Czechoslovak Mathematical Journal

Karel Černý

О минимумах бинарных биквадратных форм

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 2 (1952), No. 1, 1–56

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100034

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Центральный математический институт
Т. 2 (77) ПРАГА 15. V. 1952 * № 1

О МИНИМУМАХ БИНАРНЫХ БИКВАДРАТНЫХ ФОРМ

I. Дефинитные формы.*)

К. ЧЕРНЫ (Karel Černý), Прага.

(Поступило в редакцию 29/III 1951 г.)

Пусть $f(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4$ — дефинитная бинарная биквадратная форма, $I = a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_0a_4$, $J = 72a_0a_2a_4 + 9a_1a_2a_3 - 2a_2^3 - 27a_0a_3^2 - 27a_1^2a_4$ — ее инварианты и M — параметр формы, однозначно определенный следующими условиями:

Если $J = 0$, то $M = 6$. Если $J \neq 0$, то $(M^2 + 12)^3/4(36M - M^3)^2 = I^3/J^2$ а именно $2 \leqq M < 6$, если $J > 0$, $M > 6$, если $J < 0$.

Тогда существует пара целых чисел $(X, Y) \neq (0, 0)$ таких, что

1. $|f(X, Y)| \leqq \dfrac{8}{\sqrt{M^2 + 60} - M}\sqrt{\dfrac{I}{M^2 + 12}}$, если $2 \leqq M \leqq 14$,

2. $|f(X, Y)| \leqq \dfrac{M + 6}{5}\sqrt{\dfrac{I}{M^2 + 12}}$, если $M \geqq 14$.

1. Введение.

Пусть $f(x, y, z, \ldots)$ n-арная вещественная форма степени s. Обозначим C_n множество всех n-членных упорядоченных систем $(x, y, z, \ldots)$, где $x, y, z, \ldots$ являются любыми целыми числами, но не все равны нулю.

Обозначим

$$L(f) = \inf|f(x, y, z, \ldots)|, \ (x, y, z, \ldots) \in C_n.$$

---

*) Во время печати этой работы появилась в Mathematical Reviews (Vol. **12**, No 9, 1951) рецензия статьи *Ц. С. Дависа* (*C. S. Davis*, The minimum of a binary quartic form. I. Acta Math. **84**, 263—298, 1951) в которой решается та-же самая проблема. Эта статья до сих пор является аутору недоступной.

Если $f(x, y, z, \ldots)$ принимает значение $L(f)$ или $-L(f)$ на множестве C_n, т. е. если для какой-нибудь „точки" $(x, y, z, \ldots) \in C_n$, $|f(x, y, z, \ldots)| = L(f)$, то число $L(f)$ мы называем минимумом формы $f(x, y, z, \ldots)$. Итак, возникает вопрос: установить верхний предел чисел $L(f)$ для определенных групп форм.

Решение этого вопроса для бинарных квадратических форм стало уже классическим.[1])

В 1940—1944 г. *Л. И. Морделл* решил этот вопрос для бинарной формы 3-ей степени. В общем случае им получены следующие результаты:[2])

Пусть $$f(x, y) = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3$$

вещественная бинарная кубическая форма с определителем

$$D = 27a_0^2a_3^2 - 18a_0a_1a_2a_3 - a_1^2a_2^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3.$$

Тогда:

1. для форм с отрицательным определителем

$$L(f) \leqq \sqrt[4]{\frac{|D|}{49}}.$$

$L(f) = \sqrt[4]{\frac{|D|}{49}}$ является минимумом тех и лишь тех форм, которые эквивалентны формам $A(x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3)$;

2. для форм с положительным определителем

$$L(f) \leqq \sqrt[4]{\frac{D}{23}}.$$

$L(f) = \sqrt[4]{\frac{D}{23}}$ является минимумом тех и лишь тех форм, которые эквивалентны формам $A(x^3 - xy^2 - y^3)$;

3. для форм с определителем равным 0 решение тривиально $L(f) = 0$.

В следующих работах мы будем решать данную проблему для бинарных форм биквадратных.

---

[1]) Смотри напр.: Leonard E. Dickson, Studies in the Theory of Numbers.

[2]) L. J. Mordell: On Numbers Represented by Binary Cubic Forms (Proc. London Math. Soc. (2), 48 (1943, p. 198—228), The Minimum of a Binary Cubic Form I (Journal London Math. Soc. 18, 1943, p. 201—210), The Minimum of a Binary Cubic Form II (Journal London Math. Soc. 18, 1943, p. 211—217), Lattice Points in the Region $|x^3 + y^3| < 1$. (Journal London Math. Soc. 19, 1944, p. 92—99.)

2. Дефинитные формы.

Бинарная биквадратная форма

$$f(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3x^3y^3 + a_4y^4 \tag{1}$$

имеет следующие основные (алгебраические) инварианты

$$I = a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_0a_4, \tag{2}$$

$$J = 72a_0a_2a_4 + 9a_1a_2a_3 - 2a_2^3 - 27a_0a_3^2 - 27a_1^2a_4. \tag{3}$$

I является инвариантом веса 4, J — веса 6. Каждый дальнейший инвариант является функцией этих инвариантов.

Инвариант

$$D = \tfrac{1}{27}(4I^3 - J^2), \tag{4}$$

веса 12, называем определителем формы.

Если вещественная форма принимает для всех вещественных „точек“ $(x, y) \neq (0, 0)$ значения, отличные от нуля, то эти формы мы называем **дефинитными**, а именно: **положительно-дефинитными**, если $f(x, y) > 0$ для $(x, y) \neq (0, 0)$, отрицательно-дефинитными; если $f(x, y) < 0$ для $(x, y) \neq (0, 0)$.

Формы, которые не обладают таким свойством, называются **индефинитными**.

В дальнейшем мы будем рассматривать (без ущерба для общности) формы положительно-дефинитные (итак $a_0 > 0$, $a_4 > 0$).

Хорошо известно, что ни те биквадратные формы, определитель которых отрицателен, ни формы с положительным определителем, коэффициенты которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &1.\ 3a_1^2 - 8a_2 > 0, \\ &2.\ (3a_1^2 - 8a_2)^2 - 16I > 0, \end{aligned} \tag{5}$$

не могут быть дефинитными. Мы будем в дальнейшем пользоваться этим фактом.

Докажем теперь лемму:

Лемма 1. *Пусть $f(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4$ положительно-дефинитная биквадратная форма.*

Тогда существует (неособое) вещественное преобразование

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \beta Y \\ y &= \gamma X + \delta Y, \end{aligned} \tag{6}$$

α, β, γ, δ — *вещественны;* $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, *котовое переводит форму* $f(x, y)$ *в*

$$g(X, Y) = X^4 + MX^2Y^2 + Y^4,\ M \geq 2. \tag{7}$$

Число M однозначно определено условиями:

1. *Если $J = 0$, то $M = 6$.*
2. *Если $J \neq 0$, то M являеття корнем уравнения*

$$\frac{(M^2 + 12)^3}{4(36M - M^3)^2} = \frac{I^3}{J^2}$$

а именно:

$$M > 6, \text{ если } J < 0$$
$$2 \leqq M < 6, \text{ если } J > 0.$$

Для данной формы $f(x, y)$ однозначно определепное таким образом число M мы будем называть параметром формы $f(x, y)$.[3]

Доказательство. Положительно-дефинитную биквадратную форми можно написать в виде произведения двух положительно-дефинитных квадратичных форм. Таким образом мы можем вещественным преобразованием получить разложение

$$f(x', y') = (x'^2 + y'^2)(ax'^2 + bx'y' + cy'^2). \tag{8}$$

Если $b \neq 0$, то дальнейшим преобразованием

$$\begin{aligned} x' &= \ \varrho X' + Y', \\ y' &= -X' + \varrho Y', \end{aligned} \tag{9}$$

где ϱ вещественный корень уравнения

$$b\varrho^2 - 2(c - a)\varrho - b = 0,$$

(итак $\varrho \neq 0$, следовательно, определитель преобразования (9) $\neq 0$), форма (8) перейдет в

$$\begin{aligned} f_1(X', Y') &= (X'^2 + Y'^2)(A^2X'^2 + B^2Y'^2) = \\ &= A^2X'^4 + (A^2 + B^2)X'^2Y'^2 + B^2Y'^4. \end{aligned}$$

И наконец преобразованием

$$X' = \frac{1}{\sqrt[4]{A^2}} X$$

$$Y' = \frac{1}{\sqrt[4]{B^2}} Y$$

получим канонический вид (7). Число M будет

$$M = \frac{A^2 + B^2}{|AB|} \geqq 2. \tag{11}$$

---

[3]) Если $f(x, y)$ форма отрицательно-дефинитная то пусть ее параметром будет параметр формы $- f(x, y)$.

Этим доказано существование вещественного преобразования с определителем $\Delta \neq 0$, которое форму $f(x, y)$ приводит к каноническому виду (7).

Если обозначим инварианты формы $f(x, y)$ I, J, а инварианты формы (7)

$$I' = M^2 + 12, \quad J' = 2(36M - M^3),$$

то имеют место уравнения

$$\Delta^4 I = M^2 + 12 \tag{12}$$

$$\Delta^6 J = 2(36M - M^3). \tag{13}$$

Из уравнений (11) и (13) следует в случае $J = 0$, $M = 6$.

В случае $J \neq 0$, число M является решением уравнения

$$\frac{(M^2 + 12)^3}{4(36M - M^3)^2} = \frac{I^3}{J^2}, \tag{14}$$

или

$$(1 - 4k)\, M^6 + (36 + 288k)\, M^4 + \\ + (432 - 5184k)\, M^2 + 1728 = 0 \tag{14'}$$

где k абсолютный инвариант $k = \frac{I^3}{J^2}$, откуда

$$1 - 4k = -\frac{1}{J^2}(4I^3 - J^2) = -\frac{27}{J^2} D.$$

Если определитель формы $f(x, y)$ $D = 0$, т. е. $4k = 1$, то уравнение (14′) будет 4-той степени, а именно

$$108(M^2 - 4)^2 = 0 \tag{14''}$$

В этом случае это уравнение имеет 2 двойных корня $M = 2$, $\overline{M} = -2$. Итак, параметр формы $f(x, y)$ с определителем $= 0$ будет ввиду (13) $M=2$, и данная форма в этом случае (и очевидно только в этом случае) является квадратом дефинитной квадратичной формы.

Остается случай $D > 0$.

Легко доказать, что уравнение (14′) имеет в этом случае 6 вещественных корней, а именно в промежутках:

$$(-\infty, -6),\ (-6, -2),\ (-2, 0),\ (0, 2),\ (2, 6),\ (6, \infty) \tag{15}$$

Нас будут в дальнейшем интересовать, ввиду (11), в первую очередь корни последних двух промежутков. Чтобы это доказать, достаточно заметить, что форму (7) можно вещественным преобразованием

$$X = \frac{1}{\sqrt[4]{2+M}}(X'+Y')$$
$$Y = \frac{1}{\sqrt[4]{2+M}}(X'-Y') \tag{16}$$

а также мнимым преобразованием

$$X = \mathrm{i}X'$$
$$Y = Y', \tag{17}$$

или-же произведениями этих преобразований привести в общем к 6 формально одинаковым видам с следующими постоянными при среднем члене

$$\pm M, \ \pm \frac{12-2M}{2+M}, \ \pm \frac{12+2M}{2-M} \tag{18}$$

(постоянная $\bar{M} = \dfrac{12-2M}{2+M}$ отвечает вещественному преобразованию (16) формы $x^4 + Mx^2y^2 + y^4$ в форму вида $x^4 + \bar{M}x^2y^2 + y^4$). Итак, мы можем форму $f(x, y)$ привести преобразованиями к одному из следующих 6 видов

$$g_i(X, Y) = X^4 + M_iX^2Y^2 + Y^4, \tag{19}$$

где M_i одно из чисел (18) и здесь, очевидно, числа M_i являются корнями уравнения (14).

Так как $J \neq 0$, $D > 0$, параметр M в силу (13), (11) может быть или в промежутке (2,6) или в промежутке (6, ∞). Если $2 < M < 6$, то дальнейший возможный корень уравнения (14), который больше 2, может согласно (18) иметь только следующий вид

$$M' = -\frac{12+2M}{2-M} > 6 \tag{20}$$

(остальные 4 корня (18) не удовлетворяют (11)). Итак, ввиду уравнения (13), должно быть $J > 0$ (Δ является определителем вещественного преобразования). Но преобразование, которое приводит $f(x, y)$ к виду (19) с постоянной $M_i = M' > 6$, не может быть вещественным, потому что для его определителя имеет место

$$\Delta'^6 = \frac{2(36M' - M'^3)}{J} < 0.$$

Точно так же можно доказать, что в случае $J < 0$ единственным решением (14), приемленым для нас, будет $6 < M$.

Замечание. Из уравнений (12), (13) далее видно, что определением двух из чисел M, I, J можно однозначно определить третье.

3. Основные теоремы.

Результаты, полученные в настоящей работе даны следующими теоремами:

Теорема 1. *Пусть* $f(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4$ *дефинитная биквадратная форма, параметр которой* $2 \leqq M \leqq 14$ *и инвариант* $I = a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_0a_4$.

Тогда существует пара целых чисел $(x, y) \neq (0, 0)$ *такая, что*

$$|f(x, y)| \leqq \frac{8}{\sqrt{M^2 + 60} - M} \sqrt{\frac{I}{M^2 + 12}}, \tag{21}$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$f(x, y) \sim A(x^4 + (M\Delta^2 - \tfrac{7}{2})\, x^3y + (6 - 2M\Delta^2)\, x^2y^2 + (M\Delta^2 - \tfrac{7}{2})\, xy^3 + y^4), \tag{22}$$

где $\Delta^2 = \dfrac{-M + \sqrt{M^2 + 60}}{8}$, *и инвариант* I *этих форм*

$$I = A^2(M^2 + 12)\left(\frac{\sqrt{M^2 + 60} - M}{8}\right)^2.$$

Теорема 2. *Пусть* $f(x, y)$ *дефинитная биквадратная форма, параметр которой* $M \geqq 14$.

Тогда существует пара целых чисел $(x, y) \neq (0, 0)$ *такая, что*

$$|f(x, y)| \leqq \frac{M + 6}{5} \sqrt{\frac{I}{M^2 + 12}}, \tag{23}$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$f(x, y) \sim A(x^4 + Nx^3y - x^2y^2 - Nxy^3 + y^4),$$

где

$$N = \frac{2}{M + 6} \sqrt{(M - 14)(M + 1)}. \tag{24}$$

Инвариант I *этих форм*

$$I = A^2(M + 12)\left(\frac{5}{M + 6}\right)^2$$

Эти теоремы будут доказаны, если доказать теоремы эквивалентные им. Прежде чем их сформулировать, заметим следующее:

Множество точек (x, y) даное уравнениями

$$x = \alpha X + \beta Y$$
$$y = \gamma X + \delta Y, \tag{25}$$

где α, β, γ, δ вещественные числа, $|\alpha\delta - \beta\gamma| = \Delta > 0$ и где числа X, Y пробегают все целые числа, мы называем решеткой и будем ее обозначать $\Lambda\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$, короче, Λ. Число Δ назовем определителем решетки. Элементы множества Λ называем точками решетки. Точку решетки $(0, 0)$ (общую для всех решеток) будем называть началом и обозначать O. Точки решетки (α, γ), (β, δ) или матрицу $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ мы будем называть базисом решетки.

Теореме 1 эквивалентна

Теорема 3. *Пусть M вещественное число, $2 \leqq M \leqq 14$, Λ решетка с определителем $\Delta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{M^2 + 60} - M}{8}}$.*

Тогда существует по крайней мере одна точка $(x, y) \neq O$ решетки Λ такая, что

$$|x^4 + Mx^2y^2 + y^4| \leqq 1, \tag{26}$$

где знак равенства имет место тогда и только тогда, когда Λ решетка одного из следующих видов:

1. *в случае $M = 2$:*

$$\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha, & \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha\\ \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha, & \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha\end{pmatrix},$$

2. *в случае $2 < M \leqq 14$:*

$$\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & 1\\ \Delta, & 0\end{pmatrix},$$

или

$$\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix}\Delta, & 0\\ \frac{1}{2}, & 1\end{pmatrix}.[4]$$

---

[4]) В случае $M = 14$, $\Delta = \frac{1}{2}$ и обе решетки эквивалентны (содержат одинаковые точки решетки).

Теореме 2 эквивалентна

Теорема 4. *Пусть M вещественное число, $14 \leqq M$; Λ решетка с определителем* $\Delta = \sqrt{\dfrac{5}{M+6}}$.

Тогда существует по крайней мере одна точка $(x, y) \neq 0$ решетки Λ такая, что

$$|x^4 + Mx^2y^2 + y^4| \leqq 1, \tag{27}$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда базис решетки $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ *дан вещественным решением системы уравнений*

$$\begin{aligned} \alpha^4 + M\alpha^2\gamma^2 + \gamma^4 &= 1 \\ \beta^4 + M\beta^2\delta^2 + \delta^4 &= 1 \\ (\alpha+\beta)^4 + M(\alpha+\beta)^2(\gamma-\delta)^2 + (\gamma-\delta)^4 &= 1 \\ (\alpha-\beta)^4 + M(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2 + (\gamma-\delta)^4 &= 1. \end{aligned} \tag{28}$$

Система (28) имеет вещественное решение α, β, γ, δ, если $M \geqq 14$.

Доказательство теоремы 4 сводится тогда к докаэательству следующей теоремы эквивалентной этой теореме:

Теорема 5. *Пусть N — вещественное число, $0 \leqq N < 2$, Λ решетка с определителем $\Delta = 1$.*

Тогда существует точка $(x, y) \neq 0$ решетки Λ такая, что

$$|x^4 + Nx^3y - x^2y^2 - Nxy^3 + y^4| \leqq 1,$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда:

1. *В случае* $N = 0$: $\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. *В случае* $0 < N < 2$: $\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ или

$$\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix} \cos\omega, & -\sin\omega \\ \sin\omega, & \cos\omega \end{pmatrix},$$

где $\omega = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2N}{3}$.

4. Эквивалентность основных теорем.

Пусть $g(x, y) = x^4 + Mx^2y^2 + y^4$ $(M \geqq 2)$ канонический вид формы $f(x, y)$. Тогда существуют вещественные числа α, β, γ, δ, $|\alpha\delta - \beta\gamma| = \bar{\Delta} = \sqrt[4]{\dfrac{I}{M^2+12}}$, такие, что

$$f(X, Y) = g(\alpha X + \beta Y,\ \gamma X + \delta Y) \tag{29}$$

для всех (X, Y).

Итак, если

$$x = \sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}}(\alpha X + \beta Y)$$

$$y = \sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}}(\gamma X + \delta Y) \tag{30}$$

(где Δ любое число, отличное от 0), то имеет место

$$f(X, Y) = \left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}\right)^2 g(x, y) = \frac{1}{\Delta^2}\sqrt{\frac{I}{M^2 + 12}}\, g(x, y). \tag{31}$$

Если X, Y принимает целые значения, то уравнениями (30) дана решётка с определителем Δ. Итак, если для пары целых чисел $(X, Y) \neq (0, 0)$ $f(X, Y) \leqq \left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}\right)^2$, то существует точка $(x, y) \neq 0$ решетки (30) такая, что $g(x, y) \leqq 1$, а если, наоборот, для какой-нибудь точки $(x, y) \neq 0$ решетки (30) $g(x, y) \leqq 1$, то существует пара целых чисел $(X, Y) \neq (0, 0)$, для которых $f(X, Y) \leqq \left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}\right)^2$.

Если в случае $2 \leqq M \leqq 14$ мы выберем число $\Delta^2 = \frac{\sqrt{M^2 + 60} - M}{8}$, а в случае $14 \leqq M$, $\Delta^2 = \frac{5}{M + 6}$, то этим будет доказана эквивалентность первых утверждений теоремы 1 и 3 или-же 2 и 4.

Далее докажем (лемма 2), что все преобразования, которые оставляют форму $g(x, y)$ без изменения являются преобразованиями $\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0, & \pm 1 \\ \pm 1, & 0 \end{pmatrix}$. Эти преобразования обозначают тождество, симметрию по отношению к оси x, по отношению к осу y и по отношению к оси $y = x$ (и произведение этих преобразований). Итак, решётка $\Lambda_1 = \Lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \Delta, & -\Delta \end{pmatrix}$ останется при этих преобразованиях без изменения или-же перейдет в решетку $\Lambda_2 \begin{pmatrix} \Delta, & -\Delta \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Так как преобразование $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \Delta, & -\Delta \end{pmatrix}$ или-же $\begin{pmatrix} \Delta, & -\Delta \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ переводит форму $g(x, y)$ в форму вида

$$x^4 + (M\Delta^2 - \tfrac{7}{2})\, x^3 y + (6 - 2M\Delta^2)\, x^2 y^2 + (M\Delta^2 - \tfrac{7}{2})\, x y^3 + y^4$$

и ввиду того, что все преобразования $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$, оставляющие множество пар целых чисел неизменным, обладают тем свойством, что α', β', γ', δ' — целые и $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \pm 1$, этим доказана эквивалентность дальнейших утверждений теоремы 1 и 3. Эквивалентность дальнейших утверждений теоремы 2 и 4 или-же эквивалентность теоремы 4 и 5 будет видна из доказательства леммы 4 в § 6.

5. Автоморфные преобразования канонического вида.

Лемма 2. *Все вещественные преобразования, оставляющие форму*

$$g(x, y) = x^4 + Mx^2y^2 + y^4, \ M > 2 \tag{39}$$

инвариантной, образуют группу преобразований

$$\mathfrak{G}_0 : \begin{pmatrix}\pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0, & \pm 1 \\ \pm 1, & 0\end{pmatrix}.$$

Доказательство: Пусть $\begin{pmatrix}a, & b \\ c, & d\end{pmatrix}$ вещественное преобразование

$$\begin{aligned} x &= aX + bY \\ y &= cX + dY, \ |ad - bc| = 1, \end{aligned} \tag{40}$$

относительно которого форма (39) инвариантна.

Обозначим пропорцию нулевых точек формы (39) $\frac{x_i}{y_i} = t_i$ а пропорцию нулевых точек преобразованной формы (39) (при помощи преобразования (40)) $T_i = \frac{X_i}{Y_i}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Следовательно, числа t_i, или-же числа T_i являются решением уравнения

$$u^4 + Mu^2 + 1 = 0. \tag{41}$$

Если мы обозначим

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{M - \sqrt{M^2 - 4}}{2}}, \tag{42}$$

то корни (41) будут $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$.

Имеем

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \omega_2^2 &= \sqrt{M^2 - 4} \neq 0 \\ \omega_1\omega_2 &= 1, \end{aligned} \tag{43}$$

Теперь мы обозначим числа t_i так:

$$t_1 = i\omega_1,\ t_2 = -i\omega_1,\ t_3 = i\omega_2,\ t_4 = -i\omega_2. \tag{44}$$

Числа T_i мы получим из чисел t_i преобразованием (40), следовательно,

$$t_i = \frac{aT_i + b}{cT_i + d} = \frac{(ad - bc)\,T_i + ac|T_i|^2 + bd}{|cT_i + d|^2}. \tag{45}$$

Отсюда видно, что сопряженным парам чисел t_i отвечают всегда сопряженные пары чисел T_i, а именно так, что числам t_1 а t_3 (или-же t_2 а t_4) должны быть поставлены в соответствие числа T_1 а T_3 (или-же T_2 а T_4) с одинаковым знаком мнимой части. Если выбрать T_1 равным какому-ливо из корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, то этим выбором однозначно определяются величины T_2, T_3, T_4. Итак, возможны только следующие четыре случая.

1. Если $ad - bc = 1$:

$$T_1 = i\omega_1,\ T_2 = -i\omega_1,\ T_3 = i\omega_2,\ T_4 = -i\omega_2 \tag{46}$$

$$T_1 = i\omega_2,\ T_2 = -i\omega_2,\ T_3 = i\omega_1,\ T_4 = -i\omega_1. \tag{47}$$

2. Если $ad - bc = -1$:

$$T_1 = -i\omega_1,\ T_2 = i\omega_1,\ T_3 = -i\omega_2,\ T_4 = i\omega_2$$

$$T_1 = -i\omega_2,\ T_2 = i\omega_2,\ T_3 = -i\omega_1,\ T_4 = i\omega_1.$$

Итак видно, что каждое преобразование, к которому ведет соответствие 2, получим из какого нибудь преобразования $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, к которому ведет соответствие 1., заменой строк. Итак, достаточно разобрать случай 1. Мы знаем, что для коэффициентов преобразования (40) в согласии с (46), (45), (40) справедливы уравнения

$$\begin{aligned} a - d &= 0 \\ b + c\omega_1^2 &= 0 \\ b + c\omega_2^2 &= 0 \\ ad - bc &= 1. \end{aligned}$$

Эта система имеет в силу (43) только следующее решение:

$$(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 1),\ (-1, 0, 0, 1). \tag{48}$$

Согласно (47), (45), (40) для коэффициентов преобразования справедливы уравнения:

$$\begin{aligned} a\omega_1 - d\omega_2 &= 0 \\ a\omega_2 - d\omega_1 &= 0 \\ b + c &= 0 \\ ad - bc &= 1, \end{aligned}$$

которые в силу (43) имеют только следующее решение:

$$(a, b, c, d) = (0, 1, -1, 0),\ (0, -1, 1, 0). \tag{49}$$

Итак, все преобразования, которые оставляют форму (30) инвариантной, сводятся к следующим преобразованиям:

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & -1\\ -1, & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что они образуют группу $\mathfrak{G}_0$.

Лемма 3. *Все вещественные преобразования, которые приводят форму*

$$g(x, y) = x^4 + Mx^2y^2 + y^4,\ M > 2 \tag{50}$$

к виду

$$G(x, y) = x^4 + Ax^3y + Bx^2y^2 + Cxy^3 + Dy^4, \tag{51}$$

где для коэффициентов (51) *имеют место соотношения*

$$G(\tfrac{1}{2},\ \Delta) = 1 \tag{52}$$
$$G(\tfrac{1}{2},\ -\Delta) = 1, \tag{53}$$

Δ положительный корень уравнения

$$g(\tfrac{1}{2},\ \Delta) = 1, \tag{54}$$

сводятся к следующим:

1. *преобразование группы* $\mathfrak{G}_0$ ($\mathfrak{G}_0$ *группа преобразований леммы* 2),

2. *преобразование из* $\mathfrak{G}_0 S$, *где* $S = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & -\frac{3}{4\Delta}\\ \Delta, & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

3. *преобразование из* $\mathfrak{G}_0 S_1$, *где* $S_1 = S\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & -1\end{pmatrix}$.

Доказательство. Соотношения (52) и (53) дают следующие условия для коэффициентов формы (2) — с учетом (54):

$$A = -4\Delta^2 C,\ D = \frac{M - B}{4\Delta^2} + 1. \tag{55}$$

Равенство инвариантов (50) и (51) далее дает

$$B^2 - 3AC + 12B = 12 + M^2 \tag{56}$$

$$72BD + 9ABC - 2B^3 - 27C^2 - 27A^2D = 72\,M - 2M^3. \quad (57)$$

Подставляя (55) в (56) и (57) мы получим с учетом (54)

$$12\Delta^2C^2 = (M - B)\left(M + B - \frac{3}{\Delta^2}\right) \quad (58)$$

$$36\Delta^2C^2(\Delta^2B - 6) = (M - B)\,(36\Delta^2 - \Delta^2B^2 - \Delta^2MB - \\ - \Delta^2M^2 - 9B). \quad (59)$$

Система (58), (59) имеет только следующие решения

$$B = M, \quad C = 0 \quad (60)$$

$$B = \frac{9 - 2M\Delta^2}{4\Delta^2}, \quad C = \frac{1}{4\Delta}\left(M - \frac{3}{2\Delta^2}\right) \quad (61)$$

$$B = \frac{9 - 2M\Delta^2}{4\Delta^2}, \quad C = -\frac{1}{4\Delta}\left(M - \frac{3}{2\Delta^2}\right). \quad (62)$$

Из уравнений (55) следуют соответствующие величины коэффициентов A, D.

Итак, все формы $G(x, y)$, к которым можно вещественным преобразованием с определителем ± 1 привести форму $g(x, y)$ и имеющие свойства (52), (53), имеют коэффициенты B, C вида или (60) или (61) или-же (62).

В случае (60), однако $G(x, y) = g(x, y)$ и, следовательно, все преобразования даны группой $\mathfrak{G}_0$. В случае (61) можно легко убедиться, что $g(x, y)$ перейдет в $G(x, y)$ преобразованием

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & -\frac{3}{4\Delta} \\ \Delta, & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

итак, в этом случае все преобразования, приводящие $g(x, y)$ к $G(x, y)$, являются произведениями S_0S, где $S_0 \in \mathfrak{G}_0$.

В случае (62) коэффициенты при четных степенях переменных форм $G(x, y)$ одинаковы, при нечетных степенях имеют обратный знак. Итак, форму с коэффициентами (62) мы получим из формы с коэффициентами (61) преобразованием $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$. Этим лемма доказана.

6. Система уравнений.

Лемма 4. *Форму*

$$g(x, y) = x^4 + Mx^2y^2 + y^4; \; M \geqq 14 \quad (63)$$

можно вещественным преобразованием $T = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ *перевести на вид*

$$h(x, y) = x^4 + Nx^3y - x^2y^2 - Nxy^3 + y^4 \tag{64}$$

где

$$N = \frac{2}{M + 6} \sqrt{(M - 14)(M + 1)}, \text{ откуда } 0 \leqq N < 2. \tag{65}$$

Коэффициенты этого преобразования являются вещественным решением системы уравнений

$$\begin{gathered} \alpha^4 + M\alpha^2\gamma^2 + \gamma^4 = 1 \\ \beta^4 + M\beta^2\delta^2 + \delta^4 = 1 \\ (\alpha + \beta)^4 + M(\alpha + \beta)^2 (\gamma + \delta^2 + (\gamma + \delta)^4 = 1 \\ (\alpha - \beta)^4 + M(\alpha - \beta)^2 (\gamma - \delta)^2 + (\gamma - \delta)^4 = 1 \end{gathered} \tag{66}$$

и

$$\Delta = |\alpha\delta - \beta\gamma| = \sqrt{\frac{5}{M + 6}}. \tag{67}$$

Доказательство. Рассмотрим вещественную форму

$$h(x, y) = x^4 + Nx^3y - x^2y^2 - Nxy^3 + y^4, \ 0 \leqq N < 2. \tag{68}$$

Если число N находится в указанном интервале, то форма (68), как можно легко установить, является положительной. Имеем

$$h(1, 0) = h(0, 1) = h(1,1) = h(1, -1) = 1. \tag{69}$$

Если $T^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1}$ — преобразовнаие, которое форму (68) приводит к каноническому виду, то имеет место тождество

$$\begin{aligned} (\alpha X + \beta Y)^4 + M(\alpha X + \beta Y)^2 (\gamma X + \delta Y)^2 + (\gamma X + \delta Y)^4 = \\ = X^4 + NX^3Y - X^2Y^2 - NXY^3 + Y^4. \end{aligned} \tag{70}$$

В силу (69) этим доказано существование вещественного решения (66) для тех M, которые являются параметром форм (63).

Если Δ — абсолютная величина определителя преобразования T, то для инвариантов имеет место

$$\Delta^4(12 + M^2) = 13 + 3N^2 \tag{71}$$

$$\Delta^6(72M - 2M^3) = -70 - 45N^2. \tag{72}$$

Отсюда, исключая Δ — если положить $N^2 = \lambda$ — получим

$$l = 4\frac{(13 + 3\lambda)^3}{(70 + 45\lambda)^2} \tag{73}$$

где

$$l=\frac{(M^2+12)^3}{(36M-M^3)^2}\cdot \tag{74}$$

Если выбрать $M \geqq 14$, то уравнениями (73), (74) однозначно определено вещественное число $0 \leqq \lambda < 4$ и наоборот. Ибо, во первых, выражением (73) определена непрерывная убывающая функция переменной λ в интервале $0 \leqq \lambda \leqq 4$ с крайними значениями $l(0)=\frac{13^3}{12^2}$, $l(4)=1$. Во вторых, выражением (74) определена непрерывная убывающая функция в интервале $14 \leqq M$ с крайними значениями $l(14)=\frac{13^3}{12^2}$, $l(\infty)=1$.

Этим доказано следующее утверждение: существуют вещественные преобразования, которые приводят форму (63) к виду (64), где $0 \leqq N < 2$. Коэффициенты каждого такого преобразования являются решением системы (66). Далее видно, что все эти преобразования являются преобразованиями из комплекса с 8 элементами $\mathfrak{G}_0 T$, где $\mathfrak{G}_0$ — группа из леммы 2 а T — любое преобразование приводящее (63) к (64). Остается доказать (65) и (67); но мы не будем опираться на (71) и (72), а выведем сначала линейное уравнение для $\lambda = N^2$.

Обозначим пропорцию корней формы (63) через v и пропорцию корней формы (64) через V. Тогда

$$v=\frac{\alpha V+\beta}{\gamma V+\delta}\cdot \tag{74}$$

Числа v являются (смотри лемму 2)

$$v_1=\mathrm{i}\omega_1,\ v_2=-\mathrm{i}\omega_1,\ v_3=\mathrm{i}\omega_2,\ v_4=-\mathrm{i}\omega_2, \tag{75}$$

где

$$\omega_1=\sqrt{M+\sqrt{M^2-4}},\quad \omega_2=\sqrt{M-\sqrt{M^2-4}}. \tag{76}$$

Числа V — корни уравнения

$$V^4+NV^3-V^2-NV+1=0 \tag{77}$$

итак

$$V-\frac{1}{V}=\frac{-N\pm \mathrm{i}\sqrt{4-N^2}}{2}=2\tau_{1,2} \tag{78}$$

откуда получим для V следующие 4 значения

$$\tau_1 \pm \sqrt{\tau_1^2+1} \tag{79}$$

$$\tau_2 \pm \sqrt{\tau_2^2+1} \tag{80}$$

где мнимые части величин, входящих в (79) или в (80), имеют одинаковый знак (так как мнимые части V, $V - \frac{1}{V}$ имеют одинаковый знак).

Если условиться что выражение $\sqrt{\tau_1^2 + 1}$ является комплексным числом с мнимой частью $\geqq 0$, а выражение $\sqrt{\tau_2^2 + 1}$ — комплексным числом с мнимой частью $\leqq 0$ (знак равенства имеет место одновременно), то являются сопряженными эти величины (79), (80), которые имеют у радикалов одинаковый знак.

Как было сказано в доказательстве леммы 2, преобразованием T величины корней v сопоставлены с V так, что сопряженным парам v отвечают сопряженные пары Vи парам v с мнимой частью того-же знака отвечают пары V с мнимой частью также одинакового знака. Итак, возможны 4 различных соответствия. Пусть одно из них будет

$$\begin{aligned} V_1 &= \tau_1 + \sqrt{\tau_1^2 + 1}, \quad V_2 = \tau_2 + \sqrt{\tau_2^2 + 1} \\ V_3 &= \tau_1 - \sqrt{\tau_1^2 + 1}, \quad V_4 = \tau_2 - \sqrt{\tau_2^2 + 1}, \end{aligned} \tag{81}$$

тогда для коэффициентов α, β, γ, δ имеем

$$\alpha V_i + \gamma v_i V_i + \beta + \delta v_i = 0, \; i = 1, 2, 3, 4. \tag{82}$$

Эта система — как доказано — имеет ненулевое решение, и поэтому

$$\begin{vmatrix} V_1, & v_1 V_1, & 1, & v_1 \\ V_2, & v_2 V_2, & 1, & v_2 \\ V_3, & v_3 V_3, & 1, & v_3 \\ V_4, & v_4 V_4, & 1, & v_4 \end{vmatrix} = 0 \tag{83}$$

или

$$\begin{gathered} (v_1^2 + v_3^2)(-V_1V_4 + V_2V_4 + V_1V_3 - V_2V_3) - \\ -2v_1v_3(V_1V_3 + V_2V_3 + V_1V_4 + V_2V_4 - 2V_1V_2 - 2V_3V_4) = 0. \end{gathered} \tag{83'}$$

Это уравнение является инвариантным по отношению к различным сопоставлениям V_i. Соотношения (83′), (81), (78), (75), (76) дают линейное уравнение для λ, откуда

$$N = \pm \frac{2}{M+6} \sqrt{(M-14)(M+1)} \tag{84}$$

и далее из уравнения (71)

$$\Delta = \sqrt{\frac{5}{M+6}}. \tag{85}$$

Этим лемма доказана.

Примечание. Если $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ — вещественные решения системы (66) такие, что преобразование $T = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ приводит форму (63) к форме $h(x, y) = x^4 + Nx^3y - x^2y^2 - Nxy^3 + y^4$, где $0 \leqq N < 2$, то система $(\beta, \alpha, \delta, \gamma)$ также является, как видно, решением (66), а преобразование $\overline{T} = \begin{pmatrix} \beta, \alpha \\ \delta, \gamma \end{pmatrix}$ приводит форму (63) к форме $\overline{h}(x, y) = x^4 - Nx^3y - x^2y^2 + Nxy^3 + y^4$, $0 \leqq N < 2$, которая является эквивалентной форме $h(x, y)$. Дальнейших вещественных решений у системы (66) не имеется.

Предположим, что существовало бы дальнейшее вещественное решение системы (66) $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$. Тогда преобразование $T' = \begin{pmatrix} \alpha', \beta' \\ \gamma', \delta' \end{pmatrix}$ приводит (63) к виду

$$h'(x, y) = x^4 + N'x^3y - x^2y^2 - N'xy^3 + y^4$$

где или $N' \leqq -2$, или $N' \geqq 2$.

Но здесь форма $h'(x, y)$ индефинитна, что противоречит тому обстоятельству, что T' вещественное преобразование. Отсюда вытекает на основании аналогичных соображений, как в § 4, эквивалентность теоремы 2 и 4 или-же теоремы 4 и 5.

7. Форма $h(x, y)$; леммы.

Лемма 5. *Пусть*

$$h(x, y) = x^4 + Nx^3y - x^2y^2 - Nxy^3 + y^4, \quad 0 \leqq N < 2. \tag{86}$$

Тогда все вещественные преобразования, которые эту форму приводят к форме $\overline{h}(x, y)$ такой, что

$$\overline{h}(1, 0) = \overline{h}(0, 1) = \overline{h}(1, 1) = 1 \tag{87}$$

сведутся к следующим

1. *группа преобразований $\mathfrak{G}_1 = T^{-1}\mathfrak{G}_0 T$, где T преобразование по лемме (4) (приводящее $g(x, y)$ к $h(x, y)$); $\mathfrak{G}_0$ группа вещественных автоморфизмов $g(x, y)$, определенная в лемме 2. Группа $\mathfrak{G}_1$ является группой всех вещественных автоморфизмов формы $h(x, y)$;*

2. *комплекс преобразований* $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{G}_1 \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$;

3. *комплекс преобразований* $\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{G}_1 \begin{pmatrix} 1, -1 \\ 0, -1 \end{pmatrix}$;

4. *комплекс преобразований* $\mathfrak{K}_3 = \mathfrak{K}_2 \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{G}_1 \begin{pmatrix} -1, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$;

5. *комплекс преобразований* $\overline{\mathfrak{K}_2} = \mathfrak{G}_1 \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}$;

6. *комплекс преобразований* $\overline{\mathfrak{K}_3} = \overline{\mathfrak{K}_2} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{G}_1 \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. В силу условий (87) форма $h(x, y)$ имеет вид

$$\overline{h}(x, y) = x^4 + Ax^3y + Bx^2y^2 + Cxy^3 + y^4, \tag{88}$$

где

$$A + B + C = -1. \tag{89}$$

Равенство инвариантов (ввиду (89)) приводит к уравнениям

$$B^2 + 3A + 3A^2 + 3AB = 1 + 3N^2 \tag{90}$$

$$2B^3 + 9A^2B + 9AB^2 + 63AB + 54A^2 + 27B^2 + 54A - 18B = \\ = 43 + 45N^2. \tag{91}$$

Исключим из (90), (91) N и получим

$$(B + 1)(9A^2 + 9(B + 1)A + 2B^2 + 10B - 28) = 0. \tag{92}$$

Итак, во первых, (по (92), (89), (90))

$$B = -1, \ A = N, \quad C = -N \tag{93}$$

$$B = -1 \quad A = -N \quad C = N \tag{94}$$

форма $\overline{h}(x, y)$ с коэффициентами (93) является автоморфией формы $h(x, y)$. Этим доказан пункт 1. Форма $\overline{h}(x, y)$ с коэффициентами (94) является формой $h(x, y)$, преобразованной с помощью $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$. Этим доказан пункт 2.

Во вторых, из (92) вытекает

$$9A^2 + 9(B + 1)A + 2B^2 + 10B - 28 = 0,$$

следовательно,

$$3A = -B - 7, \quad \text{или}$$

$$3A = -2B + 4. \tag{95}$$

Уравнения (89), (90), (95) дают следующие возможные значения для коэффициентов формы $\overline{h}(x, y)$:

$$A = -4 - N,\quad B = 5 + 3N,\quad C = -2 - 2N \tag{96}$$
$$A = -4 + N,\quad B = 5 - 3N,\quad C = -2 + 2N \tag{97}$$
$$A = -2 - 2N,\quad B = 5 + 3N,\quad C = -4 - N \tag{98}$$
$$A = -2 + 2N,\quad B = 5 - 3N,\quad C = -4 + N. \tag{99}$$

Легко установить, что $h(x, y)$ перейдет в форму $\bar{h}(x, y)$ с коэффициентами (96) преобразованием $\begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & -1\end{pmatrix}$ и дальнейшим преобразованием $\begin{pmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$ мы получим форму $\bar{h}(x, y)$ с коэффициентами (98). Далее легко установить, что форму $\bar{h}(x, y)$ с коэффициентами (97) мы получим из $h(x, y)$ преобразованием $\begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & -1\end{pmatrix}$ и дальнейшим преобразованием $\begin{pmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$ этой формы мы получим форму $\bar{h}(x, y)$ с коэффициентами (99). Этим доказана лемма в остальных 4 пунктах.

Лемма 6. *Пусть $h(x, y)$ есть форма* (86). *Тогда вещественные преобразования, приводящие эту форму к форме $\bar{h}(x, y)$ такой, что*
$$\bar{h}(1, 0) = \bar{h}(1, 1) = \bar{h}(-1, 1) = 1 \tag{100}$$
суть преобразования, перечисленные в пункте 1. *и* 2. *леммы* 5.

Доказательство. В силу условий (100) преобразованная форма $\bar{h}(x, y)$ должна иметь вид
$$\bar{h}(x, y) = x^4 + Ax^3y + Bx^2y^2 - Axy^3 - By^4. \tag{101}$$
Равенство инвариантов форм (86) и (101) дает
$$3A^2 + B^2 - 12B = 13 + 3N^2 \tag{102}$$
$$2B^3 - 18A^2B + 72B^2 + 27A^2 = 70 + 45N^2 \tag{103}$$
Исключая N из этих уравнений получим
$$(B + 1)(2B^2 + 55B - 18A^2 + 125) = 0. \tag{104}$$
Отсюда сначала (и из (102))
$$B = -1,\ A = \pm N. \tag{105}$$
Формы (101) с этими коэффициентами являются формами (88) предыдущей леммы со значениями (93), (94). К этим формам можно привести форму $h(x, y)$ только преобразованиями $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{K}_1$, упомянутыми в предыдущей лемме. Если мы теперь до-

кажем, что форму (101), для коэффициентов которой, согласно (104), справедливо соотношение

$$2B^2 + 55B - 18A^2 + 125 = 0, \tag{106}$$

нельзя получить из формы $h(x, y)$ вещественным преобразованием, то этим будет доказана лемма.

Так как каждым вещественным преобразованием положительной формы мы получим снова положительную форму, то доказательство будет дано, если мы докажем, что из справедливости (106) следует индефинитность формы $\overline{h}(x, y)$.

Итак, предположим, что существует вещественное преобразование, которое форму (86) приводит к форме (101) такой, что имеет место уравнение (106); тогда определитель формы $\overline{h}(x, y)$ положителен. Рассмотрим теперь следующие числа (см. замечание § 2, (5))

$$3a_1^2 - 8a_2 = 3A^2 - 8B \tag{107}$$

$$(3a_1^2 - 8a_2)^2 - 16I = (3A^2 - 8B)^2 - 16(3A^2 + B^2 - 12) \tag{108}$$

Число B, удовлетворяющее (106) и (102) является корнем уравнения

$$8B^2 - 17B + 47 - 18N^2 = 0$$

откуда

$$B = \frac{17 \pm \sqrt{576N^2 - 1215}}{16}. \tag{109}$$

Случай $B \geqq 0$ приводит сразу же к противоречию, потому что форма (101), очевидно, индефинитна. Дальнейшее возможное значение для B будет, согласно (109), в промежутке $(-1, 0)$, $(0 \leqq N < 2)$. Но очевидно

$$3a_1^2 - 8a_2 = 3A^2 - 8B > 0 \tag{110}$$

а ввиду (106), имеем далее

$$(3A^2 - 8B)^2 = \left(\frac{125 + 7B + 2B^2}{6}\right)^2 > 400$$

и в силу (102), наконец,

$$16I = 16(3A^2 + B^2 - 12B) = 13 + 3N^2$$

и, следовательно, для $0 \leqq N < 2$

$$16I < 400.$$

Итак, число

$$(3a_1^2 - 8a_2)^2 - 16I > 0. \tag{111}$$

Это также противоречит предположению, ибо формы с положительным определителем индефинитны, если имеют место (110), (111).

8. Звездные тела.

Пусть $\Delta > 0$. Выберем в плоскости некоторую (прямоугольную) систему координат. Кроме начала O выберем точку $P = (\alpha, \gamma)$. Составим теперь эквидистантную систему прямых параллельных прямой $\overline{OP}$ так, чтобы расстояние двух соседних параллельных прямых было $\frac{\Delta}{\overline{OP}}$. Параллельные прямые, которые находятся в соседстве прямой $\overline{OP}$ мы называем параллельными прямыми базиса к точке P. На одной параллельной прямой базиса мы выберем точку $Q = (\beta, \delta)$. Если мы теперь составим вторую систему, эквидистантную системе прямых паралелльных прямой OQ так, чтобы расстояние двух соседних параллельных линий было $\frac{\Delta}{\overline{OQ}}$, то точки пересечения обеих систем паралелльных прямых будут точками $R = (x, y)$ решетки Λ с определителем Δ. Точки P, Q являются базисом решетки Λ.

Если мы теперь сдвинем точку Q (при постоянной точке P) с помощью вектора $\mathfrak{a} = \lambda\overrightarrow{OP}$ в точку Q_1, тогда точки P, Q_1 составят базис новой решетки с определителем Δ, которую мы обозначим $\Lambda_{P,\mathfrak{a}}$ и назовем сдвинутой решеткой.

Пусть теперь $\mathfrak{K}$ — замкнутое множество точек (x, y). Мы будем говорить, что точка $S \in \mathfrak{K}$ является обыкновенной точкой с правой — или-же с левой стороны множества $\mathfrak{K}$ по вектору $\mathfrak{a}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ вектор $\varepsilon\mathfrak{a}_S$ — или-же $-\varepsilon\mathfrak{a}_S$ —[5]) содержит дальнейшую точку $\neq S$, принадлежащую множеству $\mathfrak{K}$.

Звёздным телом (star domain) мы будем называть множество точек $\mathfrak{K}$ в плоскости (x, y), которое имеет следующие свойства:

1. $\mathfrak{K}$ — ограниченное и замкнутое множество.

2. $\mathfrak{K}$ — симметрично по отношеннию к началу O (т. е. $P = (x, y) \in \mathfrak{K} \Rightarrow -P = (-x, -y) \in \mathfrak{K}$).

3. Каждая прямая, проходящая через начало, пересекает границу множества $\mathfrak{K}$ только в двух точках P и $-P$.

4. Начало является внутренней точкой $\mathfrak{K}$.

Докажем теперь лемму:

Лемма 7. *Пусть $\Delta > 0$; $\mathfrak{K}$ звездное тело в плоскости (x, y) имеющее свойство: каждая решетка с определителем Δ, которая*

---

[5]) $\varepsilon\mathfrak{a}_S$ обозначает вектор, начальная точка которого S, конечная S_1 такая, что $\overline{SS_1} = |\varepsilon\mathfrak{a}|$ и $\overrightarrow{SS_1} = \varepsilon\mathfrak{a}$.

имеет точку (x, y) *на границе* $\mathfrak{K}$, *имеет еще одну точку решетки отличную от начала и от* $(-x, -y)$, *и принадлежащую к* $\mathfrak{K}$.

Тогда каждая решетка с определителем Δ *имеет в* $\mathfrak{K}$ *по крайней мере одну точку решетки отличную от начала.*

Доказательство. Предположим, что существует решетка Λ с определителем Δ, с тем свойством, что не имеется ни одной точки $\neq O$, которая принадлежала бы к $\mathfrak{K}$. Выберем одну из ее примитивных точек P. Паралелльные прямые базиса для точки P наверное пересекут тело $\mathfrak{K}$, ибо решетка с определителем Δ и точкой P_0, выбранной в точке пересечения границы $\mathfrak{K}$ с $\overrightarrow{OP}$, имеет по предположению еще одну точку Q_0 (а также $-Q_0$), принадлежащую к $\mathfrak{K}$. Так как $\overline{OP}_0 < \overline{OP}$, параллельная прямая базиса для точки P лежит между точкой Q_0 (соотв. $-Q_0$) и прямой OP. Итак базисная прямая для точки P пересечет отрезок $\overline{(-Q_0)\,Q_0}$ во внутренней точке $\mathfrak{K}$.

Итак, вследствие того, что $\mathfrak{K}$ — ограниченное и замкнутое множество, существует сдвинутая по вектору $\mathfrak{a} = \lambda\overrightarrow{OP}$, $(0 < \lambda < 1)$, решетка $\Lambda_{P,\mathfrak{a}} = \Lambda_1$, которая имеет следующие свойства:

1. Ни одна из ее точек $\neq O$ не является внутренней точкой $\mathfrak{K}$.

2. Λ_1 имеет по крайней мере одну точку на границе $\mathfrak{K}$. Число точек решетки Λ_1 на границе $\mathfrak{K}$ конечно.

3. Ни одна из ее точек лежащих над прямой OP и принадлежащих к $\mathfrak{K}$, не является обыкновенной точкой с левой стороны множества $\mathfrak{K}$ по вектору $\mathfrak{a}$[6]).

4. Существует точка решетки Q_1, лежащая на границе $\mathfrak{K}$ над прямой OP такая, что, если φ — угол, который является пересечением отрицательной полуплоскости прямой OQ_1 (то есть той полуплоскости, к которой направлен вектор $-\mathfrak{a}$) с той полуплоскостью прямой OP, в которой лежит точка Q_1, то в φ не лежит ни одна дальнейшая точка решетки Λ_1, лежащая в $\mathfrak{K}$.

Так как Λ_1 имеет точку на границе Р, на основании предположения леммы должно существовать конечное число (по крайнеймере одна) точек решетки, принадлежащих к $\mathfrak{K}$ и лежащих в положительной полуплоскости прямой OQ_1 (то есть в той, к которой направлен вектор $\mathfrak{a}$). Обозначим эти точки $S_1, S_2, \ldots, \ldots, S_k$ $(1 \leq k)$; все они в силу 1 находятся на границе $\mathfrak{K}$. Но все эти точки не могут находиться над прямой OP. Между

---

[6]) Будем обозначать в дальнейшем точки той полуплоскости, определенной OP, в которой точки решетки Λ сдвинулись по направлению к вектору $\mathfrak{a}$ выражением: они лежат над прямой OP.

точками $S_1, S_2, \ldots, S_k$ должна существовать по крайней мере одна точка, которую мы обозначим S_i, и которая является обыкновенной точкой с права множества $\mathfrak{K}$ по вектору $\overrightarrow{OQ_1}$, (иначе мы могли бы построить сдвинутую решетку по вектору $\overline{OQ}_1$ у которой есть Q_1 на границе $\mathfrak{K}$ и нет дальнейших точек $\neq O$, $-Q_1$ в теле $\mathfrak{K}$, что противоречит условиям леммы.

Для каждого $\varepsilon > 0$ в множестве $\mathfrak{K}$ существует точка A такая, что $\overrightarrow{S_iA} = \varepsilon_1\overrightarrow{OQ_1}$, где $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Так как точка O лежит в отрицательной части полуплоскости прямой S_iA по вектору $\mathfrak{a}$, вектор $\overrightarrow{OA}$ пересечет вектор $-\mathfrak{a}_{S_i}$ в точке B, так что $\overrightarrow{S_iB} = -\lambda_\varepsilon\varepsilon\mathfrak{a}$, где $0 < \lambda_\varepsilon <$ konst. Итак предположение, что все точки $S_1, S_2, \ldots, S_k$ лежали бы над прямой OP, ведет к противоречию с тем, что все эти точки не были бы обыкновенными точками слева множества $\mathfrak{K}$ по вектору $\mathfrak{a}$.

Итак в положительной полуплоскости прямой OQ_1 должна существовать по крайней мере одна точка S под прямой OP.

Но тут точка $-S$ решетки лежит в отрицательной полуплоскости прямой OQ_1 и над OP и является граничной точкой $\mathfrak{K}$, что противоречит определению точки Q_1.

9. Области $x^4 + Mx^2y^2 + y^4 \leqq 1$.

Рассмотрим множество точек (x, y), определенное неравенством

$$x^4 + Mx^2y^2 + y^4 \leqq 1; \; M \geqq 2. \tag{1}$$

Это множетсво обозначим $\mathfrak{K}_M$. $\mathfrak{K}_M$ повидимому замкнуто и ограничено. Его границу

$$x^4 + Mx^2y^2 + y^4 = 1 \tag{2}$$

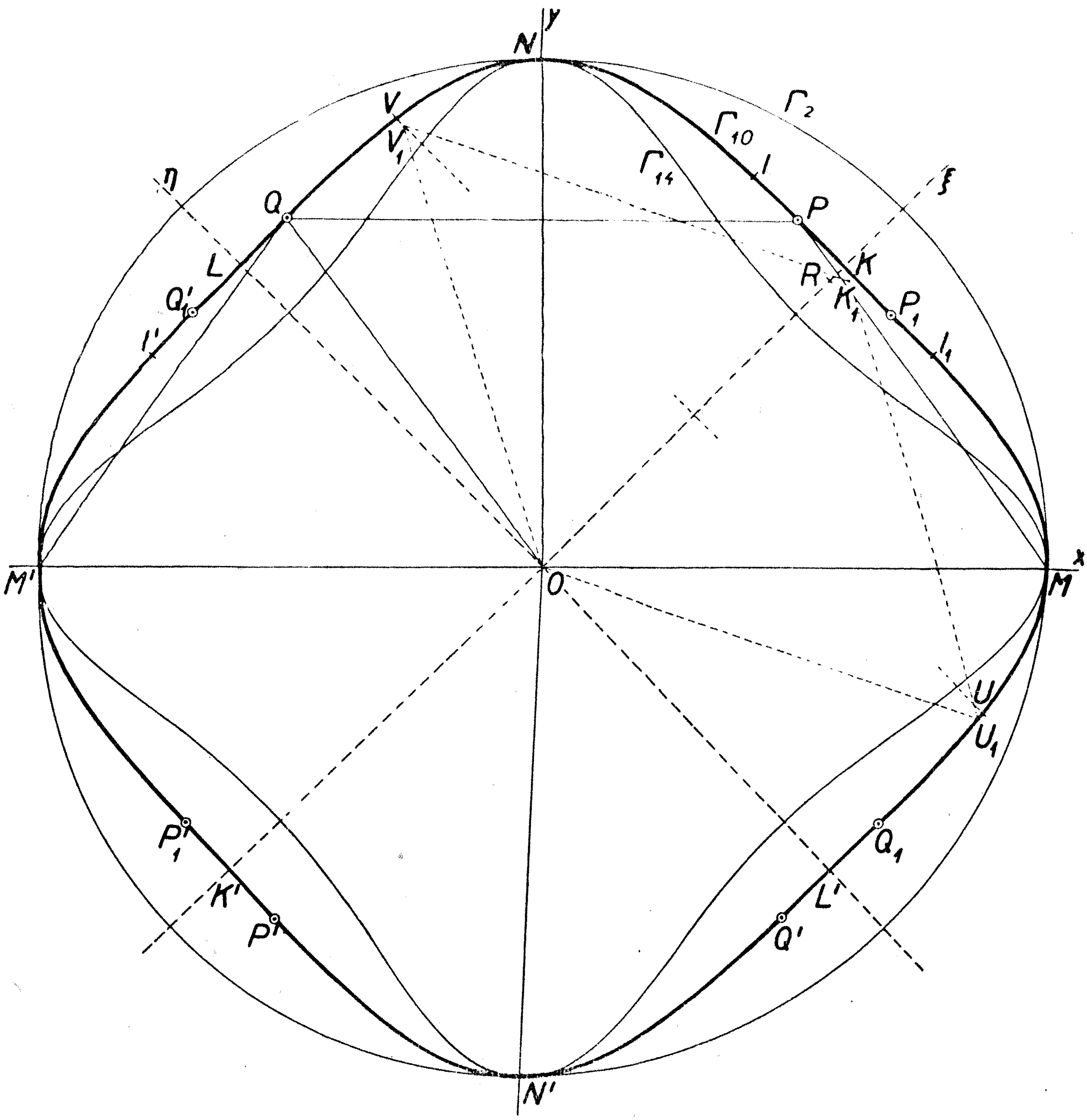
будем обозначать Γ_M. Точки $M = (1, 0)$ $M' = (-1, 0)$, $N = (0, 1)$, $N' = (0, -1)$ лежат, очевидно, на гранкце Γ_M. $\mathfrak{K}_M$ симметрично по отношению обеим осям координат и к прямым $y = x$, $y = -x$, а также относительно начала O. Начало является внутренней точкой $\mathfrak{K}_M$. Далее ясно, что каждый радиус-вектор, который исходит из начала, пересечет Γ_M как раз в одной точке. Итак, $\mathfrak{K}_M$ звездное тело.

В полярных координатах Γ_M дано

$$\varrho = \sqrt[4]{\left(1 + \frac{M-2}{8} - \frac{M-2}{8}\cos 4\varphi\right)^{-1}} \tag{3}$$

Отсюда непосредственно видно, для $M > 2$, что точки M, N, M', N' имеют максимальную величину радиус-вектора, точки

K, K', L, L' в которых Γ_M пересекает прямые $y = x$, $y = -x$, имеют минимальную величину радиус-вектора. Итак, если точка P пробегает (в положительном направлении) дугу Γ_M от



Фиг. 1. Область $x^4 + Mx^2y^2 + y^4 \leqq 1$, $2 \leqq M \leqq 14$.

точки M до K, то радиус-вектор точки P уменьшается с максимальной величины $= 1$ на минимум $= \overline{OK} = \sqrt[4]{\left(\frac{M+2}{4}\right)^{-1}}$. Итак $\mathfrak{K}_{M_1} \subset \mathfrak{K}_{M_2} \subset \mathfrak{K}_2$, если $M_1 > M_2 \geqq 2$.

Прямые $x = \pm 1$, соотв. $y = \pm 1$ являются касательными к Γ_M в точках M, M', соотв. N, N'. Если $-1 < x_0 < 1$, соотв. $-1 < y_0 < 1$, то легко установить, что прямая $x = x_0$, соотв.

$y = y_0$ пересекает границу Γ_M как раз в двух точках симметричных относительно оси x, соотв. y.

Преобразованием координат к прямым $y = x$, $y = -x$, получим уравнение для Γ_M

$$\xi^4 + \mu\xi^2\eta^2 + \eta^4 = \varkappa^4 \tag{4}$$

где

$$\mu = \frac{12 - 2M}{2 + M}, \quad \varkappa = \sqrt[4]{\frac{4}{2 + M}}.$$

Легко и здесь установить правильность утверждения: каждая прямая $\xi = \xi_0$, соотв. $\eta = \eta_0$, если $-\varkappa < \xi_0 < \varkappa$, соотв. $-\varkappa < \eta_0 < \varkappa$, пересекает Γ_M как раз в двух точках (симметричных относительно оси ξ, соотв. η). Прямая $\xi = \pm\varkappa$ (соотв. $\eta = \pm\varkappa$) касается Γ_M (в точке K, K', соотв. L, L') и если $M > 6$, то она пересекает Γ_M еще в двух точках с координатами (по отношению к осям ξ, η) $(\pm\varkappa, \pm\varkappa\sqrt{\mu})$, соотв. $(\pm\varkappa\sqrt{\mu}, \pm\varkappa)$. Если $M = 14$, тогда эти точки пересечения являются точками M, M', N, N'.

Далее будем рассматривать только области $2 \leq M \leq 14$.

Свойство (A). Прямая $x = \frac{1}{2}$ пересечет Γ_M в точке $P = (\frac{1}{2}, \Delta)$ (и в точке Q', симметричной относительно оси x). Ордината точки P дана уравнением

$$\Delta^4 + \frac{M}{4}\Delta^2 - \frac{15}{16} = 0 \tag{5}$$

откуда

$$\Delta = \sqrt{\frac{-M + \sqrt{M^2 + 60}}{8}} \tag{6}$$

что является площадью параллелограмма с вершинами O, M, P, Q (Q — точка, симметричная к точке Q' относительно начала).

Свойство (B). Внутренние точки отрезка с крайними точками M и $K_1 = (x, y)$, которые лежат на дуге $\widehat{MKP}$ (так как $\frac{1}{2} \leq x < 1$, $y > 0$) являются внутренними точками $\mathfrak{K}_M$.

Доказательство. Так как прямая $x = 1$ является касательной к Γ_M и так как — из-за симметрии — точка M не может быть точкой перегиба Γ_M, то внутренние точки каждого отрезка $\overline{K_1M}$, где K_1 — точка в области точки M, являются внутренними точками $\mathfrak{K}_M$. Следовательно, достаточно доказать, что

$$p(x) = \frac{y}{1 - x} = \frac{\sqrt{-Mx^2 + \sqrt{(M^2 - 4)x^4 + 4}}}{\sqrt{2}(1 - x)}$$

есть возрастающая функция в интервале

$\frac{1}{2} \leqq x < 1$, так что производная

$$(p^2(x))' = \frac{(M^2-4)\,x^3 + 4 - Mx\sqrt{(M^2-4)\,x^4+4}}{(1-x)^3\sqrt{(M^2-4)\,x^4+4}}$$

будет в этом интервале неотрицательной. Итак, достаточно доказать, что

$$(M^2-4)\,x^3 + 4 \geqq Mx\sqrt{(M^2-4)\,x^4+4} > 0,$$

или

$$\Phi(x, M) = -(M^2-4)\,x^6 + 2(M^2-4)\,x^3 - M^2x^2 + 4 \geqq 0. \qquad (7)$$

Имеем

$$\Phi(x, M) = (1-x)[(M^2-4)\,(x^5+x^4+x^3-x^2) + 4x + 4] = \\ = (1-x)\,\Phi_1(x, M).$$

Итак $\Phi_1(\frac{1}{2}, M) = \dfrac{196 - M^2}{32} \geqq 0$, если $14 \geqq M$, а $\Phi_1(x, M)$ — возрастающая функция в интервале $\frac{1}{2} \leqq x$, ибо

$$\Phi_1'(x, M) = (M^2-4)\,(5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x) + 4 \geqq \\ \geqq (M^2-4)\,\tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{8} + 1 + \tfrac{3}{2} - 2) + 4 > 0.$$

Этим доказано свойство (B).

Свойство (C). Имеем

$$\frac{\Delta}{\varkappa} \leqq \varkappa,$$

где знак равенства берем лишь для $M = 14$.

Надо доказать

$$\Delta^2 = \frac{-M + \sqrt{M^2+60}}{8} \leqq \frac{4}{2+M} = \varkappa^4$$

или

$$\sqrt{M^2+60} \leqq \frac{32}{2+M} + M = \frac{32 + 2M + M^2}{2+M},$$

или

$$(M^2+60)\,(M+2)^2 \leqq (32 + 2M + M^2)^2$$

или-же

$$M^4 + 4M^3 + 64M^2 + 240M + 240 \leqq \\ \leqq M^4 + 4M^3 + 68M^2 + 128M + 1024,$$

Так как
$$4M^2 - 112M + 784 = 4(M - 14)^2 \geqq 0,$$
то этим доказано свойство (C).

Свойство (D). Пусть S, T — точки пересечения прямой $\eta = \frac{\Delta}{\varkappa}$ с Γ_M. Тогда
$$\overline{ST} \geqq \overline{OK} = \varkappa,$$
где знак равенства имеет место только в случае, если $M = 2$.

Точка $\xi = 0$, $\eta = \frac{\Delta}{\varkappa}$ является внутренней точкой $\mathfrak{K}_M$ если $2 \leqq M < 14$ и граничной точкой $\mathfrak{K}_{14}$. Итак, достаточно доказать, что точка $\xi = \frac{1}{2}\varkappa$, $\eta = \frac{\Delta}{\varkappa}$ является внутренней точкой $\mathfrak{K}_M$ если $2 < M$ и граничной точкой $\mathfrak{K}_2$, или-же правильность неравенства
$$\frac{\varkappa^4}{16} + \mu \frac{\varkappa^2\Delta^2}{4\varkappa^2} + \frac{\Delta^4}{\varkappa^4} \leqq \varkappa^4, \tag{10}$$
где знак равенства имеет место, если $M = 2$.

Ввиду (4), (5) надо доказать
$$\frac{1}{(2+M)^2}((2+M)^2 \Delta^4 + (12 - 2M)\Delta^2 - 15) \leqq 0$$
или
$$(2+M)^2 \Delta^4 + (12 - 2M)\Delta^2 - 15 \leqq 0 = 16\Delta^4 + 4M\Delta^2 - 15$$
или-же
$$(M-2)\Delta^2((M+6)\Delta^2 - 6) \leqq 0.$$
Для $M = 2$ имеет место знак равенства. Для $M > 2$ справедливо
$$\Delta^2 = \frac{-M + \sqrt{M^2+60}}{8} < \frac{6}{2+M}$$
так как
$$\sqrt{M^2+60} < \frac{48}{6+M} + M = \frac{48 + 6M + M^2}{6+M}$$
ибо
$$(M^2+60)(M+6)^2 = M^4 + 12M^3 + 96M^2 + 720M + 2160 <$$
$$< (M^2 + 6M + 48)^2 = M^4 + 12M^3 + 96M^2 + 36M^2 + 576M +$$
$$+ 2304,$$

Это равенство справедливо, ибо $36M^2 - 144M + 144 = 36(M - 2)^2 > 0$, для $M > 2$.

Свойство (E). Пусть $2 \leqq M \leqq 14$. Пусть M^* — точка $(2x, 0), 0 < 2x \leqq 1$, $\overline{Q^*P^*}$ — хорда Γ_M длины $\overline{OM^*} = 2x$ и параллельная прамой OM^* (над осью x), $\varDelta^*(2x)$ площадь параллелограмма с вершинами O, M^*, P^*, Q^*. Тогда расстояние хорды $\overline{Q^*P^*}$ от начала является убывающей, а $\varDelta^*(2x)$ возрастающей функцией абсциссы точки M^* с абсолютным максимумом $\varDelta^* = \varDelta$ в точке $2x = 1$.

Первую часть утверждения можно установить непосредственно. Далее

$$\varDelta^*(2x) = 2xy = 2\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2)^2}{M-2}} = 2\sqrt{\frac{1-\varrho^{*4}}{M-2}},$$

где ϱ^* является радиус-вектором точки M^*.

Если $2x$ возрастает от 0 до 1, то ϱ^* убывает от максимального значения 1 до минимального $= \varrho_P$ (ϱ_P радиус-вектор точки P). Этим свойство (D) доказано.

Замечание. Каждый параллелограмм с вершинами O, M^*, P^*, Q^* принадлежащими к $\mathfrak{K}_M$ и со стороной на оси x $\overline{OM^*} < \overline{OM}$ имеет площадь $< \varDelta$.

Свойство (F). Пусть $R = (x = \sqrt{\tfrac{1}{2}\varDelta}, y = \sqrt{\tfrac{1}{2}\varDelta})$, $P = (x = \tfrac{1}{2}, y = \varDelta)$. Точки отрезка $\overline{RP}$ являются, за исключением точки P, внутренними точками $\mathfrak{K}_M$.

Из свойства (C) вытекает, что R является внутренней точкой $\mathfrak{K}_M$. Уравнение прямой RP имеет вид

$$y = -\sqrt{2\varDelta}(x - \tfrac{1}{2}) + \varDelta. \tag{12}$$

Прамая

$$y = k(x - \tfrac{1}{2}) \tag{13}$$

пересекает (12) в точке

$$x = \tfrac{1}{2} + \frac{\varDelta}{k + \sqrt{2\varDelta}}, \quad y = \frac{k\varDelta}{k + \sqrt{2\varDelta}}. \tag{14}$$

Эта точка является точкой отрезка $\overline{RP}$ (за исключением точки P) если

$$0 < \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}\varDelta}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}\varDelta} - \tfrac{1}{2}} = k_0 < k. \tag{15}$$

Надо доказать, что точка (14) (с условием (15)) удовлетворяет неравенству

$$\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\Delta}{k+\sqrt{2\Delta}}\right)^4+M\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\Delta}{k+\sqrt{2\Delta}}\right)^2\left(\frac{k\Delta}{k+\sqrt{2\Delta}}\right)^2+\left(\frac{k\Delta}{k+\sqrt{2\Delta}}\right)^4<1,$$

или

$$\begin{gathered}2k^3 2((2\Delta+\sqrt{2\Delta})+2M\Delta^2(2\Delta+\sqrt{2\Delta})-16\sqrt{2\Delta})+\\+k^2(6(2\Delta+\sqrt{2\Delta})^2+4M\Delta^2(2\Delta+\sqrt{2\Delta})^2-192\Delta)+\\+4k((2\Delta+\sqrt{2\Delta})^3-32\Delta\sqrt{2\Delta})<64\Delta^2-(2\Delta+\sqrt{2\Delta})^4. \quad (16)\end{gathered}$$

Рассмотрим знаки коэффициентов при различных степенях k в (16).

Так как $\frac{M\Delta^2}{4}=\frac{15}{16}-\Delta^4$ и $1<\sqrt{2\Delta}=1+h$, $h>0$; имеем

$$\begin{gathered}2[2\Delta+\sqrt{2\Delta}+2M\Delta^2(2\Delta+\sqrt{2\Delta})-16\sqrt{2\Delta}]=\\=\sqrt{2\Delta}[(2+4M\Delta^2)(1+\sqrt{2\Delta})-32]=\\=\sqrt{2\Delta}[17+17(1+h)-(1+h)^8-(1+h)^9-32]<\\<\sqrt{2\Delta}(17+17+17h-1-8h-1-9h-32)=0.\end{gathered}$$

Итак, коэффициент при $2k^3$ является отрицательным.

Далее

$$\begin{gathered}(6+4M\Delta^2)(1+\sqrt{2\Delta})^2=21+42(1+h)+21(1+h)^2-\\-(1+h)^8-2(1+h)^9-(1+h)^{10}<80+48h<96\end{gathered}$$

ибо $1+h=\sqrt{2\Delta}<\sqrt[4]{3}$, отсюда $h<0{,}32$. Итак, коэффициент при k^2 является отрицательным, ибо

$$\begin{gathered}6(2\Delta+\sqrt{2\Delta})^2+4M\Delta^2(2\Delta+\sqrt{2\Delta})^2-192\Delta=\\=2\Delta((6+4M\Delta^2)(1+\sqrt{2\Delta})^2-96).\end{gathered}$$

Наконец

$$\begin{gathered}(2\Delta)^{\frac{3}{2}}[(1+\sqrt{2\Delta})^3-16]<(2\Delta)^{\frac{3}{2}}[(1+\sqrt[4]{3})^3-16]<\\<(2\Delta)^{\frac{3}{2}}(15{,}7-16)<0.\end{gathered}$$

Итак, коэффициент при $4k$ является отрицательным.

Итак, левая сторона (16) является убывающей функцией переменной $k>0$. Так как это неравенство (с знаком $<$) справедливо для $k=k_0$ (потому что R — внутренняя точка $\mathfrak{K}_M$), то этим доказано свойство (F).

Свойство (G). Γ_M — будет выпуклой дугой, если $2\leqq M\leqq\leqq 6$. Если $M>6$, то дуга $\widehat{IN}$ (над осью x) выпуклая. Конечная точка I является точкой пересечения прямой $\xi = \varkappa$ с Γ_M и $N = (0, 1)$.

Для точек перегиба кривой

$$\xi^4 + \mu\xi^2\eta^2 + \eta^4 = \varkappa^4$$

получим легко следующее условие

$$4\mu(\xi^8 + \eta^8) + (24 + 2\mu^2)(\xi^6\eta^2 + \xi^2\eta^6) + \\ + (32\mu - 2\mu^3)\xi^4\eta^4 = 0. \tag{17}$$

Если $2 \leqq M \leqq 6$, то $0 < \mu \leqq 2$, и все коэффициенты в (17) положительны. Γ_M не имеет точек перегиба. Для $M = 6$, $\mu = 0$ и (17) даст $\xi = 0$ $\eta = \pm 1$; $\xi = \pm 1$, $\eta = 0$. Эти решения не могут быть точками перегиба в силу симметрии Γ_M. Для $M > 6$; $\mu < 0$; положим

$$\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2 = w > 0;$$

тогда (17) перейдет в

$$4\mu w^2 + 2(12 + \mu^2)w + 24\mu - 2\mu^3 = 0,$$

и мы получим

$$w_1 = -\mu, \; w_2 = \frac{-12 + \mu^2}{2\mu}.$$

Так как

$$w = \frac{\xi^2}{\eta^2} + \frac{\eta^2}{\xi^2} = \frac{\varkappa^4}{\xi^2\eta^2} - \mu$$

допустимо только значение $w = w_2$. Итак, координаты точек перегиба должны удовлетворять уравнению

$$\xi^2\eta^2 = \frac{2\mu\varkappa^4}{-12 + 3\mu^2} \tag{18}$$

(Для $6 < M \leqq 14$, $\mu = \dfrac{12 - 2M}{2 + M} > -1$).

Прямая $\xi = \varkappa$ пересекает (если $\mu < 0$) Γ_M (кроме точки касания $\xi = \varkappa$, $\eta = 0$) еще в следующих точках: $I = (\xi_0 = \varkappa$, $\eta = \varkappa\sqrt{-\mu})$ и в I' симметричной с I относительно оси ξ. Так как

$$\xi^2\eta^2 = \frac{-\varkappa^4 + \varrho^4}{-\mu + 2},$$

для точек (ξ, η), которые находятся на дуге $\widehat{IN}$ $(0 < \xi,\ 0 < \eta)$, имеет место неравенство

$$\xi^2\eta^2 \geqq \xi_0^2\eta_0^2 = -\mu\varkappa^4 > \frac{2\mu\varkappa^4}{-12+3\mu^2},$$

и на дуге $\widehat{IN}$ нет точек перегиба.

10. Доказательство теоремы 3.

Согласно лемме 9 мы можем теперь теорему 3 сформулировать так:

Теорема 3а. *Пусть M вещественное число, $2 \leqq M \leqq 14$. Λ — решетка с определителем $\Delta = \sqrt{\dfrac{-M+\sqrt{M^2+60}}{8}}$, точка (x, y) которой лежит на границе звездного тела $\mathfrak{K}_M$, определенного неравенством*

$$x^4 + Mx^2y^2 + y^4 \leqq 1.$$

Тогда существует дальнейшая точка решетки Λ, отличная от начала O и от $(-x, -y)$ и принадлежащая к телу $\mathfrak{K}_M$.

Если $2 < M < 14$, то единственными решетками, не имеющими кроме начала других точек внутри $\mathfrak{K}_M$, будут

$$\Lambda_1 = \Lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\\ \Delta, & -\Delta\end{pmatrix},\quad \Lambda_2 = \Lambda\begin{pmatrix}\Delta, & -\Delta\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

Если $M = 2$, то единственными решетками, не имеющими кроме начала других точек внутри $\mathfrak{K}_2$, будут

$$\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha, & \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha\\ \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha, & \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha\end{pmatrix}$$

где α — любое число, $0 \leqq \alpha < 2\pi$.

Если $M = 14$, то единственной решеткой, не имеющей кроме начала других точек внутри $\mathfrak{K}_M$, будет

$$\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Доказательство.

1. Случай $M = 2$ тривиальный. Γ_2 окружность $x^2 + y^2 = 1$. Решетка $\Lambda_0 = \Lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}$ имеет следующие точки

$$x = \tfrac{1}{2}(X + Y)$$
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}(X - Y)$$

в $\mathfrak{K}_2$, для которых целые числа X, Y удовлетворяют неравенству

$$0 \leqq X^2 + Y^2 + (X - Y)^2 \leqq 2.$$

Это неравенство справедливо только для следующих целых чисел (причем для всех этих точек, за исключением $(0, 0)$, имеет место знак равенства)

$$\begin{matrix} X = 0, & X = 0, & X = \pm 1, & X = 1, & X = -1 \\ Y = 0, & Y = \pm 1, & Y = 0, & Y = 1, & Y = -1. \end{matrix}$$

Последних шесть точек решетки являются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в Γ_2. Решетки

$$\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha, & \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha \\ \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha, & \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

получатся поворотом около начала решетки Λ_0 на угол α.

2. Случай $M = 14$ вытекает из теоремы Минковского.

В этом случае $\Delta = \frac{1}{2}$. Среди точек решетки $\Lambda\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, то есть среди точек

$$x = \tfrac{1}{2}(X + Y)$$
$$y = \tfrac{1}{2}(X - Y), \ (X, Y \text{ целые}),$$

находятся в $\mathfrak{K}_{14}$ те, для которых пары целых чисел X, Y, удовлетворяют неравенству

$$0 \leqq x^4 + 14x^2y^2 + y^4 = (X^2 - Y^2)^2 + X^2Y^2 \leqq 1.$$

Кроме начала ($X = 0$, $Y = 0$), этому наравенству удовлетворяют только следующих 8 пар целых чисел (причем всегда имеет место знак равенства).

$$\begin{matrix} X = 0, & Y = \pm 1, \\ X = \pm 1, & Y = 0, \\ X = \pm 1, & Y = \pm 1. \end{matrix}$$

Точки решетки $X = \pm 1$, $Y = \pm 1$ (точки M, N, M', N') являются вершинами квадрата $\mathfrak{Q}$, площадь которого равняется $2 = 4\Delta$. Центрами его сторон являются точки решетки $X = 0$, $Y = \pm 1$; $X = \pm 1$, $Y = 0$. В этих точках (K, L, K', L') стороны $\mathfrak{Q}$ касаются границы $\mathfrak{K}_{14}$. Остальные точки сторон $\mathfrak{Q}$ являются внутренними точками $\mathfrak{K}_{14}$.

Итак, по теореме Минковского, каждая решетка с определителем $\Delta = \frac{1}{2}$, отличная от решетки $\Lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, имеет по крайней мере одну точку, не совпадающую с началом, являющуюся внутренней точкой $\mathfrak{K}_{14}$.

3. Случай $2 < M < 14$. Выберем точки $P = (\frac{1}{2}, \Delta)$, $Q' = (\frac{1}{2}, -\Delta)$ лежащие на Γ_M в качестве базиса решетки Λ с определителем Δ. Тогда у этой решетки будут дальнейшие точки на Γ_M а именно $M = P + Q' = (1, 0)$, $Q = -Q'$, $P' = -P$, $M' = -M$. Не существует больше никаких точек решетки Λ, принадлежащих к $\mathfrak{K}_M$, ибо для точек решетки

$$x = \tfrac{1}{2}X + \tfrac{1}{2}Y$$
$$y = \Delta X - \Delta Y,$$

которые принадлежат к $\mathfrak{K}_M$, целые числа X, Y должны удовлетворять неравенствам

$$\tfrac{1}{2}|X + Y| \leqq 1$$
$$\Delta|X - Y| \leqq 1.$$

Так как $\Delta > \frac{1}{2}$ (ибо $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ является внутренней точкой $\mathfrak{K}_M$), вышеупомянутые неравенства перейдут в

$$-2 \leqq X + Y \leqq 2$$
$$-1 \leqq X - Y \leqq 1.$$

Кроме $(0, 0)$ у этой системы имеется только шесть дальнейших решений в целых числах, которые дают вышеупомянутые точки решетки.

Ввиду симметрии существует еще одна решетка $\Lambda_1 = \Lambda_1\begin{pmatrix}\Delta, & -\Delta\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, которая кроме начала содержит лишь следующие точки в $\mathfrak{K}_M$ и лежащие на границе Γ_M: $P_1 = (\Delta, \frac{1}{2})$, $Q_1 = (\Delta, -\frac{1}{2})$, $N = (0, 1)$, $P_1' = -P_1$, $Q_1' = -Q_1$, $N' = -N$.

Как мы установили в предыдущем § (свойство (C)), прямая $\xi = \frac{1}{2}$ пересекает Γ_M только в двух точках а точки $U = \left(\xi = \frac{1}{2}, \eta = -\frac{\Delta}{\varkappa}\right)$ и $V_1 = \left(\xi = \frac{1}{2}, \eta = \frac{\Delta}{\varkappa}\right)$ являются внутренними точками $\mathfrak{K}_M$. Легко установить, что точка V_1 лежит над прямой QP, точка U под осью x. Итак, прямая KV_1 пересекает границу Γ_M в дальнейшей и только в одной точке V над прямой PQ, следовательно, целый отрезок $\overline{VK}$ находится внутри $\mathfrak{K}_M$, ибо он заключен в четыреугольнике $OVNK \subset \mathfrak{K}_M$, (что вытекает из свойства (B)). В силу симметрии прямая KU пересекает кривую

Γ_M в точке U_1, симметричной к точке V относительно оси ξ, и отрезок $\overline{KU_1}$ лежит (не считая точек K, U_1) внутри $\mathfrak{K}_M$.

Построим параллелограмм $\mathfrak{Q}_1$ с вершинами O, U_1, K_1, V_1, площадь которого $= \varDelta$. $\mathfrak{Q}_1$ лежит — за исключением U_1 — внутри $\mathfrak{K}_M$. Теперь мы можем последовательными преобразованиями, а именно вращением вокруг начала (в положительном направлении) и параллельным переносом сторон (у которых нет вершины O) построить последовательность параллелограммов $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3, \ldots$, с вершинами O, V_n, K_n, U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ со следующими свойствами:

1. Вершины $V_1, V_2, V_3, \ldots$, являются внутренними точками $\mathfrak{K}_M$ и лежат над прямой OQ.

2. Вершины $U_1, U_2, U_3, \ldots$ являются граничными точками $\mathfrak{K}_M$ а лежат под прямой OM.

3. $\mathfrak{Q}_n$ имеют площадь $\varDelta$, и $\mathfrak{Q}_n \subset \mathfrak{K}_M$.

4. $y(V_1) > y(V_2) > y(V_3) > \cdots > 0$. (Через $y(A)$ обозначим ординату точки A в системе (x, y).)

5. Вершины K_n лежат или на Γ_M над прямой OK или являются внутренними точками $\mathfrak{K}_M$.

Параллелограмм $\mathfrak{Q}_1$ с вершинами O, V_1, K_1, U_1 имеет вышеупомянутые свойства. Предположим, что мы построим параллелограммы $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_n$, $(n \geqq 1)$ со свойствами 1.—5. Теперь мы можем вращать четыреугольник $\mathfrak{Q}_n$ вокруг начала на положительный угол φ_n до тех пор, пока или вершина V_n не ляжет на границу Γ_M или вершина K_n не попадает на границу Γ_M. Как видно, в дальнейшем такой случай долъжен наступить. Вращаемый параллелограмм обозначим $\mathfrak{Q}_n'$ и его вершины O, V_n', K_n', U_n'.

При этом преобразовании точка U_n' не может лежать над осью x или на ней. В таком случае было бы возможно вращение вокруг начала на угол $\varphi_n' \leqq \varphi_n$ такое, что U_n была бы отображена на U_n'', являющуюся внутренней точкой отрезка OM и вершины V_n'', K_n'' лежали бы в $\mathfrak{K}_M$. Это по свойству (E) противоречит тому факту, что площадь $\mathfrak{Q}_n = \varDelta$. Следовательно, U_n' — внутренняя точка $\mathfrak{K}_M$ и лежит на той-же стороне прамой MP, как и начало. Итак, точка V_n' также не может лежать под или на отрезке $\overline{OQ}$, потому что тогда было бы возможно вращение на угол $\varphi_n'' \leqq \varphi_n$ такой, что точка V_n перейдет в точку $\overline{V_n''}$, лежащую на отрезке $\overline{OQ}$. Но это противоречит тому факту, что площадь $\mathfrak{Q}_n = \varDelta$, так как $\overline{U_n''}$ — как мы видели — не может перейти через отрезок $\overline{MP}$ или попасть на него. Очевидно, что $y(V_n') < y(V_n)$ и точки

$\mathfrak{Q}'_n$ являются внутренними точками $\mathfrak{K}_M$, кроме — может быть — вершин V'_n, K'_n. Прямая $K'_nU'_n$ пересечет Γ_M под осью x в одной и только в одной точке U_{n+1} (ибо точка U_{n+1} лежит, очевидно, над прямой $P'Q'$ и таким образом отрезок $\overline{MU}_{n+1} \subset \mathfrak{K}_M$ — свойство (B)). Обозначим K'_{n+1} точку отрезка $\overline{U_{n+1}K'_n}$ такую, что $\overline{U_{n+1}K'_{n+1}} = \overline{OV'_n}$. Очевидно угловой коэффициент прямой $V'_nK'_{n+1}$ меньше чем угловой коэффициент прямой $V'_nK'_n$ и отрицательный по отношению к оси x. Обозначим K_{n+1} точку пересечения прямой $V'_nK'_{n+1}$ и дуги $\widehat{KPN}$, если эта прямая пересекает дугу $\widehat{KPN}$ (тогда очевидно только в одной точке — свойство (B)) а если не пересекает, то пусть K_{n+1} будет точкой пересечения прямой $V'_nK'_{n+1}$ и отрезка $\overline{MP}$ (в этом случае K_{n+1} — внутренняя точка $\mathfrak{K}_M$). Наконец пусть V_{n+1} будет точкой отрезка $\overline{V'_nK_{n+1}}$ такой, что $\overline{V_{n+1}K_{n+1}} = \overline{OU}_{n+1}$. Так как угловой коэффициент прямой $V_{n+1}K_{n+1}$ отрицателен,

$$y(V'_n) > y(V_{n+1}) > 0.$$

Точки O, U_{n+1}, K_{n+1}, V_{n+1} — вершины параллелограмма $\mathfrak{Q}_{n+1}$, для которого выполнены свойства 1.—5. Так доказана индукцией возможность последовательности параллелограммов $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, ... и, как видно, точки преобразованных параллелограммов кроме, самое большее, двух вершин являются постоянно внутренними точками $\mathfrak{K}_M$.

Ввиду свойства 4 должно существовать предельное положение последовательнлсти $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, ... Это будет, очевидно, такой параллелограмм $\mathfrak{Q}_0$, все вершины которого, кроме начала лежат на границе Γ_M. В силу 2. вершина U_0 будет или под прямой OM или $U_0 = M$. Докажем, что первый случай не может иметь места. Тогда бы существовало преобразование $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ с определителем $= 1$, которое бы точку M_0 отобразило на Q', V_0 на P итак отобразило K на M. При этом преобразовании форма $g(x, y) = x^4 + Mx^2y^2 + y^4$ преобразовалась бы на форму $G(X, Y)$ с условиями

$$G(\tfrac{1}{2}, \Delta) = G(\tfrac{1}{2}, -\Delta) = 1 \tag{19}$$

Преобразование, обратное вышеупомянутому, преобразовало бы Q' на U_0. Но все преобразования, обратные к преобразованиям формы $g(x, y)$ на $G(X, Y)$ с условиями (19), сводятся к таким, как это непосредственно видно из леммы 3, которые точку M отображают снова на какую-нибудь точку решетки Λ или Λ_1. Так как U_0 лежит, очевидно, над точкой U и $y(U) > y(Q_1)$,

U_0 не может быть точкой решетки ни Λ, ни Λ_1. Этим доказано, что $\mathfrak{Q}_0$ — параллелограмм с вершинами O, M, P, Q, и следовательно:

Если решетка с определителем $= \Delta$ имеет (примитивную) точку решетки A на дуге $\widehat{U_1M}$, $A \neq M$; или на дуге $\widehat{QV}$, $A \neq Q$; или на дугах, расположенных симметрично с последними относительно оси x, или-же y, или-же ξ, то этой решетке принадлежит по крайней мере одна точка $\neq 0$, являющаяся внутренней точкой $\mathfrak{K}_M$.

Остается доказать справедливость этого утверждения, в том случае, когда точка решетки A есть точка дуги $\widehat{KP}$.

Итак, выберем на дуге $\widehat{KP}$ точку A $(\frac{1}{2} < y(A) < \Delta)$, следовательно точка A

1. лежит по другую сторону прямой MP, чем начало,

2. $\xi(A) > \sqrt{\Delta}$. Ибо дуга $\widehat{KP}$ находится по другую сторону прямой RP, чем начало и угловой коэффициент прямой RP по отношению к оси ξ положителен, так как $R = (\xi = \sqrt{\Delta}, \eta = 0)$, $P = \left(\xi = \frac{2\Delta + 1}{4}\sqrt{2}, \eta = \frac{2\Delta - 1}{4}\sqrt{2}\right)$, и $\frac{2\Delta + 1}{4}\sqrt{2} > \sqrt{\Delta}$.

Прямая b, параллельная прямой OA, лежащая с той-же стороны OA, как и точка Q, на расстоянии $\frac{\Delta}{\overline{OA}}$ (следовательно, на этой прямой лежат точки, которые вместе с точками O, A являются вершинами треугольников с площадью $= \frac{1}{2}\Delta$), пересекает отрезок $\overline{OQ}$ в точке S, являющейся внутренней точкой $\mathfrak{K}_M$ (согласно 1.) и пересекает отрезок $\overline{OL}$ в точке T, являющейся также внутренней точкой $\mathfrak{K}_M$, ибо, согласно 2., $\xi(A) > \sqrt{\Delta}$, следовательно $\overline{OT} < \sqrt{\Delta}$. Так как угловой коэффициент прямой b положителен и больше углового коэфициента прямой $\eta = \sqrt{\Delta}$, все вершины прямой b, лежащие под прямой OL, расположены по ту-же сторону прямой $\eta = \varkappa$, как и начало. Если обозначим через I' точку пересечения прямой $\eta = \varkappa$ с кривой Γ_M $(\xi(I') < 0$, $\eta(I') > 0)$, то на дуге $\widehat{M'I'}$ нет точек перегиба — (свойство (G)). Итак прямая b пересекает дугу $\widehat{M'I'}$ во внутренней точке B. Иначе прямая b пересекала бы отрезок $\widehat{OM'}$ в точке B' (следовательно $\overline{OB'} \leq \overline{OM'}$), что противоречит тому, что площадь параллелограмма $OB'S'A$ равна Δ — (S' очевидно внутренняя точка $\mathfrak{K}_M$, так как отрезок $\overline{TS}$ лежит внутри $\mathfrak{K}_M$. Ввиду того, что отрезок $\overline{TQ} \subset \mathfrak{K}_M$).

Точки отрезка $\overline{BC}$, где $C = B + A$, являются, кроме граничной точки B, внутренними точками $\mathfrak{K}_M$. Иначе существовала бы точка $C' \neq B$ отрезка $\overline{BC}$, которая лежала бы на Γ_M. Так как часть этого отрезка, лежащая под прямой QP, заключена внутри $\mathfrak{K}_M$ (кроме точки B), то $y(Q) = \Delta < y(C') \leqq y(C)$, $x(C') < 0$. Если мы выберем точки C', A в качестве точек базиса решетки Λ, то Λ, так как ее точка C' лежит на дуге $\widehat{QVN}$, должна иметь — ввиду предыдущего установления — по крайней мере одну точку $\neq O$, являющуюся внутренней точкой $\mathfrak{K}_M$. Точка решетки $B' = C' - A$ лежит или на Γ_M (если $C' = C$), или не принадлежит к $\mathfrak{K}_M$. Положим $C' = (x_1, y_1)$, $A = (x_2, y_2)$. Из точек $\neq O$ решетки $\Lambda = \Lambda \begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{pmatrix}$ только те могут принадлежать к $\mathfrak{K}_M$, которые даны парами целых чисел X, Y удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{gathered} 1 \leqq x_1 X + x_2 Y \leqq 1 \\ -1 \leqq y_1 X + y_2 Y \leqq 1, \quad (X, Y) \neq (0, 0) \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered} x_1 < 0, \quad y_1 > \Delta > \tfrac{1}{2} \\ x_2 < 0, \quad \tfrac{1}{2} < y_2 < \Delta; \end{gathered} \tag{21}$$

или-же те, расстояние которых от начала не больше 1.

Случай 1. Знаки обоих чисел X, Y одинаковы, или-же одно из чисел $X, Y = 0$. Очевидно, достаточно рассмотреть $X \geqq 0$, $Y \geqq 0$, $(X, Y) \neq (0, 0)$. Тогда возможны только такие решения (20) при (21):

$$X = 1,\ Y = 0; \text{ точка } C'$$
$$X = 0,\ Y = 1; \text{ точка } A.$$

Случай 2. Знаки чисел X, Y различны. Итак предположим, что $X \geqq 1$, $Y \leqq -1$.

Пара $X = 1$, $Y = -1$; точка $C' - A = B'$.

Пусть $X \geqq 2$, $Y = -1$. Эти точки решетки не принадлежат к $\mathfrak{K}_M$, так как их расстояния от начала равняются по крайней мере числу

$$\frac{2\Delta}{\overline{B'C'}} = \frac{2\Delta}{\overline{OA}} > 2\Delta > 1.$$

Пусть $X \geqq 1$, $Y \leqq -2$. Эти точки также не принадлежат к $\mathfrak{K}_M$, ибо

$$x_1 X + x_2 Y < x_2 Y < -1.$$

Итак, рассматриваемая решетка Λ не имеет решетных точек $\neq 0$, которые были бы внутренними точками $\mathfrak{K}_M$. Это ведет к противоречию.

Этим доказано, что каждая решетка с определителем $= \Delta$ и с точкой решетки $A \neq P$ на дуге $\widehat{KP}$ имеет по крайней мере одну точку решетки $\neq O$, являющуюся внутренней точкой $\mathfrak{K}_M$.

11. Тела $\mathfrak{R}_N$.

В дальнейшем мы будем обозначать $\mathfrak{R}_N$ тело в плоскости (x, y), определенное неравенством

$$x^4 + Nx^3y - x^2y^2 - Nxy^3 + y^4 \leqq 1,\ 0 \leqq N < 2. \tag{1}$$

$\boldsymbol{P}_N$ будет обозначать границу $\mathfrak{R}_N$, которая дана уравнением

$$x^4 + Nx^3y - x^2y^2 - Nxy^3 + y^4 = 1,\ 0 \leqq N < 2. \tag{2}$$

Легко доказать, что $\mathfrak{R}_N$ — звездное тело. $\boldsymbol{P}_N$ проходит через точки $P = (1, 0)$, $Q = (1, 1)$, $R = (0, 1)$, $S = (-1, 1)$ и через точки, симметричные с ними относительно начала O, которые будем обозначать последовательно P', Q', R', S'. Легко найдем, что точка $\overline{P} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, где $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2N}{3}$, является точкой $\boldsymbol{P}_N$.

Преобразованием

$$\begin{aligned} x &= X\cos\tfrac{1}{2}\alpha - Y\sin\tfrac{1}{2}\alpha \\ y &= X\sin\tfrac{1}{2}\alpha + Y\cos\tfrac{1}{2}\alpha \end{aligned} \tag{3}$$

получим уравнение для $\boldsymbol{P}_N$ в виде

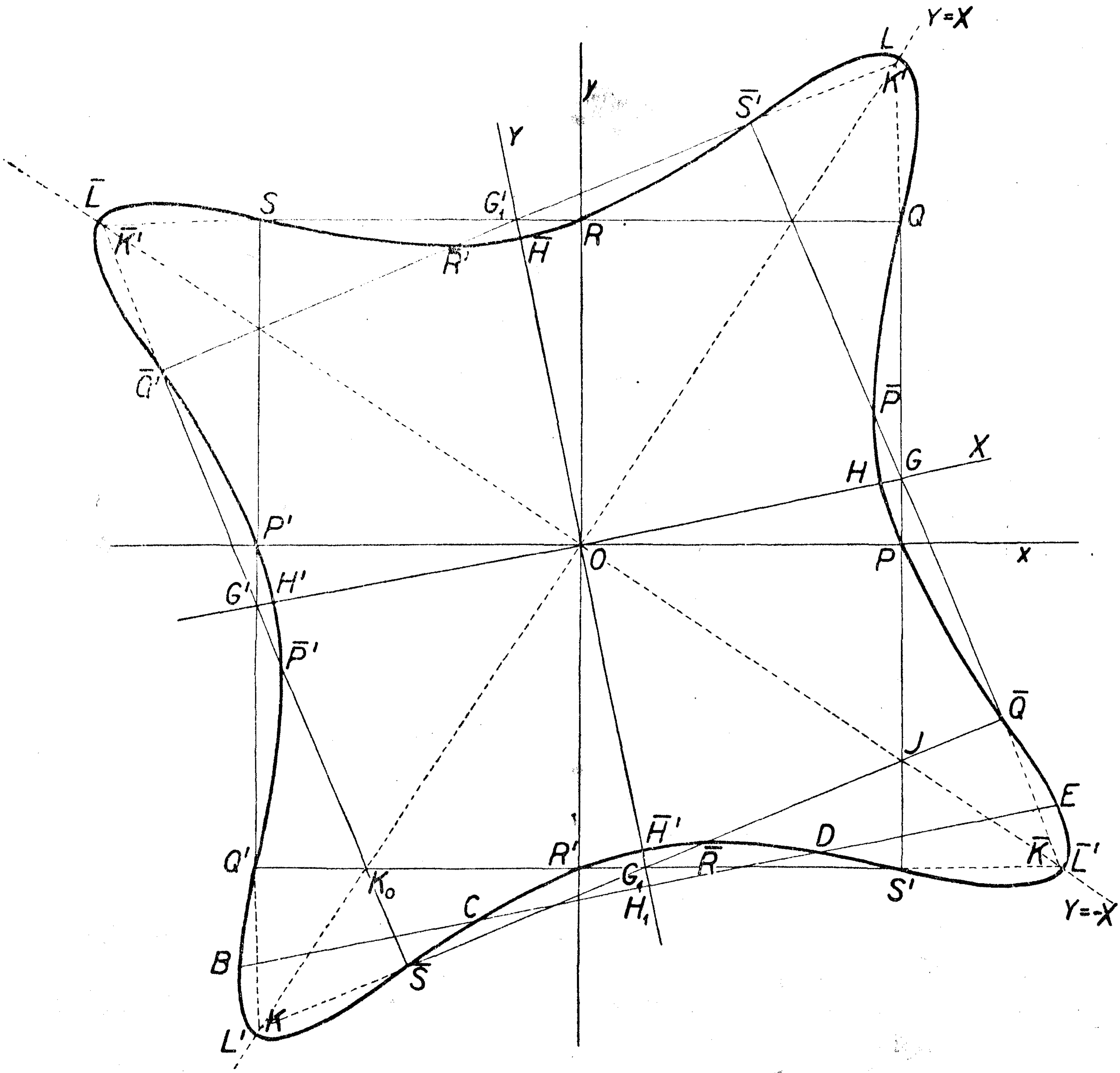
$$\tfrac{1}{8}(5 + t)X^4 + \tfrac{1}{4}(5 - 3t)X^2Y^2 + \tfrac{1}{8}(5 + t)Y^4 = 1 \tag{4}$$

где $t = \sqrt{9 + 4N^2}$, откуда для $0 \leqq N < 2$, $3 \leqq t < 5$ (итак коэффициент $\frac{1}{4}(5 - 3t) \leqq -1$, $\frac{1}{8}(5 + t) \geqq 1$). По (4) $\boldsymbol{P}_N$ симметрична относительно оси X, оси Y и прямой $X = Y$ (а также относительно $Y = -X$).

Точки симметричные относительно оси X с точками P, Q, $\ldots$, S' обозначим $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\ldots$, $\overline{S}'$. Точки, в которых ось X пересекает прямую $x = 1$, или-же $x = -1$, обозначим G, или-же G'. В этих точках прямые QS' и $\overline{S}'\overline{Q}$ или-же SQ' и $\overline{SQ}'$ пересекаются. Точки, в которых ось Y пересекает прямую $y = -1$, или-же $y = 1$, обозначим G_1, или-же G_1'.

Ясно, что точка G является точкой отрезка PQ (ибо $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2N}{3} < \frac{1}{4}\pi$). Итак, прямая $Y = X$, или-же $Y = -X$, также пересекает отрезок $\overline{Q'R'}$, или-же $\overline{PS'}$ в точке K_0, или-же в J.

Прямая $x = 1$ пересекает $\mathbf{P}_N$ в точках P, Q, S' и в точке $(1, N)$. Если $N \geqq 1$, то дуга $\widehat{PQ}$ границы $\mathbf{P}_N$, ограниченная



Фиг. 2. Область $x^4 + Nx^3y - x^2y^2 - Nxy^3 + y^4 \leqq 1$; $N = 1{,}5$.

точками P и Q, пробегает внутри квадрата с вершинами O, P, Q, R (следовательно, под прямой $x = 1$). Если $0 < N < 1$, то часть дуги $\widehat{PQ}$: дуга, ограниченная точкой P и точкой $(1, N)$, пробегает под прямой $x = 1$ (и абсцисса их внутренних точек < 1) а вторая часть $\widehat{PQ}$, ограниченная точками $(1, N)$, Q пробегает над прямой $x = 1$ (и абсцисса их внутренних точек > 1). Если

$N = 0$, прямая $x = 1$ касается кривой $\mathbf{P}_N$ и вся дуга $\widehat{PQ}$ находится над прямой $x = 1$. Но в этом случае ось X также совпадает с осью x, $(\alpha = 0)$ и квадрат с вершинами $(\pm 1, \pm 1)$ вписан в границу $\mathbf{P}_N$, касающуюся этого квадрата в центрах его сторон.

В дальнейшем исследовании $\mathfrak{R}_N$ мы будем предполагать (если не будет оговорено) $0 < N$.

Прямая $O\overline{P}$ пересечет прямую $x = 1$ в точке $(1, \operatorname{tg}\alpha)$. Так как $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2N}{3} < N$, абсцисса точек дуги $\widehat{P\overline{P}}$ будет $\leqq 1$, где знак равенства имеет место только для точки P.

Точки пересечения оси X с $\mathbf{P}_N$ обозначим H и H'; оси Y с P_N обозначим $\overline{H}$ и $\overline{H}'$; прямой $Y = X$ с $\mathbf{P}_N$ обозначим L, L'; прямой $Y = -X$ с $\mathbf{P}_N$ обозначим $\overline{L}, \overline{L}'$. Итак $\mathbf{P}_N$ сложено из 8 симметричных дуг с дугой $\widehat{H\overline{P}'}$, из 8 симметричных дуг с дугой $\widehat{\overline{P}Q}$ и из 8 симметричных дуг с дугой $\widehat{OL}$ (по оси X, Y, $Y = X$).

В полярных координатах $\mathbf{P}_N$ дано

$$\varrho^4 = \frac{8}{5 + t\cos 4\varphi}, \quad t = \sqrt{9 + 4N^2}.$$

Отсюда видно, что радиус-вектор точек дуги $\widehat{HL}$ возрастает при переходе от точки H к L. Отрезок $\overline{OH}$ является минимальной, $\overline{OL}$ максимальной величиной радиус-вектора точек кривой $\mathbf{P}_N$. Обозначим

$$\overline{OH} = \sqrt[4]{\frac{8}{5 + t}} = \varrho_{\min}$$

$$\overline{OL} = \sqrt[4]{\frac{8}{5 - t}} = \varrho_{\max}$$

Так как

$$\varrho^4_{\min} = \frac{8}{5 + t} < 1,$$

прямая $Y = -\frac{1}{\varrho_{\min}}$ проходит через точку $H_1 = \left(0, -\frac{1}{\varrho_{\min}}\right)$ лежащую вне $\mathfrak{R}_N$. Исследуем точки пересечения этой прямой с P_N. Для абсциссы этих точек получим из (4)

$$X_2^2 = \frac{3t - 5 \pm \sqrt{64 - 40t + 8t^2}}{8\sqrt{\frac{5+t}{8}}}.$$

Итак прямая $Y = -\frac{1}{\varrho_{\min}}$ пересекает $\mathbf{P}_N$ в 4 точках. Обозначим их последовательно B, C, D, E (так, что B имеет минимальную, E максимальную абсциссу). Докажем

Свойство (A). Отрезок $\overline{BE} > 2\varrho_{\min}$.

Нужно доказать

$$4(3t - 5 + \sqrt{64 - 40t + 8t^2}) > 4 \,.\, 8$$

или

$$3t + \sqrt{64 - 40t + 8t^2} > 13.$$

Для $t = 3$ левая сторона $= 13$. Далее, левая сторона — возрас — тающая функция для $t \geqq 3$. Этим свойство (A) доказано.

Свойство (B). Отрезок $\overline{CD} < \varrho_{\min}$.

Нужно доказать

$$4(3t - 5 - \sqrt{64 - 40t + 8t^2}) < 8$$

или

$$-7 < \sqrt{64 - 40t + 8t^2} - 3t.$$

Для $t = 5$, правая сторона $= -7$ и является убывающей функцией в интервале (3, 5). Этим доказано свойство (B).

Свойство (C). Отрезок $\overline{BC} = \overline{DE} < \varrho_{\min}$.

Нужно доказать

$$(X_D - X_E)^2 = \frac{3t - 5 - \sqrt{t^2 + 10t - 39}}{4\sqrt{\frac{5+t}{8}}} < \sqrt{\frac{8}{5+t}},$$

или

$$3t - 5 - \sqrt{t^2 + 10t - 39} < 4.$$

Для $t = 3$ и для $t = 5$ левая сторона неравенства $= 4$. Докажем, что

$$(3t - 9)^2 < t^2 + 10t - 39 \text{ для } 3 < t < 5,$$

или

$$8t^2 - 64t + 120 < 0,$$

что правильно, ибо левая сторона имеет корни $t = 3$, $t = 5$, Свойство (D). Криволинейный восьмиугольник со сторонами $\widehat{QHQ}$, $\overline{Q\overline{S}}'$, $\widehat{\overline{S}'\overline{H}S}$, $S\overline{Q}'$ и со сторонами с ними симметричными относительно начала является частью $\mathfrak{K}_N$. Это тело обозначим $\mathfrak{K}_N^*$.

Доказательство. Легко найти, что каждая прямая, перпендукулярная к прямой $Y = X$ (а также каждая прямая, перпендикулярная к $Y = -X$), пересекает $\boldsymbol{P}_N$ как раз в двух точках (симметричных относительно $Y = X$, соотв. $Y = -X$). Итак, дуга $\widehat{\overline{S}'LQ}$ лежит по противоположную сторону прямой $\overline{S}'Q$, чем начало (кроме точек $\overline{S}', Q$). Аналогичные утверждения имеют место для дуг, симметричных относительно оси X респ. Y.

Свойство (E). Прямая, проходящая через точку $P = (1, 0)$ внутри угла $Q'P\overline{R}$ (лежащего под осью x), пересекает кривую $\boldsymbol{P}_N$ как раз в одной дальнейшей точке.

Доказательство. Прямая $x = \varkappa y + 1$, проходящая через точку P в обозначенном углу, очевидно, не пересекает $\boldsymbol{P}_N$ над осью x (так как эта часть прямой лежит под прямой $P\overline{R}$, которая перпендикулярна к $Y = -X$). Для ординаты y точек пересечения $\neq P$ этой прямой с $\boldsymbol{P}_N$ получим

$$\begin{aligned}(\varkappa^4 + N\varkappa^3 - \varkappa^2 - N\varkappa + 1)\, y^3 + (4\varkappa^3 + 3N\varkappa^2 - N - 2\varkappa)\, y^2 +\\ + (6\varkappa^2 + 3N\varkappa - 1)\, y + 4\varkappa + N = 0 \qquad (5)\end{aligned}$$

или — если обозначим $\Phi(\varkappa) = h(\varkappa, 1)$

$$\Phi(\varkappa)\, y^3 + \Phi'(\varkappa)\, y^2 + \tfrac{1}{2}\Phi''(\varkappa)\, y + \tfrac{1}{6}\Phi'''(\varkappa) = 0.$$

Легко установить, что в случае $\varkappa = 1$ лишь одна точка пересечения $\neq P$ а именно $R' = (0, -1)$. Итак, если $0 < \varkappa < 1$ (часть прямой под осью x проходит под прямой PR'), то ордината должна быть для всех точек пересечения > -1, откуда уравнение (5) должно иметь или 1 или 3 корня > -1. Если $\varkappa > 1$, ордината всех точек пересечения $\neq P$ $y < -1$, и уравнение (5) должно иметь или 1 или 3 корня < -1.

Если настанет вторая возможность, очевидно

$$\frac{\Phi'(\varkappa)}{\Phi(\varkappa)} < 1 \text{ в случае } 0 < \varkappa < 1,$$

$$\frac{\Phi'(\varkappa)}{\Phi(\varkappa)} > 1 \text{ в случае } \varkappa > 1.$$

Но если $0 < \varkappa < 1$, то $0 < \Phi(\varkappa) = h(\varkappa, 1) < 1$, так как точка $(\varkappa, 1)$ — внутренная точка $\mathfrak{K}_N$, а если $\varkappa > 1$, то $\Phi(\varkappa) = h(\varkappa, 1) >$

> 1, так как $(\varkappa, 1)$ — внешняя точка $\mathfrak{R}_N$. Итак, число $(\log \Phi(\varkappa))' = \frac{\Phi'(\varkappa)}{\Phi(\varkappa)} > 1$, соотв. < 1, для $0 < \varkappa < 1$, соотв. $\varkappa > 1$. Таким бразом уравнение (5) может иметь только один вещественный корень.

Обозначим K точку пересечения прямой $\overline{P'Q'}$ с прямой $\overline{SQ}$. Легко высчитать, что точка K будет внешней точкой $\mathfrak{R}_N$ в случае $0 < N < \sqrt[4]{5}$, K - точка $\mathbf{P}_N$, когда $N = \sqrt[4]{5}$, K является внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$ в случае $\sqrt[4]{5} < N < 2$. Обозначим $\mathfrak{R}'_N$ тело ограниченное дугой кривой $\mathbf{P}_N$ кроме четырех дуг, симметричных с дугой $\widehat{QLS'}$. В этих частях $\mathfrak{R}'_N$ ограничено сторонами симметричными с отрезками $\overline{Q'K}$ и $\overline{KS}$. Очевидно, что $\mathfrak{R}'_N$ звездное тело и $\mathfrak{R}'_N \subset \mathfrak{R}_N$ в случае $\sqrt[4]{5} \leqq N < 2$.

Свойство (F). В случае $0 < N < \sqrt[4]{5}$, дуга $\widehat{QL}$ не содержит точек перегиба.

Доказательство. Для кривой

$$X^4 + \mu X^2 Y^2 + Y^4 = \varkappa^4$$

мы нашли (§ 9, свойство (G)) следующее условие для координат точек перегиба

$$X^2 Y^2 = \frac{2\mu\varkappa^4}{3\mu^2 - 12}.$$

Если положим в нашем случае (4)

$$\mu = \frac{2(5 - 3t)}{5 + t}, \quad \varkappa^4 = \frac{8}{5 + t}$$

то для координат точек перегиба справедливо

$$X^2 Y^2 = \frac{3t - 5}{3t(5 - t)}.$$

Если X_1, Y_1 являются координатами точки Q, то

$$X_1 = \sqrt{2}\cos(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha), \quad Y_1 = \sqrt{2}\sin(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\alpha)$$

и

$$X_1^2 Y_1^2 = \cos^2\alpha = \frac{t + 3}{2t}.$$

Из уравнения (4) вытекает

$$X^2Y^2 = \frac{\frac{5+3t}{8}\varrho^4 - 1}{t} = \frac{\left(\frac{\varrho}{\varrho_{\min}}\right)^4 - 1}{t}$$

Итак для точки (X, Y) дуги $\widehat{QL}$

$$X^2Y^2 \geqq X_1^2Y_1^2 = \frac{t+3}{2t}.$$

Достаточно будет доказать, что, если $0 < N < \sqrt[4]{5}$, то

$$\frac{t+3}{2t} > \frac{3t-5}{3t(5-t)},$$

или

$$3t^2 < 55.$$

Если $N < \sqrt[4]{5}$, имеет место

$$3t^2 = 27 + 12N^2 < 27 + 27 < 55.$$

Этим доказано свойство (F).

11. Доказательство теоремы 5.

На основании леммы 9 можно формулировать Теорему 5 следующим образом

Теорема 5а. *Пусть N — вещественное число, $0 \leqq N < 2$; Λ решетка с определителем $\Delta = 1$, точка которой A лежит на границе области $\mathfrak{R}_N$, определенной следующим неравенством*

$$x^4 + Nx^3y - x^2y^2 - Nxy^3 + y^4 \leqq 1.$$

Тогда существует по крайней мере одна точка решетки Λ, отличная от O и от точки $-A$, принадлежащая к $\mathfrak{R}_N$.

Если $N = 0$, то существует только одна решетка, все точки которой, неравные O, лежат на границе или вне области $\mathfrak{R}_N$, а именно

$$\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}.$$

Если $0 < N < 2$, единственными решетками, не имеющими кроме начала других точек внутри $\mathfrak{R}_N$, будут

$$\Lambda_1 = \Lambda_1\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \Lambda_2\begin{pmatrix}\cos\alpha, & \sin\alpha\\ -\sin\alpha, & \cos\alpha\end{pmatrix} \text{ где } \alpha = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2N}{3}.$$

Доказательство. Случай $N = 0$; утверждение является следствием теоремы Минковского.

Случай $0 < N < 2$.

Решетка $\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix}$ имеет следующие точки на границе $\mathfrak{R}_N$: $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 1)$. Докажем что не существует дальнейшей точки этой решетки, отличной от начала, которая бы принадлежала к $\mathfrak{R}_N$.

Точки решетки Λ $x = X$, $y = Y$, лежащие в $\mathfrak{R}_N$, даны целочисленными решениями неравенства

$$X^4 + NX^3Y - X^2Y^2 - NXY^3 + Y^4 = (X^2 - Y^2)^2 + \\ + X^2Y^2 + NXY(X^2 - Y^2) \leqq 1.$$

Это неравенство имеет следующее решение $\neq (0, 0)$:

1. Если $XY(X^2 - Y^2) \geqq 0$: $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 1)$.
2. Если $XY(X^2 - Y^2) < 0$, то

$$X^4 - X^2Y^2 + Y^4 + NXY(X^2 - Y^2) > X^4 - X^2Y^2 + Y^4 + 2X^3Y - \\ - 2XY^3 = (X^2 + XY - Y^2)^2 \geqq 0.$$

Итак для всех решений

$$X^2 + XY - Y^2 = 0.$$

Но это равенство имеет только одно решение $(0, 0)$.

Из-за симметрии $\mathfrak{R}_N$ решётка $\Lambda = \Lambda\begin{pmatrix}\cos\alpha, & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, где $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2N}{3}$, имеет также как раз 8 точёк, отличных от начала на границе $\mathfrak{R}_N$.

Разделим доказательство теоремы 5 на четыре следующих утверждения:

Утверждение 1. Пусть Λ решетка с определителем $= 1$, одна ее точка A является внутренней точкой дуги $\widehat{PH\overline{P}}$. Тогда существует хотя бы одна точка решетки $\neq 0$, которая является внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$.

Если A не является примитивной точкой решетки, то доказательство отпадает. Пусть A примитивная точка решетки. Обозначим $\overline{OA} = a < 1$, p — прямую параллельную с прямой OA на расстоянии $\frac{1}{a}$ от начала и пусть начало лежит над прямой p. Прежде всего точка G_1 лежит над p и поэтому точка

(*1*), в которой прямая p пересекает ось Y, является внешней точкой $\mathfrak{R}_N$. Это видно из того, что $x(A) < 1$ и площадь треугольника с вершинами O, A, $(1) = \frac{1}{2}$. Во вторых, прямая p пересекает отрезок $\overline{JS'}$ во внутренней точке (*2*). Итак точка (*2*) будет внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$. Так как, очевидно, точка (*2*) не может лежать над или на прямой G_1J, потому что (*1*) лежит под G_1J и угловой коэффициент прямой p меньше углового коэффициента прямой G_1J. Если бы (*2*) лежала под прямой G_1S' или $(2) = S'$, то прямая p пересекала бы эту прямую в точке $(2)'$ так что угловой коэффициент прямой $O(2)'$ был бы больше или равен -1, итак прямая параллельна с ней через A, пересекает ось x в точке A', так что $\overline{OA'} > 1$. Это в противоречии с тем, что площадь треугольника с вершинами O, $(2)'$, A' равна $\frac{1}{2}$. Точно также можно обнаружить, что прямая p пересекает отрезок $\overline{KQ'}$ во внутренней точке (*3*). Итак, точка (*3*) будет внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$. Так как точка (*1*) лежит между точками (*2*), (*3*), прямая p пересечет границу P_N в 4 точках, которые обозначим последовательно B, C, D, E. Очевидно, если A пробегает всеми точками дуги $\widehat{PHP'}$, то точки B, C, D, E пробегают последовательно всеми точками дуг, принадлежащих P_N, которые лежат в углах, ограниченных прямыми $Q'S'$ и $\overline{SQ}$. Далее видно, что отношения $\frac{\overline{BE}}{2a}$ и $\frac{\overline{CD}}{a}$ являются непрерывными функциями положения точки A.

Во первых докажем, что

$$\frac{\overline{BE}}{2a} > 1.$$

В предыдущем § мы доказали, что неравенство имеет место, если $A = H$, (свойство (A)). Если бы это неравенство не имело места для какой-нибудь точки A, то существовала бы внутренняя точка дуги $\widehat{PH\overline{P}}$, обозначим ее A^*, для которой

$$\overline{B^*E^*} = 2a.$$

Тогда бы существовало унимодулярное преобразование, которое точку B^* переведет в точку $S = (-1, 1)$, точку A^* в $P = (1, 0)$ и таким образом точку E^* в $Q = (1, 1)$. Это преобразование перевело бы форму $h(x, y)$ на форму $H(X, Y)$ со свойствами

$$H(1, 0) = H(1, 1) = H(-1, 1) = 1.$$

Но это по лемме 6 невозможно. Ибо такие преобразования переводят точку P в какую-нибудь точку решетки $\Lambda\begin{pmatrix}1, 0\\0, 1\end{pmatrix}$ или $\Lambda\begin{pmatrix}\cos\alpha, & \sin\alpha\\-\sin\alpha, & \cos\alpha\end{pmatrix}$ и точка A^* не является точкой этих решеток.

Так как $\overline{CD} < \overline{OH}$ если $A = H$, мы можем опять доказать — вследствие леммы 5 —, что

$$\frac{\overline{CD}}{a} < 1,$$

если точка A — внутренняя точка дуги $\widehat{P\overline{P}}$.

Итак на прямой p лежит отрезок $\overline{BE} > 2a$ и отрезок $\overline{CD} < a$. Так как внутренние точки отрезков $\overline{BC}$ и $\overline{DE}$ являются внутренними точками $\mathfrak{R}_N$, то для каждой решетки с определителем $= 1$ и с точкой A, которая является внутренней точкой дуги $\widehat{P\overline{P}}$, существует по крайней мере одна точка, являющаяся внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$.

Утверждение 2. Пусть Λ — решетка с определителем $=$ $= 1$, A_1 — точка являющаяся внутренней точкой дуги $\widehat{R'\overline{S}}$ (лежащая под прямой $Q'S'$). Тогда существует по крайней мере одна точка решетки Λ, отличная от начала, которая является внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$.

Если A_1 не является примитивной точкой решетки, то доказательство отпадает. Итак, пусть A_1 — примитивная точка решетки. Обозначим $\overline{OA_1} = a_1 > 1$, p_1 — ту прямую, параллельную прамой OA_1 на расстоянии $\frac{1}{a_1}$, которая пересекает положительную ось x. Угловой коэффициент прямой p_1 (по отношению к оси x) очевидно > 1.

Прямая p_1 пересекает прямую $x = 1$ над точкой P, иначе она пересекала бы ось x в точке (4), так что $\overline{O(4)} \geqq 1$, что противоречит тому, что площадь треугольника с вершинами O, A_1, $(4) = \frac{1}{2}$, потому что A_1 лежит под прямой $y = -1$. Аналогично можно установить, что p_1 пересечет прямую $\overline{P}\overline{R}$ над точкой R. Итак, p_1 пересечет дугу $\widehat{\overline{R}S'}$ в внутренней точке B_1, (p_1 не может пересечь дугу $\widehat{\overline{R}S'}$ в большем количестве точек, потому что угловой коэффициент секущей этой дуги меньше углового коэфициента касательной $\mathbf{P}_N$ в точке S', который меньше 1).

Обозначим C_1 дальнейшую точку пересечения прямой p_1 с P_N такую, что внутренние точки $\overline{B_1C_1}$ являются внутренними точками $\mathfrak{R}_N$. Докажем теперь, что для отношения $\frac{\overline{B_1C_1}}{a_1}$, которое является непрерывной функцией положения точки A_1, имеет место

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{a_1} > 1,$$

если A_1 пробегает внутренними точками дуги $\widehat{R'\bar{S}}$. Пусть, во первых, A_1 лежит над прамой $\bar{S}\bar{Q}$, тогда p_1 пересечет прямую $\bar{R}\bar{P}$ над точкой $\bar{P}$. Это можно установить по аналогии с предыдущими рассуждениями, и точка C_1 будет внутренней точкой дуги $\widehat{PH\bar{P}}$. Прямая параллельная с прямой OC_1 на расстоянии $\frac{1}{\overline{OC_1}}$, которая проходит через точку A_1, пересекает границу P_N в четырех точках и если (5) — вторая внутренная точка пересечения и (6) — точка пересечения этой прямой с прямой $x = 1$, то, как было указано в доказательстве утверждения 1, $\overline{A_1(5)} < \overline{OC_1}$, $\overline{A_1(6)} > \overline{OC_1}$, мы видим, что точка $A_1 + C_1$ является внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$ а также внутренней точкой отрезка $\overline{B_1C_1}$. Итак $\overline{B_1C_1} > a_1$. Если бы теперь для какой-нибудь внутренней точки A_1 дуги $\widehat{R'\bar{S}}$ было $\frac{\overline{B_1C_1}}{a_1} \leqq 1$, то мы бы опять пришли к противоречию с леммой 5. Этим утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. Пусть $N < \sqrt[4]{5}$. Пусть Λ — решетка с определителем $= 1$ и с точкой A_2 на дуге $\widehat{Q'L'}$, $A_2 \neq Q'$. Тогда существует хоть одна точка решетки Λ, $\neq O$, которая является внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$.

Если A_2 не является примитивной точкой решетки Λ, то доказательство излишне. Пусть A_2 — примитивная точка решетки, B_2 — та внутренняя точка дуги $\widehat{PH\bar{P}}$, для которой параллельная прямая p_B на расстоянии $\frac{1}{\overline{OB_2}}$ от начала проходит через точку A_2. Точки, в которых p_B пересекает P_N, обозначим последовательно A_2, A_3, A_4, A_5. Из доказательства утверждения 1. мы знаем, что $\overline{A_2A_5} > 2\overline{OB_2}$, $\overline{A_3A_4} < \overline{OB_2}$. Но имеет место также $\overline{A_2A_3} < \overline{OB_2}$, (свойство (C)). Так как снова $\varphi(B_2) =$

$= \dfrac{\overline{A_2A_3}}{\overline{OB_2}}$ — непрерывная функция положения точки B_2. Если $B_2 = H$, то мы знаем, что $\varphi(B_2) < 1$. Итак предположение $\overline{A_2A_3} \geqq \overline{OB_2}$ для какой-нибудь внутренней точки B_2 дуги $\widehat{PH\overline{P}}$ было бы в противоречии с леммой 5.

Итак точка $A_2 + B_2 = C_2$ — внутренняя точка отрезка $\overline{A_3A_4}$ (и поэтому внешняя точка $\mathfrak{R}_N$), а точка $A_2 + 2B_2 = D_2$ внутренняя точка отрезка $\overline{A_4A_5}$ и поэтому внутренняя точка $\mathfrak{R}_N$.

Обозначим p_2 прямую B_2C_2, p_3 — прямую, параллельную с OA_2 (а также с p_2), проходящую через точку D_2. Угловой коэффициент этих прямых по отношению к оси $X \leqq 1$. Докажем, что p_3 пересекает $Y = -X$ во внутренней точке $\mathfrak{R}_N$. Так как прямая $Q'\overline{S}$ пересекает $\mathbf{P}_N$ как раз в двух точках Q', $\overline{S}$, то точки рассматриваемой дуги лежат на противоположной стороне от этой прямой, чем начало. Достаточно доказать, что прямая, параллельная с прямой $\overline{OQ'}$ на расстоянии $2\dfrac{1}{\overline{OQ'}} = \sqrt{2}$ (проходящая через точку S'), пересекает прямую $Y = -X$ во внутренней точке $\mathfrak{R}_N$.

Координаты этой точки пересечения

$$X = -Y = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

Итак нужно доказать

$$\frac{1}{\cos^4\frac{1}{2}\alpha}\left[\tfrac{1}{8}(5+t) + \tfrac{1}{4}(5-3t) + \tfrac{1}{8}(5+t)\right] < 1.$$

Или

$$\cos^4\tfrac{1}{2}\alpha > \frac{5-t}{2}, \quad (t = \sqrt{9+4N^2}).$$

Имеем

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{3}{t}.$$

Итак нужно доказать

$$1 + \frac{t+3}{2t} + 2\sqrt{\frac{t+3}{2t}} > 10 - 2t,$$

или

$$\frac{17}{2} < 2t + \frac{3}{2t} + \sqrt{\frac{2t+6}{t}}.$$

Для $t = 3$ имеет место знак равенства и легко доказать, что правая сторона будет возрастающей функцией в интервале $(3, 5)$.

Пусть теперь C_2^* — внутренняя точка отрезка $\overline{C_2B_2}$ на дуге P_N, а именно такая, что внутренние точки отрезка $\overline{C_2^*B_2}$ являются уже внутренними точками $\mathfrak{R}_N$. Так как прямая p_2 пересекает отрезок $\overline{O\overline{R}}$ в его внутреней точке R^* (иначе мы бы дошли до противоречия с тем фактом, что площадь треугольника $A_2, O, R^* = \frac{1}{2}$) то отрезок $\overline{B_2R^*}$ лежит в $\mathfrak{R}_N$ (ибо часть этого отрезка над осью x принадлежит к $\mathfrak{R}_N$ — так как угловой коэффициент прямой p_2 по отношению к $X \leq 1$ и прямая, перпендикулярная к прямой $Y = -X$ пересекает P_N как раз в двух точках, симметричных относительно $Y = -X$, и дальнейшая часть этого отрезка лежит внутри четыреугольника $OPJ\overline{R}$, являющегося частью $\mathfrak{R}_N$), итак точка C_2^* лежит на дуге $\widehat{SR'\overline{R}}$, т. е. под прямой OD_2. Точки A_2, C_2 являются базисными точками решетки Λ с определителем $= 1$. Рассмотрим сдвинутую решетку $\Lambda_{A_2, \overrightarrow{C_2C_2^*}}$. Точка D_2 решетки Λ перейдет в точку D_2^* по прямой p_3. Утверждение будет доказано доказательством, что точки отрезка $\overline{D_2D_2^*}$ являются внутренними точками $\mathfrak{R}_N$.

Прежде всего докажем, что точка D_2^* является внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$.

По утверждению 1. и 2. решетка $\Lambda^* = \Lambda_{A.\overrightarrow{C_2C_2^*}}$ имеет по крайней мере одну точку $\neq 0$ внутри $\mathfrak{R}_N$, потому что C_2^* является примитивной точкой Λ^*, лежащей на дуге $\widehat{SR'\overline{R}}$. На прямой OA_2 нет такой внутренней точки решетки. Прямая $p_2 = B_2^*C_2^*$ также не содержит такой точки, ибо p_2 уже не пересекает P_N над точкой B_2 (ибо часть прямой p_2 над точкой B_2 лежит под прямой, проходящей через точку B_2 перпендикулярно к $Y = -X$ и над прямой OB_2) и на p_2 также нет ни одной точки под точкой C_2^*, которая принадлежала бы до $\mathfrak{R}_N$ — что видно из свойства (E), ибо эта часть прямой p_2 лежит под прямой PC_2^*.

Рассмотрим далее прамую p_4, проведенную параллельно к p_3 (под p_3) на расстоянии $\dfrac{3}{\overline{OA}_2}$ от начала. Если p_4 пересекает P_N, то лишь в точках, радиус-вектор которых $> \sqrt{2}$, т. е. в точках дуги $\widehat{QL'S'}$, ибо

$$\frac{3}{\overline{OA}_2} > \frac{3}{\varrho_{\max}} = 3\sqrt[4]{\frac{5-t}{8}} > \sqrt{2}.$$

Это неравенство имеет место для $t < 4{,}6$, но если $N < \sqrt[4]{5}$, то $t < 3\sqrt{2} < 4{,}3$.

Если прямая p_4 пересекает P_N, то прямая p_3 пересекает дугу $\widehat{P\overline{Q}}$ в ее внутренней точке — (расстояние p_3 от начала $> \frac{2}{\varrho_{\max}} = 2\sqrt[4]{\frac{5-t}{8}} > 1$ для $N < \sqrt[4]{5}$). Если бы p_3 не пересекала дугу $\widehat{P\overline{Q}}$ в ее внутренней точке, то расстояние p_3 от начала было бы больше чем расстояние прямой, проходящей через точку $\overline{Q}$ параллельно с прямой OQ', равное $\sqrt{2}\cos\alpha$, итак расстояние прямой p_4 от начала было бы $> \frac{3}{2}\sqrt{2}\cos\alpha$. Но

$$\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\cos\alpha > \varrho_{\max} = \sqrt[4]{\frac{8}{5-t}},$$

ибо

$$\cos 2\alpha = \frac{3}{t},$$

отсюда

$$\cos^4\alpha = \left(\frac{t+3}{2t}\right)^2$$

и неравенство имеет место для $t > 0$, в том случае, если справедливо

$$5t^3 + 13t^2 - 105t - 225 < 0.$$

Левая сторона этого неравенства имеет лишь один положительный корень $> 4{,}3$. Этим доказано, что расстояние прямой p_4 от начала было бы больше чем $\varrho_{\max}$, и прямая p_4 — вопреки предположениям — не пересекала бы $\boldsymbol{P}_N$.

Обозначим D_2' точку пересечения прямой p_3 с дугой $\widehat{P\overline{Q}}$. Точки отрезка $\overline{D_2D_2'}$ являются — за исключением D_2' — внутренними точками $\mathfrak{R}_N$ (ибо над прямой $Y = -X$ не может быть внешней точки, или точки кривой $\boldsymbol{P}_N$, так как отрезок $\overline{D_2D_2'}$ лежит над или на прямой, проходящей через точку D_2' перпендикулярно к $Y = -X$ — и под $Y = -X$. Отрезок $\overline{D_2D_2'}$ лежит в четыреугольнике OA_4A_5S', который является частью $\mathfrak{R}_N$, что видно из того, что на дуге $\widehat{S'\overline{L}'\overline{Q}}$ нет точек перегиба (свойство (F)) и эта дуга в точке $\overline{L}'$ выпуклая). Если бы теперь точка D_2^* не была внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$, то, очевидно, существовала бы решетка, которая имеет точку в D'_2, являющуюся внутренней точкой дуги $\widehat{PQ}$, и которая не имеет других точек внутри $\mathfrak{R}_N$, что противоречит утверждению 2.

Если — во вторых — прямая p_4 не пересекает P_N, то D_2^* является внутренней точкой решетки Λ^* в $\mathfrak{R}_N$. Как нам уже известно, решетка Λ^* не содержит внутренних точек из $\mathfrak{R}_N$ ни на прямой OA_2, ни на p_2. Следовательно, должна быть такая точка решетки на прямой p_3. Этой точкой является D_2^*. Прежде всего, ни одна из точек решетки под точкой D_2^* на прямой p_3 не может быть внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$, потому что первой точкой решетки Λ^* под D_2^* на p_3 будет $2C_2^*$, а эта и другие точки решетки под D_2^* являются, очевидно, внешними точками $\mathfrak{R}_N$ (ибо p_2 не пересекает $\mathfrak{R}_N$ под точкой C_2^* — свойство E). Кроме тото ни одна из точек решетки Λ^* над точкой D_2^* на p_3 не является внутренней точкой $\mathfrak{R}_N$ — ибо p_3 уже не пересекает $\mathfrak{R}_N$ над D_2^* (эта часть p_3 лежит над OD_2^* и под прямой проходящей через точку D_2^* перпендикулярно к $Y = -X$).

Этим доказано, что конечные точки отерзка $\overline{D_2D_2^*}$ являются внутренними точками $\mathfrak{R}_N$, следовательно весь этот отерзок лежит внутри $\mathfrak{R}_N$. Ибо этот отрезок — часть $\overline{D_2D'_2}$, который — за исключением D'_2 — содержит только внутренние точки $\mathfrak{R}_N$. Этим утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. Пусть $\sqrt[4]{5} \leqq N < 2$. Тогда каждая решетка с определителем 1, содержащая точку A_3, являющаяся точкой отрезка $\overline{Q'K}$, $A_3 \neq Q'$, имеет по крайней мере одну точку $\neq O$, которая является внутренней точкой $\mathfrak{R}'_N$.

Если A_3 не является примитивной точкой решетки, то доказательство отпадает. Следовательно, пусть A_3 — примитивная точка решетки с определителем $= 1$.

Обозначим p_5 прямую, паралельную с OA_3, проходящую через токчу $R' = (0, -1)$, расстояние которой от начала $= \dfrac{1}{\overline{OA}_3}$. Обозначим $B_3 = R' - A_3$. Итак, $\overline{R'B_3} = \overline{OA}_3$. Пусть t_3 — касательная в точке $P = (1, 0)$. Уравнение t_3

$$4x + Ny = 4.$$

Пусть коэффициент прямой p_5 (по отношению к оси x) будет k. Очевидно $1 < k \leqq \operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha)$. Уравнение p_5 примет вид

$$y = kx - 1.$$

Итак, координаты точки B_3^*, в которой p_5 пересекает t_3, будут

$$x = \frac{4+N}{4+Nk}, \quad y = k\frac{4+N}{4+Nk} - 1.$$

Следовательно, длина отрезка $\overline{R'B_3^*} = \sqrt{1+k^2}\,\frac{4+N}{4+Nk}$. Легко установить, что B_3^* является внутренней точкой $\mathfrak{R}'_N$, следовательно, отрезок $\overline{R'B_3^*}$ содержит, за исключением R', только внутренние точки $\mathfrak{R}'_N$ (ибо p_5 пересекает дугу $\widehat{\overline{P}P}$ лишь в одной точке). Итак,

$$\overline{B_3B_3^*} = \overline{R'B_3} - \overline{R'B_3^*} = \sqrt{1+k^2} - \sqrt{1+k^2}\,\frac{4+N}{4+Nk} =$$

$$= \sqrt{1+k^2}\,\frac{N(k-1)}{4+Nk}.$$

Обозначим p_6 прямую, параллельную с p_5 на расстоянии $\frac{2}{\overline{OA_3}}$ от начала. Ее уравнение будет

$$y = kx - 2.$$

Касательная P_N в точке $S' = (1, -1)$ есть

$$(2-2N)\,x - (2+2N)\,y = 4.$$

Прямая p_6 пересекает эту касательную в точке C_3^*, координаты которой

$$\frac{2N}{N(1+k)+k-1}, \quad \frac{2Nk}{N(1+k)+k-1} - 2.$$

Прямая p_6 проходит через точку $(0, -2) = R_2$ и

$$\overline{R_2C_3^*} = \sqrt{1+k^2}\,\frac{2N}{N(1+k)+k-1}.$$

Легко доказать, что точка C_3^* — внутренняя точка $\mathfrak{R}'_N$. Обозначим C_3 точку пересечения p_6 с отрезком $\overline{S'J}$. Длина $\overline{R_2C_3} = \overline{OA_3} = \sqrt{1+k^2}$. Итак, длина

$$\overline{C_3^*C_3} = \overline{R_2C_3} - \overline{R_2C_3^*} = \sqrt{1+k^2}\,\frac{(k-1)(N+1)}{N(1+k)+k-1}.$$

Очевидно отрезок $\overline{C_3^*C_3}$ лежит внутри $\mathfrak{R}'_N$. Докажем теперь что $\overline{C_3^*C_3} > 2\overline{B_3^*B_3}$, а этим будет доказано утверждение 4. Надо доказать неравенство

$$\frac{N+1}{N(1+k)+(k-1)} > \frac{2N}{4+Nk},$$

или

$$2N^2 + kN^2 + kN - 6N < 4.$$

Имеем $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2N}{3} \leqq \frac{4}{3}$, тогда $\operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{2}$ и

$$k \leqq \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{4}\pi) \leqq \frac{3 + \sqrt{5}}{4} < 1{,}31.$$

Рассматриваемое неравенство будет иметь место, если справедливо

$$2N^2 + 1{,}31N^2 + 1{,}31N - 6N < 2.$$

Очевидно, левая сторона будет возрастающей функцией для $N > 1$ и это неравенство справедливо, ибо для $N < 2$

$$2N^2 + 1{,}31N^2 + 1{,}31N - 6N \leqq 3{,}86 < 4.$$

Этим утверждение 4 доказано.

Утверждениями 1, 2, 3 доказана теорема 5 в случае $0 < N < \sqrt[4]{5}$.

Утверждениями 1, 2, 4 доказано, что каждая решетка с определением $= 1$ имеет по крайней мере одну точку $\neq O$ в области $\mathfrak{R}'_N$, если $N \geqq \sqrt[4]{5}$. Но, если существует точка решётки с определителем $= 1$ на дуге $\widehat{PH\overline{P}}$, то, очевидно, существует точка решетки $\neq O$, являющаяся внутренней точкой $\mathfrak{R}'_N$, так как она лежит между прямыми $x = -1$, $x = 1$. Если точка решетки лежит на дуге $\widehat{R'\overline{S}}$, то на основании доказательства утверждения 2, точка решетки лежит внутри области $\mathfrak{R}^*_N \subset \mathfrak{R}'_N$.

Так как $\mathfrak{R}'_N \subset \mathfrak{R}_N$, этим доказана теорема 5 во всех пунктах.

Пользуюсь случаем горячо поблагодарить здесь моего учителя *В. Ярника* за постоянный живой интерес и ободрение, с которым он следит за моей работой.

Summary.

On the Minimum of Binary Biquadratic Forms.

I. Definite Forms.

KAREL ČERNÝ, Praha.

(Received March 29th, 1951.)

Let $f(x, y) = a_0x^4 + a_1x^3y + a_2x^2y^2 + a_3xy^3 + a_4y^4$ be a definite binary biquadratic form of invariants $I = a_2^2 - 3a_1a_3 + 12a_0a_4$, $J =$

$= 72a_0a_2a_4 + 9a_1a_2a_3 - 2a_2^3 - 27a_0a_3^2 - 27a_1^2a_4$. We associate, to every positive form $f(x, y)$, a number m by the following conditions:

1. if $J = 0$, then $m = 6$,
2. if $J \neq 0$, then m is the root of the equation

$$\frac{(m^2 + 12)^3}{4(36m - m^3)^2} = \frac{I^3}{J^2},$$

namely $2 \leq m < 6$ if $J > 0$, $m > 6$ if $J < 0$. This number m is called the parameter of $f(x, y)$.*)

The main results achieved in this paper are the following:

Theorem 1. *Let $f(x, y)$ be a definite biquadratic form whose parameter is $2 \leq m \leq 14$.*

Then there exists a pair of integers $(x, y) \neq (0, 0)$ such that

$$|f(x, y)| \leq \frac{8}{\sqrt{m^2 + 60} - m} \sqrt{\frac{I}{m^2 + 12}},$$

where the sign of equality is necessary if and only if

$$f(x, y) \sim A[x^4 + (-\tfrac{7}{2} + m\Delta^2)\, x^3y + (6 - 2m\Delta^2)\, x^2y^2 + \\ + (-\tfrac{7}{2} + m\Delta^2)\, xy^3 + y^4]$$

where $\Delta^2 = \dfrac{-m + \sqrt{m^2 + 60}}{8}$. The invariant I of these forms is $I = A^2(m^2 + 12) \left(\dfrac{\sqrt{m^2 + 60} - m}{8}\right)^2$.

Theorem 2. *Let $f(x, y)$ be a definite biquadratic form whose parameter is $m \geq 14$.*

Then there exists such a pair of integers $(x, y) \neq (0, 0)$ such that

$$|f(x, y)| \leq \frac{m + 6}{5} \sqrt{\frac{I}{m^2 + 12}},$$

where the sign of equality is necessary if and only if

$$f(x, y) \sim A(x^4 + nx^3y - x^2y^2 - nxy^3 + y^4)$$

where $n = \dfrac{2}{m + 6} \sqrt{(m - 14)(m + 1)}$. The invariant I of these forms is $I = A^2(m^2 + 12) \left(\dfrac{5}{m + 6}\right)^2$.

*) If $f(x, y)$ is a negative form, let its parameter be the parameter of the form $-f(x, y)$.