + \ldots + c_q\tau_q, \tag{2}$$

где числа $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q$ линейно независимы, $k_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ пробегают все целые, а c_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ — все вещественные числа.

Доказательство Беренда весьма просто. Целые числа p и q в выражении (2) подчиняются соотношению $p + q \leqq n$, в остальном, однако, как p, так и q может принимать все возможные значения между 0 и n. Согласно Беренду $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ всегда имеет вид (2), но смотря по обстоятельствам, множество сумм может состоять, напр., только из одной точки ($p = q = 0$), или из равноудаленных точек прямой ($p = 1, q = 0$), или может быть системой равноудаленных параллельных гиперплоскостей ($p = 1$, $q = n - 1$) и т. п., в частности, может быть пустым. Судя по значениям, которые могут принимать p и q, в n-мерном пространстве может настать всего

$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$ различных случаев. Который именно из этих случаев наступает — с помощью результата Беренда установить нельзя, это зависит от членов ряда (1). Для этого необходимо произвести более подробные исследования, чтобы найти соотношение между рядом (1) и его множеством сумм. Эта проблема для обычных комплексных чисел (т. е. для $n = 2$) была разрешена в 1927 г. *В. Ярником* [2], но только в предположении, что последовательность

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \tag{3}$$

ограничена. Решение той же проблемы для любого n (но также только в предположении ограниченности последовательности (3)) является целью настоящей работы.

При этом мы воспользуемся методами, подобными методам, примененным в работе [2], и кроме того методом индукции. Для теорем, доказательство которых в случае n-мерных чисел ничем не отличается от доказательства в случае обыкновенных комплексных чисел, приведенного в [2], мы наметим доказательство только в общих чертах. В дальнейшем мы пользуемся понятиями и теоремами, выведенными в работе Штейница [1]. Оказывается целесообразным ввести некоторые понятия, из которых заслуживают внимания следующие: Ряд (1) мы назовем *симметричным* в случае, если ряды*) $\sum\limits_{i=1} \mathrm{pos}(\varphi\alpha_i)$, $\sum\limits_{i=1} \mathrm{pos}(-\varphi\alpha_i)$

или оба одновременно сходятся или оба расходятся при любом гиперкомплексном числе φ. *Пространством сходимости* ряда (1) мы называем множество всех чисел $\varkappa$ таких, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varkappa\alpha_i$ сходится абсолютно; ортогональное дополнение этого пространства мы тогда назовем *пространством расхождения* ряда (1).

Вид множества $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ определяется главным образом двумя факторами:

1. Множеством предельных точек последовательности (3), которое мы обозначим через $\mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ соответственно наименьшим модулем $\mathfrak{M}_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, содержащим множество $\mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, и замыканием $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \overline{\mathfrak{M}_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}$ этого модуля.

2. Поведением *ряда разностей*, т. е. ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\alpha_i - \pi_i)$, где π_i — число множества $\overline{\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}$, которое находится от точки α_i $(i = 1, 2, \ldots)$ на наименьшем расстоянии.

Этим определяется ход исследования. В § 2 даны определения реже

*) Если a действительное число, то мы полагаем $\mathrm{pos}\, a = \mathrm{Max}(a, 0)$. Символ $\alpha\beta$ обозначает скалярное произведение.

встречающихся понятий и менее известных теорем, выведенных Штейницом в [1], и поясняются его обозначения, поскольку они отличаются от обозначений, принятых в настоящей статье. § 3 исследуется множество $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. В § 4 разбирается вопрос, когда $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ является непустым множеством, и кроме того выводится теорема Штейница. Ряду разностей посвящен § 5; в § 6 доказываются дальнейшие необходимые нам леммы. Наконец, в § 7 выводится теорема, дающая возможность закончить все исследование.

Главные выводы статьи можно срезюмировать так:

Пусть

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \tag{4}$$

ряд гиперкомплексных чисел, абсолютные величины членов которого ограничены.

Множество сумм $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ *тогда и только тогда непусто, когда ряд* (4) *симметричен. Если ряд* (4) *симметричен и если*

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots \tag{5}$$

является его рядом разностей, то

$$\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \varkappa + \overline{\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + \mathfrak{L}}, \tag{6}$$

где $\varkappa$ — *некоторое число*, $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ — *замыкание наименьшего модуля, содержащего все предельные точки последовательности*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

а $\mathfrak{L}$ — *пространство расхождения ряда* (5).

Сравнивая эту теорему с результатом Беренда, мы видим, чем друг от друга отличаются обе работы. Наш результат показывает, что $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ — решетка линейных пространств; этим подтверждается результат Беренда. Больше того, наш результат дает конструкцию этого множества, если даны члены ряда (4). Формула (6) дает взаимную связь между рядом и множеством его сумм, в то время как Беренд приводит только общий вид множества $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

§ 2. Связки полулучей.

Чтобы не прерывать хода мыслей в последующих рассуждениях, мы дадим в этом параграфе сводку введенных Штейницом понятий и доказанных им теорем [1], которыми мы будем в дальнейшем пользоваться и которые менее известны. Доказательство приводим лишь для одной теоремы, не содержащейся в цитированной работе, в остальном эту работу рекомендуем вниманию читателя. Некоторые из введенных Штейницом названий уже устарели; в таких случаях нами приводятся как принятые теперь обозначения, так и названия, применяемые Штейницом. Точно так же и формулировку теорем пришлось в некоторых местах изменить соответственно с целью работы.

Определение 2.1. *n-мерными гиперкомплексными числами мы* называем элементы n-мерного векторного пространства (над телом действительных чисел) с обычным определением суммы, скалярного произведения и нормы (абсолютной величины).

Обозначив единичные вектроы вдоль осей координат через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, а составляющие числа α по этим осям через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, можно записать гиперкомплексное число α (как и в работе [1]) в виде

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_n.$$

Определение 2.2. *Линейным пространством* (у Штейница lineare Mannigfaltigkeit) мы называем множество всех чисел вида

$$\alpha + c_1\tau_1 + c_2\tau_2 + \ldots + c_q\tau_q,$$

где $\alpha, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q$ постоянные числа, а c_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ принимают все действительные значения.

Если $\alpha = 0$, точка $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ будет также точкой линейного пространства. В таком случае мы говорим о линейном пространстве, проходящем через начало. Штейниц называет такое пространство модулем. В настоящей работе мы будем называть *модулем* (более принятое обозначение) множество $\mathfrak{M}$ следующего свойства: Если $\alpha \in \mathfrak{M}$, $\beta \in \mathfrak{M}$, то и $\alpha - \beta \in \mathfrak{M}$. Ясно, что всякое линейное пространство, проходящее через начало, является модулем в этом смысле, но не каждый модуль будет линейным пространством, проходящим через начало.

Определение 2.3. Пространство $\mathfrak{K}$ всех чисел $\varkappa$, для которых $\varkappa\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \mathfrak{L}$ мы называем *ортогональным дополнением* пространства $\mathfrak{L}$ в пространстве $\mathfrak{C}$ всех гиперкомплексных чисел (и обозначаем через $\mathfrak{C} \ominus \mathfrak{L}$). Штейниц называет пространство $\mathfrak{K}$ дополнительным к пространству $\mathfrak{L}$ (komplementär).

Определение 2.4. Если $|\varphi| = 1$, мы называем число φ *направлением.*

Определение 2.5. Множество всех чисел вида

$$\alpha + c\varphi \quad (c \geqq 0),$$

где α, φ — фиксированные числа, а c пробегает все неотрицательные действительные числа, называется *полулучем с центром α и направлением φ.*

Определение 2.6. Угол между двумя направлениями α и β, $[\sphericalangle(\alpha, \beta)]$, равен значению $\arccos \alpha\beta$, которое $\geqq 0$ и $\leqq \pi$.

Определение 2.7. Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторое множество гиперкомплексных чисел и

$$\alpha\xi = c \quad (|\alpha| = 1) \tag{7}$$

гиперплоскость, выполняющая условия:

1. $\alpha\eta \leqq c$ для любого $\eta \in \mathfrak{H}$.

2. Для всякого $e > 0$ можно в множестве $\mathfrak{H}$ найти число η^* такое, что $\alpha\eta^* > c - e$. В таком случае гиперплоскость (7) называется *граничной гиперплоскостью множества $\mathfrak{H}$ в направлении α.*

Определение 2.8. *Связкой полулучей с* центром O мы называем множество $\mathfrak{F}$ с такими свойствами: 1. $0 \in \mathfrak{F}$; 2. если $\varphi \in \mathfrak{F}$ и $c > 0$, то также $c\varphi \in \mathfrak{F}$. *Множеством направлений* такой *связки полулучей* называется множество всех чисел $\frac{\varphi}{|\varphi|}$, где $\varphi \in \mathfrak{F}$, $\varphi \neq 0$.

Теорема 2.1. *Связка полулучей замкнута тогда и только тогда, когда замкнуто множество его направлений.*

Определение 2.9. Пусть дано множество $\mathfrak{G}$. *Наименьшей связкой полулучей с центром O, содержащей множество $\mathfrak{G}$ назовем* множество всех чисел вида $c\gamma$, где $c \geqq 0$, $\gamma \in \mathfrak{G}$.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — ограниченное*) и замкнутое множество, O — точка не принадлежащая множеству $\mathfrak{G}$; тогда наименьшая связка полулучей с центром O, содержащая $\mathfrak{G}$, будет замкнутой.*

Определение 2.10. Связка полулучей с центром O называетса *относительно всесторонней*, если существует (по крайней мере одномерное) пространство $\mathfrak{L}$, проходящее через начало координат и такое, что для каждой гиперплоскости $\alpha\xi = 0$, не содержащей $\mathfrak{L}$, в связке существует хоть одно число $\varphi_1 \in \mathfrak{L}$ такое, что $\alpha\varphi_1 > 0$, и хоть одно число $\varphi_2 \in \mathfrak{L}$ такое, что $\alpha\varphi_2 < 0$.

Теорема 2.3. *Для того, чтобы связка полулучей с центром O была относительно всесторонней, необходимо и достаточно, чтобы она содержала конечное число точек $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, связанных линейным соотношением*

$$c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_m\varphi_m = 0,$$

где все $c_i > 0$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$.

Теорема 2.4. *Каждая граничная гиперплоскость относительно всесторонней связки полулучей содержит хоть один полулуч связки.*

Теорема 2.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — замкнутая связка полулучей и пусть каждая ее граничная гиперплоскость (если она вообще имеется) содержит хоть один полулуч связки; тогда $\mathfrak{F}$ будет относительно всесторонней.*

Определение 2.11. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|$.

*) Штейниц пользуется термином „абсолютно ограниченное".

Определение 2.12. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ называется *безусловно сходящимся* если он сходится при любой перестановке своих членов.

Теорема 2.6. *Ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ *является тогда и только тогда безусловно сходящимся, когда он сходится абсолютно. В таком случае его сумма не зависит от порядка членов.*

Определение 2.13. Ряд действительных чисел $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ называется *расходящимся к* $+\infty$, если для каждого числа t можно найти число $m_0(t)$ так, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > t$$

для всех $m > m_0(t)$.

Определение 2.14. Ряд действительных чисел $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ называется *безусловно расходящимся к* $+\infty$, если он расходится к $+\infty$ при любом перераспределении своих членов.

Определение 2.15. Ряд действительных чисел $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ называется *определенно расходящимся к* $+\infty$, если каждый член a_i этого ряда можно написать в виде $a_i = b_i + c_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ — безусловно расходящийся к $+\infty$ ряд, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ — сходящийся ряд.

Определение 2.16. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ называется *безусловно расходящимся в направлении* φ, если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\varphi$ безусловно расходится к $+\infty$, а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_i - (\alpha_i\varphi)\,\varphi]$ сходится абсолютно.

Определение 2.17. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ называется *определенно расходящимся в направлении* φ, если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\varphi$ определенно расходится к $+\infty$, а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} [\alpha_i - (\alpha_i\varphi)\,\varphi]$ сходится.

Определение 2.18. Если из рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ образовать ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ так, что выпустив все члены ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ из ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i$, мы получаем ряд

$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$, а вычеркнув все члены ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$, мы получаем из ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i$, то мы говорим, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i$ образовался *вложением* рядов $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ и $\sum_{i=1}^{8}\beta_i$.

Теорема 2.7. *Пусть ряд* $\sum_{i=1}^{\infty}\delta_{ji}$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$ *расходится определенно в направлении* φ_j, *пусть* $\lim_{m\to\infty}\delta_{jm} = 0$ *и пусть*

$$\lambda = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_t\varphi_t \neq 0,$$

где все $c_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$. *Тогда вложением этих* t *рядов можно образовать ряд* $\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i$, *расходящийся определенно в направлении* $\varphi = \dfrac{\lambda}{|\lambda|}$.

Определение 2.19. Пусть φ — некоторое направление, а $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{k_i}$ — ряд тех членов ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$, для которых $\measuredangle\left(\varphi, \dfrac{\alpha_{k_i}}{|\alpha_{k_i}|}\right) < e$. Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{k_i}$ не является абсолютно сходящимся ни для одного $e > 0$, мы называем φ *главным направлением* ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$; полулуч направления φ и с центром в начале координат мы называем *главным полулучом* ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$.

Применяемое мною название главное направление (главный полулуч) совпадает с введенным Штейницом названием (Hauptrichtung, Hauptstrahl). Ярник пользуется для главных полулучей обозначением Divergenzhalbstrahl. В моей работе, также в соответствии со Штейницом, полулуч расхождения имеет иное значение (см. определение 2.20).

Теорема 2.8. *Связка главных полулучей бесконечного ряда замкнута.*

Теорема 2.9. *Если ряд* $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ *не является абсолютно сходящимся, то он содержит хотя бы один главный полулуч.*

Определение 2.20. Пусть ψ — некоторое направление. Если $\sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{pos}\alpha_i\psi$ (абсолютно) сходится, мы называем ψ *направлением сходимости*, если же сумма расходится — *направлением расходимости* ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$. При этом знак $\operatorname{pos} a$ означает $\operatorname{Max}(0, a)$. Полулуч с центром в начале координат и с направлением ψ мы называем тогда *полулучом сходимости* и, соответственно, *расходимости* ряда.

Теорема 2.10. *Пусть ψ — направление. Тогда, если $\psi\varphi < 0$ для всех главных направлений φ ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$, то ψ будет направлением сходимости, а если $\psi\varphi > 0$ хоть для одного главного направления, то ψ будет направлением расходимости этого ряда.*

Теорема 2.11. *Для того, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ безусловно расходился в направлении φ, необходимо и достаточно, чтобы φ было единственным главным направлением ряда и чтобы все направления, перпендикулярные к φ, были направлениями сходимости.*

Теорема 2.12. *Направление φ будет тогда и только тогда главным направлением ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$, когда из него можно выделить ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$, безусловно расходящийся в направлении φ. Выделение можно всегда произвести так, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i$, полученный из ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ путем вычеркивания членов ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$, имел теже главные полулучи и полулучи расходимости, как и исходный ряд.*

Теорема 2.13. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ — главные направления ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ и положим*

$$\delta_i = \lambda_i + d_{1i}\varphi_1 + d_{2i}\varphi_2 + \ldots + d_{ti}\varphi_t$$

(d_{ji} — действительные числа; $\lambda_i\varphi_j = 0$; $j = 1, 2, \ldots, t$; $i = 1, 2, \ldots$). Выделим из ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ t рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^{(j)}$, причем j—й ряд расходится безусловно в направлении φ_j ($j = 1, 2, \ldots, t$), и пусть $\sum_{i=1}^{\infty} \delta'_i$ ряд, полученный из ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ путем вычеркивания всех членов рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^{(j)}$. Положим далее

$$\delta'_i = \lambda'_i + d'_{1i}\varphi_1 + d'_{2i}\varphi_2 + \ldots + d'_{ti}\varphi_t.$$

Тогда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda'_i$ имеет теже главные полулучи и полулучи расходимости, как и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$.

Доказательство. В самом деле, если из ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ выделить абсолютно сходящийся ряд, то, очевидно, оставшийся ряд будет иметь теже самые главные полулучи и полулучи расхождения. Так как, далее, ряд

$\sum_{i=1}^{\infty} [\varepsilon_i^{(j)} - (\varepsilon_i^{(j)}\varphi_j)\,\varphi_j]$ сходится абсолютно, то вычеркивание членов ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i^{(j)}$ из ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ проявляется по отношению к ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ как вычеркивание абсолютно сходящегося ряда.

Замечание. Множество всех чисел вида $c\tau$, где c пробегает все действительные числа, а τ — постоянное гиперкомплексное число, мы обозначаем (по образцу работы [2]) через $\mathfrak{L}\tau$. Точно так же, множество всех чисел вида $k\varrho$, где k пробегает все целые числа, ϱ — постоянное гиперкомплексное число, мы будем обозначать через $\mathfrak{K}\varrho$. В соответствии с этим выражение

$$\alpha + \mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{K}\varrho_2 + \ldots + \mathfrak{K}\varrho_p + \mathfrak{L}\tau_1 + \mathfrak{L}\tau_2 + \ldots + \mathfrak{L}\tau_q \tag{8}$$

обозначает множество всех чисел вида

$$\alpha + k_1\varrho_1 + k_2\varrho_2 + \ldots + k_p\varrho_p + c_1\tau_1 + c_2\tau_2 + \ldots + c_q\tau_q,$$

где $\alpha, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q$ — постоянные числа, k_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ пробегают все целые числа, c_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ — все действительные числа. В случае, что $\alpha = 0$, множество (8) будет, очевидно, модулем. Напомним еще, что наименьшим модулем, содержащим числа $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$, является множество $\mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{K}\varrho_2 + \ldots + \mathfrak{K}\varrho_p$.

Буквы $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{K}$ применяются здесь в двух различных смыслах. Во-первых, как было только что показано, и, во-вторых, в виде самостоятельного обозначения определенного рассматриваемого линейного пространства. Из контекста всегда ясно, какое значение имеется в виду.

§ 3. Множество $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ — ряд гиперкомплексных чисел, $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ — множество его сумм, $\mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ — множество предельных точек последовательности

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \tag{9}$$

$\mathfrak{M}_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ — наименьший модуль, содержащий $\mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ а $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ — замыкание этого модуля. В своей работе [2] В. Ярник доказал две теоремы, доказательство которых мы приводим.

Теорема 3.1. *Множество $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ замкнуто.*

Доказательство. Ясно, что множество $\mathfrak{H}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots)$ замкнуто. Покажем, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ можно путем перестановки членов превратить в ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ так, что $\mathfrak{H}(\beta_1 + \beta_2 + \ldots) = \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$; этим самым мы докажем и нашу теорему. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность, члены которой образуют множество, плотное в множестве $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Выберем прежде всего члены $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k_{11}}$ последовательности (9) так, чтобы среди них был член α_1 и чтобы

$$|\sum_{i=1}^{k_{11}} \beta_i - \xi_1| < 1.$$

Общий случай. После выбора чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k_{m-1,\,m-1}}$ мы выбираем числа $k_{m1}, k_{m2}, \ldots, k_{mm}$ так, что:

1. $k_{m-1,\,m-1} \leqq k_{m1} \leqq k_{m2} \leqq k_{mm}$.
2. Среди чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k_{m1}}$ содержатся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \ldots, \alpha_m$.
3. $|\sum_{i=1}^{k_{mp}} \beta_i - \xi_p| < \frac{1}{m}$ $(p = 1, 2, \ldots, m)$.

Тогда при постоянном p будет, очевидно,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{k_{mp}} \beta_i = \xi_p,$$

откуда легко убедиться в справедливости теоремы.

Теорема 3.2. *Если* $\gamma \in \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\pi \in \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, *то будет также* $\gamma + \pi \in \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Доказательство. Пусть $\gamma \in \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\pi \in \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Тогда существует такая перестановка $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$, что $\sigma_{k_m} = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k_m} \to \gamma$ и частичная последовательность $\beta_{l_1}, \beta_{l_2}, \ldots$ такая, что $\beta_{l_m} \to \pi$.

Переместим члены ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ двумя способами:

1. $\beta_{l_1} + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{l_1-1} + \beta_{l_2} + \beta_{l_1+1} + \ldots + \beta_{l_2-1} + \beta_{l_3} + \ldots + \beta_{l_m-1} + \beta_{l_{m+1}} + \beta_{l_m+1} + \ldots$
2. $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{l_1-1} + \beta_{l_1+1} + \beta_{l_1+2} + \ldots + \beta_{l_2-1} + \beta_{l_1} + \beta_{l_2+1} + \ldots + \beta_{l_m-1} + \beta_{l_{m-1}} + \beta_{l_m+1} + \ldots$

Частичные суммы первых $k_m + 1$ (соотв. $k_m - 1$) членов первого (соотв. второго) ряда будут

$$\sigma_{k_m} + \beta_{l_i} \to \gamma + \pi \text{ (соотв. } \sigma_{k_m} - \beta_{l_{i-1}} \to \gamma - \pi),$$

где β_{l_i} — первое число последовательности $\beta_{l_1}, \beta_{l_2}, \ldots$, невстречающееся среди членов, образующих сумму σ_{k_m}. Из доказанного нетрудно видеть, (принимая во внимание, что множество $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ замкнуто), что также и $\gamma + \pi \in \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, даже если $\pi \in \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Необходимо, поэтому, рассмотреть сначала множество $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, о котором можно утверждать следующее:

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *замкнутый подмодуль n-мерного векторного пространства* $\mathfrak{E}$. *В таком случае*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{K}\varrho_2 + \ldots + \mathfrak{K}\varrho_p + \mathfrak{L}\tau_1 + \mathfrak{L}\tau_2 + \ldots + \mathfrak{L}\tau_q,$$

где ϱ_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, τ_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ — *постоянные гиперкомплексные числа,* $p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $p + q \leqq n$.

Доказательство. Мы ограничимся главными этапами доказательства, пользуясь результатами теории топологических групп.*)

Пусть $\mathfrak{N}$ обозначает составляющую нулевого элемента в подгруппе $\mathfrak{M}$. Легко доказать, что $\mathfrak{N}$ в таком случае будет подпространством пространства $\mathfrak{E}$. Следовательно, и $\mathfrak{E}/\mathfrak{N}$ будет векторным пространством. Значит, $\mathfrak{E}/\mathfrak{N}$ содержит замкнутую подгруппу $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$, которая будет 0-мерной. Из общей теории топологических групп можно вывести, что каждая 0-мерная подгруппа $\mathfrak{W}$ векторной группы $\mathfrak{V}$ является дискретной и имеет поэтому вид

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{K}\sigma_1 + \mathfrak{K}\sigma_2 + \ldots + \mathfrak{K}\sigma_r,$$

где $\sigma_i \in \mathfrak{V}$ линейно независимы, а r — размерность векторного подпространства, которое $\mathfrak{W}$ образует в $\mathfrak{V}$. Отсюда легко следует справедливость теоремы 3.3.

Теорема 3.4. *Пусть*

$$\mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{K}\varrho_2 + \ldots + \mathfrak{K}\varrho_p + \mathfrak{L}\tau_1 + \mathfrak{L}\tau_2 + \ldots + \mathfrak{L}\tau_q$$

данное множество, и ψ — *число пространства*

$$\mathfrak{L}\varrho_1 + \mathfrak{L}\varrho_2 + \ldots + \mathfrak{L}\varrho_p + \mathfrak{L}\tau_1 + \mathfrak{L}\tau_2 + \ldots + \mathfrak{L}\tau_q. \qquad (10)$$

Тогда можно найти возрастающую последовательность

$$r_1 < r_2 < \ldots$$

натуральных чисел так, что

$$r_m\psi = \pi_m + \vartheta_m,$$

где

$$\pi_m \in \mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{K}\varrho_2 + \ldots + \mathfrak{K}\varrho_p + \mathfrak{L}\tau_1 + \mathfrak{L}\tau_2 + \ldots + \mathfrak{L}\tau_q,$$

$$\text{а} \quad \vartheta_m \to 0.$$

Доказательство. Число ψ, как точку пространства (10), можно выразить в виде

$$\psi = c_1\varrho_1 + c_2\varrho_2 + \ldots + c_p\varrho_p + \mathrm{d}_1\tau_1 + \mathrm{d}_2\tau_2 + \ldots + \mathrm{d}_q\tau_q.$$

Если все числа c_i рациональны, то существует число r такое, что все rc_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ являются целыми числами. Тогда искомой последовательностью будет последовательность чисел

$$r, 2r, 3r, \ldots$$

*) Более подробные сведения читатель найдет в монографии [4], см. также [3].

Итак, предположим, что хоть одно c_i иррационально, $m \geqq 2$ — данное число. Тогда можно найти целые числа l_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ и целое число r $(1 \leqq r \leqq m)$ такое, что

$$\left| c_i - \frac{l_i}{r} \right| < \frac{1}{r \, . \sqrt[p]{m}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

(см. [5], стр. 8). Если, поэтому, $e > 0$, то существует хоть одно целое число $r_1 < \frac{1}{e^p}$ и целые числа l_{1i} такие, что

$$|r_1 c_i - l_{1i}| < e \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

причем хоть одно из этих выражений больше нуля. Если имеется несколько таких чисел r, в качестве r_1 мы выберем наименьшее из них. Пусть $e_1 = \max\limits_{i=1,2,\ldots,p} |r_1 c_i - l_{1i}| < e$. Тогда аналогично существует целое число r_2 и целые числа l_{2i} такие, что $|r_2 c_i - l_{2i}| < \frac{e_1}{2}$ и, очевидно, $r_2 > r_1$. Продолжая далее таким же образом, мы получим искомую последовательность.

§ 4. Когда множество $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ непусто.

Определение 4.1. Пусть дан ряд

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots, \tag{11}$$

и ψ — произвольное напрявление. Мы говорим, что ряд (11) *симметричен,* если направления ψ, $-\psi$ являются или оба направлениями сходимости, или же оба направлениями расходимости ряда (11).

Теорема 4.1. *Главные полулучи симметричного ряда* (11) *образуют относительно всестороннюю связку полулучей, поскольку, конечно, ряд* (11) *не является абсолютно сходящимся.*

Доказательство. Так как связка $\mathfrak{F}$ главных полулучей, согласно теореме 2.8, является замкнутой, то достаточно доказать (согласно 2.5), что связка $\mathfrak{F}$ не имеет ни одной граничной гиперплоскости, которая не содержала бы какого — нибудь полулуча связки $\mathfrak{F}$. А это, действительно, так, ибо если бы

$$\psi\xi = 0$$

было граничной гиперплоскостью связки $\mathfrak{F}$, не содержащей ни одного полулуча из $\mathfrak{F}_1$, то для всех полулучей этой связки имело бы место

$$\psi\varphi < 0$$
$$-\psi\varphi > 0.$$

ψ было бы тогда направлением сходимости (по теореме 2.10), а $-\psi$ направлением расходимости, что противоречит предположению. Наша теорема доказана.

Теорема 4.2. *Множество* $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ *тогда и только тогда непусто, когда ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ *симметричен.*

Условие необходимо: Если бы, например, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{pos} \alpha_i \varphi$ расходился, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{pos}(-\alpha_i \varphi)$ сходился, и если $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ — произвольный ряд, полученный из ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ путем перестановки его членов, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \varphi$ был бы расходящимся безусловно к $+\infty$; если бы далее суммы ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ имели предельную точку σ, то $\sigma\varphi$ была бы предельной точкой сумм ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \varphi$, что является противоречием. Следовательно, $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ пусто.

Условие достаточно: Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi$ абсолютно сходится для любого направления φ, то ряд (11) сходится безусловно и множество $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ содержит единственную точку, а именно сумму ряда (11).

Предположим теперь, что ряд (11) не является абсолютно сходящимся.

Пользуясь методом полной индукции, мы докажем прежде всего, что теорема верна для $n = 1$, т. е. для вещественных чисел. Если ряд вещественных чисел

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{12}$$

симметричен и не является абсолютно сходящимся, то это значит, что ряд его неотрицательных членов

$$b_1 + b_2 + \ldots \tag{13}$$

и ряд его отрицательных членов

$$c_1 + c_2 + \ldots \tag{14}$$

расходятся. Произведем в ряде (12) следующее перераспределение:

Во-первых: Возьмем k_1 членов ряда (13) так, чтобы в первый раз получилось

$$\sum_{i=1}^{k_1} b_1 > 0$$

и далее l_1 членов ряда (14) так, чтобы в первый раз получилось

$$\sum_{i=1}^{k_1} b_i + \sum_{i=1}^{l_1} c_i \leqq 0.$$

Во-вторых: Возьмем $b_{k_1+1}, b_{k_1+2}, \ldots, b_{k_2}$ из ряда (13), пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{k_2} b_i + \sum_{i=1}^{l_1} c_i > 0$$

и $c_{l_1+1}, c_{l_1+2}, \ldots, c_{l_2}$ из ряда (14), пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{k_2} b_i + \sum_{i=1}^{l_2} c_i \leqq 0$$

и так далее. Сумма $k_m + l_m$ первых членов перераспределенного ряда будет

$$\sum_{i=1}^{k_m} b_i + \sum_{i=1}^{l_m} c_i = e_m,$$

где $|e_m| < |c_{l_m}|$.

Так как эти суммы ограничены, то имеют хоть одну предельную точку.

Предположим теперь, что теорема верна для $(n-1)$-мерных гиперкомплексных чисел. Пусть (11) — ряд n-мерных гиперкомплексных чисел и пусть ряд (11) симметричен. По теореме 4.1 главные полулучи ряда (11) образуют относительно всестороннюю связку $\mathfrak{F}$, и поэтому (теорема 2.3) из этой связки можно выделить $m+1$ полулучей $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, связанных соотношением

$$c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_m\varphi_m = 0, \;\; c_k > 0. \tag{15}$$

По теореме 2.12 из ряда (11) можно выделить ряды $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ki}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ так, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ki}$ расходился безусловно в направлении φ_k, и чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i$, полученный из ряда $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ путем вычеркивания всех членов рядов $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_{ki}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, имел теже главные полулучи и полулучи расхождения, как и ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$. Положим

$$\begin{aligned} \alpha_{ki} &= a_{ki}\varphi_k + \varkappa_{ki} \\ \beta_i &= b_i\varphi_0 + \varepsilon_i \end{aligned}$$

где a_{ki}, b_i — вещественные числа, $\varepsilon_i\varphi_0 = 0$, $\varkappa_{ki}\varphi_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots$; при том ε_i являются точками $(n-1)$-мерной гиперплоскости $\varphi_0\xi = 0$, а $a_{ki} = \alpha_{ki}\varphi_k$. Ряды

$$a_{k1} + a_{k2} + \ldots \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

расходятся безусловно $k + \infty$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i$ симметричен. Ибо, если

$$\psi = \varphi_0 + \chi \qquad (\varphi_0\chi = 0)$$

— произвольное направление, то имеет место

$$\varepsilon_i\psi = \varepsilon_i\chi = \beta_i\chi,$$

а так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ симметричен, симметричным будет и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$. Поэтому можно ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ переставить в ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$, где

$$\delta_i = \mathrm{d}_i\varphi_0 + \mu_i \qquad (\mu_i\varphi_0 = 0),$$

так, чтобы множество $\mathfrak{H}(\mu_1, \mu_2, \ldots)$ имело по крайней мере одну точку μ. Пусть далее $p_1, p_2, \ldots$ будет возрастающей последовательностью целых чисел такой, что суммы $\sum_{i=1}^{p_k} \mu_i$ сходятся к числу μ. Произведем теперь в ряде (11) следующую перестановку:

Во-первых: Возьмем p_1 членов ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ и далее $a_{01}, a_{02}, \ldots, a_{0q_{01}} (q_{01} \geqq 1)$, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{p_1} d_i + \sum_{i=1}^{q_{01}} a_{0i} = s_1 > 1,$$

затем из каждого ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)\, q_{k1}$ членов, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{q_{k_1}} a_{ki} \geqq \frac{s_1 c_k}{c_0}$$

где c_k — числа из соотношения (15).

Во-вторых: Возьмем $\delta_{p_1+1}, \delta_{p_1+2}, \ldots, \delta_{p_2}$ и далее $a_{0,q_{01}+1}, a_{0,q_{01}+2}, \ldots, a_{0,q_{02}}$ $(q_{02} > q_{01})$, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{p_2} d_i + \sum_{i=1}^{q_{02}} a_{0i} = s_2 > \max(2, s_1),$$

затем из каждого ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ q_{k2} членов, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{q_{k_2}} a_{ki} \geqq \frac{s_2 c_k}{c_0}$$

и так далее.

Сумма первых $p_n + q_{0n} + q_{1n} + \ldots + q_{mn}$ членов перераспределенного ряда будет тогда

$$\mu + \varkappa_0 + \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_m + \vartheta_n + \eta_n,$$

где $\varkappa_k = \sum_{i=1}^{\infty} \varkappa_{ki}$, $|\vartheta_n| \leqq \sum_{k=1}^{m} |\alpha_{k_{q_{kn}}}|$, $\eta_n \to 0$. Итак, эти суммы абсолютно ограничены и множество $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ непусто.

Определение 4.2. Пусть

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \tag{16}$$

ряд гиперкомплексных чисел. Множество всех чисел ξ, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \xi\alpha_i$ сходится абсолютно, мы называем *пространством сходимости* ряда (16).

Теорема 4.3. *Пространство сходимости ряда* (16) *является линейным пространством, проходящим через начало.*

Доказательство тривиально.

Определение 4.3. Если $\mathfrak{K}$ — пространство сходимости ряда (16), а $\mathfrak{L} = \mathfrak{C} \ominus \mathfrak{K}$, то мы называем $\mathfrak{L}$ *пространством разходимости* ряда (16).

Теорема 4.4. *Пусть* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ — *симметричный ряд гиперкомплексных чисел. Пусть* $\mathfrak{K}$ — *пространство сходимости, а* $\mathfrak{L}$ — *пространство расходимости этого ряда. Пусть*

$$\alpha_i = \varkappa_i + \lambda_i \quad (\varkappa_i \in \mathfrak{K},\ \lambda_i \in \mathfrak{L};\ i = 1, 2, \ldots)$$

и пусть $\mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ *содержит лишь одну точку* 0. *Тогда*

$$\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \varkappa + \mathfrak{L},$$

где $\varkappa = \sum_{i=1}^{\infty} \varkappa_i$.

Прежде всего ясно, что числа множества $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ должны иметь указанный вид. Приведенная теорема содержится в более сильной:

Теорема 4.5 (теорема Штейница): *Пусть* $\mathfrak{K}$ *означает пространство сходимости, а* $\mathfrak{L}$ — *пространство расходимосми ряда* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$, *где* $\alpha_i \to 0$ *и пусть*

$$\alpha_i = \varkappa_i + \lambda_i \quad (\varkappa_i \in \mathfrak{K},\ \lambda_i \in \mathfrak{L};\ i = 1, 2, \ldots).$$

Пусть λ — *произвольное число пространства* $\mathfrak{L}$. *Тогда ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ *можно переставить в сходящийся ряд*

$$\alpha_1' + \alpha_2' + \ldots$$

таким образом, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i' = \varkappa + \lambda,$$

где $\varkappa = \sum_{i=1}^{\infty} \varkappa_i$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.2. Прежде всего мы докажем эту теорему для случая, когда $\dim \mathfrak{K} = 0$ (следовательно, $\dim \mathfrak{L} = n$), пользуясь методом полной индукции.

Для одномерных чисел ($n = 1$), т. е. для чисел вещественных, эта теорема сводится к теореме Римана. Допустим, что она справедлива для рядов $(n-1)$-мерных гиперкомплексных чисел, и докажем, что в таком случае она верна и для рядов n-мерных чисел.

Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ — ряд n-мерных гиперкомплексных чисел и $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \ldots, \varphi_m$ — его главные направления, связанные соотношением

$$-\varphi_0 = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_m\varphi_m \quad (c_k > 0).$$

Из ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ мы выделим $m+1$ рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ki}$ так, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ki}$ расходился безусловно в направлении φ_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i$, полученный из ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ путем вычеркивания всех членов рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ki}$, имел теже главные полулучи и полулучи расходимости, как и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$.

По теореме 2.7 можно из рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{1i}, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{2i}, \ldots, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{mi}$ образовать вложением ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$, расходящийся определенно в направлении $-\varphi_0$. Поэтому, если положить

$$\alpha_{0i} = a_{0i}\varphi_0 + \delta_{0i}, \quad \beta_i = -b_i\varphi_0 + \delta_{1i}$$
$$(\varphi_0\delta_{0i} = \varphi_0\delta_{1i} = 0; \; i = 1, 2, \ldots),$$

то ряды $\sum_{i=1}^{\infty} a_{0i}$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ будут определенно расходящимися к $+\infty$, ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{0i}$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{1i}$ — сходящимися рядами. Пусть λ — произвольное число и пусть

$$\lambda' = \lambda - \delta_0 - \delta_1,$$

где δ_0 и δ_1 — суммы рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{0i}$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{1i}$. Положим

$$\lambda'\varphi_0 = l, \; \lambda' - l\varphi_0 = \mu;$$

μ является точкой $(n-1)$-мерного пространства

$$\varphi_0\xi = 0.$$

Пусть далее

$$f_i = \gamma_i\varphi_0, \quad \delta_i = \gamma_i - f_i\varphi_0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Пусть ψ — произвольное направление, перпендикулярное к направлению φ_0. Тогда из уравнения

$$\delta_i\psi = \gamma_i\psi$$

и из уравнения

$$\delta_i \varphi_0 = 0$$

следует, что члены ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ будут точками гиперплоскости

$$\varphi_0 \xi = 0,$$

и что все направления этой гиперплоскости являются направлениями расходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$.

Так как доказываемая теорема верна уже для размерности $n - 1$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ можно переставить в ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma'$, где

$$\gamma_i' = f_i' \varphi_0 + \delta_i'$$

так, что $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i' = \mu$. Вложением рядов $\sum_{i=1}^{\infty} a_{0i}$, $-\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} f_i'$ можно получить сходящийся ряд $\sum_{i=1}^{\infty} h_i$ такой, что $\sum_{i=1}^{\infty} h_i = l$. Соответствующее этому вложение рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{0i}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i'$ дает сходящийся ряд, для которого

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i' = l\varphi_0 + \delta_0 + \delta_1 + \mu = \lambda,$$

Ч. Т. Д.

Если размерность пространства сходимости $\mathfrak{K}$ $k \geq 1$ и, значит, размерность пространства расходимости $\mathfrak{L}$ меньше n, то члены ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ можно записать в виде

$$\alpha_i = \varkappa_i + \lambda_i \quad (\varkappa_i \in \mathfrak{K},\ \lambda_i \in \mathfrak{L};\ i = 1, 2, \ldots),$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} \varkappa_i = \varkappa$ — абсолютно сходящийся ряд, все направления пространства $\mathfrak{L}$ являются направлениями расходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ и далее $\lambda_i \to 0$.

Согласно предыдущему ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ можно переставить так, чтобы его частичные суммы сходились к произвольно выбранному числу λ пространства $\mathfrak{L}$, и тогда имеет место

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i' = \varkappa + \lambda,$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i'$ возникает той же перестановкой ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$. Теорема доказана.

Из теоремы 4.4 вытекает

Следствие: *Пусть* λ_1, λ_2 — *произвольная последовательность точек пространства* $\mathfrak{L}$. *Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел* $k_1 < k_2 < \dots$ *и такая перестановка* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha'_i$ *ряда* $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$, *что*

$$\sum_{i=1}^{k_m} \alpha'_i = \varkappa + \lambda_m + \eta_m,$$

где $\eta_m \to 0$.

Доказательство одинаково с доказательством теоремы 3.1.

Замечание. Пусть $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots$ — последовательность, члены которой образуют плотное в $\mathfrak{L}$ множество. Образуем из нее последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, содержащую все члены последовательности $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots$ и каждый из них бесконечное число раз, например так, что положим

$$\lambda_1 = \lambda'_1,\ \lambda_2 = \lambda'_1,\ \lambda_3 = \lambda'_2,\ \lambda_4 = \lambda'_1,\ \lambda_5 = \lambda'_2,\ \lambda_6 = \lambda'_3, \dots;$$

тогда из предыдущего вытекает, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ можно переставить в ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha'_i$ так, чтобы

$$\mathfrak{H}(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots) = \varkappa + \mathfrak{L}.$$

§ 5. Ряд разностей.

Определение 5.1. Пусть

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \tag{17}$$

ряд гиперкомплексных чисел и пусть

$$\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = \mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{K}\varrho_2 + \dots + \mathfrak{K}\varrho_p + \mathfrak{L}\tau_1 + \mathfrak{L}\tau_2 + \dots + \mathfrak{L}\tau_q.$$

Пусть

$$\alpha_i = \pi_i + \delta_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

где $\pi_i \in \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ такой, что $|\delta_i| = |\pi_i - \alpha_i|$ является минимальной. Тогда мы называем ряд

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots$$

рядом *разностей ряда* (17).

Теорема 5.1. *Члены ряда разностей стремятся к* 0 ($\lim \delta_i = 0$).

Теорема 5.2. *Члены* δ_i *ряда разностей определены однозначно, за исключением конечного числа случаев.*

Доказательства этих теорем не представляют затруднений и предоставляются читателю.

Определение 5.2. Пусть

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots \tag{81}$$

ряд гиперкомплексных чисел, $\mathfrak{S}$ — данное пространство, проходящее через начало. Тогда, если для любого $\psi \in \mathfrak{S}$ оба направления $\frac{\psi}{|\psi|}$ и $-\frac{\psi}{|\psi|}$ являются одновременно или направлениями сходимости или расходимости ряда (18), то мы говорим, что ряд (18) *относительно симметричен в пространстве* $\mathfrak{S}$.

Теперь легко доказать следующую теорему:

Теорема 5.3. *Пусть*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \tag{19}$$

симметричный ряд гиперкомплексных чисел и

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots \tag{20}$$

соответствующий ряд разностей. Пусть $\mathfrak{R}$ *— пространство с базой* $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$,*) $\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \ominus \mathfrak{R}$. *Тогда ряд* (20) *относительно симметричен в пространстве* $\mathfrak{S}$.

Теорема 5.4. *Если ряд*

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots \tag{21}$$

не является абсолютно сходящимся и если он относительно симметричен в пространстве $\mathfrak{S}$, *то из главных направлений этого ряда можно выбрать конечное количество их* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ *так, что*

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_l\varphi_l = \xi \qquad c_i > 0,$$

где ξ *— число пространства* $\mathfrak{R}$, *ортогонального дополнения к* $\mathfrak{S}$ (случай $\xi = 0$ не исключается).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — связка главных полулучей ряда (21). Если какое-либо из главных направлений ряда (21) лежит в пространстве $\mathfrak{R}$, утверждение очевидно. Предположим поэтому, что ни один из главных полулучей ряда (21) не лежит в пространстве $\mathfrak{R}$. Пусть φ — главное направление ($|\varphi| = 1$) ряда (21), η — его проекция в пространство $\mathfrak{S}$. Тогда $\eta \neq 0$. Пусть $\mathfrak{G}$ есть проекция связки $\mathfrak{F}$ в пространство $\mathfrak{S}$. Связка $\mathfrak{F}$ — замкнута (см. 2.8), поэтому и множество направлений этой связки будет замкнутым и абсолютно ограниченным (см. 2.1), а, значит, и проекция этого множества замкнута и абсолютно ограничена; поскольку эта проекция не содержит точки 0, связка $\mathfrak{G}$ будет также замкнутой (см. 2.2).

Пусть $\psi = \psi' + \chi$ — произвольное направление, где $\psi' \in \mathfrak{S}$, $\chi \in \mathfrak{R}$. Пусть η — проекция числа φ в пространство $\mathfrak{S}$.

Тогда

$$\psi\eta = \psi'\eta = \psi'\varphi.$$

*) Т. е. $\mathfrak{R}$ — наименьшее пространство, содержащее $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Итак, если бы для всех точек η связки $\mathfrak{S}$ имело место $\psi\eta < 0$, а, значит, и для всех φ связки $\mathfrak{F}$ $\psi'\varphi < 0$, то это означало бы, что $\frac{\psi'}{|\psi'|}$ является направлением сходимости, а $-\frac{\psi'}{|\psi'|}$ направлением расходимости ряда (21), что противоречит предположению. Следовательно, замкнутая связка полулучей $\mathfrak{S}$ не имеет такой граничной гиперплоскости, которая не содержала бы хоть одного полулуча связки, и поэтому $\mathfrak{S}$ будет относительно всесторонней связкой (см. 2.5). Итак, по теореме 2.3 можно из связки $\mathfrak{S}$ выделить конечную связку полулучей

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l,$$

относительно которых имеет место линейное соотношение

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_l\eta_l = 0 \qquad c_i > 0.$$

Если η_i — проекция полулуча φ_i (т. е. $\varphi_i = \eta_i + \xi_i$, $\xi_i \in \mathfrak{R}$), то можно написать

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_l\varphi_l = \xi,$$

где $\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_l\xi_l$. Теорема доказана.

§ 6. Вспомогательные теоремы.

Теорема 6.1. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — последовательность гиперкомплексных чисел, $\beta_1, \beta_2, \ldots$ — частичная последовательность из $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$; пусть члены из $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, не содержащиеся в β_1, β_2, образуют последовательность $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ Пусть далее даны число λ, последовательность $\pi_1, \pi_2, \ldots$ и последовательность натуральных чисел $p_1, p_2, \ldots$, где $p_1 < p_2 < \ldots$, $p_m \to \infty$, такие, что*

1. $\sum\limits_{i=1}^{p_m} \beta_i = \pi_m + \lambda + \vartheta_m$ $(\vartheta_m \to 0)$.

2. *Все числа* — π_m *суть элементы множества* $\mathfrak{H}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$. *Тогда* $\lambda \in \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Доказательство этой теоремы для последовательностей обыкновенных комплексных чисел дано в работе [2] стр. 21 и его можно целиком перенести и на последовательности гиперкомплексных чисел.

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ можно переставить в ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_i$ так, чтобы $\mathfrak{H}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots) = \mathfrak{H}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$. Значит, существует последовательность $q_1 < q_2 < \ldots$ целых чисел такая, что

$$\left|\sum_{i=1}^{q_m} \delta_i + \pi_m\right| < \frac{1}{m}.$$

Для суммы первых $p_m + q_m$ членов ряда, полученного вложением рядов $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ так, что между членами β_{p_m} и β_{p_m+1} первого ряда вложим члены $\sum_{i=q_{m-1}+1}^{q_m} \delta_i$ второго ряда, имеет место

$$\sum_{i=1}^{p_m} \beta_i + \sum_{i=1}^{q_m} \delta_i = \lambda + \eta_m,$$

где $\eta_m \to 0$, откуда $\lambda \in \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Замечание. Если ряд

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \tag{22}$$

симметричен, то и всякий ряд

$$\alpha_1' + \alpha_2' + \ldots \tag{23}$$

полученный из ряда (22) путем перестановки членов, будет симметричным. Если ψ является направлением сходимости или расходимости ряда (22), то оно будет направлением сходимости или расходимости любого ряда (23), полученного из ряда (22) перестановкой членов; то же самое можно сказать и о главных направлениях, как видно непосредственно из определения этих понятий. Вместо того, чтобы говорить: ряд (22) симметричен, φ есть его главное направление, мы будем также говорить, что последовательность

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

симметрична, имеет главное направление φ и т. п.

Для краткости выражений введем теперь некоторые обозначения.

1. Общий член последовательности в фигурных скобках будет означать всю последовательность. Так напр. $\{k_i\}$ означает последовательность

$$k_1, k_2, \ldots;$$

последовательность

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots$$

мы будем обозначать через $\{\gamma_i\}$, последовательность

$$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots$$

через $\{\alpha_{k_i}\}$ и т. п.

2. Пусть $\{\alpha_i\}$ — последовательность гиперкомплексных чисел, $\{k_i\}$ — последовательность целых чисел. $\{k_i\}$ - остаток последовательности $\{\alpha_i\}$ означает последовательность тех чисел последовательности $\{\alpha_i\}$, которые не содержатся в последовательности $\{\alpha_{k_i}\}$. Аналогично $\{k_i, l_i, m_i\}$-остаток последовательности $\{\alpha_i\}$ означает последовательность тех членов из $\{\alpha_i\}$, которые не содержатся ни в одной из последовательностей $\{\alpha_{k_i}\}$, $\{\alpha_{l_i}\}$, $\{\alpha_{m_i}\}$ и т. д. Точно так же, если последовательность $\{\varepsilon_i\}$

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$$

выделена из последовательности $\{\alpha_i\}$, то $\{\varepsilon_i\}$-остаток последовательности $\{\alpha_i\}$ представляет собой последовательность, полученную из последовательности $\{\alpha_i\}$ выбрасыванием членов последовательности $\{\varepsilon_i\}$.

Теорема 6.2. *Пусть $\{\alpha_i\}$ — ограниченная и симметричная последовательность. Далее, пусть даны два положительных расходящихся ряда*

$$b_{k_1} + b_{k_2} + \ldots \; (k_m \text{ — целое число, } 0 < k_m < k_{m+1})$$
$$c_{l_1} + c_{l_2} + \ldots \; (l_m \text{ — целое число, } 0 < l_m < l_{m+1}).$$

Тогда из $\{k_i\}$ можно выделить частичную последовательность $\{k_i'\}$, а из $\{l_i\}$ частичную последовательность $\{l_i'\}$, имеющие следующие свойства:

1. $k_i' \neq l_j'$ *для* $i, j = 1, 2, \ldots$

2. *Ряды*

$$b_{k_1'} + b_{k_2'} + \ldots$$
$$c_{l_1'} + c_{l_2'} + \ldots$$

расходятся.

3. *Если $\{\gamma_i\}$ означает $\{k_i', l_i'\}$-остаток последовательности $\{\alpha_i\}$, то имеет место*

$$\mathfrak{m}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

4. *Последовательность $\{\gamma_i\}$ имеет те же направления расходимости, как и $\{\alpha_i\}$.*

Доказательство проведем таким образом, что из последовательностей $\{k_i\}$ и $\{l_i\}$ мы выделим частичные последовательности, из которых в свою очередь выделим частичные последовательности и т. д., пока не выполним все условия теоремы 6.2.

Прежде всего мы выделим из последовательности $\{k_i\}$ последовательность $\{m_i\}$, а из последовательности $\{l_i\}$ последодовательность $\{n_i\}$ следующим образом: Положим $m_1 = k_1$, $m_2 = k_2$, $\ldots$, $m_{p_1} = k_{p_1}$, где $k_{p_1} = m_{p_1}$ является первым числом, для которого

$$\sum_{i=1}^{p_1} b_{m_i} > 1.$$

Пусть n_1 — первый член последовательности $\{l_i\}$, для которого $n_1 > k_{p_1}$. Затем возьмем следующие за ним члены последовательности $\{l_i\}$, обозначим их

$$n_1, n_2, \ldots, n_{q_1}$$

пока не получим в первый раз

$$\sum_{j=1}^{q_1} c_{n_j} > 1.$$

Пусть далее m_{p_1+1} — первый член последовательности $\{k_i\}$, для которого $m_{p_1+1} > n_{q_1}$. Начиная с члена m_{p_1+1}, возьмем дальнейшие члены последовательности $\{k_1\}$

$$m_{p_1+1}, m_{p_1+2}, \ldots, m_{p_2}$$

до тех пор, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=p_1+1}^{p_2} b_{m_i} > 1.$$

Пусть n_{q_1+1} — первый член последовательности $\{l_i\}$, который больше m_{p_2}. Начиная с члена n_{q_1+1}, возьмем дальнейшие члены последовательности $\{l_i\}$:

$$n_{q_1+1}, n_{q_1+2}, \ldots, n_{q_2}$$

пока не получим в первый раз

$$\sum_{j=q_1+1}^{q_2} c_{n_j} > 1.$$

и так далее.

Тогда ряды $\{m_i\}$ и $\{n_i\}$ очевидно выполняют условия 1 и 2 теоремы 6.2. Далее: из последовательности $\{m_i\}$ мы выделим последовательность $\{r_i\}$, а из последовательности $\{n_i\}$ последовательность $\{s_i\}$, так что последовательности $\{\alpha_{r_i}\}$ и $\{\alpha_{s_i}\}$ имеют только по одной предельной точке каждая, причем последовательности $\{r_i\}$ и $\{s_i\}$ выполняют условия 1 и 2. Сразу же видно, что любые две частичные последовательности, выделенные из последовательностей $\{m_i\}$ и $\{n_i\}$ выполняют условие 1, а так как все дальнейшие последовательности выделены из $\{m_i\}$ и $\{n_i\}$, условие 1 будет выполнено всегда.

Чтобы избежать накопления индексов, докажем прежде всего **лемму:**

Пусть $\{\alpha_i\}$ — последовательность гиперкомплексных чисел; пусть

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{24}$$

— положительный расходящийся ряд. Тогда можно найти такую последовательность целых положительных чисел $\{k_i\}$, что последовательность $\{\alpha_{k_i}\}$ имеет лишь одну предельную точку и ряд

$$a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots$$

расходится.

Доказательство для последовательностей с n-мерными числами проведем по методу полной индукции.

a) Пусть прежде всего $n = 1$, т. е. числа α_i $(i = 1, 2, \ldots)$ суть вещественные числа. Из последовательности $\{\alpha_i\}$ выделим последовательность $\{\alpha_{k_i}\}$ таким образом:

Первый шаг: Возьмем прежде всего $\alpha_{k_1} = \alpha_1$, $\alpha_{k_2} = \alpha_2$, $\ldots$, $\alpha_{k_{p_1}} = \alpha_{p_1}$, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{p_1} a_{k_i} > 1.$$

Второй шаг: Так как последовательность $\{\alpha_i\}$ ограничена, то числа α_i $(i = 1, 2, \ldots)$ содержатся в некотором интервале $J_1 = < a, b >$. Разобьем его точкой $\frac{a+b}{2}$ на два одинаковых замкнутых интервала. (Точку $\frac{a+b}{2}$ причисляем к обоим интервалам.) Тогда хоть в одном из этих интервалов — обозначим его через J_2 — лежит бесконечное число членов последовательности $\{\alpha_i\}$, причем те члены ряда (24), индексы которых совпадают с индексами членов последовательности $\{\alpha_i\}$, содержащихся в интервале J_2, образуют расходящийся ряд. Пусть $\{\alpha'_i\}$ образовалась из последовательности $\{\alpha_i\}$ удалением тех членов, которые не содержатся в J_2. Из последовательности $\{\alpha'_i\}$ выделим дальнейшие члены

$$\alpha_{k_{p_1+1}}, \alpha_{k_{p_1+2}}, \ldots, \alpha_{k_{p_2}} \quad (k_{p_1+1} > k_{p_1})$$

пока в первый раз не будет

$$\sum_{i=p_1+1}^{p_2} a_{k_i} > 1.$$

Разобьем интервал J_2 снова на два интервала одинаковой величины и поступаем далее так же, как и с J_1; таким образом получится последовательность интервалов $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \ldots$ с единственной общей точкой α и последовательность $\{k_i\}$ так, что ряд

$$a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots$$

расходится, а $\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_{k_i} = \alpha$.

б) Предположим теперь, что лемма верна для $(n-1)$-мерных гиперкомплексных чисел, и докажем, что в таком случае она верна и для n-мерных чисел.

Пусть теперь $\{\alpha_i\}$ — ограниченная последовательность n-мерных чисел. Пусть φ — произвольное напрявление, а β_i — точки гиперплоскости, проходящей через начало перпендикулярно направлению φ. Тогда всякое число α_i последовательности $\{\alpha_i\}$ можно записать в виде

$$\alpha_i = \beta_i + f_i\varphi$$

(f_i — действительное число, $\beta_i\varphi = 0$). Пусть далее

$$a_1 + a_2 + \ldots$$

положительный расходящийся ряд. Тогда, по предположению из последовательности $\{\alpha_i\}$ можно выделить последовательность $\{\alpha_{j_i}\}$ так, что ряд

$$a_{j_1} + a_{j_2} + \ldots$$

расходится и последовательность $\{\beta_{j_i}\}$ обладает лишь одной предельной точкой β. Если обозначить

$$\alpha_{j_i} = \alpha'_i, \ \beta_{j_i} = \beta'_i, \ f_{j_i} = f'_i, \ a_{j_i} = a'_i,$$

получается последовательность $\{\alpha'_i\}$, где

$$\alpha'_i = \beta'_i + f'_i\varphi \ (i = 1, 2, \ldots)$$

и положительный расходящийся ряд

$$a_1' + a_2' + \ldots$$

Но тогда из последовательности $\{\alpha_i'\}$ можно выделить последовательность $\{\alpha_{k_i}'\}$ так, чтобы последовательность $\{f_{k_i}'\}$ имела только одну предельную точку f, а поэтому последовтельность $\{\alpha_{k_i}'\}$ имеет также одну предельную точку $\beta + f\varphi$, причем ряд

$$a_{k_1}' + a_{k_2}' + \ldots$$

расходится. Этим доказана наша лемма.

Из выделенных до сих пор последовательностей $\{m_i\}$, $\{n_i\}$, выполняющих условия 1 и 2, можно, согласно этой лемме, выделить последовательности $\{r_i\}$ и $\{s_i\}$, также выполняющие эти условия и такие, что последовательность $\{x_{r_i}\}$ имеет только одну предельную точку α, а $\{\alpha_{s_i}\}$ — одну предельную точку β.

Пусть $\{\gamma_i'\}$ является $\{r_i, s_i\}$-остатком последовательности $\{\alpha_i\}$. Тогда $\mathfrak{m}(\gamma_1', \gamma_2', \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, за исключением, быть может, точек α a β.

Если α не является точкой $\mathfrak{m}(\gamma_1', \gamma_2', \ldots)$, выделим из $\{r_i\}$ последовательность (t_i) таким образом: Возьмем p_1 членов $\{r_i\}$, обозначим их $t_1, t_2, \ldots, t_{p_1}$, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{p_1} b_{ti} > 1$$

и выпустим следующий член. Затем возьмем дальнейшие члены $\{r_i\}$, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=p_1+1}^{p_2} b_{t_i} > 1$$

и выпустим член $\{r_i\}$, следующий за t_{p_2}, и т. д.

Аналогично образуем из $\{s_i\}$ последовательность $\{u_i\}$, если β не является элементом $\mathfrak{m}(\gamma_1', \gamma_2', \ldots)$.

Пусть $\{\gamma_i''\}$ является $\{t_i, u_i\}$-остатком последовательности $\{\alpha_i\}$. Последовательбость $\{\gamma_i''\}$ получается из последовательности $\{\gamma_i'\}$ вложением последовательности

$$\alpha_{r_{p_1}+1}, \ \alpha_{r_{p_2}+2}, \ldots$$

$$\alpha_{s_{q_1}+1}, \ \alpha_{s_{q_2}+2}, \ldots,$$

из которых первая имеет единственную предельную точку α, а вторая — единственную предельную точку β, откуда

$$\mathfrak{m}(\gamma_1'', \gamma_2'', \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Остается еще выполнить последнее условие, а именно, что последовательность $\{\alpha_i\}$ и ее остаток должны иметь общие полулучи расходимости. Значит, нам придется еще выделить из последовательностей $\{t_i\}$

и $\{u_i\}$ последовательности $\{k'_i\}$ и $\{l'_i\}$ так, чтобы были выполнены условия 1, 2, 3 и 4.

С условием 1 нам уже не нужно считаться, точно так же условие 3 будет, очевидно, выполнено для каждой пары последовательностей, выделенных из $\{t_i\}$ и $\{u_i\}$.

Мы будеп различать два случая:

а) Все направления являются направлениями расходимости последовательности $\{\alpha_i\}$.

б) Последовательность $\{\alpha_i\}$ имеет k-мерное пространство сходимости.

Случай а). Применим и здесь метод индукции. Прежде всего докажем теорему для $n = 1$, т. е. для вещественных чисел. В этом случае для соблюдения условия 4 необходимо, чтобы ряд положительных и ряд отрицательных членов последовательности $\{\gamma_i\}$ расходились.

Если это выполняется уже у последовательности $\{\gamma''_i\}$, положим $k'_i = t_i$, $l'_i = u_i$, $\gamma_i = \gamma''_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

В противном случае, если, например, ряд положительных членов последовательности $\{\gamma''_i\}$ сходится, то будет расходиться хоть один из рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{pos}\alpha_{t_i}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{pos}\alpha_{u_i}$. Пусть расходится, например, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{pos}\alpha_{t_i}$.

Пусть $\{v_i\}$ — частичная последовательность, выделенная из последовательности $\{t_i\}$ и содержащая все те и только те члены последовательности $\{t_i\}$, для которых

$$\alpha_{v_i} > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Затем мы поступаем следующим образом:

Первый шаг: Из последовательности $\{v_i\}$ выделим $x_1, x_2, \ldots, x_{p_1}$, пока не будет в первый раз

$$\sum_{i=1}^{p_1} \alpha_{x_i} > 1$$

а из неиспользованных еще членов последовательности $\{t_i\}$ выделим y_1, $y_2, \ldots, y_{q_1}$, пока не будет в первый раз

$$\sum_{i=1}^{q_1} b_{y_i} > 1.$$

Вообще m-тый шаг: Если уже выбраны числа p_j, q_j $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$, возьмем из неиспользованных еще членов последовательности $\{v_i\}$ $x_{p_{m-1}+1}, x_{p_{m-1}+2}, \ldots, x_{p_m}$, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} \alpha_{x_i} > 1,$$

и затем из неиспользованных еще членов последовательности $\{t_i\}$ $y_{q_{m-1}+1}$, $y_{q_{m-1}+2}, \ldots, y_{q_m}$, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=q_{m-1}+1}^{q_m} b_{y_i} > 1$$

и так далее.

Пусть $\{\gamma_i'''\}$ будет $\{y_i,\ u_i\}$-остатком последовательности $\{\alpha_i\}$. Тогда ряд, образованный из положительных членов последовательности $\{\gamma_i'''\}$, будет расходящимся. Если ряд отрицательных членов этой последовательности также расходится, то положим $k_i' = y_i$, $l_i' = u_i$, $\gamma_i = \gamma_i'''$ $(i = 1, 2, \ldots)$. В противном случае дополним таким же образом последовательность $\{\gamma_i'''\}$ отрицательными членами одной из последовательностей $\{\alpha_{y_i}\}$, $\{\alpha_{u_i}\}$, так что для $n = 1$ теорема верна.

Предположим теперь, что теорема верна для $(n - 1)$-мерных гиперкомплексных чисел и докажем, что в таком случае она верна и для n-мерных чисел. Итак, пусть $\{\alpha_i\}$ — симметричная последовательность n-мерных чисел; пусть $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m$ — связка ее главных полулучей, удовлетворяющая соотношению

$$c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_m\varphi_m = 0 \quad (c_i > 0).$$

По доказанному, из последовательности $\{k_i\}$ можно выделить $\{t_i\}$ и из $\{l_i\}$ последовательность $\{u_i\}$ так, что будут выполнены первые три условия теоремы 6.2.

Положим

$$\alpha_i = \beta_i + f_i\varphi_0 \quad (\beta_i\varphi_0 = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots);$$

β_i являются точками гиперплоскости, которую мы обозначим через $\mathfrak{L}$ и которая проходит через начало перпендикулярно к направлению φ_0. По предположению, из последовательности $\{t_i\}$ можно выделить последовательность $\{x_i\}$ и из $\{u_i\}$ последовательность $\{y_i\}$ так, чтобы кроме первых трех условий, т. е.

1. $x_i \neq y_j$ для $i,\ j = 1,\ 2, \ldots$;
2. ряды $\sum_{i=1}^{\infty} b_{x_i}$ и $\sum_{i=1}^{\infty} c_{y_i}$ расходятся;
3. если $\{\gamma_i'\}$ является $\{x_i,\ y_i\}$-остатком последовательности $\{\alpha_i\}$, то

$$\mathfrak{m}(\gamma_1',\ \gamma_2',\ \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots)$$

было выполнено еще условие:

4. все направления гиперплоскости $\mathfrak{L}$ являются направлениями расходимости последовательности $\{\beta_i'\}$, где $\{\beta_i'\}$ представляет собой $\{x_i,\ y_i\}$-остаток последовательности

$$\{\beta_i\} : \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots$$

Если $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — главные направления последовательности $\{\gamma_i'\}$, положим $\gamma_i' = \gamma_i$, $x_i = k_i'$, $y_i = l_i'$. Если φ_0 не является главным направлением последовательности $\{\gamma_i'\}$, то оно будет главным направлением одной из последовательностей $\{\alpha_{x_i}\}$, $\{\alpha_{y_i}\}$. Пусть это верно, например, для $\{\alpha_{x_i}\}$. Тогда — как будет доказано дальше — из последовательности $\{x_i\}$ можно выделить последовательность $\{x_i'\}$ так, что ряд

$$b_{x_1'} + b_{x_2'} + \ldots$$

останется расходящимся, и последовательность $\{\gamma_i''\}$, т. е. $\{x_i', y_i\}$-остаток последовательности $\{\alpha_i\}$, имеет главное направление φ_0. При этом условия 1, 3 и 4 все еще выполнены.

Этого мы достигнем так: Из ряда

$$\alpha_{x_1} + \alpha_{x_2} + \ldots$$

можно по теореме 2.12 выделить ряд

$$\alpha_{z_1} + \alpha_{z_2} + \ldots$$

безусловно расходящийся в направлении φ_0.

Первый шаг: Из последовательности $\{x_i\}$ возьмем p_1 первых членов x_1', x_2', $\ldots$, x_{p_1}', пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{p_1} b_{x_i'} > 1,$$

а затем из неиспользованных еще членов последовательности $\{z_i\}$ возьмем q_1 первых членов $z_1, z_2, \ldots, z_{q_1}$, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{q_1} \alpha_{z_i}\varphi_0 > 1.$$

Вообще m-тый шаг: Если уже выбраны числа p_i, q_i ($i = 1, 2, \ldots, m - 1$), возьмем из неиспользованных еще членов последовательности $\{x_i\}$: $x'_{p_{m-1}+1}$, $x'_{p_{m-1}+2}$, $\ldots$, x'_{p_m}, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} b_{x_i'} > 1,$$

и затем из неиспользованных еще членов последовательности $\{z_i\}$: $z_{q_{m-1}+1}$, $z_{q_{m-1}+2}$, $\ldots$, z_{q_m}, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=q_{m-1}+1}^{q_m} \alpha_{z_i}\varphi_0 > 1.$$

Тогда ряд

$$b_{x_1'} + b_{x_2'} + \ldots$$

расходится и ряд

$$\alpha_{z_1} + \alpha_{z_2} + \ldots$$

безусловно расходится в направлении φ_0. Так как, далее, последовательность $\{\gamma_i''\}$, т. е. $\{x_i', y_i\}$-остаток последовательности $\{\alpha_i\}$, содержит последовательность $\{\alpha_{z_i}\}$, имеющую главный полулуч φ_0, то и последовательность $\{\gamma_i''\}$ имеет главный полулуч φ_0.

Этот процесс можно применить для всех полулучей $\varphi_i (i = 0, 1, \ldots, m)$. В конце концов мы получим таким образом из последовательности $\{x_i\}$ частичную последовательность $\{k'_i\}$, а из последовательности $\{y_i\}$ частичную последовательность $\{l'_i\}$; если через $\{\gamma_i\}$ обозначить $\{k'_i, l'_i\}$-остаток последовательности $\{\alpha_i\}$, то $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ будут главными полулучами $\{\gamma_i\}$.

Последовательности $\{k'_i\}$ и $\{l'_i\}$ тогда выполняют все условия 1, 2, 3 и 4 теоремы 6.2. Выполнение первых трех условий очевидно; докажем, что выполнено и четвертое. Пусть ψ — произвольное направление; тогда возможны три случая:

1. $$\psi\varphi_0 = 0$$

Тогда — если $\{\beta'_i\}$ обозначает $\{k'_i, l'_i\}$-остаток последовательности $\{\beta_i\}$ — будет

$$\gamma_i\psi = \beta'_i\psi \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

и, значит, ψ будет направлением расходимости.

2. $$\psi\varphi_0 > 0.$$

Тогда по теореме 2.10 ψ будет направлением расхождения.

3. $$\psi\varphi_0 < 0.$$

Тогда из уравнения

$$c_0\psi\varphi_0 + c_1\psi\varphi_1 + \ldots + c_m\psi\varphi_m = 0,$$

с учетом $c_i > 0$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, вытекает что хоть одно $\psi\varphi_i > 0$ и отсюда ψ будет по теореме 2.10 полулучом расходимости.

Случай б). Последовательность $\{\alpha_i\}$ имеет k-мерное пространство сходимости $\mathfrak{K}$. В этом случае запишем члены последовательности $\{\alpha_i\}$ в виде

$$\alpha_i = \varkappa_i + \lambda_i \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

где $\varkappa_i$ — числа пространства $\mathfrak{K}$, λ_i — числа пространства расходимости $\mathfrak{L}$.

Если ψ — произвольное направление пространства $\mathfrak{L}$, имеет место

$$\alpha_i\psi = \lambda_i\psi \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

а так как ψ является направлением расходимости последовательности $\{\alpha_i\}$, то оно будет направлением расходимости и для последовательности $\{\lambda_i\}$. По доказанному теперь можно найти последовательности $\{k'_i\}$ и $\{l'_i\}$, выполняющие следующие условия:

1. $k'_i \neq l'_i$ для $i, j = 1, 2, \ldots$
2. Ряды

$$b_{k_1'} + b_{k_2'} + \ldots$$
$$c_{l_1'} + c_{l_2'} + \ldots$$

расходятся.

3. Если $\{\gamma_i\}$ является $\{k'_i, l'_i\}$-остатком последовательности $\{\alpha_i\}$, то $\mathfrak{m}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

4. Если $\{\lambda_i'\}$ является $\{k_i', l_i'\}$-остатком последовательности $\{\lambda_i\}$, то все направления пространства $\mathfrak{L}$ будут направлениями расходимости последовательности $\{\lambda_i'\}$.

Если ψ — направление пространства сходимости последовательности $\{\alpha_i\}$, то ψ будет также направлением сходимости выделенной из нее последовательности $\{\gamma_i\}$.

Если ψ — направление пространства $\mathfrak{L}$, ψ будет направлением расходимости последовательности $\{\lambda_i'\}$, а, значит, и $\{\gamma_i\}$.

Если же ψ — направление, не лежащее ни в пространстве $\mathfrak{K}$, ни в пространстве $\mathfrak{L}$, то можно написать

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (\psi_1 \in \mathfrak{K},\ \psi_2 \in \mathfrak{L})$$

а так как

$$\gamma_i \psi = \varkappa_i' \psi_1 + \lambda_i' \psi_2$$

и ряд

$$\varkappa_1' \psi_1 + \varkappa_2' \psi_1 + \ldots$$

сходится абсолютно, а ψ_2 — полулуч расхождения последовательности $\{\lambda_i'\}$, то ψ будет направлением расходимости последовательности $\{\gamma_i\}$.

Это вполне доказывает теорему.

Замечание. Из условия 4 вытекает, конечно, что и последовательность $\{\gamma_i\}$ симметрична.

Теорема была доказана для двух рядов $\sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}$, $\sum_{i=1}^{\infty} c_{li}$; ясно, однако, что она верна и для любого конечного числа рядов. Общая формулировка этой теоремы гласит:

Теорема 6.2.а. *Пусть $\{\alpha_i\}$ — симметричная и ограниченная последовательность. Пусть далее дано p $(p \geqq 1)$ положительных расходящихся рядов*

$$b'_{k_{11}} + b'_{k_{12}} + \ldots (k_{1m} \text{ — целое } 0 < k_{1m} < k_{1,m+1})$$
$$b''_{k_{21}} + b''_{k_{22}} + \ldots (k_{2m} \text{ — целое } 0 < k_{2m} < k_{2,m+1})$$
$$b^{(p)}_{k_{p1}} + b^{(p)}_{k_{p2}} + \ldots (k_{pm} \text{ — целое } 0 < k_{pm} < k_{p,m+1}).$$

Тогда из каждой последовательности

$$k_{i1}, k_{i2}, \ldots (i = 1, 2, \ldots, p)$$

можно выделить частичную последовательность

$$k'_{i1}, k'_{i2}, \ldots (i = 1, 2, \ldots, p)$$

имеющую следующие свойства:

1. $k'_{ir} \neq k'_{js}$ *для* $i \neq j$; $r, s = 1, 2, \ldots$
2. *Ряды*

$$b^{(i)}_{k'_{i1}} + b^{(i)}_{k'_{i2}} + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

расходятся.

3. *Если* $\{\gamma_i\}$ — *последовательность, возникшая из* $\{\alpha_i\}$ *удалением всех членов последовательности*

$$\alpha_{k'_{i_1}}, \alpha_{k'_{i_2}}, \ldots (i = 1, 2, \ldots, p),$$

то имеет место

$$\mathfrak{m}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

4. *Последовательность* $\{\gamma_i\}$ *имеет те же направления расходимости, как и последовательность* $\{\alpha_i\}$.

Формулировка теоремы в частном случае $p = 1$ не представляет затруднений.

Теорема 6.3. *Пусть* $\{\delta_i\}$ — *симметричная последовательность* m*-мерных гиперкомплексных чисел. Пусть далее* $\{\alpha_i\}$ — *симметричная последовательность* n*-мерных гиперкомплексных чисел. Тогда можно найти возрастающую последовательность натуральных чисел* $\{r_i\}$, *имеющую следующие свойства*:

. *Посл едовательность* $\{\delta_{r_i}\}$ *имеет те же направления расходимости, как и* $\{\delta_i\}$.

2. *Если* $\{\gamma_i\}$ *обозначает* $\{r_i\}$*-остаток последовательности* $\{\alpha_i\}$, *то* $\mathfrak{m}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_i, \alpha_2, \ldots)$.

3. *Последовательность* $\{\gamma_i\}$ *имеет те же направления расходимости, как и* $\{\alpha_i\}$.

Доказательство основано на полной индукции. Пусть членами последовательности $\{\delta_i\}$ будут числа m-мерного пространства $\mathfrak{R}$. Теорему мы докажем прежде всего для $m = 1$, а затем, в предположении, что она верна для размерности $m - 1$, докажем ее справедливость и для m-мерных чисел.

Будем различать два случая:

α) Ряд

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots$$

сходится абсолютно.

β) Случай α) не имеет места.

Случай α) тривиален.

Случай β). 1. Пусть $m = 1$, т. е. δ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ суть вещественные числа.

Пусть $\{\delta_{ki}\}$ — последовательность тех членов из $\{\delta_i\}$, для которых $\delta_{ki} \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, а $\{\delta_{li}\}$ — последовательность тех членов, для которых $\delta_{li} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. По теореме 6.2 из последовательности $\{\delta_{ki}\}$ можно выделить последовательность $\{\delta_{k'_i}\}$, а из последовательности $\{\delta_{li}\}$ последовательность $\{\delta_{l'_i}\}$ так, что

1. Ряды

$$\delta_{k_1'} + \delta_{k_2'} + \ldots$$

$$-\delta_{l_1'} - \delta_{l_2'} - \ldots$$

положительнны и расходятся.

(2). Если $\{\gamma_i\}$ обозначает $\{k'_i, l'_i\}$-остаток последовательности $\{\alpha_i\}$, то $\mathfrak{m}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots,) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

(3). $\{\gamma_i\}$ имеет те же направления расходимости, как и $\{\alpha_i\}$.

Пусть $\{\delta_{r_i}\}$ — последовательность, полученная вложением последовательностей $\{\delta_{k_i'}\}$ и $\{\delta_{l_i'}\}$. Тогда последовательность $\{r_i\}$ выполняет все условия теоремы 6.3.

2. Предположим теперь, что теорема верна для $(m - 1)$-мерных чисел и пусть $\{\delta_i\}$ — последовательность m-мерных чисел. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — главные полулучи последовательности $\{\delta_i\}$, удовлетворяющие соотношению

$$c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_p\varphi_p = 0 \quad (c_i > 0).$$

Каждое число δ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ можно записать в виде

$$\delta_i = \tau_i + f_i\varphi_0 \quad (\tau_i\varphi_0 = 0),$$

следовательно, τ_i будут числами $(m - 1)$-мерного пространства $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{R}$, проходящего через начало координат перпендикулярно к направлению φ_0. Так как последовательность $\{\tau_i\}$ симметрична и теорема верна для $(m - 1)$-мерных чисел, то из последовательности $\{\delta_i\}$ можно выделить последовательность $\{\delta_{q_i}\}$ так, что

1. Последовательность $\{\tau_{q_i}\}$ имеет те же направления расходимости, как и последовательность $\{\tau_i\}$.

2. Если $\{\gamma'_i\}$ является $\{q_i\}$-остатком последовательности $\{\alpha_i\}$, то $\mathfrak{m}(\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

3. Последовательность $\{\gamma'_i\}$ имеет те же направления расходимости, как и последовательность $\{\alpha_i\}$.

Если последовательность $\{\delta_{q_i}\}$ имеет в качестве главных полулучей $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$, то положим $r_i = q_i, \gamma'_i = \gamma_i = (1, 2, \ldots)$.

Если же, однако, в последовательности $\{\delta_{q_i}\}$ не имеется главного полулуча φ_0, и если $\{\delta_{s_i}\}$ является $\{q_i\}$-остатком последовательности $\{\delta_i\}$ (так что последовательность $\{\gamma'_i\}$ тождественна с последовательностью $\{\gamma_{s_i}\}$), то $\{\delta_{s_i}\}$ будет, наверное, иметь главный полулуч φ_0. По теореме 2.12 тогда можно из последовательности $\{\delta_{s_i}\}$ выделить последовательность $\{\delta_{j_i}\}$, расходящуюся безусловно в направлении φ_0. Пусть $\{\delta_{k_i}\}$ — последовательность, выделенная из последовательности $\{\delta_{j_i}\}$ и содержащая все те и только те члены последовательности $\{\delta_{j_i}\}$, для которых $\delta_{k_i}\varphi_0 > 0$.

$$\delta_{k_1}\varphi_0 + \delta_{k_2}\varphi_0 + \ldots$$

будет положительным расходящимся рядом, и по теореме 6.2а из последовательности $\{k_i\}$ можно выделить последовательность $\{k'_i\}$ так, что ряд

$$\delta_{k_1'}\varphi_0 + \delta_{k_2'}\varphi_0 + \ldots$$

будет расходиться и, если $\{\gamma''_i\}$ является $\{k'_i\}$-остатком последовательности

$\{\gamma_i'\}$, то $\mathfrak{m}(\gamma_1'', \gamma_1'', \ldots) = \mathfrak{m}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ и $\{\gamma_i''\}$ имеет те же направления расходимости, как $\{\gamma_i'\}$, и, значит, те же, как и $\{\alpha_i\}$; кроме того $\mathfrak{m}(\gamma_1''$, γ_2'', $\ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Если вложить члены последовательности $\{\delta_{k_i'}\}$ между членами последовательности $\{\delta_{q_i}\}$ и обозначить полученную таким образом последовательность через $\{\delta_{r_i}'\}$, то будут выполнены условия:

1. Последовательность $\{\delta_{r_i}'\}$ имеет главный полулуч φ_0.

2. Последовательность $\{\tau_{r_i}'\}$ имеет те же полулучи расходимости, как и последовательность $\{\tau_i\}$.

3. $\mathfrak{m}(\gamma_1'', \gamma_2'', \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

4. Последовательность $\{\gamma_i''\}$ имеет те же полулучи расходимости, как и $\{\alpha_i\}$.

Продолжая эти рассуждения, мы получим в конце концов последовательность $\{\delta_{r_i}\}$, выполняющую условия 2 и 3 теоремы 6.3; кроме того все полулучи $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p$ являются ее главными полулучами, и последовательность $\{\tau_{r_i}\}$ имеет те же полулучи расхождения, как и последовательность $\{\tau_i\}$.

Пусть теперь ψ — произвольное направление. Если $\psi\varphi_0 > 0$, будет ψ направлением расхождения последовательности $\{\delta_i\}$ и $\{\delta_{r_i}\}$. Если $\psi\varphi_0 < 0$, то из уравнения

$$c_0\psi\varphi_0 + c_1\psi\varphi_1 + \ldots + c_p\psi\varphi_p = 0 \quad (c_i > 0)$$

вытекает, что хотя бы для одного φ_i имеет место $\psi\varphi_i > 0$, и ψ будет снова направлением расходимости последовательностей $\{\delta_i\}$ и $\{\delta_{r_i}\}$. Если же $\psi\varphi_0 = 0$, то $\psi\delta_i = \psi\tau_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и ψ будет одновременно направлением расходимости или сходимости последовательностей $\{\tau_i\}$ и $\{\tau_{r_i}\}$, а, значит, и $\{\delta_i\}$ и $\{\delta_{r_i}\}$.

Этим теорема вполне доказана.

§ 7. Множество $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Теорема 7.1. *Пусть*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$$

симметричный ряд гиперкомплексных чисел и пусть $\mathfrak{R}$ *— пространство с базой*

$\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{K}\varrho_2 + \ldots + \mathfrak{K}\varrho_p + \mathfrak{L}\sigma_1 + \mathfrak{L}\sigma_2 + \ldots + \mathfrak{L}\sigma_q$ $(\varrho_i, \sigma_j$ *линейно независимы*, $p + q > 0)$ *и* $\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \ominus \mathfrak{R}$. *Пусть ряд*

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots \tag{25}$$

относительно симметричен в пространстве $\mathfrak{S}$ *и пусть* $\delta_m \to 0$. *Пусть* $\{\lambda_i\}$ *— последовательность точек из пространства расходимости ряда*

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_i$. *Тогда существует возрастающая последовательность натуральных чисел* $\{k_i\}$ *такая, что*

1. *Последовательность* $\{\delta_{k_i}\}$ *можно переставимь в ряд (эту перестановку обозначим снова через* $\delta_{k_1} + \delta_{k_2} + \ldots$*) так, чтобы в этом переставленном ряду существовала последовательность частичных сумм*

$$\sum_{i=1}^{p_m} \delta_{k_i} = \pi_m + \varkappa + \lambda_m + \vartheta_m,$$

где $\pi_m \in \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\vartheta_m \to 0$ *и* $\varkappa = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varkappa_i$, *причем* $\varkappa_i$ *определены ниже в* (25а).

2. $\{k_i\}$*-остаток последовательности* $\{\alpha_i\}$ *— обозначим его через* $\{\gamma_i\}$ *— имеет те же направления расходимости, как и* $\{\alpha_i\}$.

3. $\mathfrak{m}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Доказательство. Пространство расходимости последовательности $\{\delta_i\}$ озобначим через $\mathfrak{L}$, пространство сходимости — через $\mathfrak{K}$, $\dim \mathfrak{L} = l$, $\dim \mathfrak{K} = k$.

Если $l = 0$, т. е. ряд (25) сходится абсолютно, то $\lambda_i = 0$, и теорема вытекает из теоремы **6.3**. В самом деле, достаточно принять за $\{k_i\}$ произвольную бесконечную последовательность такую, чтобы последовательность $\{\gamma_i\}$, т. е. $\{k_i\}$-остаток последовательности $\{\alpha_i\}$, имела те же направления расходимости, как и $\{\alpha_i\}$, а кроме того $\mathfrak{m}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Допустим, поэтому, что $l > 0$. Члены ряда (25) запишем в виде

$$\delta_i = \lambda_i + \varkappa_i, \quad (\lambda_i \in \mathfrak{L},\ \varkappa_i \in \mathfrak{K}) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{25a}$$

Без ограничения общности можно положить $\varkappa_i = 0$, так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varkappa_i$ сходится по абсолютной величине и его сумма не меняется ни при каких перераспределениях. Далее мы воспользуемся методом полной индукции. Допустим, что теорема верна для последовательности $\{\delta_i\}$, имеющей $(l - 1)$-мерное пространство расходимости, и докажем, что она верна и в том случае, когда пространство $\mathfrak{L}$ будет l-мерным.

Мы будем различать два случая:

I. $\dim (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}) = 0$.

II. $\dim (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}) > 0$.

Случай I. Так как

$$\mathfrak{E} \ominus (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}) = \mathfrak{K} + \mathfrak{S}$$

то в силу предположения будет $\dim(\mathfrak{K} + \mathfrak{S}) = n$. Следовательно, каждое число λ можно записать в виде $\lambda = \sigma + \varkappa$, где $\sigma \in \mathfrak{S}$, $\varkappa \in \mathfrak{K}$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \varkappa\delta_i$ сходится абсолютно, а ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{pos}(\sigma\delta_i)$, $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{pos}(-\sigma\delta_i)$ оба одновременно сходятся или расходятся. Из уравнения

$$\pm \lambda\delta_i = \pm \sigma\delta_i \pm \varkappa\delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

вытекает, что также ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{pos}(\lambda\delta_i)$, $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{pos}(-\lambda\delta_i)$ или оба сходятся или оба расходятся, следовательно ряд (25) симметричен.

Согласно теореме 6.3 из ряда (25) можно выделить ряд

$$\delta_{k_1} + \delta_{k_2} + \ldots \tag{26}$$

имеющий те же направления расходимости, как и ряд (25) так, что $\{k_i\}$-остаток последовательности $\{\alpha_i\}$ — мы его обозначим через $\{\gamma_i\}$ — будет иметь те же направления расходимости, как и $\{\alpha_i\}$, и $\mathfrak{m}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Тогда по следствию теоремы 4.4 при подходящей перестановке ряда (26)

$$\sum_{i=1}^{p_m} \delta_{k_i} = \lambda_m + \vartheta_m, \quad \vartheta_m \to 0.$$

Случай II. В дальнейшем мы предполагаем, что

$$\dim (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}) > 0. \tag{27}$$

Произведем теперь следующее построение некоторого числа $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathfrak{R}$.

По теореме 5.4 существует конечное число главных направлений $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ ряда (25) и положительные $c_1, c_2, \ldots, c_t$ $(t > 0)$ так, что $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_t\varphi_t = \xi$, $\xi \in \mathfrak{R}$.

Нужно различать два случая:

Случай А. Выбор φ_i и c_i $(i = 1, 2, \ldots, t)$ можно произвести так, чтобы $\xi \neq 0$.

Случай Б. Случай А не имеет места.

В первом случае построение закончено.

Во втором случае имеет, следовательно, место соотношение

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_t\varphi_t = 0, \ c_i > 0, \ t > 0. \tag{28}$$

Пусть $\mathfrak{L}'$ — пространство с базой $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{L} \ominus \mathfrak{L}'$. Согласно (27), существует точка $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{R}$, откуда

$$\xi = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_t\varphi_t + \omega, \ \omega \in \mathfrak{N}. \tag{29}$$

Можно предположить, что все $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, ибо этого можно легко достигнуть прибавлением уравнения (28), умноженного на подходящее число, к уравнению (29). Поэтому, наверное, будет $\omega \neq 0$, иначе мы получили бы случай А, и поэтому $\dim \mathfrak{N} \geqq 1$. Среди главных направлений

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$ будет u $(1 \leqq u < t)$ линейно независимых. Обозначим их через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_u$, так что эти направления также образуют базис пространства $\mathfrak{L}'$, и каждый член ряда (25) может быть однозначно записан в виде

$$\delta_i = \tau_i + d_{1i}\varphi_1 + d_{2i}\varphi_2 + \ldots + d_{ui}\varphi_u, \quad \tau_i \in \mathfrak{N}. \tag{30}$$

Для $\omega \in \mathfrak{N}$ будет $\omega\delta_i = \omega\tau_i$; ввиду существования $\omega \neq 0$, $\omega \in \mathfrak{N} \subset \mathfrak{L}$, то для такого ω ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |\omega\delta_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |\omega\tau_i|$ будет расходиться, а ряд

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots \tag{31}$$

не будет абсолютно сходящимся и имеет хоть одно главное направление φ' (которое, конечно, лежит в $\mathfrak{N}$). Пусть $\mathfrak{K}' = \mathfrak{E} \ominus \mathfrak{L}'$; тогда $\mathfrak{K}' \supset \mathfrak{N}$, $\mathfrak{K}' \supset \mathfrak{K}$, и введем обозначение $\mathfrak{S}' = \mathfrak{K}' \cap \mathfrak{S}$.

Если ψ — произвольное направление пространства $\mathfrak{S}'$, то из уравнения (30) следует $\psi\delta_i = \psi\tau_i$. Так как $\psi \in \mathfrak{S}$ и так как ряд (25) относительно симметричен в пространстве $\mathfrak{S}$, то ряд (31) относительно симметричен в пространстве $\mathfrak{S}'$. По теореме 5.4 можно из главных полулучей ряда (31) выделить конечное их количество $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_{t_1}'$ $(t_1 > 0)$ так, что имеет место

$$c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + \ldots + c_{t_1}'\varphi_{t_1}' = \xi', \quad c_i' > 0,$$

где $\xi' \in \mathfrak{E} \ominus \mathfrak{S}' = \mathfrak{L}' + \mathfrak{N}$. Следовательно, имеет место уравнение вида

$$c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + \ldots + c_{t_1}'\varphi_{t_1}' + x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_t\varphi_t = \xi$$
$$(x_i > 0, \ c_j' > 0, \ \varphi_i\varphi_j' = 0) \tag{32}$$

где $\xi \in \mathfrak{N}$. Это имеет место и в случае $\dim \mathfrak{S}' = 0$, ибо тогда $\dim(\mathfrak{E} \ominus \ominus \mathfrak{S}') = \dim(\mathfrak{L}' + \mathfrak{N}) = n$ и, следовательно, каждое главное направление φ' ряда (31) можно выразить в виде

$$\varphi' = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_t\varphi_t + \xi,$$

где $\xi \in \mathfrak{N}$.

Если в уравнении (32) $\xi = 0$, то это уравнение равносильно уравнениям

$$\mu = c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + \ldots + c_{t_1}'\varphi_{t_1}' = 0,$$
$$\nu = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_t\varphi_t \ = 0,$$

ибо из уравнения $\mu + \nu = 0$ и $\mu\nu = 0$ вытекает $\mu = \nu = 0$.

Пусть среди направлений $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_{t_1}'$ будет u_1 $(1 \leqq u_1 \leqq t_1)$ независимых, которые мы обозначим $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_{u_1}'$; пусть $\mathfrak{L}''$ — пространство с базисом $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$, $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_{t_1}'$ и $\mathfrak{N}' = \mathfrak{L} \ominus \mathfrak{L}''$, значит, $\mathfrak{N} = + \mathfrak{N}' + \mathfrak{L}\varphi_1' + \mathfrak{L}\varphi_2' + \ldots + \mathfrak{L}\varphi_{u_1}'$. Тогда для членов ряда (31) имеет место однозначное разложение

$$\tau_i = \tau_i' + d_{1i}'\varphi_1' + d_{2i}'\varphi_2' + \ldots + d_{u_1i}'\varphi_{u_1}', \quad \tau_i' \in \mathfrak{N}'.$$

Нужно различать и здесь два случая:

Случай БА. Выбор направлений φ_i, φ_j', и чисел x_i, c_j' $(i = 1,$

2, ..., t; $j = 1, 2, \ldots, t_1$) можно произвести так, чтобы в уравнении (32) было $\xi \neq 0$.

Случай ББ. Случай БА не имеет места.

В случае БА число ξ уже построено.

Рассмотрим поэтому случай ББ. При всяком выборе в уравнении (32) будет $\xi = 0$; следовательно существуют главные направления φ'_j ряда (31), главные направления φ_i ряда (25) и положительные числа c_i, c'_j ($i = 1, 2, \ldots, t$; $j = 1, 2, \ldots, t_1$) так, что удовлетворяются уравнения

$$\begin{gathered} c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_t\varphi_t = 0 \\ c'_1\varphi'_1 + c'_2\varphi'_2 + \ldots + c'_{t_1}\varphi'_{t_1} = 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Так как $\dim(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}) \neq 0$, то существует $\eta \neq 0$, $\eta \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{L}$. Поэтому

$$\eta = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_t\varphi_t + x'_1\varphi'_1 + x'_2\varphi'_2 + \ldots + x'_{t_1}\varphi'_{t_1} + \omega,$$
$$\omega \in \mathfrak{N}'.$$

согласно уравнениям (33), можно предположить, что числа x_i и x'_j ($i = 1, 2, \ldots, t$; $j = 1, 2, \ldots, t_1$) положительны. Значит, $\omega \neq 0$ и $\dim \mathfrak{N}' > 0$, ибо в противном случае был бы налицо случай БА. Отсюда легко обнаружим, что ряд

$$\tau'_1 + \tau'_2 + \ldots \tag{34}$$

не является абсолютно сходящимся. В самом деле, если ω — направление пространства $\mathfrak{N}'$, то

$$\omega\varphi_i = \omega\varphi'_j = 0\,(i = 1, 2, \ldots, t;\ j = 1, 2, \ldots, t_1)$$

и $\omega \in \mathfrak{L}$, т. е. или ω или $-\omega$ будет направлением расходимости ряда (25), перпендикулярным к направлениям φ_i, φ'_j. Так как

$$\pm\,\omega\delta_i = \pm\,\omega\tau'_i,$$

то или ω или $-\omega$ будет направлением расходимости ряда (34).

Пусть далее $\mathfrak{K}'' = \mathfrak{E} \ominus \mathfrak{L}''$, $\mathfrak{S}'' = \mathfrak{K}'' \cap \mathfrak{S}$. Если ψ — произвольное направление пространства $\mathfrak{S}''$, то имеет место

$$\pm\,\psi\delta_i = \pm\,\psi\tau'_i.$$

Так как $\psi \in \mathfrak{S}$ и ряд (25) относительно симметричен в пространстве $\mathfrak{S}$, то ряд (34) относительно симметричен в пространстве $\mathfrak{S}''$. По теореме 5.4 можно из главных его направлений выделить направление $\varphi''_1, \varphi''_2, \ldots, \varphi''_t$ ($t_2 > 0$) так, что имеет место

$$c''_1\varphi''_1 + c''_2\varphi''_2 + \ldots + c''_{t_2}\varphi''_{t_2} = \xi'', \quad c''_k > 0, \quad \xi'' \in \mathfrak{L}'' + \mathfrak{R}$$

т. е. существует число $\xi \in \mathfrak{R}$ такое, что

$$\begin{gathered} x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_t\varphi_t + x'_1\varphi'_1 + x'_2\varphi'_2 + \ldots + x'_{t_1}\varphi'_{t_1} + \\ + c''_1\varphi''_1 + c''_2\varphi''_2 + \ldots + c''_{t_2}\varphi''_{t_2} = \xi. \end{gathered} \tag{35}$$

При этом, если $\xi = 0$, уравнение (35) имеет место только при условии, что одновременно

$$x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_t\varphi_t = 0,$$
$$x_1'\varphi_1' + x_2'\varphi_2' + \ldots + x_{t_1}'\varphi_{t_1}' = 0,$$
$$c_1''\varphi_1'' + c_2''\varphi_2'' + \ldots + c_{t_2}''\varphi_{t_2}'' = 0.$$

Снова возможны два случая:

ББА. В уравнении (35) можно выбрать $\xi \neq 0$.

БББ. Это невозможно.

И т. д.

Так как размерность пространств $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$, $\mathfrak{L}'''$, ... постоянно возрастает, то мы должны в конце концов дойти до случая ББ ... БА, чем и заканчивается построение числа ξ.

Это значит: Существует целое число $v > 0$ и целые числа $t_j \geqq u_j > 0$, направления $\varphi_i^{(j)}$ ($j = 0, 1, \ldots, v$; $i = 1, 2, \ldots, t_j$) и числа $c_i^{(j)}$ ($j = 0, 1, \ldots, v$; $i = 1, 2, \ldots, t_j$), $x_i^{(j)}$ ($j = 0, 1, \ldots, v-1$; $i = 1, 2, \ldots, t_j$) со следующими свойствами:

1. $c_i^{(j)} > 0$, $x_i^{(j)} > 0$.

2. $\sum\limits_{i=1}^{t_j} c_i^{(j)}\varphi_i^{(j)} = 0$; $j = 0, 1, \ldots, v-1$.

3. $\varphi_i^{(j)}\varphi_{i'}^{(j')} = 0$ для $j \neq j'$.

4. Среди направлений $\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)}, \ldots, \varphi_{t_j}^{(j)}$ будет точно u_j линейно независимых, а именно $\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)}, \ldots, \varphi_{u_j}^{(j)}$.

5. $\sum\limits_{i=1}^{t_0} x_i^{(0)}\varphi_i^{(0)} + \ldots + \sum\limits_{i=1}^{t_{v-1}} x_i^{(v-1)}\varphi_i^{(v-1)} + \sum\limits_{i=1}^{t_v} c_i^{(v)}\varphi^{(v)} = \xi$,

где $\xi \in \mathfrak{R}$, $\xi \neq 0$.

6. Если положить (однозначно)

$$\delta_m = \tau_m^{(v)} + \sum_{i=1}^{u_v} d_{im}^{(v)}\varphi_i^{(v)} + \sum_{i=1}^{u_{v-1}} d_{im}^{(v-1)}\varphi_i^{(v-1)} + \ldots + \sum_{i=1}^{v_0} d_{im}^{(0)}\varphi_i^{(0)},$$
$$\tau_m^{(v)}\varphi_i^{(j)} = 0,$$

то $\varphi_i^{(j)}$ будут главными направлениями ряда с m-тым членом

$$\tau_m^{(v)} + \sum_{i=1}^{u_v} d_{im}^{(v)}\varphi_i^{(v)} + \sum_{i=1}^{u_{v-1}} d_{im}^{(v-1)}\varphi_i^{(v-1)} + \ldots + \sum_{i=1}^{u_j} d_{im}^{(j)}\varphi_i^{(i)} =$$
$$= \delta_m - \sum_{i=1}^{u_0} d_{im}^{(0)}\varphi_i^{(0)} - \ldots - \sum_{i=1}^{u_{j-1}} d_{im}^{(j-1)}\varphi_i^{(j-1)}.$$

Обратимся теперь к доказательству теоремы 7.1 для случая $v = 2$. Общность доказательства от этого не пострадает, так как для $v > 2$ принцип доказательства остается тот же, хотя оно немного растягивается.

Итак, пусть последовательность $\{\delta_i\}$ имеет l-мерное пространство расходимости $\mathfrak{L}$ и пусть t ее главных направлений удовлетворяют уравнению

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_t\varphi_t = 0, \quad (c_j > 0). \tag{36}$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_u$ линейно независимы, и положим

$$\delta_i = \tau_i + d_{1i}\varphi_1 + d_{2i}\varphi_2 + \ldots + d_{ui}\varphi_u \quad (\tau_i\varphi_j = 0).$$

Пусть ряд

$$\tau_1 + \tau_2 + \ldots$$

имеет главные направления $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_{t_1}'$, удовлетворяющие соотношению

$$c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + \ldots + c_{t_1}'\varphi_{t_1}' = 0 \quad (c_j' > 0) \tag{37}$$

и пусть $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_{u_1}'$ линейно независимы. Положим

$$\tau_i = \tau_i' + d_{1i}'\varphi_1' + d_{2i}'\varphi_2' + \ldots + d_{u_1i}'\varphi_{u_1}' \quad (\tau_i'\varphi_j' = 0).$$

Пусть ряд

$$\tau_1' + \tau_2' + \ldots$$

имеет главные направления $\varphi_1'', \varphi_2'', \ldots, \varphi_{t_2}''$, удовлетворяющие соотношению

$$\begin{gathered} c_1''\varphi_1'' + c_2''\varphi_2'' + \ldots + c_{t_2}''\varphi_{t_2}'' + x_1'\varphi_1' + x_2'\varphi_2' + \ldots + x_{t_1}'\varphi_{t_1}' + \\ + x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_t\varphi_t = \xi \\ (\varphi_i\varphi_j' = 0, \ \varphi_j'\varphi_k'' = 0, \ \varphi_k''\varphi_i = 0), \end{gathered} \tag{38}$$

где $\xi \neq 0$ — число пространства $\mathfrak{R}$ и $c_k'' > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, t_2)$, $x_j' > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, t_1)$; $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$. Пусть $\varphi_1'', \varphi_2'', \ldots, \varphi_{u_2}''$ линейно независимы и положим

$$\delta_i = \tau_i'' + \sum_{j=1}^{u_2} d_{ji}''\varphi_j'' + \sum_{j=1}^{u_1} d_{ji}'\varphi_j' + \sum_{j=1}^{u} d_{ji}\varphi_j$$

$$(\tau_i''\varphi_j'' = \tau_i''\varphi_j' = \tau_i''\varphi_j = 0).$$

Из последовательности $\{\delta_i\}$ мы выделим t последовательностей $\{\delta_{l_{1i}}\}$, $\{\delta_{l_{2i}}\}, \ldots, \{\delta_{l_{ti}}\}$ так, что бы ряд

$$\delta_{l_{j1}} + \delta_{l_{j2}} + \ldots$$

расходился безусловно в направлении φ_j $(j = 1, 2, \ldots, t)$. По теореме 2.12, этот выбор можно сделать так, что $\{l_{1i}, l_{2i}, \ldots, l_{ti}\}$-остаток последовательности $\{\delta_i\}$ — будет иметь те же главные направления и направления расходимости, как и последовательность $\{\delta_i\}$. По теореме 2.13 $\{l_{1i}, l_{2i}, \ldots, \ldots, l_{ti}\}$-остаток последовательности $\{\tau_i\}$ имеет те же главные направления и направления расходимости, как и последовательность $\{\tau_i\}$ и, значит, из $\{l_{1i}, l_{2i}, \ldots, l_{ti}\}$-остатка последовательности $\{\delta_i\}$ можно выделить t_1 последовательностей $\{\delta m_{1i}\}, \{\delta m_{2i}\}, \ldots, \{\delta m_{t_1i}\}$ так, что ряд

$$\tau m_{j1} + \tau m_{j2} + \ldots$$

будет безусловно расходящимся в направлении φ'_j $(j = 1, 2, \ldots, t_1)$. Из $\{l_{1i}, l_{2i}, \ldots, l_{ti}, m_{1i}, m_{2i}, \ldots, m_{t_1i}\}$-остатка последотельности $\{\delta_i\}$ мы выделим наконец t_2 последовательностей $\{\delta_{n_1i}\}, \{\delta_{n_2i}\}, \ldots, \{\delta_{nt_2i}\}$ так, что ряд

$$\tau'_{nj1} + \tau'_{nj2} + \ldots$$

безусловно расходится в направлении φ''_j $(j = 1, 2, \ldots, t_2)$.

Обозначим $\{l_{1i}, l_{2i}, \ldots, l_{ti}, m_{1i}, m_{2i}, \ldots, m_{t_1i}, n_{1i}, n_{2i}, \ldots, n_{t_2i}\}$-остатки последовательностей $\{\delta_i\}, \{\tau_i\}, \{\tau'_i\}$ соответственно через $\{\bar{\delta}_i\}, \{\bar{\tau}_i\}, \{\bar{\tau}'_i\}$. Применяя последовательно теоремы 2.13 и 2.12 при отдельных процессах выделения, мы видим, что можно осуществить выделение так, чтобы последовательность $\{\bar{\tau}'_i\}$ имела те же главные направления и направления расходимости, как и $\{\tau'_i\}$. Далее можно предположить, что последовательность $\{\bar{\delta}_i\}$ имеет главные направления $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_t$, а $\{\bar{\tau}_i\}$ — главные направления $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_{t_1}$. Ибо, если бы вследствие выделения некоторой последовательности $\{\delta m_{1i}\}, \ldots, \{\delta m_{ti}\}, \{\delta n_{1i}\}, \ldots, \{\delta n t_1 i\}$ случилось, что последовательность $\{\delta_i\}$ лишилась бы главного направления φ_1, можпо было бы расщеплением последовательности $\{\delta_{l_1}\}$ и возвращением одной части к последовательности $\{\bar{\delta}_i\}$ достигнуть того, что она снова будет обладать главным направлением φ_1. Аналогично и для главных направлений $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_{t_1}$ последовательности $\{\bar{\tau}_i\}$. Из теоремы 6.2а вытекает, что процесс выделения можно, кроме того, оформить так, чтобы $\{l_{1i}, l_{2i}, \ldots, l_{ti}, m_{1i}, m_{2i}, \ldots, m_{t_1i}, n_{1i}, n_{2i}, \ldots, n_{t_2i}\}$-остаток последовательности $\{\alpha_i\}$ — обозначим его через $\{\alpha'_i\}$ — имел те же направления расходимости, как и $\{\alpha_i\}$ и $\mathfrak{m}(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Последовательность $\{\bar{\delta}_i\}$ имеет те же направления расходимости, как и последовательность $\{\delta_i\}$, в силу чего она будет, как и эта последняя, относительно симметричной в пространстве $\mathfrak{S}$. В самом деле, если ψ — произвольное направление и если $\psi\varphi_j \neq 0$ для некоторых j $(j = 1, 2, \ldots, t)$, то ψ и $-\psi$ будут направлениями расходимости обеих последовательностей. Аналогично для тех ψ, для которых $\psi\varphi_j = 0$, $(j = 1, 2, \ldots, t)$, но по крайней мере для одного φ'_j $(j = 1, 2, \ldots, t_1)$ будет $\psi\varphi'_j \neq 0$. Наконец, если $\psi\varphi_j = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, t$, $\psi\varphi'_k = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, t_1$, то из уравнений

$$\pm\,\psi\delta_i = \pm\,\psi\tau'_i,\ \pm\,\psi\bar{\delta}_i = \pm\,\psi\bar{\tau}'_i$$

вытекает, что если ψ — направление расходимости последовательности $\{\delta_i\}$, то оно будет таковым и для последовательности $\{\tau'_i\}$, а, значит, и для $\{\bar{\tau}'_i\}$ и $\{\bar{\delta}_i\}$.

Пусть $\{\lambda_i\}$ — произвольная последовательность точек пространства $\mathfrak{L}$. Пусть

$$\varkappa'' = \sum_{i=1}^{\infty} [\tau'_{n_{1i}} - (\tau'_{n_{1i}} \varphi''_1) \varphi''_1] + \ldots + \sum_{i=1}^{\infty} [\tau'_{n t_2 i} - (\tau'_{n t_2 i} \varphi''_{t_2}) \varphi''_{t_2}],$$

$$\varkappa' = \sum_{i=1}^{\infty} [\tau_{m_{1i}} - (\tau_{m_{1i}} \varphi'_1) \varphi'_1] + \ldots + \sum_{i=1}^{\infty} [\tau_{m t_1 i} - (\tau_{m t_1 i} \varphi'_{t_1}) \varphi'_{t_1}],$$

$$\varkappa_0 = \sum_{i=1}^{\infty} [\delta_{l_{1i}} - (\delta_{l_{1i}} \varphi_1) \varphi_1] + \ldots + \sum_{i=1}^{\infty} [\delta_{l t i} - (\delta_{l t i} \varphi_t) \varphi_t].$$

По определению (2.16) все эти ряды являются абсолютно сходящимися.

Положим

$$\lambda'_i = \lambda_i - (\varkappa_0 + \varkappa' + \varkappa'') \tag{39}$$

и напишем далее

$$\lambda'_i = \sigma_i + a_i \xi \quad (\sigma_i \xi = 0), \tag{40}$$

где ξ — число пространства $\mathfrak{R}$, определенное уравнением (38). $\{\lambda'_i\}$ будет также последовательностью точек пространства $\mathfrak{L}$.

Положим

$$\delta_i = \omega_i + h_i \xi, \ \overline{\delta}_i = \overline{\omega}_i + \overline{h}_i \xi, \ (\omega_i \xi = \overline{\omega}_i \xi = 0).$$

Пусть ψ — произвольное число пространства $\mathfrak{S}$. Тогда из уравнения

$$\psi \overline{\delta}_i = \psi \overline{\omega}_i$$

следует, что и ряд

$$\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 + \ldots$$

является относительно симметричным в пространстве $\mathfrak{S}$. Последовательность $\{\overline{\omega}_i\}$ имеет $(l-1)$-мерное пространство расходимости, откуда видно, что из последовательности $\{\overline{\delta}_i\}$ можно выделить последовательность $\{\delta_{k'_i}\}$ (которую, конечно, можно считать последовательностью, выделенной из последовательности $\{\delta_i\}$) и переставить ее так, что:

1. Существует последовательность натуральных чисел $\{p'_i\}$

$$p'_1 < p'_2 < \ldots$$

такая, что

$$\sum_{i=1}^{p'_m} \delta_{k'_i} = \pi'_m + \sigma_m + e_m \xi + \vartheta'_m,$$

где $\pi'_m \in \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots,)$ $\vartheta'_m \to 0$, а $e_1, e_2, \ldots$ — последовательность вещественных чисел.

2. Если $\{\alpha''_i\}$ означает $\{k'_i\}$-остаток последовательности $\{\alpha'_i\}$, то $\{\alpha''_i\}$ имеет те же направления расходимости, как и $\{\alpha_i\}$ и $\mathfrak{m}(\alpha''_1, \alpha''_1, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Так как $\xi \in \mathfrak{R}$, то по теореме 3.4 существует последовательность натуральных чисел $\{r_i\}$

$$r_1 < r_2 < \ldots$$

такая, что

$$r_m \xi = \pi''_m + \vartheta''_m, \tag{41}$$

где $\pi''_m \in \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\vartheta''_m \to 0$.

Из выделенных последовательностей $\{\delta_{l_1 i}\}, \ldots, \{\delta_{l_{t} i}\}, \{\delta_{m_1 i}\}, \ldots, \{\delta_{m_{t_1} i}\}$, $\{\delta_{n_1 i}\}, \ldots, \{\delta_{n_{t_2} i}\}$, $\{\delta_{k_i'}\}$ образуем путем вложения ряд

$$\delta_{k_1} + \delta_{k_2} + \ldots$$

следующим образом (при этом числа c_j, c_j', c_j'', x_j, x_j' являются числами из соотношений (36), (37) и (38)):

Первый шаг: Возьмем p_1' членов последовательности $\{\delta_{k_i'}\}$ так, что будет

$$\sum_{i=1}^{p_1'} \delta_{k_i'} = \pi_1' + \sigma_1 + e_1\xi + \vartheta_1'.$$

Пусть r_1' — наименьшее число последовательности $\{r_i\}$, большее, чем $e_1 - a_1$, и из каждой последовательности $\{\delta_{nji}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, t_2)$ возьмем p_{j1}'' членов, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{p_{j1}''} \tau_{nji}'\varphi_j'' > (r_1' - e_1 + a_1)\, x_j''.$$

Итак, мы получаем

$$\sum_{i=1}^{p_1'} \delta_{k_i'} + \sum_{i=1}^{p_{11}''} \delta_{n_1 i} + \sum_{i=1}^{p_{21}''} \delta_{n_2 i} + \ldots + \sum_{i=1}^{p_{t_2 1}''} \delta_{n_{t_2} i} =$$
$$= \pi_1' + \sigma_1 + e_1\xi + (r_1' - e_1 + a_1)(x_1''\varphi_1'' + x_2''\varphi_2'' + \ldots + x_{t_2}''\varphi_{t_2}'') +$$
$$+ f_{11}'\varphi_1' + f_{21}'\varphi_2' + \ldots + f_{u_1 1}'\varphi_{u_1}' + f_{11}\varphi_1 + f_{21}\varphi_2 + \ldots + f_{u1}\varphi_u +$$
$$+ \varkappa'' + \vartheta_1' + \eta_1'' - \varepsilon_1',$$

где

$$|\eta_1''| < \sum_{j=1}^{t_2} |\delta_{n_j, p_{j1}''}|$$

и

$$\varepsilon'' = \sum_{i=p_{11}''+1}^{\infty} [\tau_{n_1 i}' - (\tau_{n_1 i}'\varphi_1'')\,\varphi_1''] + \ldots + \sum_{i=p_{t_2 i}''+1}^{\infty} [\tau_{n_{t_2} i}' - (\tau_{n_{t_2} i}'\varphi_{t_2}'')\,\varphi_{t_2}''].$$

Пусть $s_1' = \mathrm{Max}\left(\dfrac{|f_{11}'|}{c_1'}, \dfrac{|f_{21}'|}{c_2'}, \ldots, \dfrac{|f_{u_1 1}'|}{c_{u_1}'}\right)$. Возьмем из каждой последовательности $\{\delta_{mji}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, t_1)$ p_{j1}' членов так, чтобы в первый раз получилось

$$\sum_{i=1}^{p_{j1}'} \tau_{mji}\varphi_j' > (r_1' - e_1 + a_1)\, x_j' + s_1'c_j' - f_{j1}'.$$

Тогда будет

$$\sum_{i=1}^{p_1'} \delta_{k_i'} + \sum_{i=1}^{p_{11}''} \delta_{n_1 i} + \sum_{i=1}^{p_{21}''} \delta_{n_2 i} + \ldots + \sum_{i=1}^{p_{t_2 1}''} \delta_{n_{b_2} i} + \sum_{i=1}^{p_{11}'} \delta_{m_1 i} + \ldots + \sum_{i=1}^{p_{t_1 1}'} \delta_{m_{t_1} i} =$$
$$= \pi_1' + \sigma_1 + e_1\xi + (r_1' - e_1 + a_1)(x_1''\varphi_1'' + x_2''\varphi_2'' + \ldots + x_{t_2}''\varphi_{t_2}'' +$$
$$+ x_1'\varphi_1' + x_2'\varphi_2' + \ldots + x_{t_1}'\varphi_{t_1}') + s_1'(c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + \ldots + c_{t_1}'\varphi_{t_1}') +$$
$$+ g_{11}\varphi_1 + g_{21}\varphi_2 + \ldots + g_{u1}\varphi_u + \varkappa'' + \varkappa' + \vartheta_1'' + \eta_1'' + \eta_1' - \varepsilon_1'' - \varepsilon_1',$$

где

$$|\eta_1'| < \sum_{j=1}^{t_1} |\delta_{m_j, p'_{j1}}|$$

и

$$\varepsilon_1' = \sum_{i=p'_{11}+1}^{\infty} [\tau_{m_1 i} - (\tau_{m_1 i}\varphi_1')\varphi_1'] + \ldots + \sum_{i=p'_{t_1 1}+1}^{\infty} [\tau_{m_{t_1} i} - \tau_{m_{t_1} i}\varphi_{t_1}')\varphi_{t_1}'].$$

Пусть $s_1 = \mathrm{Max}\left[\frac{|g_{11}|}{c_1}, \frac{|g_{21}|}{c_2}, \ldots, \frac{|g_{u1}|}{c_u}\right]$. Возьмем из каждой последовательности $\{\delta_{l_j i}\}$ p_{j1} членов, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{p_{j1}} \delta_{l_j i}\varphi_j > (r_1' - e_1 + a_1)\, x_j + s_1 c_j - g_{j1}.$$

И так далее.

Вообще m-тый шаг: Определив числа

$$r_j', p_{1j}'', \ldots, p_{t_2, j}'', s_j', p_{1j}', \ldots, p_{t_1, j}', s_j, p_{1j}, \ldots, p_{tj},$$

для $j \leqq m-1$ продолжаем рассуждать так: Пусть r_m' — наименьшее число последовательности $\{r_i\}$, большее чем Max $(r_{m-1}', r_{m-1}' + e_m - e_{m-1} - a_m + a_{m-1})$, и из каждой последовательности $\{\delta_{n_j}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, t_2)$ возьмем p_{jm}'' членов, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{p_{jm}''} \tau_{n_j i}'\varphi_j'' > (r_m' - e_m + a_m)\, x_j'',$$

так что будет

$$\sum_{i=1}^{p_m'} \delta_{k_i'} + \sum_{i=1}^{p_{1m}''} \delta_{n_1 i} + \sum_{i=1}^{p_{2m}''} \delta_{n_2 i} + \ldots + \sum_{i=1}^{p_{t_2, m}''} \delta_{n_{t_2, i}} = \pi_m' + \sigma_m + e_m\xi +$$
$$+ (r_m' - e_m + a_m)(x_1''\varphi_1'' + x_2''\varphi_2'' + \ldots + x_{t_2}''\varphi_{t_2}'') + f_{1m}'\varphi_1' + f_{2m}'\varphi_2' +$$
$$+ \ldots + f_{u_1 m}'\varphi_{u_1}' + f_{1m}\varphi_1 + f_{2m}\varphi_2 + \ldots + f_{um}\varphi_u + \varkappa'' +$$
$$+ \vartheta_m' + \eta_m'' - \varepsilon_m'',$$

где

$$|\eta_m''| < \sum_{j=1}^{t_2} |\delta_{n_j, p_{jm}''}|$$

и

$$\varepsilon_m'' = \sum_{i=p_{1m}''+1}^{\infty} [\tau_{n_1 i}' - (\tau_{n_1 i}'\varphi_1'')\varphi_1''] + \ldots + \sum_{i=p_{t_2 m}''+1}^{\infty} [\tau_{n_{t_2} i}' - (\tau_{n_{t_2} i}'\varphi_{t_2}'')\varphi_{t_2}''].$$

Пусть $s_m' = 2s_{m-1}' + \mathrm{Max}\left[\frac{|f_{1m}|}{c_1'}, \frac{|f_{2m}|}{c_2'}, \ldots, \frac{|f_{u_1 m}|}{c_{u_1}'}\right]$. Возьмем из каждой последовательности $\{\delta_{m_j i}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, t_1)$ p_{jm}' членов, пока не получим в первый раз

$$\sum_{i=1}^{p'_{jm}} \tau_{n_{ji}}\varphi'_j > (r'_m - e_m + a_m)\, x'_j + s'_m c'_j - f'_{jm}.$$

Тогда будет

$$\sum_{i=1}^{p'_m} \delta_{k'_i} + \sum_{i=1}^{p''_{1m}} \delta_{n_{1i}} + \sum_{i=1}^{p''_{2m}} \delta_{n_{2i}} + \ldots + \sum_{i=1}^{p''_{t_2 m}} \delta_{n_{t_2 i}} + \sum_{i=1}^{p'_{1m}} \delta_{m_{1i}} + \ldots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p'_{t_1 m}} \delta_{m_{t_1 i}} = \pi'_m + \sigma_m + e_m\xi + (r'_m - e_m + a_m)\,.$$

$$.\,(x''_1\varphi''_1 + x''_2\varphi''_2 + \ldots + x''_{t_2}\varphi''_{t_2} + x'_1\varphi'_1 + \ldots + x'_{t_1}\varphi'_{t_1}) +$$

$$+ s'_m(c'_1\varphi'_1 + c'_2\varphi'_2 + \ldots + c'_{t_1}\varphi'_{t_1}) + g_{1m}\varphi_1 + g_{2m}\varphi_2 + \ldots +$$

$$+ g_{um}\varphi_u + \varkappa'' + \varkappa' + \vartheta'_m + \eta''_m + \eta'_m - \varepsilon''_m - \varepsilon'_m$$

где

$$|\eta'_m| < \sum_{j=1}^{t_1} |\delta_{m_j, p'_{jm}}|$$

и

$$\varepsilon'_m = \sum_{i=p'_{1m}+1}^{\infty} [\tau_{m_{1i}} - (\tau_{m_{1i}}\varphi'_1)\,\varphi'_1] + \ldots + \sum_{i=p'_{t_1 m}+1}^{\infty} [\tau_{m_{t_1 i}} - (\tau_{m_{t_1 i}}\varphi'_{t_1})\,\varphi'_{t_1}].$$

Положим $s_m = 2s_{m-1} + \mathrm{Max}\left[\dfrac{|g_{1m}|}{c_1}, \dfrac{|g_{2m}|}{c_2}, \ldots, \dfrac{|g_{um}|}{c_u}\right]$ и пусть p_{jm} — наименьшее целое число, для которого

$$\sum_{i=1}^{p_{jm}} \delta_{l_{ji}}\varphi_j > (r'_m - e_m + a_m)\, x_j + s_m c_j - g_{jm}$$

Образованную таким образом последовательность обозначим через $\{\delta_{k_i}\}$ и положим

$$p_m = p'_m + \sum_{j=1}^{t_2} p''_{jm} + \sum_{j=1}^{t_1} p'_{jm} + \sum_{j=1}^{t} p_{jm}.$$

Последовательность $\{p_i\}$ возрастает. В самом деле: Каждая из последовательностей $\{p''_{ji}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, t_2)$ является неубывающей, так как

$$(r'_m - e_m + a_m)\, x''_j > (r'_{m-1} - e_{m-1} + a_{m-1})\, x''_j$$

а каждая из последовательностей $\{p'_{ji}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, t_1)$ будет также неубывающей, так как

$$s'_{m-1} > \frac{|f'_{j,m-1}|}{c'_j}, \quad s'_m \geqq 2s'_{m-1} + \frac{|f'_{jm}|}{c'_j} > s'_{m-1} - \frac{f'_{j,m-1}}{c'_j} + \frac{f'_{jm}}{c'_j}$$

и, следовательно,

$$(r'_m - e_m + a_m)\, x'_j + s'_m c'_j - f'_{jm} > (r'_{m-1} - e_{m-1} + a_{m-1})\,.$$

$$.\, x'_j + s'_{m-1}c'_j - f'_{j,m-1};$$

аналогично и для последовательности

$$p_{j1},\ p_{j2},\ \ldots\ (j = 1, 2, \ldots, t).$$

Итак, последовательность $\{p_i\}$ возрастает и

$$\sum_{i=1}^{p_m} \delta_{k_i} = \sum_{i=1}^{p'_m} \delta_{k'_i} + \sum_{i=1}^{p''_{1m}} \delta_{n_{1i}} + \ldots + \sum_{i=1}^{p''_{t_2 m}} \delta_{n_{t_2 i}} + \sum_{i=1}^{p'_{1m}} \delta_{m_{1i}} + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{i=1}^{p'_{t_1 m}} \delta_{m_{t_1 i}} + \sum_{i=1}^{p_{1m}} \delta_{l_{1i}} + \ldots + \sum_{i=1}^{p_{tm}} \delta_{l_{ti}} = \pi'_m + \sigma_m + e_m\xi +$$

$$+ (r'_m - e_m + a_m)(x''_1\varphi''_1 + \ldots + x''_{t_2}\varphi''_{t_2} + x'_1\varphi'_1 + \ldots + x'_{t_1}\varphi'_{t_1} +$$

$$+ x_1\varphi_1 + \ldots + x_t\varphi_t) + s'_m(c'_1\varphi'_1 + c'_2\varphi'_2 + \ldots + c'_{t_1}\varphi'_{t_1}) +$$

$$+ s_m(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_t\varphi_t) + \varkappa'' + \varkappa' + \varkappa_0 + \vartheta'_m + \eta''_m +$$

$$+ \eta'_m + \eta_m - \varepsilon''_m - \varepsilon'_m - \varepsilon_m,$$

где

$$|\eta_m| < \sum_{j=1}^{t} |\delta_{l_j, p_{jm}}|$$

и

$$\varepsilon_m = \sum_{i=p_{1m}+1}^{\infty} [\delta_{l_{1i}} - (\delta_{l_{1i}}\varphi_1)\varphi_1] + \ldots + \sum_{i=p_{tm}+1}^{\infty} [\delta_{l_{ti}} - (\delta_{l_{ti}}\varphi_t)\varphi_t].$$

Итак,

$$\lim_{m\to\infty} \vartheta'_m = \lim_{m\to\infty} \eta''_m = \lim_{m\to\infty} \eta'_m = \lim_{m\to\infty} \eta_m = \lim_{m\to\infty} \varepsilon''_m = \lim_{m\to\infty} \varepsilon'_m = \lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0,$$

и, ввиду уравнений, (36), (37), (38), (39), (40) и (41) будет

$$\sum_{i=1}^{p_m} \delta_{k_i} = \pi_m + \lambda_m + \vartheta_m,$$

где π_m — числа модуля $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\{\lambda_i\}$ — выбранная последовательность точек пространства $\mathfrak{L}$ и $\vartheta_m \to 0$.

При этом, если $\{\gamma_i\}$ является $\{k_i\}$-остатком последовательности $\{\alpha_i\}$, очевидно будет $\mathfrak{m}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ и $\{\gamma_i\}$ будет иметь те же направления расходимости, как и $\{\alpha_i\}$. Итак, теорема 7.1 вполне доказана.

Теорема 7.2. *Пусть*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \tag{42}$$

будет симметричным рядом гиперкомплексных чисел с ограниченными членами α_n. Пусть

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots \tag{43}$$

— ряд его разностей, имеющий пространство расходимости $\mathfrak{L}$. Тогда

$$\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \varkappa + \overline{\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + \mathfrak{L}},$$

где $\varkappa$ — некоторое число.

Доказательство. Прежде всего ясно, что $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \subset \varkappa + \overline{+\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + \mathfrak{L}}$. В этом легко убедиться, если записать члены ряда (42) в виде

$$\alpha_i = \pi_i + \delta_i = \pi_i + \lambda_i + \varkappa_i \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{44}$$

где $\pi_i \in \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\lambda_i \in \mathfrak{L}$, $\varkappa_i \in \mathfrak{K}$, причем $\mathfrak{L}$ является пространством расходимости, а $\mathfrak{K}$ — сходимости ряда (43).

Теперь мы докажем, что обратно каждое число множества $\varkappa + \overline{+\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + \mathfrak{L}}$, где $\varkappa = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varkappa_i$ — элемент множества $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. И здесь можно положить $\varkappa_i = 0$, потому что это означает лишь сдвиг множества $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ на $-\varkappa$.

Пусть $\{\lambda_i\}$ — плотная в $\mathfrak{L}$ последовательность, из которой мы образуем последовательность $\{\lambda_i'\}$; в этой последней каждое значение λ_i встречается бесконечное число раз (см. замечание у теоремы 4.5). Последовательность $\{\delta_i\}$ относительно симметрична в пространстве $\mathfrak{S}$ и поэтому, согласно теореме 7.1, из нее можно выделить последовательность $\{\delta_{k_i}\}$ так, чтобы произведя (в случае нужды) перестановку, мы получили

$$\sum_{i=1}^{p_m} \delta_{k_i} = \pi_m' + \lambda_m' + \vartheta_m,$$

а, следовательно, и

$$\sum_{i=1}^{p_m} \alpha_{k_i} = \pi_m + \lambda_m' + \vartheta_m,$$

где $\{p_i\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $\pi_m \in \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\vartheta_m \to 0$, далее, чтобы последовательность $\{\gamma_i\}$, т. е. $\{k_i\}$-остаток последовательности $\{\alpha_i\}$, имела те же направления расходимости, как и $\{\alpha_i\}$, и $\mathfrak{m}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = \mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Отсюда будет также $\mathfrak{M}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) = \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, и последовательность $\{\gamma_i\}$ симметрична. По теореме 4.2 множество $\mathfrak{H}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ непусто, и поэтому содержит хоть один элемент γ. По теореме 3.2 будут все числа $\gamma - \pi_m$ также элементами множества $\mathfrak{H}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$. Следовательно, по теореме 6.1 все числа $\lambda_i + \gamma$ будут элементами множества $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, ибо каждое λ_j встречается в последовательности $\{\lambda_i'\}$ бесконечное число раз и, значит, существует частичная последовательность $\{p_i^{(j)}\}$ последовательности $\{p_i\}$ так, что

$$\sum_{i=1}^{p_m^{(j)}} \delta_{k_i} = \pi_m' + \lambda_j + \vartheta_m.$$

Из теоремы 3.1 вытекает, так как $\{\lambda_i\}$ плотна в $\mathfrak{L}$, что $\gamma + \mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, из теоремы 3.2 следует, что и $\gamma + \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + \mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, и далее из теоремы 3.1 — что кроме того и $\gamma + \overline{\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + \mathfrak{L}} \subset$

$\subset \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Из представления (44) при указанном допущении ($\varkappa_i = 0$) ясно, что $\gamma \in \overline{\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) + \mathfrak{L}}$, откуда

$$\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \overline{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)},$$

что и требовалось доказать.

Очевидно, $\overline{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}$ представляет собой замкнутый модуль, имеющий согласно теореме 3.3 вид

$$\mathfrak{K}\varrho_1 + \mathfrak{K}\varrho_2 + \ldots + \mathfrak{K}\varrho_p + \mathfrak{L}\tau_1 + \mathfrak{L}\tau_2 + \ldots + \mathfrak{L}\tau_q,$$

другими словами, $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ является решеткой линейных пространств, что вновь подтверждает результат Беренда, причем, однако, теорема 7.2 указывает способ определения множества сумм данного ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$.

В заключение автор считает приятным долгом выразить свою глубокую благодарность проф. Д-ру В. Ярнику, который проявил большой интерес к настоящей работе и дал много ценных советов и указаний.

Auszug.

ÜBER DIE UMORDNUNG UNENDLICHER REIHEN VON HYPERKOMPLEXEN ZAHLEN

JAROSLAV RŮŽIČKA, Hrubá Skála.

(Eingelangt 14./XI. 1951.)

§ 1. Definitionen und Bezeichnungen.

Unter einer hyperkomplexen Zahl versteht man ein Element des n-dimensionalen Vektorraumes (über dem Körper der reellen Zahlen) mit der gewöhnlichen Definition der Summe und des inneren Produktes.

Es sei

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \tag{1}$$

eine unendliche Reihe von hyperkomplexen Zahlen. Es sei

$$\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2} + \ldots \tag{2}$$

eine beliebige Umordnung der Reihe (1) und man bezeichne mit $\mathfrak{H}(\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2} + \ldots)$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge $\sigma_{k_1}, \sigma_{k_2}, \ldots$, wo $\sigma_{k_m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{k_i}$ ist. Die Menge $\mathfrak{H}(\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2} + \ldots)$ will ich die *Grenzmenge der Reihe* (2) nennen. Die Vereinigungsmenge aller Grenzmengen $\mathfrak{H}$ für alle möglichen Umordnungen der Reihe (1) nennen wir die *Summenmenge der Reihe* (1) und bezeichnen sie mit $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Mit $\mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ bezeichne ich die Menge aller Häufungspunkte der Folge $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$; $\mathfrak{M}_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ bedeutet dann den kleinsten Modul, welcher die Menge $\mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ enthält; $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \overline{\mathfrak{M}_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}$ ist die abgeschlossene Hülle dieses Moduls.

Wir können dann zum jeden Glied α_i der Reihe (1) eine Zahl π_i aus $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ so finden, dass $|\alpha_i - \pi_i|$ möglichst klein ausfällt; $|\alpha|$ bedeutet die Norm (den absoluten Betrag) von α. Wir setzen $\alpha_i - \pi_i = \delta_i$. Rie Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_i$ will ich die *Differenzreihe* der Reihe (1) nennen.

Man setze pos $a = \text{Max}\,(0, a)$. Die Reihe (1) heisst *symmetrisch*, wenn die Reihen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \text{pos}(\varphi\alpha_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \text{pos}(-\varphi\alpha_i)$ entweder beide konvergent oder beide divergent sind, gleichgültig wie man die Zahl φ wählt ($\alpha\varphi$ bedeutet das innere Produkt).

Jeder Reihe (1) können wir dann zwei orthogonale Unterräume folgendermassen zuordnen: Sei $\mathfrak{K}$ die Menge aller Zahlen $\varkappa$, für welche die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varkappa\alpha_i$ absolut konvergent ist. Diese Menge bildet einen linearen Raum, welchen wir den *Konvergenzraum* der Reihe (1) nennen wollen. Das orthogonale Komplement dieses Raumes nennen wir den *Divergenzraum* der Reihe (1) und bezeichnen ihn mit $\mathfrak{L}$.

In der ganzen Untersuchung spielen die sog. *Hauptrichtungen* der Reihe (1) eine bedeutsame Rolle. Als eine Richtung bezeichnen wir jede hyperkomplexe Zahl φ für welche $|\varphi| = 1$ ist. Der Winkel zweier Richtungen φ und ψ ist dann der Hauptwert von $\arccos \varphi\psi$. Die Richtung φ ist dann eine Hauptrichtung der Reihe (1), wenn für jedes $e > 0$ diejenigen Glieder α_i von (1), für welche $\sphericalangle\left(\varphi, \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}\right) < e$ ist, eine unendliche Reihe bilden, die nicht absolut konvergiert.

§ 2. Problemstellung und Resultate.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Summenmenge $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ und ihres Zusammenhanges mit der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i$. Dabei ist die Untersuchung auf beschränkte Folgen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ beschränkt, das heisst auf die Reihen für welche $|\alpha_i| < K$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wo K eine feste Zahl ist. Dieses Problem wurde für gewöhnliche komplexe Zahlen von Herrn Jarník gelöst. Etwas später hat Herr Behrend für beliebige n gezeigt, welche Form die Menge $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ haben muss (dabei brauchte er nicht die Beschränktheit der α_i vorauszusetzen); er hat aber nicht gezeigt, wie die innere Struktur dieser Menge mit der Reihe selbst zusammenhängt. Und dies ist gerade die Aufgabe dieser Arbeit.

Vor allem wird gezeigt, dass $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ *dann und nur dann nicht leer ist, wenn die Reihe* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ *symmetrisch ist.*

Die durchgeführte Untersuchung hat weiter gezeigt, dass über die Form der Menge $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ zwei Faktoren entscheiden:

1. Die Menge $\mathfrak{m}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ bezüglicherweise der aus ihr abgeleitete abgeschlossene Modul $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, dessen Beziehung zur $\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ der Satz von Herrn Jarník gibt:

Wenn $\gamma \in \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\pi \in \mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ ist, dann gilt auch $\pi + \gamma \in \mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$

2. Die Differenzreihe $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$.

Das Hauptresultat des ganzen Artikels lautet:

Es sei $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ *eine symmetrische Reihe mit beschränkten hyperkomplexen Gliedern* α_i, $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ *sei ihre Differenzreihe; dann ist*

$$\mathfrak{H}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \varkappa + \overline{\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)} + \mathfrak{L},$$

wo $\varkappa$ *eine bestimmte Zahl,* $\mathfrak{M}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ *die oben definierte Menge und* $\mathfrak{L}$ *der Divergenzraum der Differenzreihe ist.*

ЛИТЕРАТУРА.

[1] *E. Steinitz:* Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journal für d. reine u. angewandte Mathematik, *143,* 128—175, 1913 и *144,* 1—40, 1914.

[2] *V. Jarník:* Über die Umordnung unendlicher Reihen, Věstník Král. Čes. společnosti nauk, Třída matemat.-přír., VIII, 1—45, 1927.

[3] *F. Behrend:* Über einen Satz von Herrn Jarník, Mathematische Zeitschrift, *36,* 298—301, 1933.

[4] *L. S. Pontrjagin:* Topological Groups, Princeton 1946.

[5] *H. Minkowski:* Diophantische Approximationen, B. G. Teubner, Leipzig 1907.