Ladislav Mišík

Об одном свойстве пространства полиномов, $\langle 0, 1\rangle$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 3, 233,234–237

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100047`

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРОСТРАНСТВА ПОЛИНОМОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ИНТЕРВАЛЕ $\langle 0,1\rangle$.

ЛАДИСЛАВ МИШИК (Ladislav Mišík), Братислава.

(Поступило в редакцию 23/I 1952 г.)

(Посвящается профессору д-ру Юр. Гронцу к 70 дню его рождения.)

В некоторых топологических $\mathfrak{L}$-группах, в которых не выполняется третья аксиома Куратовского о замкнутости замыкания, существуют некоторые плотные топологические $\mathfrak{L}$-подгруппы, также не выполняющие этой аксиомы. В частности, пространство полиномов, определенных на интервале $\langle 0, 1\rangle$, не выполняет аксиомы о замкнутости замыкания.

В настоящей работе доказывается, что в некоторых коммутативных $\mathfrak{L}$-группах, не выполняющих третьей аксиомы Куратовского, некоторые плотные подгруппы, рассматриваемые как топологические $\mathfrak{L}$-группы с относительной топологией, также не выполняют этой аксиомы. В частности, из этой теоремы следует, что пространство полиномов, определенных на интервале $\langle 0, 1\rangle$, не выполняет третьей аксиомы Куратовского.

Согласно Д. ван Данцигу[1]) мы говорим, что $\mathfrak{L}$-пространство[2]) является топологической $\mathfrak{L}$-группой, если каждой паре точек $x, y \in L$ поставлена в соответствие одна и только одна точка $z \in L$, называемая их суммой и обозначаемая через $z = x + y$, причем выполнены следующие условия:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ для всех $x, y, z \in L$;

2. в L существует такая точка (обозначим ее через 0), что для любого $x \in L$ имеет место $x + 0 = x$;

---

[1]) Dantzig D. van: Zur topologischen Algebra, Math. Ann., **107** (1932), стр. 587—626.

[2]) Множество L называется $\mathfrak{L}$-пространством, если в нем определены сходящиеся последовательности, т. е. последовательности, которым поставлены в однозначное соответствие некоторые точки, называемые пределами; это соответствие таково, что выполняются две аксиомы сходимости *Фреще* и аксиома *Урысона*.

3. для каждой точки $x \in L$ в L существует такая точка (обозначим ее через $-x$), что имеет место $x + (-x) = 0$;

4. если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке x и последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ к точке y, то и последовательность $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $x + y$, и последовательность[3]) $\{x_n - - y_n\}_{n=1}^{\infty}$ к $x - y$.

Мы говорим, что топологическая $\mathfrak{L}$-группа L имеет свойство (d) для расстояния[4]) $\delta(x, y)$, если в пространстве L можно определит $\delta(x, y)$, $x, y \in L$, так, что выполнено следующее условие:

(1) Если для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует такая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к x в топологии $(\mathfrak{L})$, что последовательность $\{\delta(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу 0, то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ также сходится к x в топологии $(\mathfrak{L})$.

Пусть A — некоторое подмножество $\mathfrak{L}$-пространства L. Тогда $\bar{A}$ означает множество всех точек в L, являющихся пределами сходящихся последовательностей из множества A. Мы говорим, что $\mathfrak{L}$-пространство L выполняет третью аксиому Куратовского[5]), если имеет место $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ для любого подмножества A $\mathfrak{L}$-простанства L.

Пусть L-топологическая $\mathfrak{L}$-группа, имеющая свойство (d) для расстояния $\delta(x, y)$. Пусть P — подмножество L. Множество P называется плотным для $\delta(x, y)$ в L, если для каждого $x \in L$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая точка y в P, что $\delta(x, y) < < \varepsilon$. Ясно, что множество P плотно в $\mathfrak{L}$-пространстве L, если оно плотно для $\delta(x, y)$ в топологической $\mathfrak{L}$-группе L. Если множество P плотно для $\delta(x, y)$ в топологической $\mathfrak{L}$-группе L, то легко доказать следующее утверждение: (2) Для каждой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_1, x_2, \ldots \in L$, сходящейся к $x \in L$, существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_1, y_2, \ldots \in P$, сходящаяся к x и такая, что последовательность $\{\delta(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу 0.

Теорема. *Пусть L — коммутативная[6]) топологическая $\mathfrak{L}$-группа со свойством (d) для $\delta(x, y)$. Пусть L не выполняет третьей аксиомы Куратовского. Пусть P — подгруппа абстрактной группы L, плотной для $\delta(x, y)$ в L. Тогда подгруппа*

---

[3]) $x + (-y)$ мы обозначаем через $x - y$.

[4]) Расстояние $\delta(x, y)$ выполняет в L аксиомы расстояния:
1. $\delta(x, y) \geqq 0$, $\delta(x, y)$ равно 0 только в случае $x = y$; 2. $\delta(x, y) = = \delta(y, x)$; 3. $\delta(x, y) \leqq \delta(x, z) + \delta(z, y)$.

[5]) Kuratowski C., Topologie I., Warszawa-Lwów 1933, стр. 15.

[6]) Топологическая $\mathfrak{L}$-группа L называется коммутативной, если $x + y = y + x$ для всех $x, y \in L$.

P не выполняет третьей аксиомы Куратовского, если подгруппу рассматривать как топологическое пространство с относительной топологией.

Доказательство. Приведем прежде всего следующую теорему, доказанную Новаком и Мишиком[7]):

Теорема. *Если L — коммутативная топологическая $\mathfrak{L}$-группа, точки которой имеют в ней свойство[8]) ϱ, то L не выполняет третьей аксиомы Куратовского; наоборот, если L — коммутативная топологическая $\mathfrak{L}$-группа, не выполняющая третьей аксиомы Куратовского, то все ее точки имеют в L свойство ϱ.*

Из этой теоремы следует, что каждая точка коммутативной топологической $\mathfrak{L}$-группы L в L имеет свойство ϱ. Тогда точка $0 \in P$ также имеет в L свойство ϱ, т. е. существует такая двойная последовательность $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, $x_{n,k} \in L$, n, $k = 1, 2, 3, \ldots$, что последовательность $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке 0 для любого n и ни одна диагональная последовательность $\{x_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, не сходится к точке 0.

Докажем теперь, что точка $0 \in P$ имеет в P свойство ϱ.

Так P — подмножество $\mathfrak{L}$-пространства L плотное для $\delta(x, y)$ в L, то согласно (2) существует такая двойная последовательность $\{y_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, $y_{n,k} \in P$, n, $k = 1, 2, 3, \ldots$, что последовательность $\{y_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке 0 для каждого n и последовательность $\{\delta(x_{n,k}, y_{n,k})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к числу 0 для любого n.

Отсюда следует, что из двойной последовательности $\{y_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ можно выделить такую двойную последовательность $\{y_{n,k_s}\}_{n,s=1}^{\infty}$, что последовательность $\{y_{n,k_s}\}_{s=1}^{\infty}$ сходится к точке 0 для каждого n и последовательность $\{\delta(x_{n,k_s}, y_{n,k_s})\}_{s=1}^{\infty}$ сходится к числу 0 для любого n, причем $\delta(x_{n,k_s}, y_{n,k_s})$ все время $< \frac{1}{n}$ для $s = 1, 2, \ldots$.

Нужно еще доказать, что ни одна диагональная последовательность $\{y_{n_i,k_{s_i}}\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, не сходится к точке 0.

Предположим, наоборот, что диагональная последовательность $\{y_{n_i,k_{s_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к точке 0. В таком случае, так

---

[7]) Novák J. a Mišík L., O L-priestore spojitých funkcií, Matematicko-fyzikálny sborník SAVU, Bratislava, I., No **1** (1951), стр. 1—13.

[8]) Мы говорим, что точка x имеет в $\mathfrak{L}$-пространстве L свойство ϱ, если существует такая двойная последовательность $\{x_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$, $x_{n,k} \in L$, n, $k = 1, 2, 3, \ldots$, что последовательность $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к x для любого n и ни одна последовательность $\{x_{n_i,k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < \ldots$, (называемая диагональной) не сходится к x.

как последовательность $\{\delta(x_{n_i,k_{si}}, y_{n_i,k_{si}})\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к числу 0, $\delta(x_{n_i,k_{si}}, y_{n_i,k_{si}})$ будет для любого i меньше $\frac{1}{n_i}$, и (диагональная) последовательность $\{x_{n_i,k_{si}}\}_{i=1}^{\infty}$ должна по условию (1) сходиться к точке 0. Но это невозможно.

Итак, точка $0 \in P$ имеет в P свойство ϱ.

Теперь мы будем рассматривать P как топологическое $\mathfrak{L}$-пространство с относительной топологией. Тогда P будет коммутативной топологической $\mathfrak{L}$-группой, так как оно является подгруппой абстрактной группы L, которая будет одновременно коммутативной топологической $\mathfrak{L}$-группой. В таком случае, так как в P существует точка, имеющая в нем свойство ϱ, то все точки в P должны в нем иметь это свойство.

Но по приведенной теореме P не выполняет третьей аксиомы Куратовского. Этим доказана наша теорема.

Пусть теперь L_1 будет $\mathfrak{L}$-пространством непрерывных функций $f(x)$, определенных на интервале $\langle 0, 1\rangle$ таким, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x)$ только тогда, когда последовательность чисел $\{f_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $f(a)$ для любого $a \in \langle 0, 1\rangle$. Относительно сложения функций L_1 является коммутативной топологической $\mathfrak{L}$-группой. Ясно, что L_1 имеет свойство (d) для расстояния $\delta(f, g) = \max\limits_{x \in \langle 0, 1\rangle} |f(x) - g(x)|$, так как это расстояние выполняет условие (1).

Пусть P_1 — пространство полиномов с рациональными коэффициентами, определенными на $\langle 0, 1\rangle$. Ясно, что P_1 — подгруппа абстрактной группы L_1; из теоремы Вейерштрасса следует, что P_1 будет плотным для $\delta(f, g)$ в L_1.

Однако, известно, что $\mathfrak{L}$-пространство L_1 не удовлетворяет третьей аксиоме Куратовского.[9]) Итак, вследствие нашей теоремы пространство P_1 также не удовлетворяет третьей аксиоме Куратовского, если его рассматривать как топологическое пространство с относительной топологией.

Заметим, что по другой теореме, содержащейся в упомянутой уже работе[10]) Новака и Мишика, характер[11]) каждого полинома будет несчетным, ибо каждый полином имеет в нем свойство ϱ.

---

[9]) Neubauer M., Sur l'espace des fonctions continues, Fund. Mathematicae, XXXI (1938), стр. 269—278.

[10]) Мы имеем в виду следующую теорему: Если точка x в $\mathfrak{L}$-пространстве L имеет свойство ϱ, то ее характер — несчетный, стр. 6.

[11]) Характером точки в топологическом пространстве называется наименьшая мощность полной системы окрестностей этой точки.

Добавим наконец, что П. Урысон[12]) первый дал пример счетного топологического пространства с одной точкой несчетного характера. Э. Чех выдвинул проблему, существует ли счетное пространство, все точки которого имели бы несчетный характер. И. Новак[13]) был первым, построившим такое пространство. Пространство полиномов с рациональными коэффициентами является естественным решением проблемы Э. Чеха.

Summary.

Concerning a property of the space of polynomials defined on the interval $\langle 0, 1\rangle$.

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava.

(Received January 23th, 1952.)

Let L be a commutative topological $\mathfrak{L}$-group, i. e. an Abelian group in which the topology has been introduced by means of two Fréchet's axioms of convergence satisfying the following condition: if $x_n \to x$ and $y_n \to y$, then $x_n \pm y_n \to x \pm y$. Let $\delta(x, y)$ be a metric function in the space L; let $y_n \to x$ and $\delta(x_n, y_n) \to 0$ imply that $x_n \to x$. Let $P \subset L$ be a subgroup, which is dense in the group L as to the metric $\delta(x,y)$. If the space L fails to satisfy the Kuratowski's axiom of the closure $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, then the subgroup P — as a topological space immerged in L — fails to satisfy the axiom as well.

Let L_1 be $\mathfrak{L}$-group of all continuous real-valued functions defined on the interval $\langle 0, 1\rangle$ with the metric $\delta(f, g) = \max|f(x) - g(x)|$ and satisfying the condition mentioned above. It is well known, that in L_1 there are sets whose closures are not closed. As the group P_1 of all polynomials defined on $\langle 0, 1\rangle$ with rational coefficients is dense in L_1, the space P_1 does not satisfy the axiom of the closure. From this it follows according to a theorem of Novák-Mišík, that the character of every point of the countable space P_1 is uncountable.

[12]) Uryson P., Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann., **94**, стр. 288.

[13]) Novák J., Spočetný ARU-prostor, jenž neobsahuje žádný bod spočetnosti, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, **67** (1938), стр. 97—99.