DOC. DR ALOIS URBAN

TRIGONOMETRIE

PŘÍRODOVĚDECKÉ VYDAVATELSTVÍ

PRAHA 1952

Obálku navrhl a graficky upravil Miloš Hrbas

PŘEDMLUVA

Snad vůbec není třeba zvlášť zdůrazňovat důležitost trigonometrie pro technickou praxi. Technik na ni narazí téměř na každém kroku. Proto se také trigonometrii vyučuje na všech výběrových školách III. stupně.

Úkolem tohoto spisku je seznámit s trigonometrií přístupnou formou vážné zájemce z řad absolventů středních škol, kteří z nejrůznějších důvodů mají zájem na prohloubení svého matematického vzdělání. Opírá se při tom jen o základní znalosti matematiky ze střední školy, a proto všechny potřebné a jen poněkud méně běžné pojmy zvlášť připomíná nebo podrobněji vysvětluje. Tak v 2.÷4. odstavci se mluví dosti obšírně jen o podobnosti trojúhelníků; dokonce, aby čtenář dříve došel ke svému cíli, k trigonometrii, jsou důkazy některých pomocných vět odsunuty do dodatku.

Nejzákladnější pojmy trigonometrie jsou uvedeny současně s aplikacemi v 5.÷9. odstavci; domnívám se, že toto minimum může zvládnout každý, kdo má jen trochu trpělivosti zamyslet se nad pročítanou látkou. Ovládne-li tuto část knížky, může již řešit pravoúhlé trojúhelníky, což je nejběžnější případ užití trigonometrie.

Ti z čtenářů, kteří ve své praxi narazí na řešení obecných trojúhelníků (a takových nebude málo), musí se bezpodmínečně seznámit alespoň s větami 15.1 a 15.2 (se sinovou a kosinovou větou); k tomu však potřebují přečíst si začátek 12. odst., aby znali příslušné definice (trigonometrických funkcí obecného úhlu), a musí porozumět důležité větě 13.2; s těmito znalostmi mohou pak již řešit základní úlohy o obecných trojúhelnících (úlohy 16.1÷16.4).

Řada čtenářů se bude chtít samozřejmě podrobně seznámit s trigonometrií v celé její šíři. Pro ně uvádím, že jsem záměrně nemluvil o trigonometrických rovnicích, neboť s nimi se praktik tak často nesetkává. Jinak jsem z trigonometrie vynechal jen složitější případy řešení trojúhelníků, a to jen proto, aby rozsah knížky příliš nevzrostl.

Alois Urban

I. část.

1. ÚVOD

Slovo *trigonometrie* je odvozeno z řeckého *trigón* (trojúhelník) a *metrein* (měřiti); jeho český význam tedy je nauka o měření trojúhelníků.

Co se tím „měřením trojúhelníků" rozumí? Nejlépe to objasníme, jestliže stručně uvedeme úkoly, kterými se trigonometrie zabývá. Jak název naznačuje, jsou to úlohy o trojúhelnících. S úlohami o trojúhelnících se setkáváme již v elementární geometrii, jež je probírána na střední škole, a to v planimetrii (rovinné geometrii), kde se dokazují o nich různé věty a odvozují konstrukce z daných prvků, t. j. ukazuje se, jak se *sestrojují* další potřebné prvky.

Poznámka. Prvkem trojúhelníka je na př. jeho strana, úhel, výška, plošný obsah atd.; stranám a úhlům říkáme *základní prvky*.

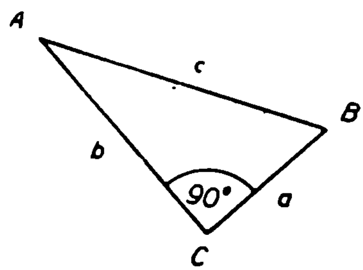
Mezi všemi větami, které se v planimetrii odvozují pro trojúhelníky, činí jakousi výjimku dvě věty týkající se základních prvků trojúhelníka; vyjadřují totiž *číselné* vztahy mezi těmito základními prvky. První z nich mluví o úhlech *libovolného* trojúhelníka; označíme-li, jak je zvykem, úhly trojúhelníka α, β, γ, pak zmíněnou větu můžeme vyslovit v tomto tvaru:

VĚTA 1.1. **Součet úhlů v trojúhelníku je rovný 180°, t. j.**

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \tag{1.1}$$

Druhá věta se již netýká všech trojúhelníků, nýbrž jen *pravoúhlých* trojúhelníků. Je to známá *Pythagorova věta.*

Poznámka. Pravoúhlým trojúhelníkem (obr. 1) rozumíme trojúhelník, jehož jeden úhel je pravý, t. j. rovný 90°. Někdy místo 90° píšeme *R*. Strany, které leží na ramenech pravého úhlu, nazývají se odvěsny (značí se obvykle *a*, *b*), zbývající strana ležící proti pravému úhlu se nazývá přepona (značívá se *c*).



Obr. 1.

Pythagorova věta vyjadřuje číselný vztah mezi stranami pravoúhlého trojúhelníka a zní takto:

VĚTA 1.2. Součet čtverců nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníka je rovný čtverci nad jeho přeponou, t. j.

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1.2}$$

Důkaz obou vět se provádí v planimetrii a nebudeme jej proto uvádět; hned však poznamenejme, že s oběma větami se v dalším často setkáme. Budeme-li znát dva úhly libovolného trojúhelníka, pak pomocí vzorce (1.1) vypočteme třetí úhel; budeme-li znát dvě strany pravoúhlého trojúhelníka, pak užitím vzorce (1.2) vypočteme třetí stranu. Uveďme alespoň dva typické příklady.

Příklad 1.1. V trojúhelníku je jeden úhel 57°14′46″, druhý úhel 63°5′32″; jak je veliký zbývající úhel?

Řešení. Označme prvý úhel α, druhý β a hledaný γ. Ze vzorce (1.1) plyne $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. V našem případě je $\alpha + \beta = 120°20'18''$ a tedy $\gamma = 59°39'42''$.

Příklad 1.2. V pravoúhlém trojúhelníku je délka přepony 13,5 cm a délka jedné odvěsny 4,6 cm; jaká je délka druhé odvěsny?

Řešení. Pro výpočet bude výhodné, když upustíme od označení stran v cm. Přeponu označme c, danou odvěsnu a, hledanou odvěsnu b. Tedy je $c = 13{,}5$, $a = 4{,}6$. Ze vzorce (1.2) plyne $b^2 = c^2 - a^2 = 182{,}25 - 21{,}16 = 161{,}09$. A tedy $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{161{,}09} \doteq 12{,}7$ (symbol $\doteq$ čteme: *rovná se přibližně*; výpočet jsme totiž provedli jen na jedno desetinné místo). Hledaná odvěsna je rovna 12,7 cm.

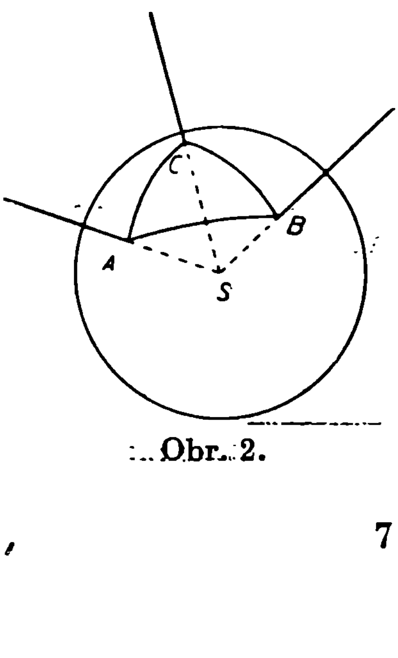
Jestliže si nyní čtenář řádně rozváží vše, co bylo dosud probráno, napadne ho jistě otázka: Existují ještě další věty a vzorce, které by vyjadřovaly číselné vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníka? Právě touto otázkou se zabývá trigonometrie.

Základním úkolem trigonometrie je hledat a odvozovat další vzájemné vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníka, vyjadřovat tyto vztahy vzorci a nalezených vzorců užívat k řešení trojúhelníků. Přitom řešením trojúhelníka rozumíme výpočet jeho neznámých prvků pomocí daných prvků.

Trigonometrie však nezůstává při těchto základních úkolech. Odvozují se v ní také vzorce, které udávají závislost dalších prvků trojúhelníka (na př. výšky, poloměru kružnice opsané, plošného obsahu atd.) na základních, eventuálně i na jiných prvcích. Dále řeší také čtyřúhelníky a obecněji mnohoúhelníky.

V praxi se trigonometrie užívá všude tam, kde se v úlohách vyskytují trojúhelníky, jejichž pomocí pak vypočítáváme hledané prvky.

Poznámka. Někdy se také trigonometrii, jejíž obsah a význam byl právě načrtnut, říká *rovinná trigonometrie*. Je tak nazývána na rozdíl od t. zv *sférické trigonometrie*, která se zabývá řešením sférických trojúhelníků, což jsou trojúhelníky



Obr. 2.

na kouli (sféře). Takový trojúhelník dostaneme, jestliže kouli protneme trojhranem, jehož vrchol je ve středu koule (obr. 2).

Cvičení).*

1.1. V trojúhelníku je jeden úhel 103°54′16″, druhý úhel 51°29′56″. Vypočtěte třetí úhel.

1.2. V pravoúhlém trojúhelníku jsou odvěsny rovny 16,5 cm a 13,7 cm. Vypočtěte přeponu.

1.3. V pravoúhlém trojúhelníku je přepona rovna 101 mm a odvěsna 99 mm; vypočtěte druhou odvěsnu.

2. PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ

V trigonometrii se neobejdeme bez znalosti některých pomocných, byť jednoduchých, ale důležitých pojmů a vět z matematiky a zvláště z geometrie. Většinou si takové pojmy a věty jen krátce připomeneme v poznámce na místě, kde se s nimi setkáme. S jednou skupinou vět, týkajících se podobnosti trojúhelníků, se seznámíme již nyní. Samozřejmě si musíme předem říci, které trojúhelníky nazýváme podobnými, t. j. musíme si zavést pojem podobnosti. Obvykle se tento pojem zavádí touto definicí.

Definice 2.1. D v a   t r o j ú h e l n í k y   j s o u   p o d o b n é, j e s t l i ž e   ú h l y   j e d n o h o   t r o j ú h e l n í k a   j s o u   s t e j n ě   v e l i k é   j a k o   ú h l y   d r u h é h o   t r o j ú h e l n í k a.

Tato definice říká: Jsou-li úhly jednoho trojúhelníka postupně rovny α, β, γ, pak jenom tehdy, jsou-li také úhly druhého trojúhelníka rovny α, β, γ, dané trojúhelníky nazýváme podobné.

Hned však ukážeme, že k tomu, abychom zjistili, zda dané trojúhelníky jsou či nejsou podobné, není třeba vyšetřovat všechny tři úhly obou trojúhelníků. Platí totiž věta:

*) Řešení příkladů ke cvičení jsou uvedena v odst. 19 (str. 167).

VĚTA 2.1. Jestliže dva úhly jednoho trojúhelníka jsou stejně veliké jako dva úhly druhého trojúhelníka, pak oba trojúhelníky jsou podobné.

Důkaz. Vzhledem k definici 2.1, věta vlastně říká: jsou-li dva úhly jednoho trojúhelníka stejně veliké jako dva úhly druhého trojúhelníka, pak již třetí úhel prvého je roven třetímu úhlu druhého trojúhelníka. A to skutečně platí, neboť třetí úhel v každém z obou trojúhelníků vypočteme (dle věty 1.1), když od 180° odečteme součet prvých dvou úhlů. Tento součet je však v obou trojúhelnících týž, tedy i zbývající úhly musí být stejně veliké, což však právě podle definice 2.1 značí, že oba trojúhelníky jsou podobné. Tím je věta dokázána.

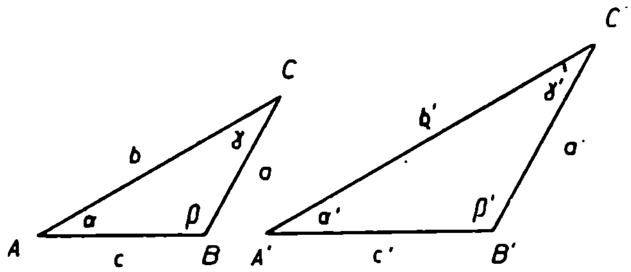
Poznámka. Dříve než uvedeme další věty o podobnosti trojúhelníků, zmíníme se o některých označeních. Tak především vrcholy trojúhelníků značíme velkými písmeny, obvykle takovými, která jdou v abecedě za sebou, strany malými písmeny a úhly písmeny malé řecké abecedy*). Přitom dbáme toho, aby vrchol, úhel při tomto vrcholu a strana, jež neleží na ramenech tohoto úhlu, byly označeny stejným písmenem, ovšem příslušné abecedy. Někdy opatřujeme všechna písmena navíc ještě stejným indexem, po případě jinou značkou; na př. v obr. 3 jsou podle těchto pravidel označeny oba trojúhelníky. Stranám, jež leží na ramenech zvoleného úhlu, říkáme *strany přilehlé* (k tomuto úhlu), zbývající straně říkáme *strana protější* (k tomuto úhlu); na př. v levém trojúhelníku v obr. 3 jsou strany b, c přilehlé k úhlu α, strana a je protější k úhlu α.

Dva podobné trojúhelníky často značíváme stejnými písmeny, která odlišujeme indexy (v obr. 3 jsou to $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$). Přitom stejným písmenem značíme úhly sobě

*) Její písmena jsou: α alfa, β béta, γ gamma, δ delta, ε epsilon, ζ dzéta, η éta, ϑ théta, ι ióta, $\varkappa$ kappa, λ lambda, μ mý, ν ný, ξ ksí, o omikron, π pí, ϱ ró, σ sigma, τ tau, υ ypsilon, φ fí, χ chí, ψ psí, ω omega.

rovné (na př. $\alpha = \alpha'$). Stejně označeným vrcholům, stranám i úhlům říkáme pak *odpovídající si* vrcholy, strany a úhly; na př. strany a, a' v obr. 3 jsou odpovídající si strany v podobných trojúhelnících ABC a $A'B'C'$.

Nyní teprve přistoupíme k dalším větám o podobnosti trojúhelníků. Přitom doporučujeme, aby si čtenář vždy znění příslušné věty ozřejmil na obr. 3, kde jsou právě dva podobné trojúhelníky zobrazeny.



Obr. 3.

VĚTA 2.2a. V podobných trojúhelnících jsou odpovídající si strany úměrné.

Formulace věty, ač se právě v tomto tvaru často užívá, je poněkud nevýhodná; nejsou v ní zachyceny matematicky příslušné vzorce. Proto ji hned uvedeme v jiném znění:

VĚTA 2.2b. Nechť a, b, c a a', b', c' jsou odpovídající si strany dvou podobných trojúhelníků; pak platí úměra

$$a : b : c = a' : b' : c'. \tag{2.1}$$

Poznámka. Snad bude dobré aspoň několika slovy se zmínit o úměrách. Úměra 2.1, které se říká *postupná*, je zkráceným zápisem pro tři úměry

$$a : b = a' : b',\ a : c = a' : c',\ b : c = b' : c', \tag{2.2}$$

z nichž na př. prvou čteme a ku b jako se má a' ku b'. Znamená to, že poměr $a : b$ je týž jako poměr $a' : b'$. Jelikož však místo poměru $a : b$ můžeme psát podíl $\frac{a}{b}$, můžeme úměry (2.2) nahradit rovnicemi

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}. \tag{2.3}$$

Důležité je, že k větě 2.2a platí také věta obrácená, jež zní takto:

VĚTA 2.3a. Mají-li dva trojúhelníky všechny strany úměrné, pak jsou podobné.

Opět bude výhodnější větu formulovat tak, abychom její znění mohli snadno vypsat ve vzorcích, a to takto:

VĚTA 2.3b. Jestliže pro strany a, b, c a a', b', c' dvou trojúhelníků platí postupná úměra

$$a : b : c = a' : b' : c', \tag{2.4}$$

pak oba trojúhelníky jsou podobné.

Ukážeme alespoň na dvou jednoduchých příkladech, jak právě uvedených vět používáme k tomu, abychom rozhodli, zda dané trojúhelníky jsou či nejsou podobné.

Příklad 2.1. Nechť v $\triangle ABC$ je $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 80°$ a v $\triangle A_1B_1C_1$ nechť $\alpha_1 = 80°$, $\beta_1 = 70°$, $\gamma_1 = 30°$. Jsou či nejsou podobné?

Řešení. Jsou podobné. Zaveďme totiž nové označení. Položme $A' = C_1$, $B' = B_1$, $C' = A_1$; pak je $\alpha' = \gamma_1 = 30°$, $\beta' = \beta_1 = 70°$. A jelikož je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, platí podle věty 2.1, že dané trojúhelníky jsou podobné.

Příklad 2.2. Rozhodněte, zda trojúhelníky o stranách 7, 4,5, 5 a 14,4, 22,4, 16 jsou či nejsou podobné.

Řešení. Strany obou trojúhelníků seřadíme podle velikosti a označíme $a = 4{,}5$, $b = 5$, $c = 7$; $a' = 14{,}4$, $b' = 16$, $c' = 22{,}4$. Jelikož nyní platí $a : b : c = a' : b' : c'$, jsou dané trojúhelníky — podle věty 2.3 — podobné.

Poznámka. Pozornému čtenáři jistě neušlo, že jsme si vše značně ulehčili; uvedli jsme totiž tři věty a z nich jsme dokázali jen jedinou (větu 2.1). V matematice se však musí každé, i zdánlivě samozřejmé, tvrzení dokázat. Důkazy zbývajících vět jsou provedeny v dodatku (odst. 18).

Cvičení.

2.1. V $\triangle ABC$ je $\alpha = 15°50'$, $\beta = 107°55'$ a v $\triangle A_1B_1C_1$ je $\alpha_1 = 107°55'$, $\beta_1 = 56°15'$. Jsou či nejsou oba trojúhelníky podobné?

2.2. V $\triangle ABC$ je $\alpha = 60°$, $\beta = 75°45'$ a v $\triangle A_1B_1C_1$ je $\alpha_1 = 60°$, $\beta_1 = 45°$. Jsou či nejsou oba trojúhelníky podobné?

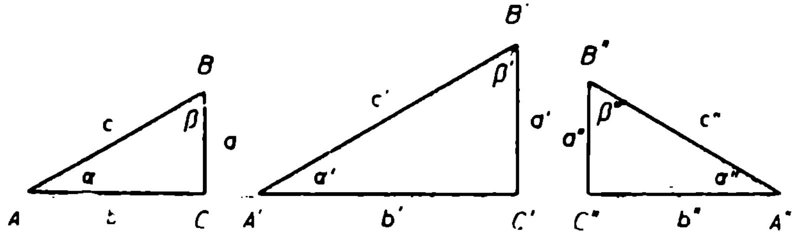
2.3. V $\triangle ABC$ jsou strany a, b, c v poměru $a : b : c = 5 : 3 : 4$. Jak velké jsou strany $\triangle A'B'C'$, který je s $\triangle ABC$ podobný, jestliže $a' = 12{,}5$ cm?

2.4. Rozhodněte, zda trojúhelník o stranách 7,8, 4,2, 9 je podobný trojúhelníku o stranách 7, 15, 13.

3. PODOBNOST PRAVOÚHLÝCH TROJÚHELNÍKŮ

Nyní se budeme v řadě odstavců zabývat jen pravoúhlými trojúhelníky. Zdůrazněme, že řekneme-li, že trojúhelník je pravoúhlý, říkáme tím, že známe velikost jednoho jeho úhlu: je rovný 90°. Z toho důvodu obvykle pod úhlem pravoúhlého trojúhelníka rozumíme již jen jeden ze zbývajících úhlů (žádný z nich už ovšem není pravý).

Věty o podobnosti trojúhelníků, které byly uvedeny v předchozím odstavci, platí přirozeně i pro pravoúhlé trojúhelníky; samozřejmě se mohou zjednodušit právě vzhledem k tomu,



Obr. 4.

že jeden jejich úhel je pravý. Zase bude výhodné, když při čtení vět přihlédneme k obr. 4, kde jsou znázorněny tři podobné pravoúhlé trojúhelníky.

Především věta 2.1 přejde ve větu:

VĚTA 3.1. *Jestliže dva pravoúhlé trojúhelníky mají (kromě pravého úhlu) jeden úhel stejně veliký, pak jsou podobné.*

Důkaz. Mají-li totiž dva pravoúhlé trojúhelníky jeden úhel stejně veliký, pak vzhledem k tomu, že jsou oba trojúhelníky pravoúhlé, mají ještě pravý úhel stejně veliký; jsou tedy dva úhly jednoho z nich stejně veliké jako dva úhly druhého. O takových trojúhelnících však věta 2.1 říká, že jsou podobné. Tím je věta 3.1 dokázána.

Protože ve větě 2.2 (přesněji řečeno ve větách 2.2a a 2.2b) se mluví jen o stranách, nemůžeme znění této věty pro pravoúhlé trojúhelníky zjednodušit. Nebude však na škodu, když i v tomto případě budeme větu formulovat zvlášť pro pravoúhlé trojúhelníky. Tedy dostáváme:

VĚTA 3.2. *Nechť a, b, c a a', b', c' jsou odpovídající si strany dvou podobných pravoúhlých trojúhelníků, pak pro ně platí*

$$a : b = a' : b', \; a : c = a' : c', \; b : c = b' : c'. \tag{3.1}$$

Také ve větě 2.3 vystupují jen strany; zdálo by se tedy, že ani tato věta se nedá pro pravoúhlé trojúhelníky zjednodušit. Pro pravoúhlé trojúhelníky máme však ještě k disposici Pythagorovu větu (větu 1.2), jejíž užitím dostaneme:

VĚTA 3.3. *Jestliže pro strany a, b, c a a', b', c' dvou pravoúhlých trojúhelníků platí jedna z úměr*

$$a : b = a' : b', \; a : c = a' : c', \; b : c = b' : c', \tag{3.2}$$

pak trojúhelníky jsou podobné.

Důkaz. Především si uvědomíme, v čem je rozdíl proti větě 2.3. Tam jsme mohli jen říci: jestliže platí postupná úměra (2.4), t. j. jestliže platí všechny tři úměry (3.2) (je ovšem zřejmé, že z kterýchkoliv dvou z nich plyne již třetí), pak trojúhelníky jsou podobné. Pro pravoúhlé trojúhelníky platí však daleko více: jestliže platí jen jedna z úměr (3.2), pak již oba trojúhelníky jsou podobné. Musíme tedy ukázat, že platí-li jedna z úměr (3.2), pak platí již zbývající dvě.

Předpokládejme na př., že platí prvá úměra (3.2), t. j. nechť je

$$a : b = a' : b' \tag{3.3}$$

Chceme ukázat, že je pak již splněna úměra $a : c = a' : c'$ (a tedy také úměra $b : c = b' : c'$). Počítejme nejprve poměr $a : c$. Dosadíme-li sem za c výraz $\sqrt{a^2 + b^2}$ (jak plyne z Pythagorovy věty), dostáváme $a : c = a : \sqrt{a^2 + b^2}$. Dělme pravou stranu úměry číslem b. Najdeme

$$a : c = \frac{a}{b} : \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}. \tag{3.4}$$

Úplně stejně pro poměr $a' : c'$ dostaneme

$$a' : c' = \frac{a'}{b'} : \sqrt{\left(\frac{a'}{b'}\right)^2 + 1}. \tag{3.5}$$

Nyní dosaďme z (3.3) do (3.4.) Dostaneme $a : c = \frac{a'}{b'} : \sqrt{\left(\frac{a'}{b'}\right)^2 + 1}$.

Z tohoto výsledku a z úměry (3.5) je však hned vidět, že je $a : c = a' : c'$, jak jsme chtěli ukázat. Z poslední úměry a z (3.3) již plyne $b : c = b' : c'$. Skutečně tedy z prvé úměry (3.2) plynou další dvě úměry.

Podobně bychom ukázali, že z druhé úměry (3.2) plyne prvá (a tedy i třetí) a konečně, že ze třetí plyne prvá (a tedy i druhá). Důkaz však již nebudeme detailně provádět a přenecháme jej čtenáři.

Tím je však věta 3.3 dokázána.

Cvičení.

3.1. V pravoúhlém $\triangle$ ABC je $\alpha = 23°52'48''$ a v pravoúhlém $\triangle$ PQR je jeden úhel rovný $66°7'12''$. Jsou či nejsou oba trojúhelníky podobné?

3.2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou odvěsny a, b v poměru $a : b = 5 : 12$, v trojúhelníku $A'B'C'$, který je podobný $\triangle$ ABC, je přepona 65 cm. Jak velké jsou jeho odvěsny?

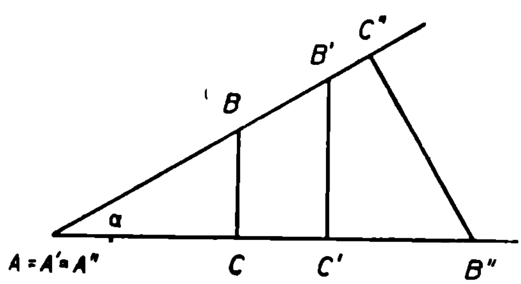
3.3. Rozhodněte, zda pravoúhlý trojúhelník ABC o odvěsnách 2,7 cm a 12 cm a pravoúhlý trojúhelník $A'B'C'$ o odvěsnách 60 cm a 13,5 cm jsou či nejsou podobné.

4. ÚKOS, STOUPÁNÍ.

Přistoupíme nyní k důsledkům vět o podobnosti pravoúhlých trojúhelníků. Prozatím si všimneme jen jednoho zvláštního případu.

Zvolme si libovolný *ostrý úhel* α (ostrý úhel je větší než 0° a menší než 90°). Pak můžeme vždy sestrojit pravoúhlé trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ... tak, že jeden jejich úhel je rovný právě zvolenému úhlu α (obr. 5). Ze stran těchto trojúhelníků budeme uvažovat prozatím jen odvěsny. Určíme ve všech těchto trojúhelnících poměr odvěsny, která leží proti úhlu α a odvěsny, která leží na rameni úhlu α, t. j. užijeme-li již dříve zavedených názvů, určíme poměr protější odvěsny k přilehlé odvěsně. Dostáváme poměry $\overline{BC} : \overline{AC}$, $\overline{B'C'} : \overline{A'C'}$, $\overline{B''C''} : \overline{A''C''}$, ..., což můžeme podle naší úmluvy o označování stran trojúhelníků přepsat na $a : b$, $a' : b'$, $a'' : b''$, ...

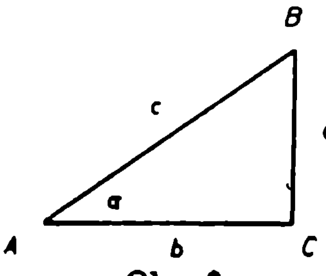
Připomeňme teď, že všechny zmíněné trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ... jsou vzájemně podobné. Skutečně: jsou to vesměs pravoúhlé trojúhelníky, jejichž jeden úhel je rovný α,



Obr. 5.

a právě o každých dvou takových trojúhelnících říká věta 3.1, že jsou podobné. Jelikož všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ... jsou podobné, můžeme pro každé dva z nich použít věty 3.2. Ta říká, že jsou-li trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ podobné, pak platí úměra $a : b = a' : b'$ (a ještě další dvě úměry, kterých prozatím neužijeme), což znamená, že poměr $\frac{a}{b}$ je rovný poměru $\frac{a'}{b'}$. To platí pro každé dva z trojúhelníků ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ..., a proto poměry $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$ jsou stejně veliké, t. j. mají stejnou hodnotu t, která závisí jen na velikosti úhlu α. Jest tedy $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = t$. To však znamená, že k určení hodnoty t těchto poměrů stačí sestrojit libovolný ze zmíněných trojúhelníků, na př. $\triangle ABC$ (obr. 6), a pomocí něho určit poměr $t = \frac{a}{b}$. Jako prozatímní výsledek můžeme říci, že právě popsaným postupem lze každému ostrému úhlu α přiřadit určité číslo t rovné hodnotě zlomku $\frac{a}{b}$. Abychom byli přesní, dodejme, že číslo $t = \frac{a}{b}$ musí být vždy kladné, protože samozřejmě jak a tak b jsou kladná čísla, neboť jsou to délky stran trojúhelníka. Přehledně lze uvedené přiřazení zapsat schematem

$$\text{ostrý úhel } \alpha \rightarrow \text{kladné číslo } t. \qquad (4.1)$$



Obr. 6.

Čteme je takto: ostrému úhlu α je jednoznačně přiřazeno kladné číslo t.

Dříve než uvedeme nějaký příklad, obrátíme ještě celou dosavadní úvahu. Předpokládejme, že naopak je dáno nějaké kladné číslo t. Pak zřejmě můžeme sestrojit pravoúhlé trojúhelníky $ABC, A'B'C', A''B''C'', \ldots$ tak, že poměry jedné odvěsny k druhé odvěsně jsou v těchto trojúhelnících stále stejné, rovné číslu t; podrobněji vypsáno: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = t$. Nyní však podle věty 3.3 dva pravoúhlé trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, pro něž platí $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ (t. j. úměra $a : b = a' : b'$), jsou podobné. To podle definice podobnosti znamená, že mají úhly stejné. Tyto trojúhelníky mají tedy jistě také úhel proti prvé odvěsně (jednak proti a, jednak proti a') stejně veliký, rovný ostrému úhlu α. Tato úvaha platí nejen pro trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, nýbrž také pro libovolné dva ze sestrojených trojúhelníků ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$, ...

Ke skutečnému sestrojení úhlu α stačí ovšem sestrojit libovolný z těchto trojúhelníků, na př. $\triangle ABC$; úhel α pak leží proti straně a.

Tím jsme udali předpis, jak lze obráceně každému kladnému číslu t přiřadit právě jediný ostrý úhel α. Tentokráte můžeme výsledek obrácené úvahy zapsat takto

$$\text{kladné číslo } t \to \text{ostrý úhel } \alpha. \tag{4.2}$$

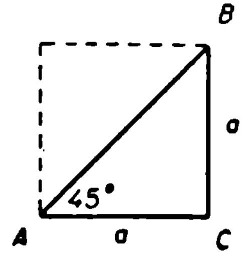
Čteme takto: kladnému číslu t je jednoznačně přiřazen ostrý úhel α. Je výhodné obě schema (4.1) a (4.2) zapsat souhrnně ve tvaru

$$\text{ostrý úhel } \alpha \rightleftarrows \text{kladné číslo } t. \tag{4.3}$$

Říkáme, že ostrý úhel α a kladné číslo t jsou si přiřazeny vzájemně jednoznačně nebo také, že jsou přiřazeny jednojednoznačně. Způsob tohoto přiřazení byl právě popsán.

Bude dobré uvést nějaký jednoduchý příklad.

Příklad 4.1. Najděte číslo t příslušející úhlu $\alpha = 45°$.



Obr. 7.

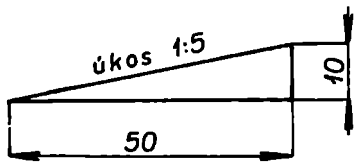
Řešení. Daný úhel 45° je ostrý, můžeme proto skutečně podle předchozího postupu číslo t vypočítat. Sestrojíme si libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož jeden úhel je právě α. Jelikož $\alpha = 45°$, je druhý úhel $\beta = 45°$ a tedy pravoúhlý trojúhelník ABC je vlastně tvořen úhlopříčkou a dvěma stranami čtverce (obr. 7). Tedy, má-li jedna odvěsna délku a, má i druhá odvěsna (kterou jsme předtím nazvali b) délku a. Poměr obou odvěsen je $t = \frac{a}{a} = 1$. Našli jsme, že úhlu $\alpha = 45°$ přísluší číslo $t = 1$.

Příklad 4.2. Najděte úhel α příslušný číslu $t = 1$.

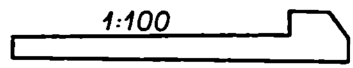
Řešení. Na základě formule (4.3) a výsledku příkladu 4.1 je okamžitě zřejmé, že příslušný úhel je $\alpha = 45°$. Přesto ukážeme, jak bychom bez znalosti výsledku příkladu 4.1 došli k řešení. Sestrojíme si libovolný pravoúhlý $\triangle ABC$ takový, aby v něm poměr odvěsny $\overline{BC}$ k odvěsně $\overline{AC}$ byl rovný 1, tedy aby $\overline{BC} : \overline{AC} = t = 1$. Zvolíme-li délku $\overline{BC}$ rovnou a, pak již z této úměry plyne, že musíme volit $\overline{AC} = a$, t. j. $\triangle ABC$ je takový, že jeho obě odvěsny jsou stejně dlouhé, rovné a. Je tedy tento trojúhelník tvořen dvěma stranami čtverce a jeho úhlopříčkou (obr. 7) a v takovém trojúhelníku je úhel α při vrcholu A rovný 45°.

Základní vztah (4.3) je každému již jistě známý z praxe. Je jen třeba připomenout, kde jste se s ním snad setkali, po případě říci, kde se ho užívá. Číslo t, jež je přiřazeno úhlu α, má různé názvy.

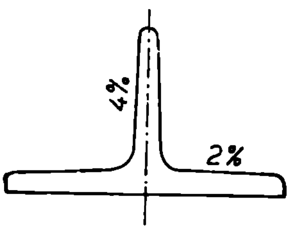
Tak především ve strojnické praxi se číslu t říká *úkos*. Tedy úkos je poměr protější odvěsny k přilehlé odvěsně (v pravoúhlém trojúhelníku). Schema (4.3), jež jsme si odvodili, pak říká: každému ostrému úhlu přísluší určitý úkos, každému úkosu přísluší určitý ostrý úhel. Úkos se obvykle neudává hodnotou poměru, nýbrž přímo poměrem (obr. 8, kde úkos je 1:5, nebo obr. 9, kde je zobrazen t. zv. klín s nosem, úkos je 1:100) nebo v procentech (obr. 10, kde je zobrazeno široké *T* železo, úkos je jednak 2%, jednak 4%), což není nic jiného než zase poměr, neboť 1% je totéž jako poměr 1:100. Úkos se obyčejně připisuje k přeponě příslušného trojúhelníka (který se ovšem nemusí ani zakreslit, jak je tomu v obr. 9 a 10).



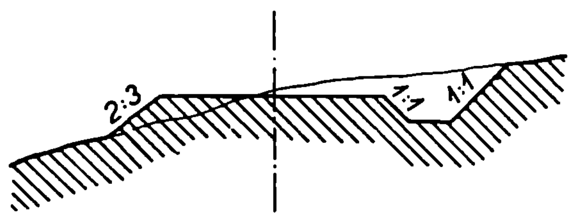
8. •



Obr. 9.



Obr. 10.



Obr. 11.

Také v pozemním stavitelství se užívá místo úhlů raději čísla *t*. Říká se mu zde obvykle *spád*. Spádem tedy rozumíme poměr protější odvěsny k přilehlé odvěsně. Tak na př. v obr. 11 je zakreslen příčný profil vozovky v terénu. Neudává se úhel, který svírají násypy a výkopy s vodorovnou rovinou, nýbrž udává se vždy jen jejich spád. V obr. 11 má násyp spád 2:3, výkopy mají spád 1:1. Velikost spádu se připisuje k přeponě příslušného pravoúhlého trojúhelníka (který se však zpravidla nezakreslí).

Někdy se místo slova spád užívá také názvu *stoupání* nebo *klesání*. Tak na př. říkáme, že silnice má stoupání 5% nebo že trať má klesání $3^0/_{00}$.

Nebudeme probírat vše do podrobností, jenom ještě jednou zdůrazníme, že v žádném z uvedených praktických příkladů se neudává úhel, nýbrž právě číslo *t*, které je ovšem podle

(4.3) jednoznačně přiřazeno jakémusi ostrému úhlu α; tento úhel umíme ovšem pomocí udaného čísla t (ať už úkosu nebo spádu nebo stoupání nebo klesání) vždy sestrojit.

V matematice zavádí se však pro číslo t naprosto jiný název; promluvíme o tom v dalším odstavci.

Cvičení.

4.1. Sestrojte úhel příslušný úkosu 1 : 10.

4.2. Klínek o úkosu 1 : 15, jehož podélným řezem je pravoúhlý lichoběžník, má délku (= výška lichoběžníka) 12 cm, kratší základna lichoběžníka je 2 cm; jak velká je druhá základna lichoběžníka?

4.3. Šířka dna kanálu, jehož profilem je rovnoramenný lichoběžník, je 4,5 m; jeho pobočné stěny mají spád 2 : 3. Jaká je hloubka vody, jestliže šířka hladiny je 7,5 m?

5. TANGENS OSTRÉHO ÚHLU

Hlavním výsledkem předchozího odstavce bylo zjištění, udané schematem (4.3,) že každému ostrému úhlu α lze přiřadit určité kladné číslo t a také obráceně, ke každému kladnému číslu t lze přiřadit určitý ostrý úhel α. Tomuto číslu t budeme od nynějška říkat *tangens úhlu* α. Pro tangens úhlu α platí tedy vše, co jsme si řekli o čísle t. Vysvětlení, proč se zavádí název tangens, podáme později. Vzhledem k tomu, že číslo t přiřazené ostrému úhlu α bylo určeno poměrem protější odvěsny k přilehlé odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku, jehož jeden úhel je právě α, je přesná definice tangenty tato:

DEFINICE 5.1a. Tangens ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr protější odvěsny (k úhlu α) k přilehlé odvěsně.

Hned poznamenejme, že se velice často místo této přesné definice stručně říkává:

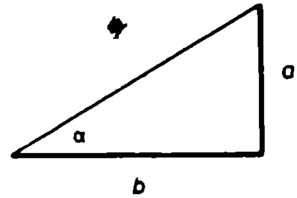
DEFINICE 5.1b. Tangens je poměr protější odvěsny k přilehlé odvěsně.

Poznámka. Tato definice je poněkud neúplná, neboť se v ní nemluví, o jaký úhel se jedná. Jestliže se však předem omezíme jen na ostré úhly, pak právě uvedená druhá definice tangenty je zcela vhodná. Doporučujeme, abyste si zapamatovali (vlastně naučili nazpaměť tak, abyste se nikdy později nespletli) toto druhé jednodušší znění definice tangenty, ale měli vždy přitom na paměti, že platí jen pro ostré úhly.

V definici tangenty se mluví jen o pravoúhlém trojúhelníku, jehož jeden úhel je ostrý úhel α; nic více se o trojúhelníku neříká. Není také třeba, neboť u všech pravoúhlých trojúhelníků, jejichž jeden úhel je α, je poměr protilehlé odvěsny k přilehlé (což je dle definice 5.1 právě tangens úhlu α) týž, jak jsme zjistili v předchozím odstavci.

Pro tangens úhlu α je třeba ještě zavést nějaký vhodnější matematický symbol, než je pouhé označení t, z něhož by bylo patrno, ke kterému úhlu přísluší. Volí se značka $\operatorname{tg}\alpha$; čteme ji vždy „tangens úhlu α" nebo prostě „tangens α". Jestliže tedy protější odvěsna k úhlu α jest a a přilehlá odvěsna b (obr. 12), pak obsah definice 5.1 zapíšeme takto

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}. \qquad (5.1)$$



Obr. 12.

Při zapisování tohoto vzorce čteme: tangens úhlu α rovná se poměru protější odvěsny a k přilehlé odvěsně b nebo jen krátce: tangens α rovná se a ku b.

Poznámka. Jestliže jsme upozornili na to, že je třeba znát definici 5.1, pak je nutno ještě dodat, že stejně potřebné je umět tuto definici zapsat matematický vzorcem (5.1). Při zapisování vzorce (5.1) si uvědomte, že $\operatorname{tg}\alpha$ je jediný symbol, to znamená, že napsat ve vzorci samotné tg bez označení úhlu, o který se jedná, nemá smyslu. Tedy píšeme vždy $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ a pod., nebo známe-li přímo velikost úhlu, na př. $\alpha = 45°$

pak píšeme samozřejmě tg45°. Zdůrazněme ještě, že tangens ostrého úhlu je hodnota jistého poměru kladných délek, tedy je to číslo nepojmenované (a ovšem vždy kladné).

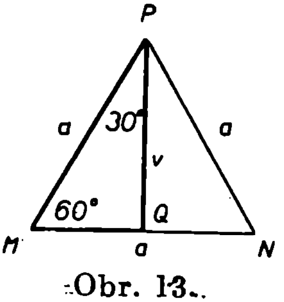
První otázka, kterou si každý položí, je, jak se skutečně k danému ostrému úhlu α najde jeho tangenta. Odpověď je snadná: přesně podle definice. Ostatně právě v předchozím odstavci jsme se tím zabývali, neboť číslo t není nic jiného než tangenta úhlu α. Formulujme zmíněnou otázku jako úlohu:

Úloha 5.1. Jest dán ostrý úhel α; najděte jeho tangentu.

Řešení. Sestrojíme si libovolný pravoúhlý trojúhelník, jehož jedním úhlem je úhel α, určíme délku obou odvěsen a najdeme poměr protější (k úhlu α) k přilehlé. Hodnota tohoto poměru je právě tgα.

V řešení je uvedeno: ...určíme délku obou odvěsen. Jenže jak tyto délky určíme? Většinou změřením obou odvěsen; ovšem při měření dopouštíme se vždy nepřesností, takže takto určený tangens je jen jeho přibližná hodnota. V některých případech lze však stanovit takto tangens přesně, a to užitím planimetrických pouček. Takto byl v příkladu 4.1 určen tg45°; hledali jsme sice číslo t příslušné úhlu 45°, ale toto číslo je právě tg45°. Našli jsme $t = 1$, tedy je tg45° $= 1$. Obdobně pomocí planimetrie určíme snadno tg30° a tg60°, jak bude ukázáno v dalším příkladu.

Příklad 5.1. Určete tg30° a tg60°.



Obr. 13.

Řešení. Všimneme si rovnostranného $\triangle MNP$ (obr. 13); jeho výška odděluje pravoúhlý $\triangle MPQ$ s úhly 30° a 60°. Je-li a délka strany $\triangle MNP$, pak v $\triangle MPQ$ je odvěsna $\overline{MQ}$ rovna $\frac{1}{2}a$ (neboť v rovnostranném $\triangle MNP$ výška PQ půlí stranu MN), druhá odvěsna PQ je rovna výšce v rovnostranného trojúhelníka, t. j. rovna $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ (podle Pythagorovy věty z $\triangle MPQ$ totiž najdeme $v = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$). Tedy $\text{tg}30° = \overline{MQ} : \overline{PQ} = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a\sqrt{3} = 1 \quad \sqrt{3} = \sqrt{3} : 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Podobně najdeme $\text{tg}60° = \overline{PQ} : \overline{MQ} = \frac{1}{2}a\sqrt{3} : \frac{1}{2}a = \sqrt{3}$. Je výhodné znát zpaměti hodnoty tangent úhlů 30°, 45° a 60°, a proto si nalezené hodnoty shrneme do stručné tabulky

$$\text{tg}30° = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \ \text{tg}45° = 1, \ \text{tg}60° = \sqrt{3}. \tag{5.2}$$

Zbývá ještě řešit úlohu obrácenou k úloze 5.1:

Úloha 5.2. Sestrojte ostrý úhel α, znáte-li jeho tangentu.

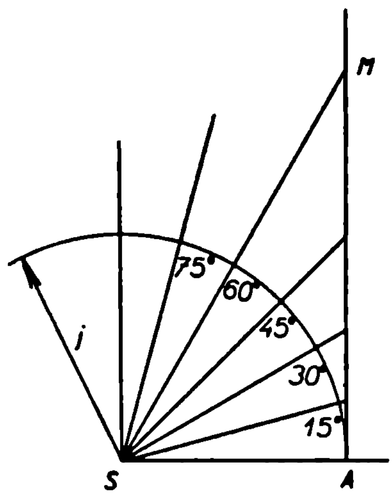
Řešení. Úlohu můžeme formulovat podrobněji: sestrojte ostrý úhel α, je-li $\text{tg}\alpha = t$, kde t je pevné kladné číslo. Zvláštním případem této úlohy byl příklad 4.2. Naši úlohu budeme řešit úplně stejně jako tento příklad. Sestrojíme si libovolný pravoúhlý trojúhelník ABC, ve kterém by poměr odvěsen $\overline{BC} : \overline{AC}$ byl rovný číslu t, pak úhel při vrcholu A v tomto trojúhelníku je hledaný ostrý úhel. Při skutečné konstrukci $\triangle ABC$ postupujeme takto: zvolíme si nejprve zcela libovolně odvěsnu $\overline{AC}$, v koncovém bodě C této úsečky vztyčíme kolmici k AC a naneseme na ni od bodu C úsečku $\overline{BC}$ délky $t\,.\,\overline{AC}$. Tím dostaneme $\triangle ABC$. Skutečně je v něm

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{t\,.\,\overline{AC}}{\overline{AC}} = t.$$

Příklad 5.2. Sestrojte ostrý úhel α, je-li $\text{tg}\alpha = 0{,}1$.

Řešení. Sestrojíme na př. pravoúhlý $\triangle ABC$ tak, aby $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BC} = 1$ cm, pak úhel α při vrcholu A je hledaný úhel.

Podívejme se nyní blíže na hodnoty tangenty ostrých úhlů. Chceme-li na př. získat tangenty úhlů postupujících po 5°, sestrojíme podle postupu uvedeného v řešení úlohy 5.1 pro úhly $\alpha = 5°, 10°, 15°, \ldots, 85°$ příslušné pravoúhlé trojúhelníky a ze změřených odvěsen najdeme hodnoty tangent těchto úhlů. Výhodně postupujeme podle obr. 14, kde jsou sestrojeny trojúhelníky tak, že všechny mají společnou jednu odvěsnu SA a společný vrchol S. Úhel při vrcholu S nabývá postupně zvolené velikosti; nanášíme jej stále v jednom pevně zvoleném smyslu od prvního ramene SA (v obr. 14 tak, že druhé rameno je stále nad ramenem SA). Druhé rameno zvoleného úhlu (v obr. 14 jsou vyznačeny jen úhly 15°, 30°, ...) protíná kolmici vztyčenou v bodě A k přímce SA v třetím vrcholu trojúhelníka. Tangens zvoleného úhlu je pak rovný poměru protější odvěsny k přilehlé, t. j. je rovný délce protější odvěsny měřené délkou úsečky $\overline{SA}$. Přirozeně takto najdeme přibližné hodnoty tangenty, neboť při každé konstrukci a při měření se dopouštíme nějaké nepřesnosti. Na př. v obr. 14 pro úhel 60° najdeme délku protější odvěsny $\overline{MA} \doteq 3{,}5$ cm a protože je voleno $\overline{SA} =$ $= 2$ cm, je $\operatorname{tg} 60° \doteq \dfrac{3{,}5 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 1{,}75$, jak souhlasí vcelku dobře s dříve uvedeným výsledkem z (5.2), neboť při výpočtu $\sqrt{3}$ na dvě desetinná místa najdeme $\sqrt{3} = 1{,}73$.



Obr. 14.

Poznámka. Volíme-li úsečku $\overline{SA}$ za jednotku délky (v našem případě jednotka je $j = 2$ cm), pak délka úsečky $\overline{MA}$ vyjádřená v této jednotce ($3{,}5 \text{ cm} = 1{,}75 \, . \, j$), ovšem po vynechání označení délkových jednotek (tedy po vynechání j), je tangentou příslušného úhlu (v uvedeném případě 1,75). V tom právě spočívá důvod, proč se tangentě říká tangenta, neboť její hodnota se měří na *tečně* (*tangentě*) MA jednotkové kružnice, t. j. kružnice o středu S a poloměru $\overline{SA} = j$ (obr.

14). Vše se ještě více zjednoduší a stane názornější, volíme-li za jednotku j na př. 1 dm; pak totiž není třeba vůbec nic přepočítávat a délka úsečky $\overline{MA}$ (po vynechání označení dm) přímo udává tgα.

Podle právě uvedeného si již sestavíme snadno alespoň krátký přehled přibližných hodnot tangent pro jednotlivé úhly, na př. pro $\alpha = 5°, 10°, \ldots, 85°$. Tyto hodnoty (určené jen na dvě desetinná místa) jsou uvedeny v tabulce (obr. 15), jejíž čtení je jistě každému srozumitelné a nepotřebuje bližšího vysvětlení.

α	tgα	α	tgα	α	tgα
5°	0,09	35°	0,70	65°	2,15
10°	0,18	40°	0,84	70°	2,75
15°	0,27	45°	1,00	75°	3,73
20°	0,36	50°	1,19	80°	5,67
25°	0,47	55°	1,43	85°	11,43
30°	0,58	60°	1,73		

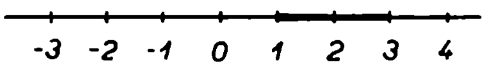
Obr. 15.

Již několikrát jsme se zmínili a z tabulky v obr. 15 je to dobře patrno, že tangenta závisí na velikosti úhlu α; tuto okolnost vyjadřujeme v matematice rčením, že tangens je *funkcí* úhlu α. Jelikož závisí na úhlu, říkáme, že tangenta je *úhloměrná funkce* nebo také *goniometrická funkce* (úhel — řecky *gonia*).

Poznámka. Pojem funkce, který je pro matematiku velice důležitý, není tak zcela běžný, a proto se s ním alespoň trochu seznámíme. Nejdříve však promluvíme krátce o číslech; pokud o nich budeme v dalším jednat, budeme jimi rozumět vždy *reálná čísla*, což jsou čísla, která lze znázornit na t. zv. *ose číselné* (obr. 16). Jsou-li a, b dvě čísla, pak mohou pro ně, pokud se jejich velikosti týče, nastat jen tyto tři případy:

buď *a je menší než b* (pak píšeme $a < b$), nebo *a rovná se b* ($a = b$), nebo *a je větší než b* (což zapisujeme $a > b$). Na ose číselné v 1. případě je a nalevo od b, ve 2. případě se obě čísla ztotožní, ve 3. případě je a napravo od b.

Máme-li dvě různá čísla a, b, pro která platí $a < b$, pak souhrnu všech čísel x, která jsou větší než a a současně menší než b, t. j. souhrnu čísel x, pro která platí $a < x < b$, říkáme



Obr. 16.

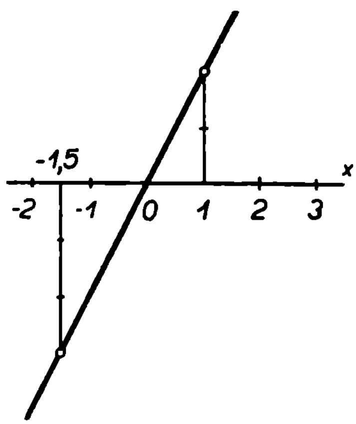
interval a, b. Často říkáme určitěji: *otevřený* interval a, b, abychom vyjádřili, že koncová čísla a, b k němu nepočítáme; označujeme jej (a, b). Na ose číselné čísla x leží mezi čísly a a b. Na př. v obr. 16 je silnější čarou zakreslen interval (1,3); patří k němu všechna čísla x větší než 1 a současně menší než 3. Někdy je však vhodné k intervalu počítat také koncová čísla a, b; pak mluvíme o *uzavřeném* intervalu a, b; pro každé číslo x z tohoto intervalu platí $a \leqq x \leqq b$ (čteme: x je větší nebo rovno a a současně menší nebo rovno b). Značka tohoto intervalu je $\langle a, b \rangle$. Tak interval $\langle 1,3 \rangle$ značí všechna čísla mezi 1 a 3 včetně 1 a 3. Pro označení souhrnu všech čísel zavádíme znak $(-\infty, +\infty)$ a čteme: interval minus nekonečno, plus nekonečno.

Teď si již můžeme zavést pro naše účely vhodnou definici funkce. Říkáme, že *v daném intervalu I je definovaná funkce, je-li dán předpis, kterým se každému x z intervalu I přiřazuje nějaké číslo y* (kterému říkáme *hodnota* funkce). Hned si ukážeme jednoduchý příklad funkce.

Příklad 5.3. Nechť interval I je $(-\infty, +\infty)$; daný předpis je: každému x z I (t. j. každému číslu) přiřadíme dvojnásobek čísla x. To znamená, že $y = 2x$ je funkce (definovaná v intervalu $(-\infty, +\infty)$). Tak na př. číslu $x = 1$ je přiřazeno danou funkcí číslo $y = 2{,}1$, tedy hodnota dané funkce pro $x = 1$ je $y = 2$; číslu $x = -1{,}5$ je přiřazeno číslo $y = 2 \cdot -1{,}5$, tudíž hodnota funkce pro $x = -1{,}5$ je $y = -3$ atd.

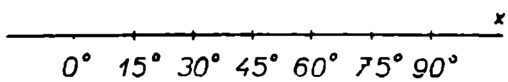
Abychom si učinili názornější představu o dané funkci, sestrojíme její *grafický obraz*, a to tak, že v bodě číselné osy, který znázorňuje číslo x, vztyčíme kolmici k číselné ose a na tuto kolmici naneseme od osy hodnotu funkce. Obyčejně volíme číselnou osu vodorovně; pak kladné hodnoty funkce nanášíme nad číselnou osu, záporné hodnoty pod osu. Takto dostaneme jeden bod grafického obrazu dané funkce; čím přesněji chceme zachytiti grafický průběh funkce v daném intervalu, tím více takových bodů musíme sestrojit. Obyčejně se spokojíme jen několika přesně sestrojenými body, polohu dalších bodů odhadneme a sestrojené body spojíme křivkou, které říkáme *graf funkce*.

Příklad 5.4. Sestrojte grafický obraz funkce $y = 2x$ z příkladu 5.3 (obr. 17). Našli jsme, že pro $x = 1$ je $y = 2$. Tedy bod grafického obrazu funkce $y = 2x$ dostaneme, jestliže v bodě $x = 1$ osy vztyčíme k této ose kolmici a na ni od osy naneseme hodnotu funkce $y = 2$. Podobně v bodě $x = -1{,}5$ sestrojíme k ose kolmici, na kterou od osy naneseme hodnotu funkce $y = -3$ atd. Dá se lehko ukázat, že všechny takto sestrojené body leží na přímce. Tedy grafem funkce $y = 2x$ (definované v intervalu $(-\infty, +\infty)$) je určitá přímka.



Obr. 17.

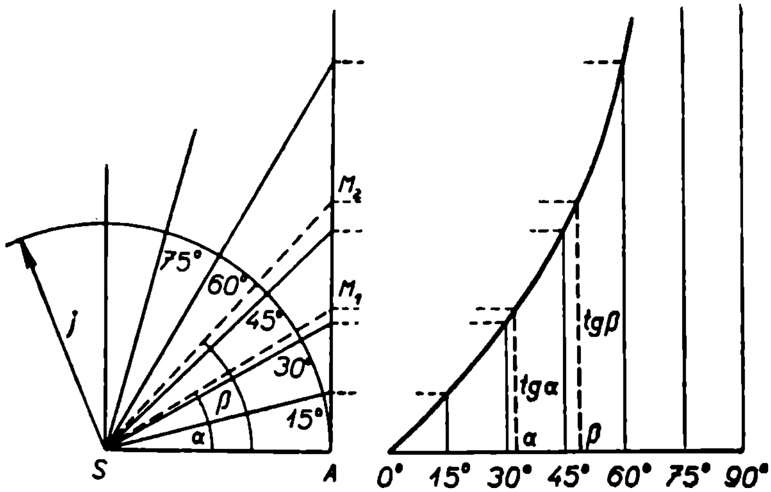
S ohledem na právě uvedenou definici funkce a na definici tangenty můžeme nyní říci určitěji: *tangens* (ostrého úhlu) *je úhloměrná funkce definovaná v otevřeném intervalu* $(0°, 90°)$. Zdá se, že je tady jistá nedůslednost. Dosud jsme mluvili o intervalu jen v souvislosti s čísly. Nyní říkáme, že také úhly tvoří interval. Nedůslednost je jen zdánlivá, protože je možno každému úhlu okamžitě přiřadit číslo, a to tak, že zvolíme jednotkovou kružnici a úhlu α přiřazujeme délku oblouku, který ramena středového úhlu α vytínají na této jednotkové kružnici. Délka příslušného oblouku je $\frac{\pi\alpha}{180}$, neboť obvod jednotkové kružnice (o poloměru 1) je 2π. (Předpokládáme znalost vzorce $o = 2\pi r$ pro obvod o kružnice, kde r je poloměr dané kružnice.) Středovému úhlu 1° přísluší oblouk $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ a tedy středovému úhlu α přísluší oblouk $\frac{\pi\alpha}{180}$. Oblouk jednotkové kružnice příslušný středovému úhlu α se nazývá *arkus* α a značí se arcα. Je tedy arc$\alpha = \pi\alpha : 180$. Speciálně $\text{arc}90^\circ = \pi \,.\, 90 : 180 = \frac{1}{2}\pi \doteq 1{,}57$. Jestliže v dalším budeme mluvit o znázornění úhlu α na číselné ose, budeme tím rozumět toto: na číselné ose najdeme číslo, jehož velikost je arcα a k němu připíšeme α. Dostaneme tím na číselné ose novou stupnici, a to ve stupních. Tak v obr. 18 je znázorněn interval $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, velikost příslušné úsečky je $\frac{1}{2}\pi \doteq 1{,}57 \,.\, j$; protože jsme volili $j = 2\,\text{cm}$ je $\frac{1}{2}\pi$ znázorněno úsečkou 3,14 cm. Při této příležitosti uveďme, že právě provedené znázornění vede k tomu, že



Obr. 18.

raději místo úhlové míry pro úhly se užívá *obloukové míry*; rozumíme tím: místo měření úhlů ve stupních, měříme je pomocí *arku* α. Tak na př. místo úhel měří 360°, říkáme úhel je 2π, nebo místo úhel je pravý, říkáme úhel je $\frac{1}{2}\pi$ atd. V dalším se však přidržíme známého měření úhlů ve stupních.

Nyní již lehko sestrojíme grafický obraz tangenty. Stačí na kolmice k číselné ose v jednotlivých bodech znázorňujících úhly α z intervalu $(0°, 90°)$ nanést od osy příslušnou hodnotu tangenty; přitom s výhodou použijeme konstrukce těchto hodnot uvedené v obr. 14. Postup sestrojování jednotlivých bodů grafického obrazu tangenty je patrný z obr. 19. Pomocí



a) Obr. 19. *b)*

grafu tangenty můžeme stanovit hodnotu tangenty libovolného úhlu z intervalu $(0°, 90°)$. Největší výhoda grafického obrazu tangenty spočívá v tom, že nám udává přehledný obraz průběhu tangenty. Z obr. 19 vidíme, že křivka stoupá odleva doprava, což znamená: roste-li (t. j. zvětšuje-li se) úhel, roste také jeho tangenta. K tomuto důležitému poznatku jsme došli jen na základě grafického obrazu, ale můžeme jej přímo dokázat. Uveďme jej proto větou.

VĚTA 5.1. Tangens ostrého úhlu je funkce rostoucí. Přesněji: roste-li úhel α v otevřeném intervalu $(0°, 90°)$, pak tgα roste v otevřeném intervalu $(0, +\infty)$.

Důkaz. Vyslovená věta vlastně říká: jestliže α, β jsou ostré úhly a je-li $\alpha < \beta$, pak je také tg$\alpha <$ tgβ. To skutečně platí. Je-li totiž $\alpha < \beta$, pak v příslušných trojúhelnících

SAM_1 a SAM_2 (obr. 19a) při stejné odvěsně $\overline{SA}$ je nutně $\overline{AM_1} < \overline{AM_2}$, což však právě říká, že tg$\alpha <$ tgβ. Doplněk věty plyne z těchto dvou vlastností $\triangle SAM$: 1. jestliže α se blíží 0°, pak $\overline{AM}$ se blíží 0, 2. jestliže α se blíží 90°, pak $\overline{AM}$ roste nade všechny meze.

Grafický obraz tangenty ostrého úhlu v obr. 19b nám umožňuje nejen vyhledat (alespoň přibližně) tangentu libovolného ostrého úhlu, nýbrž také naopak dává možnost k dané tangentě (t. j. k libovolnému kladnému číslu) vyhledat (zase jen přibližně) příslušný ostrý úhel. Tím se však už nebudeme podrobně zabývat, neboť obvykle k vyhledání hodnot tangenty a obráceně k určování úhlu z dané tangenty užíváme podrobnějších *tabulek* alespoň třímístných (ale i vícemístných), jež jsou sestavovány na naprosto jiném podkladě, o kterém v této knížce nemůžeme jednat. Název třímístné (čtyřmístné atd.) tabulky nám říká, na kolik desetinných míst přesné jsou v tabulkách vypočítány hodnoty tangenty.

Takové tabulky (nejen tangenty ale i ostatních goniometrických funkcí, jimiž se budeme zabývat v několika dalších odstavcích) jsou v matematické části téměř každé technické příručky a samozřejmě i ve speciálních matematických tabulkách*). Pro pohodlí čtenáře je na konci knížečky připojena třímístná tabulka goniometrických funkcí, kde se vyskytují také hodnoty tangenty ostrých úhlů postupujících po 1° Čtení v této tabulce je v podstatě stejné jako v tabulce v obr. 15. Úhly do 45° jsou uvedeny po levé straně tabulky (rostou shora dolů), hodnoty jejich tangent se čtou v příslušném řádku a ve sloupci nadepsaném nahoře tg. Úhly nad 45° jsou uvedeny po pravé straně tabulky (rostou zdola nahoru) a hodnoty jejich tangent se čtou ve sloupci, který je dole označen tg. Uspořádání čtyřmístných a pěti-

---

*) Na př. M. Valouch a M. A. Valouch: *Pětimístné tabulky logaritmické* (Praha 1950, Přírodovědecké vydavatelství), kde tabulky hodnot goniometrických funkcí jsou pětimístné.

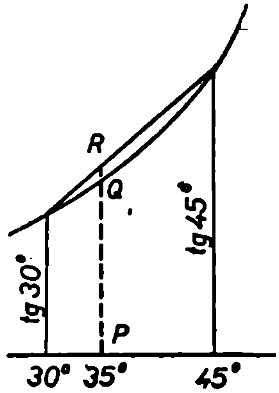
místných tabulek hodnot tangenty se celkem neliší od tohoto uspořádání.

Abychom se mohli snadno orientovat ve čtení takových podrobnějších tabulek, uveďme alespoň krátký výňatek z pětimístných tabulek hodnot tangenty (obr. 20). V prvém sloupci jsou uvedeny úhly ve stupních a desítkách minut, v dalším sloupci v příslušném řádku jsou vypsány hodnoty tangenty. O třetím sloupci bude řeč poněkud později. Aby tabulky získaly na přehlednosti, neopakují se údaje, jež si snadno můžeme doplnit. Zvláště upozorňujeme na to, že hodnoty tangent jsou uvedeny přesně jen u celých stupňů. U ostatních hodnot je obvykle uvedena jen pětimístná skupina cifer za desetinnou čárkou. Cifru před desetinnou čárkou je nutno doplnit. Tak na př. z tab. najdeme tg 25°40′ = 0,48055. Je-li naopak známo, že tangenta ostrého úhlu α je na př. tgα = 0,49134, pak z tabulky hned najdeme α = 26°10′

°	tg	*d.* 1′
25 0	0,46 631	
10	46 985	35,4
20	47 341	35,6
30	47 698	35,7
40	48 055	35,7
50	48 414	35,9
26 0	0,48 773	35,9
10	49 134	36,1
20	49 495	36,1

Obr. 20.

Často je třeba najít tangentu úhlu, který není přímo uveden v tabulkách; pomocí těchže tabulek můžeme však stanovit hodnotu jeho tangenty alespoň přibližně. Užíváme přitom t. zv. *interpolace* (vkládání nových hodnot). Vysvětlíme nejprve podstatu interpolace na grafu tangenty z obr. 19b, kde jsou konstruktivně přesně stanoveny body křivky na př. pro $\alpha = 30°$ a $\alpha = 45°$, příslušné hodnoty tangent jsou (viz tabulku v obr. 15) tg30° = 0,58 a tg45° = 1. Vidíme: vzroste-li úhel o 15° (a to z 30° na 45°), pak hodnota tangenty vzroste o 0,42 (z 0,58 na 1). Chceme-li nyní alespoň zhruba stanovit tg35°, pak prostě graf tangenty pro úhly intervalu ⟨30°, 45°⟩ nahradíme úsečkou spojující oba příslušné body (viz schematický obr. 21). Toto geometrické nahrazení křivky úsečkou umožňuje právě přibližný výpočet hodnot tangenty úhlů intervalu ⟨30°, 45°⟩, neboť potom platí tato úvaha: jestliže při vzrůstu o 15° (z 30° na 45°) tangenta vzroste o 0,42, pak vzroste-li úhel jen o 1°, vzroste tangenta o 0,42 : : 15 = 0,028 a tedy, vzroste-li úhel o 5° (z 30° na 35°), pak tangens se zvětší o 0,028 . 5 = 0,14. Je tedy přibližně tg35° $\doteq$ 0,58 + 0,14 = 0,72. Porovnáme-li tuto přibližnou hodnotu s hodnotou z tabulky v obr. 15, vidíme, že je tu poměrně dobrá shoda.



Obr. 21.

Říkáme, že jsme tg35° vypočetli interpolací (z hodnot tg30° a tg45°). Geometricky to značí, že jsme správnou hodnotu tangenty $\overline{PQ}$ (obr. 21), měřenou od číselné osy ke křivce, nahradili přibližnou hodnotou $\overline{PR}$, měřenou od osy k dříve zmíněné úsečce. Početně toto nahrazení křivky mezi dvěma body úsečkou znamená totéž jako říci, že v *uvažovaném intervalu je rozdíl úhlů přímo úměrný rozdílu příslušných hodnot tangenty*. Čím menší bude ten interval, tím přesnější výsledky dostaneme. Interpolace používáme právě k výpočtu hodnot tangent úhlů, jež už nejsou obsaženy v tabulkách.

Příklad 5.5. Vypočtěte tg25°46′ (užitím interpolace).

Řešení. V pětimístných tabulkách (obr. 20) jsou uvedeny jen tg25°40′ = 0,48055 a tg25°50′ = 0,48414; vzroste-li úhel o 10′ (z 25°40′ na 25°50′), vzroste tangenta o 0,00359 (= 0,48414 — 0,48055), na 1′ připadne 0,000359 a na 6′ tedy 0,000359 . 6 $\doteq$ 0,00215 (zaokrouhlíme vždy na pět desetinných míst). Hledaná tangenta je pak tg25°46′ = = 0,48055 + 0,00215 = 0,48270.

Při skutečném výpočtu si počínáme takto. Najdeme tangentu nejblíže nižšího úhlu (t. j. v našem případě 0,48055) a stanovíme t. zv. *tabulkový rozdíl* (*tabulkovou diferenci*) jako rozdíl hodnot tangent nejblíže nižšího a nejblíže vyššího úhlu uvedených v tabulkách (t. j. 0,00359); dále určíme *diferenci příslušnou* 1′ (t. j. 0,000359), násobením této diference počtem minut, kterým přesahuje daný úhel příslušný úhel uvedený v tabulkách (u nás 6) a zaokrouhlením na pět desetinných míst dostaneme *opravu* (t. j. 0,00215), kterou přičteme [neboť tangens je v intervalu (0°, 90°) funkcí rostoucí] k hodnotě tangenty nejblíže nižšího úhlu. Celý postup zapíšeme krátce takto

$$\begin{array}{rl} \mathrm{tg}\,25°40' = 0{,}48055 & \\ 2154 & \ldots (35{,}9\,.\,6) \\ \hline 0{,}48270 & \end{array}$$

Násobení uvedené v závorce provádíme obvykle nazpaměť. Ještě poznamenejme, že tabulková diference příslušející 1′ bývá uvedena v tabulkách (obr. 20, třetí sloupec). Čísla tam uvedená znamenají stotisíciny.

Tutéž úlohu můžeme však také řešit pomocí třímístných tabulek (viz tab. na str. 180 a 181). Vyhledáme $\mathrm{tg}\,25° = 0{,}466$, $\mathrm{tg}\,26° = 0{,}488$; tabulková diference je $0{,}488 - 0{,}466 = 0{,}022$. Tabulková diference připadající na 1′ (= 1° : 60) je 0,022 : 60 a tedy oprava, t. j. diference příslušná 46′, je $\frac{0{,}022}{60}\,.\,46 \doteq 0{,}017$. Hledaná tangenta pak je $\mathrm{tg}\,25°46' = 0{,}466 + 0{,}017 = 0{,}483$ (jak skutečně dobře souhlasí s dříve nalezeným výsledkem 0,48270, zaokrouhleným ovšem na tři desetinná místa). Celkový postup zapíšeme opět krátce takto

$$\begin{array}{rl} \mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}466 & \\ 17 & \quad \frac{22}{60}\,.\,46 \\ \hline 0{,}483 & \end{array}$$

Příklad 5.6. Najděte ostrý úhel α, je-li $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}47104$ (užitím interpolace).

Řešení. V tabulkách (obr. 20) není ve sloupci tg uvedena hodnota 0,47104; nejblíže nižší hodnota 0,46985 přísluší úhlu $\alpha = 25°10'$. Hledaný úhel bude tedy mezi $25°10'$ a $25°20'$. Na $1'$ (mezi $25°10'$ a $25°20'$) připadá tabulkový rozdíl 0,000356; naše hodnota 0,47104 je o 0,00119 větší než $\mathrm{tg}25°10'$, tato diference 0,00119 přísluší tolika minutám, kolikrát je diference příslušná jedné minutě obsažena v naší diferenci, t. j. $0{,}00119 : 0{,}000356 = 119 : 35{,}6 \doteq 3$; tedy oprava je $3'$, kterou přičteme (neboť tangens je funkce rostoucí) k $25°10'$. Hledaný úhel je $\alpha = 25°13'$. Celý zápis výpočtu je opět jednoduchý

$$
\begin{array}{rlr}
\mathrm{tg}\alpha = & 0{,}47104 & \\
 & \underline{\;\;46985} & 25°10' \\
 & \;\;\;\;\;119 : 35{,}6 & \underline{3'} \\
 & & \alpha = 25°13'.
\end{array}
$$

Úplně obdobně postupujeme, máme-li k disposici na př. jen naše třímístné tabulky na str. 180 a 181. V tomto případě zaokrouhlujeme danou hodnotu $\mathrm{tg}\alpha$ na tři deset. místa, tedy $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}471$. Nebudeme už popisovat celý postup, napíšeme jen snadno srozumitelný stručný zápis

$$
\begin{array}{rlr}
\mathrm{tg}\alpha = & 0{,}471 & \\
 & \underline{\;\;466} & 25° \\
 & \;\;\;\;\;5 : \frac{22}{60} & \underline{14'} \\
 & & \alpha = \;\; 25°14'.
\end{array}
$$

Zlomek $\frac{22}{60}$ znamená vlastně $\frac{22}{60}$ tisíciny a je to diference příslušná $1'$; vždyť tabulková diference příslušná $1°$ je $0{,}488 - 0{,}466 = 0{,}022$. Nalezený výsledek se sice liší o $1'$ od dřívějšího výsledku, nesmíme však zapomenout, že v obojím postupu používáme přibližné methody výpočtu a ještě navíc vždy zaokrouhlujeme. Samozřejmě přesnější výsledek je prvý, kdy jsme používali podrobnějších tabulek.

Nyní učiníme rozhodný krok, ze kterého vynikne důležitost zavedení pojmu tangenty. Ve vzorci (5.1), t. j. ve vzorci

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}, \tag{5.3}$$

vystupují tři základní prvky pravoúhlého trojúhelníka: 1. odvěsna a, 2. odvěsna b a 3. úhel α. Známe-li dva z těchto prvků, pak můžeme právě pomocí (5.3) třetí prvek vypočítat. Tento výpočet skutečně provedeme v následujících třech úlohách o pravoúhlém trojúhelníku; obecné řešení v úloze bude vždy hned provázeno číselným příkladem.

Úloha 5.3. Jsou dány odvěsny a, b pravoúhlého trojúhelníka; vypočtěte úhel α (užitím $\mathrm{tg}\,\alpha$).

Řešení. Jelikož známe obě odvěsny, můžeme hned podle vzorce (5.3) vypočítat $\mathrm{tg}\,\alpha$; úhel α pak již vyhledáme z tabulek hodnot tangenty.

Příklad 5.7. V pravoúhlém trojúhelníku je $a = 13$ cm, $b = 35$ cm; vypočtěte úhel α.

Řešení. Nejdříve vypočteme $\mathrm{tg}\,\alpha$. Jest $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$. V našem případě tedy $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{13\ \mathrm{cm}}{35\ \mathrm{cm}} \doteq 0{,}37143$. V pětimístných tabulkách tangenty najdeme hodnotu 0,37057, jež přísluší úhlu $\alpha = 20°20'$. Naše diference je 86, tabulková 33,1, tedy oprava je $86 : 33{,}1 \doteq 3$. Úhel α je $20°20' + 3' = 20°23'$ (pomocí třímístných tabulek bychom našli $20°21'$).

Úloha 5.4. Je dán úhel α a přilehlá odvěsna b pravoúhlého trojúhelníka: vypočtěte protější odvěsnu a.

Řešení. Ze vzorce (5.3) plyne (násobíme-li levou i pravou stranu vzorce číslem b) $b\,\mathrm{tg}\,\alpha = a$, t. j.

$$a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha; \tag{5.4}$$

tedy protější odvěsnu a vypočteme, když nejdříve k danému úhlu α najdeme pomocí tabulek $\mathrm{tg}\,\alpha$ a pak nalezenou hodnotu násobíme délkou přilehlé odvěsny b.

Příklad 5.8. V pravoúhlém trojúhelníku je $\alpha = 72°14'$, $b = 2{,}5$ cm; vypočtěte a.

Řešení. Ze vzorce $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$ obdržíme $a = b\,\mathrm{tg}\alpha$. V našem případě je $a = 2{,}5\ \mathrm{cm}\,.\,\mathrm{tg}72°14'$. Nejprve pomocí (třímístných) tabulek určíme

$$\begin{array}{r l}
\mathrm{tg}\,72°14' = 3{,}078 & \\
\underline{45} & \quad \frac{195}{60}\,.\,14 \\
3{,}123 &
\end{array}$$

a pak již snadno pro hledanou odvěsnu najdeme $a = 2{,}5\,.\,3{,}123\ \mathrm{cm} \doteq 7{,}8$ cm. Při této příležitosti poznamenejme, že hledanou délku obyčejně vypočítáme jen na tolik deset. míst, na kolik míst jsou dány původní délky.

Úloha 5.5. Je dán úhel α a protější odvěsna a pravoúhlého trojúhelníka; vypočtěte přilehlou odvěsnu b.

Řešení. Ze vzorce (5.3) najdeme (nejprve $b\,\mathrm{tg}\alpha = a$, z něho dělením levé a pravé strany číslem $\mathrm{tg}\alpha$)

$$b = \frac{a}{\mathrm{tg}\alpha}; \tag{5.5}$$

tedy zase najdeme nejprve k úhlu α pomocí tabulek $\mathrm{tg}\alpha$, přilehlá odvěsna pak je rovna protější odvěsně dělené $\mathrm{tg}\alpha$.

Příklad 5.9. V pravoúhlém trojúhelníku je $a = 10$ cm, $\alpha = 37°$; určete b.

Řešení. Hledáme přilehlou odvěsnu. Ze vzorce $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$ vyjádříme tedy b; dostaneme $b = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\alpha}$. V našem případě $b = \dfrac{10\ \mathrm{cm}}{\mathrm{tg}37°} = \dfrac{10}{0{,}754}\ \mathrm{cm} \doteq 13{,}3$ cm. Jelikož se vzorce (5.4), který jsme si odvodili ze vzorce (5.3), velice často užívá, vyjádříme jeho obsah ještě zvlášť větou.

VĚTA 5.2. Odvěsna a pravoúhlého trojúhelníka je rovna součinu druhé odvěsny b a tangenty úhlu α ležícího proti hledané odvěsně:

$$a = b \operatorname{tg}\alpha. \tag{5.6}$$

Cvičení.

5.1. Bez užití tabulek najděte a) $\operatorname{tg}25°$, b) $\operatorname{tg}68°30'$ a porovnejte s hodnotami z tabulek.

5.2. Vyjádřete $\operatorname{tg}\beta$ v pravoúhlém trojúhelníku ABC (a to poměrem příslušných odvěsen).

5.3. V pravoúhlém $\triangle\, ABC$ je odvěsna $a = 16$ cm, odvěsna $b = 4$ cm; vypočtěte a) $\operatorname{tg}\alpha$, b) $\operatorname{tg}\beta$.

5.4. V pravoúhlém $\triangle\, ABC$ je přepona $c = 13$ cm, odvěsna $b = 5$ cm; vypočtěte a) $\operatorname{tg}\alpha$, b) $\operatorname{tg}\beta$.

5.5. Sestrojte ostrý úhel α, je-li a) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}57$, b) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}5$.

5.6. V tabulkách vyhledejte hodnoty a) $\operatorname{tg}37°$, b) $\operatorname{tg}81°$, c) $\operatorname{tg}15°20'$, d) $\operatorname{tg}50°50'$, e) $\operatorname{tg}23°46'$, f) $\operatorname{tg}63°8'$.

5.7. K daným hodnotám tangenty vyhledejte pomocí tabulek příslušné ostré úhly: a) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}32492$, b) $\operatorname{tg}\beta = 2{,}24604$, c) $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}55812$, d) $\operatorname{tg}\delta = 1{,}13029$, e) $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}65863$, f) $\operatorname{tg}\psi = 1{,}33357$, g) $\operatorname{tg}\lambda = \frac{3}{5}$, h) $\operatorname{tg}\mu = \frac{9}{4}$. Užijete-li jen třímístných tabulek, pak předem zaokrouhlete dané hodnoty na tři desetinná místa; v posledních dvou příkladech převeďte nejdříve dané zlomky na desetinné zlomky.

5.8. Kterému úhlu přísluší úkos $1 : 5$?

5.9. Jaký sklon má násyp o spádu $2 : 3$?

5.10. Jaký sklon má silnice o stoupání $7{,}5\,\%$?

5.11. V pravoúhlém trojúhelníku ABC je odvěsna $a = 36$ cm a odvěsna $b = 24$ cm; jak velký je úhel α?

5.12. V jakém úhlu jeví se slunce nad obzorem, jestliže svislá tyč 1,6 m vysoká vrhá na vodorovnou rovinu stín 1 m dlouhý?

5.13. V pravoúhlém $\triangle\, ABC$ je $\alpha = 48°15'$, $b = 10$ cm; jak velká je druhá odvěsna?

5.14. V obdélníku svírá strana $p = 12{,}5$ cm s úhlopříčkou úhel $\omega = 27°30'$; jak velká je druhá strana q obdélníka?

5.15. V pravoúhlém $\triangle\, ABC$ je $\alpha = 63°40'$, $a = 5$ cm; jak velká je přilehlá odvěsna?

6. KOTANGENS OSTRÉHO ÚHLU

Základem podrobných úvah 4. a 5. odstavce byla tato vlastnost pravoúhlých trojúhelníků o společném úhlu α: poměr protější odvěsny k přilehlé odvěsně (který jsme nazvali $\operatorname{tg}\alpha$) je pro všechny takové trojúhelníky stejný a závisí jen na velikosti ostrého úhlu α.

Je okamžitě zřejmé, že tutéž vlastnost má také převrácený poměr. Tedy poměr přilehlé odvěsny k protější odvěsně je rovněž pro všechny pravoúhlé trojúhelníky o společném úhlu α týž. Tomuto převrácenému poměru budeme říkat *kotangens* α a značit $\operatorname{cotg}\alpha$. Tedy (obr. 12):

DEFINICE 6.1a. Kotangens ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr přilehlé odvěsny (k úhlu α) k protilehlé odvěsně, t. j.

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}. \tag{6.1}$$

A zase, jestliže se omezíme již předem na ostré úhly, můžeme definici 6.1a vyslovit ve stručnější formě:

DEFINICE 6.1b. Kotangens je poměr přilehlé odvěsny k protější odvěsně.

Poznámka. Definici kotangenty (právě tak jako tangenty) je třeba umět zpaměti. Ještě dodejme, že stejně jako tangenta je i kotangenta ostrého úhlu hodnotou poměru, tedy číslo nepojmenované (a vždy kladné).

Mezi tangentou a kotangentou téhož ostrého úhlu existuje velice úzký vztah, vyjádřený větou:

VĚTA 6.1. Pro libovolný ostrý úhel platí

$$\text{a) } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \text{b) } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}. \tag{6.2}$$

Důkaz plyne okamžitě z toho, že podíly $\frac{a}{b}$ i $\frac{b}{a}$ odvěsen pravoúhlého trojúhelníka lze napsat také ve tvaru složeného zlomku. Je totiž

$$\text{a)}\ \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}}, \quad \text{b)}\ \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}. \tag{6.3}$$

Dosadíme-li do (6.3) ze vzorců (5.1) a (6.1), dostáváme právě vzorce (6.2a) a (6.2b), jichž se velice často užívá (a proto doporučuje se znát je zpaměti).

Přistupme nyní k základním úlohám o kotangentě.

Úloha 6.1. Jest dán ostrý úhel α; najděte jeho kotangentu.

Řešení je obdobné řešení úlohy 5.1. Sestrojíme opět libovolný pravoúhlý trojúhelník tak, aby jedním jeho úhlem byl α, určíme délku obou odvěsen; pak již podle definice poměr přilehlé k protější je hledaná kotangenta.

Příklad 6.1. Určete cotg30°, cotg45° a cotg60°.

Řešení. Především, abychom určili cotg45°, všimneme si libovolného pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka (obr. 7). Je-li délka jeho odvěsen a, pak podle definice cotg45° $= \frac{a}{a} = 1$. Podobně cotg 30° a cotg 60° určíme z $\triangle MPQ$ (obr. 13). $\text{cotg}30^\circ = \overline{PQ}\ \ \overline{MQ} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}\ \ \frac{1}{2}a = \sqrt{3}$ a $\text{cotg}60^\circ = \overline{MQ} : \overline{PQ} = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Tedy je

$$\text{cotg}30^\circ = \sqrt{3}, \quad \text{cotg}45^\circ = 1, \quad \text{cotg}60^\circ = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \tag{6.4}$$

jak jsme ostatně mohli dostat přímo podle vztahu (6.2a) ze známých hodnot tg30°, tg45° a tg60° (viz (5.2)).

Úloha 6.2. Sestrojte ostrý úhel α, je-li známa jeho kotangenta.

Řešení. Nechť $\text{cotg}\alpha = m$. Sestrojme libovolný pravoúhlý $\triangle ABC$, ve kterém by poměr $\overline{AC} : \overline{BC}$ byl rovný číslu m, pak hledaný úhel α je úhel při vrcholu A.

Příklad 6.2. Sestrojte ostrý úhel α, je-li $\cotg \alpha = 0{,}5$.

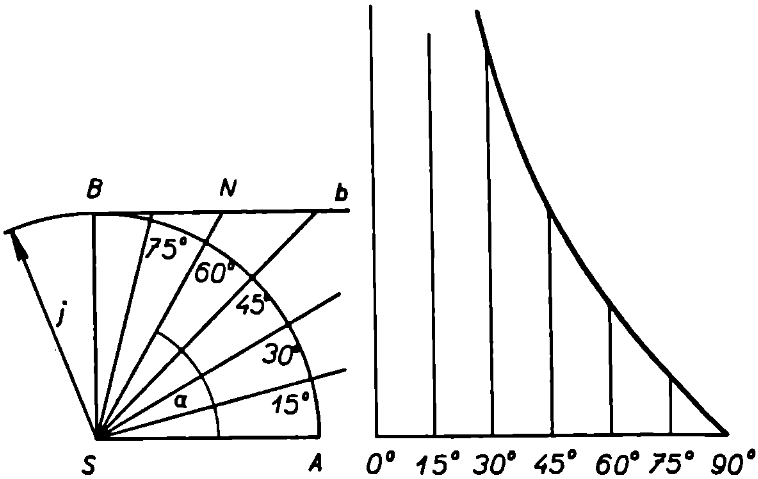
Řešení. Stačí sestrojit na př. pravoúhlý $\triangle ABC$ tak, aby jeho odvěsny byly $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 10$ cm, pak úhel při vrcholu A je hledaný úhel.

Vzorec (6.2a), který je, jak jsme si všimli, velice užitečný, umožní nám odvodit další důležitou větu platící pro kotangentu.

VĚTA 6.2. Kotangens ostrého úhlu je funkce klesající. Podrobněji: roste-li úhel α v otevřeném intervalu $(0°, 90°)$, pak $\cotg \alpha$ klesá v otevřeném intervalu $(+\infty, 0)$.

Důkaz. Jak víme, roste-li jmenovatel zlomku, pak hodnota zlomku (při pevném čitateli, který není nulový) klesá. Z toho však, vzhledem ke vzorci (6.2a) a vzhledem k tomu, že tangens je funkce rostoucí (viz větu 5.1), ihned plyne, že kotangens je funkcí klesající.

Tvrzení právě dokázané věty můžeme pěkně sledovat na grafickém obrazu kotangenty, který získáme podobně jako graf tangenty. Zvolíme si opět jednotkovou kružnici (obr. 22a) o středu S a poloměru rovném zvolené jednotce j; úhly pak nanášíme již známým způsobem ve zvoleném smyslu tak, že jejich prvním ramenem je SA. Na rozdíl od dřívějška (obr. 14) si nyní všimneme průsečíku N druhého ramene zvoleného ostrého úhlu α s jinou tečnou, a to s tečnou b sestrojenou v bodě B jednotkové kružnice, který vznikne otočením bodu A ve dříve zvoleném smyslu o $90°$ kolem středu S. Dostaneme tak pravoúhlý $\triangle SBN$, ve kterém úhel při vrcholu N je právě rovný α. Pomocí tohoto trojúhelníka vyjádříme kotangens úhlu α. Jest $\cotg \alpha = \overline{BN} : \overline{BS}$. Jelikož však $\overline{BS} = \overline{AS} = j$ je jednotkou délky (v obr. 22 jest $j = 2$ cm), je délka úsečky $\overline{BN}$ vyjádřená touto jednotkou (po vynechání označení délkové jednotky) přímo rovna $\cotg \alpha$ (v našem případě při $\alpha = 60°$ najdeme $\overline{BN} \doteq 1{,}15$ cm $\doteq 0{,}57 \cdot j$ a tedy $\cot g 60° \doteq 0{,}57$) Našli jsme tedy, stručně řečeno, že kotangens úhlu α měříme na tečně sestrojené v bodě B. Graf kotangenty pak již dostaneme známým způsobem (obr. 22b); všimněme si, že příslušná křivka, jak ostatně již říká věta 6.2, klesá odleva doprava.



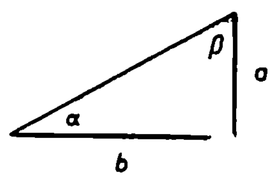
a) Obr. 22. b)

Kdybychom obr. 22a zakreslili do obr. 14, viděli bychom, že výsledný obraz by byl symetrický podle druhého ramene úhlu 45°; to však znamená, že grafický obraz kotangenty (obr. 22b) zakreslený do grafu tangenty (obr. 19b) by byl s ním souměrný podle kolmice k číselné ose v bodě 45°. Tuto důležitou souvislost tangenty a kotangenty vyjádříme větou a dokážeme ještě přímo početně.

VĚTA 6.3. Kotangens ostrého úhlu je rovný tangentě doplňkového úhlu, t. j.

$$\cot g \alpha = \operatorname{tg} (90° - \alpha). \tag{6.5}$$

Důkaz (obr. 23). Podle definice kotangenty jest $\cot g \alpha = \frac{b}{a}$. Avšak k téže hodnotě dojdeme také, vyjádříme-li $\operatorname{tg} \beta$.



Obr. 23.

Jest totiž $\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Platí tedy

$$\mathrm{cotg}\alpha = \mathrm{tg}\beta. \tag{6.6}$$

Avšak v pravoúhlém trojúhelníku je $\beta = 90° - \alpha$ (t. j. β je rovný doplňku úhlu α) a tedy, dosadíme-li za β do (6.6), dostaneme hned dokazovaný vztah (6.5).

Poznámka. Vzorec (6.5) odůvodňuje název kotangenty; je v něm totiž vyjádřeno, že se jedná o *tangentu komplementu* (doplňku). Ke vzorci (6.5) existuje obdobný další vzorec platící pro ostré úhly

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{cotg}(90° - \alpha), \tag{6.7}$$

který se snadno dokáže stejně jako (6.5) (pokuste se sami o důkaz podle horního vzoru). Pomocí (6.5) můžeme opět odvodit (6.4) z (5.2). Tak na př. je $\mathrm{cotg}60° = \mathrm{tg}30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ atd.

Hodnoty kotangent ostrých úhlů jsou opět uvedeny v tabulkách (viz na př. tab. na str. 180 a 181). Čteme v nich úplně stejně jako v tabulkách hodnot tangenty. Pro úhly do 45°, jež jsou uvedeny v levém krajním sloupci tabulek, platí hodnoty kotangenty ve sloupci, který je nahoře nadepsán cotg, pro úhly nad 45°, jež jsou uvedeny v pravém krajním sloupci, platí hodnoty ve sloupci, který je zdola označen cotg. Všimneme-li si tabulek blíže, vidíme, že sloupec, který je shora označen tg, je zdola označen cotg a naopak. Toto výhodné uspořádání tabulek právě umožňují vzorce (6.5) a (6.7). Stačí totiž znát tangenty a kotangenty úhlů jen do 45°, tangenty a kotangenty úhlů nad 45° pak již určíme podle zmíněných vzorců.

Jak jsme již podotkli, čtení v tabulkách kotangenty nepůsobí obtíže. Musíme však být velice opatrni při interpolaci; je stále totiž třeba mít na paměti, že kotangens je funkce klesající. To při našem způsobu interpolace znamená, že opravu musíme odečítat. Jinak postupujeme úplně stejně jako při tangentě.

Příklad 6.3. Vypočtěte $\operatorname{cotg} 63^\circ 17'$ (užitím interpolace).

Řešení. K výpočtu užijeme na př. třímístných tabulek; řídíme-li se postupem udaným v příkladě 5.5, najdeme (opravu odečítáme, neboť kotangens je funkce klesající)

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} 63^\circ 17' &= 0{,}510 \\ &\underline{-\quad 6} \ldots \tfrac{22}{60} \cdot 17 \\ &\, 0{,}504. \end{aligned}$$

Příklad 6.4. Najděte ostrý úhel α, je-li $\operatorname{cotg}\alpha = 1{,}18762$ (interpolací).

Řešení. Užijeme na př. pětimístných tabulek.

$$\begin{array}{rlr} \operatorname{cotg}\alpha = & 1{,}18762 & \\ & \underline{474} & 40^\circ 10' \\ & 288 : 70{,}1 & \underline{-\quad 4'} \\ & \qquad\qquad \alpha = & 40^\circ\ 6'. \end{array}$$

Přikročme nyní k užití kotangenty. V definičním vzorci (6.1) kotangenty vystupují tytéž prvky a, b, α jako ve vzorci pro tangens. To tedy znamená, že při všech třech základních úlohách 5.3, 5.4, 5.5, k jejichž řešení jsme užili tangenty, můžeme užít také kotangenty.

Úloha 6.3. Jsou dány obě odvěsny a, b pravoúhlého trojúhelníka; vypočtěte úhel α (užitím $\operatorname{cotg}\alpha$).

Řešení. Podle definice kotangenty je $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{b}{a}$; úhel α pak určíme z tabulek hodnot kotangenty.

Příklad 6.5. V pravoúhlém trojúhelníku je $a = 13$ cm, $b = 35$ cm; vypočtěte úhel α (viz příklad 5.7).

Řešení. Nejprve najdeme $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{35}{13} \doteq 2{,}69230$ a dále podle vzoru příkladu 6.4 určíme z tabulek $\alpha = 20^\circ 23'$, jak souhlasí s výsledkem příkladu 5.7.

Úloha 6.4. Je dán úhel α a přilehlá odvěsna b pravoúhlého trojúhelníka; vypočtěte protější odvěsnu a.

Řešení. Ze vzorce $\cotg\alpha = \frac{b}{a}$ najdeme nejdříve $a \,.\, \cotg\alpha = b$ a z toho $a = \frac{b}{\cotg\alpha}$.

Příklad 6.6. V pravoúhlém trojúhelníku je $b = 2{,}5$ cm, $\alpha = 72°14'$; vypočtěte a (viz příklad 5.8).

Řešení. Užijeme-li kotangenty, pak podle úlohy 6.4 je $a = \frac{b}{\cotg\alpha}$; v našem případě tedy $a = \frac{2{,}5 \text{ cm}}{\cotg 72°14'}$. Pomocí třímístných tabulek najdeme $\cotg 72°14' = 0{,}321$ a tedy $a = 2{,}5 \text{ cm} : 0{,}321 \doteq 7{,}8$ cm (jako dříve).

ÚLOHA 6.5. Je dán úhel α a protější odvěsna a pravoúhlého trojúhelníka; vypočtěte přilehlou odvěsnu b.

Řešení. Ze vzorce $\cotg\alpha = \frac{b}{a}$ plyne $a \,.\, \cotg\alpha = b$, t. j.

$$b = a \cotg\alpha. \tag{6.8}$$

Příklad 6.7. V pravoúhlém trojúhelníku je $a = 10$ cm, $\alpha \doteq 37°$; určete b (viz příklad 5.9).

Řešení. Hledáme přilehlou odvěsnu; užijeme kotangenty. Z definičního vzorce $\cotg\alpha = \frac{b}{a}$ vypočteme $b = a \cotg\alpha$.

V našem případě tedy $b = 10 \text{ cm} \,.\, \cotg 37° = 10 \text{ cm} \,.\, 1{,}32704 \doteq 13{,}3$ cm.

Poznámka. Jak jsme již podotkli, jsou úlohy 6.3, 6.4 a 6.5 tytéž jako 5.3, 5.4 a 5.5. Jediný rozdíl je v tom, že jednou jsme používali tangenty, po druhé kotangenty. Nyní je třeba jen kriticky rozhodnout, které řešení je s počtářského hlediska výhodnější. Hledáme-li úhel, pak nezáleží na tom, zda použijeme řešení úlohy 5.3 nebo 6.3. Hledáme-li protější odvěsnu, pak jistě dáme přednost řešení úlohy 5.4 před řešením v úloze 6.4, neboť při tomto řešení jen násobíme, což je výhodnější než dělení, které se vyskytuje v řešení úlohy 6.4. Právě proto jsme uvedli větu 5.2 pro výpočet protější odvěsny. Konečně, hledáme-li přilehlou odvěsnu, dáme přednost řešení úlohy 6.5, neboť se při řešení užívá jen násobení, naproti tomu v řešení úlohy 5.5 dělení. Z toho důvodu obsah vzorce (6.8) vyslovíme ještě větou:

VĚTA 6.4. Odvěsna b pravoúhlého trojúhelníka je rovna součinu druhé odvěsny a a kotangenty úhlu α přilehlého k hledané odvěsně:

$$b = a \operatorname{cotg}\alpha. \tag{6.9}$$

Cvičení.

6.1. Pomocí úhloměru zakreslete úhly a) 35°30′, b) 65° a najděte bez užití tabulek jejich kotangenty. Nalezený výsledek srovnejte s hodnotami z tabulek.

6.2. Je dán pravoúhlý $\triangle\, PQS$ s pravým úhlem při vrcholu S; úhel při vrcholu P (Q) je φ (ψ). Vyjádřete $\operatorname{cotg}\varphi$ a $\operatorname{cotg}\psi$.

6.3. V pravoúhlém $\triangle\, EFG$ je odvěsna $\overline{EG} = 7$ cm, odvěsna $\overline{FG} = 12$ cm; vypočtěte $\operatorname{cotg}\varphi$, kde φ je úhel při vrcholu F.

6.4. Vypočtěte $\operatorname{cotg}\xi$, je-li a) $\operatorname{tg}\xi = \frac{1}{2}$, b) $\operatorname{tg}\xi = 1{,}25$, c) $\operatorname{tg}\xi = 0{,}353$.

6.5. Najděte $\operatorname{tg}\eta$, je-li a) $\operatorname{cotg}\eta = \frac{8}{15}$, b) $\operatorname{cotg}\eta = 3{,}5$, c) $\operatorname{cotg}\eta = 0{,}417$.

6.6. Sestrojte ostrý úhel ω, je-li a) $\operatorname{cotg}\omega = \frac{3}{4}$, b) $\operatorname{cotg}\omega = 2{,}25$, c) $\operatorname{cotg}\omega = 1{,}653$.

6.7. Pomocí tabulek určete a) cotg22°, b) cotg76°, c) cotg22°30′, d) cotg80°10′, e) cotg41°5′, f) cotg46°2′.

6.8. K daným hodnotám kotangenty určete pomocí tabulek příslušné ostré úhly a) $\operatorname{cotg}\alpha = 3{,}07768$, b) $\operatorname{cotg}\beta = 0{,}42447$, c) $\operatorname{cotg}\lambda = 2{,}78$, d) $\operatorname{cotg}\mu = 0{,}987$, e) $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{3}{2}$, f) $\operatorname{cotg}\psi = \frac{2}{5}$. Užijete-li třímístných tabulek, pak nejprve zaokrouhlete dané kotangenty na tři deset. místa; obyčejné zlomky převeďte na desetinné.

6.9. Najděte $\operatorname{cotg}(90° - \omega)$, víte-li, že $\operatorname{tg}\omega = 0{,}7$.

6.10. V pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou známy odvěsny $a = 13{,}5$ cm, $b = 40{,}5$ cm; najděte úhel α ležící proti odvěsně a (užitím kotangenty).

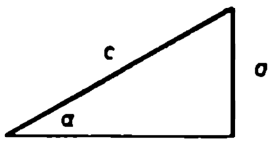
6.11. Jak veliký sklon ω má střecha, jestliže krov má rozpětí $l = 12$ m a výšku $v = 5$ m? (Při výpočtu úhlu ω použijte $\operatorname{cotg}\omega$; všimněte si pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách v a $\frac{1}{2}l$).

6.12. V pravoúhlém $\triangle\, RST$ je odvěsna $\overline{ST} = 12{,}5$ cm a protější úhel $\varrho = 53°15'$; jak velká je odvěsna $\overline{RT}$?

6.13. Jak dlouhý stín vrhá svislý stožár 15,4 m vysoký na vodorovnou rovinu, je-li výška slunce nad obzorem 37°45′?

7. SINUS OSTRÉHO ÚHLU

Od 4. odst. jsme se v podstatě zabývali jen jedinou z úměr (3.1), a to úměrou $a : b = a' : b'$. Došli jsme tím k tangentě (odst. 5) a kotangentě (odst. 6). Kdybychom však vyšli z druhé úměry (3.1), t. j. z úměry $a : c = a' : c'$, pak bychom stejným postupem zjistili, že poměr protější odvěsny k přeponě je pro všechny pravoúhlé trojúhelníky o stejném ostrém úhlu α (obr. 5) týž a že závisí jen na velikosti úhlu α. Tímto jsme vedeni k další goniometrické funkci ostrého úhlu α, kterou nazveme *sinus* α a budeme značit $\sin\alpha$ (obr. 24).



Obr. 24.

Definice 7.1a. Sinus ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr protilehlé odvěsny (k úhlu α) k přeponě:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}. \tag{7.1}$$

Obvykle místo této definice se uvádí kratší, kterou i my si zapamatujeme:

Definice 7.1b. Sinus je poměr protější odvěsny k přeponě.

Poznámka. Uvádíme-li tuto stručnější definici, musíme si ovšem uvědomit, že tím vždy rozumíme sinus ostrého úhlu, ačkoliv výslovně o tom nemluvíme. Z definice je okamžitě patrno, že sinus je jako hodnota poměru číslo nepojmenované, a to kladné, protože a, c jsou strany trojúhelníka. Dále je zřejmé, že sinus (ostrého úhlu) musí být vždy menší než 1, neboť přepona pravoúhlého trojúhelníka je větší než odvěsna, a to znamená, že ve zlomku $\frac{a}{c}$ je jmenovatel větší než čitatel. Je tedy $0 < \sin\alpha < 1$. Ještě poznamenejme, že název je od latinského *sinus* (záliv).

Přikročme nyní k řešení nejjednodušších úloh o sinu.

Úloha 7.1. Jest dán ostrý úhel α; určete jeho sinus.

Řešení. Sestrojíme si libovolný pravoúhlý trojúhelník, jehož jeden úhel je právě α; pak již postupujeme podle definice: určíme délku protější odvěsny a a délku přepony c. Poměr $\frac{a}{c}$ je hledaný sinus.

Příklad 7.1. Vypočtěte sin30°, sin45°, sin60°.

Řešení. K určení sin45° užijeme rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka (obr. 7). Jsou-li délky jeho odvěsen a, pak délku přepony c vypočteme z Pythagorovy věty Jest $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2 \,.\, a^2} = a\sqrt{2}$ (což není nic jiného než úhlopříčka čtverce o straně a). Potom $\sin 45° = a : a\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Ke stanovení sin30° a sin60° užijeme opět $\triangle MPQ$ z obr. 13. Lehko najdeme $\sin 30° = \overline{MQ} : \overline{MP} = \frac{1}{2}a : a = \frac{1}{2}$ a dále $\sin 60° = \overline{PQ} : \overline{PM} = v : a = \frac{1}{2}a\sqrt{3} : a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Tedy přehledně

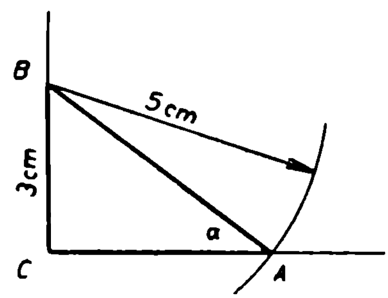
$$\sin 30° = \tfrac{1}{2}, \quad \sin 45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin 60° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{7.2}$$

(Doporučuje se znát tyto hodnoty zpaměti.)

Úloha 7.2. Sestrojte ostrý úhel α, víte-li, že $\sin\alpha = s$ (při čemž pro číslo s platí $0 < s < 1$).

Řešení. Sestrojíme libovolný pravoúhlý $\triangle ABC$ tak, aby v něm $\overline{BC} : \overline{AB} = s$; hledaný úhel α je pak při vrcholu A.

Příklad 7.2. Sestrojte ostrý úhel α, je-li $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

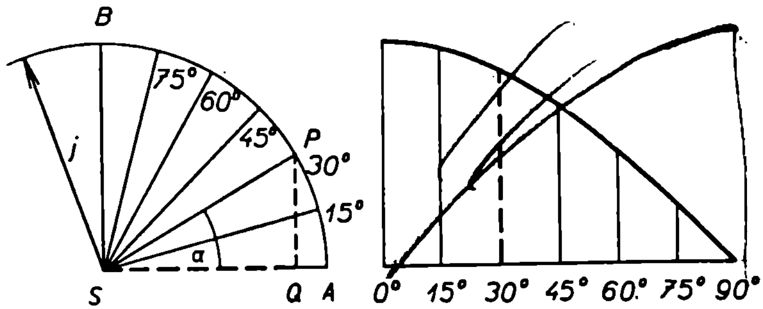


Obr. 25.

Řešení (obr. 25). Nejprve narýsujeme pravý úhel o vrcholu C. Na jedno rameno tohoto úhlu naneseme od bodu C na př. 3 cm; tím dostaneme bod B. Zbývá sestrojit bod A. Protože je $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

a protější odvěsnu jsme volili 3 cm, musí přepona být 5 cm. Stačí tedy kruhovým obloukem o středu B a poloměru 5 cm přetnout druhé rameno pravého úhlu. Tím najdeme vrchol A. Úhel α při vrcholu A je hledaný úhel.

Abychom získali přehled o hodnotách sinu, sestrojíme si opět grafický obraz této funkce. V jednotkové kružnici (o středu S a poloměru j — v našem případě $j = 2$ cm) nanášíme úhly v pevně zvoleném smyslu tak, že jejich společný



Obr. 26.

vrchol je S a společné rameno SA (obr. 26a). Druhé rameno protíná kružnici v bodě P. Kolmice z tohoto bodu na SA protíná SA v bodě Q. Pomocí pravoúhlého $\triangle\, SPQ$ určíme již $\sin\alpha$. Podle definice jest $\sin\alpha = \overline{PQ} : \overline{SP}$. Ale $\overline{SP} = \overline{SA} = j$ je jednotka délky, a proto přímo úsečka $\overline{PQ}$ (měřená touto jednotkou) po vynechání označení jednotky udává hodnotu $\sin\alpha$. Volíme-li na př. $\alpha = 30°$, pak při naší volbě jednotky je $\overline{PQ} = 1$ cm $= \frac{1}{2}j$ a tedy $\sin 30° = \frac{1}{2}$, jak už víme.

Graf sinu sestrojíme pak takto (obr. 26b): na číselnou osu naneseme interval $(0°, 90°)$ a v každém bodě tohoto intervalu naneseme od osy (a to nad osu) na kolmici k ose příslušnou hodnotu sinu nalezenou právě popsaným způsobem (viz obr. 26a a 26b). Z grafu získáme názorný přehled o hodnotách sinu. Vidíme, že křivka stoupá zleva doprava. Tento důležitý poznatek, který si odůvodníme podrobněji, vyslovíme větou:

VĚTA 7.1. Sinus ostrého úhlu je funkce rostoucí. Podrobněji: roste-li úhel α v otevřeném intervalu $(0°, 90°)$, potom $\sin\alpha$ roste v otevřeném intervalu $(0,1)$.

Důkaz. V podstatě máme ukázat: jestliže pro dva ostré úhly α_1, α_2 platí $\alpha_1 < \alpha_2$, pak je $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$. A tomu skutečně tak je: v příslušných trojúhelnících SP_1Q_1 a SP_2Q_2 sestrojených podle předchozího pro úhly α_1 a α_2 je nutně $\overline{P_1Q_1} < \overline{P_2Q_2}$, neboť P_1 je na oblouku $\widehat{AB}$ kružnice před P_2. A dále: jestliže se α blíží 0°, pak P se blíží bodu A, t. j. $\overline{PQ}$ se blíží 0; jestliže se α blíží 90°, pak P se blíží bodu B, t. j. $\overline{PQ}$ se blíží $\overline{SB} = j$.

Hodnoty sinu ostrých úhlů jsou uvedeny podobně jako hodnoty tangent a kotangent také v tabulkách. Čtení v nich jistě nebude dělat obtíže. Jen ještě upozorníme, že vzhledem k tomu, že sinus je rostoucí funkce, budeme při hledání hodnot sinu interpolací postupovat úplně stejně jako při tangentě: opravy budeme přičítat.

Příklad 7.3. Vypočtěte $\sin 50°13'$.

Řešení. K výpočtu užijeme pětimístných tabulek:

$$\begin{array}{rl} \sin 50°13' = 0{,}76791 & \\ 56 & \ldots\ 18{,}6 \,.\, 3 \\ \hline 0{,}76847. & \end{array}$$

Příklad 7.4. Vyhledejte ostrý úhel α, pro který $\sin\alpha = 0{,}45$.

Řešení. Použijeme zase pětimístných tabulek:

$$\begin{array}{rcr} \sin\alpha = 0{,}45000 & & \\ 44880 & & 26°40' \\ \hline 120 : 26 & & +\ \ 5' \\ & \alpha = & \overline{26°45'}. \end{array}$$

Ve vzorci (7.1), kterým se definuje sinus ostrého úhlu, t. j. ve vzorci

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \tag{7.3}$$

vystupují tyto základní prvky pravoúhlého trojúhelníka: úhel α, protější odvěsna a a přepona c. Jestliže známe právě dva z těchto prvků, pak třetí můžeme již z rovnice (7.3) určit, jak učiníme v dalších třech úlohách.

Úloha 7.3. V pravoúhlém trojúhelníku je dána odvěsna a a přepona c; jest najít úhel α ležící proti dané odvěsně.

Řešení vlastně již známe. Poměr $\frac{a}{c}$ je sinus hledaného úhlu; úhel pak již vyhledáme užitím goniometrických tabulek.

Příklad 7.5. V pravoúhlém trojúhelníku je přepona $c = 13$ cm, odvěsna $a = 5$ cm; vypočtěte úhel α ležící proti a.

Řešení. Počítejme na př. pomocí trojmístných tabulek; určíme tedy $\sin\alpha$ jen na tři desetinná místa. Jest $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5\text{ cm}}{13\text{ cm}} \doteq 0{,}385$. Dále již podle vzoru příkladu 7.4 snadno najdeme $\alpha = 22°37'$.

Úloha 7.4. V pravoúhlém trojúhelníku je dána přepona c a úhel α; určete odvěsnu a ležící proti danému úhlu.

Řešení. Ze vzorce (7.3) najdeme (násobením c) pro hledanou odvěsnu $c\sin\alpha = a$, t. j.

$$a = c\sin\alpha. \tag{7.4}$$

Příklad 7.6. V pravoúhlém trojúhelníku je známa přepona $c = 5{,}5$ cm a úhel $\alpha = 71°30'$. Určete protější odvěsnu a.

Řešení. Ze vzorce (7.3) najdeme $a = c\sin\alpha$, tedy v našem případě $a = 5{,}5\text{ cm} \cdot \sin 71°30'$. Pomocí třímístných tabulek určíme snadno $\sin 71°30' = 0{,}948$. A tedy $a = 5{,}5 \cdot 0{,}948\text{ cm} \doteq 5{,}2$ cm.

Úloha 7.5. V pravoúhlém trojúhelníku je dána odvěsna a a protilehlý úhel α; určete přeponu c.

Řešení. Zase vyjdeme ze základního vzorce (7.3), odkud vypočteme $c \sin\alpha = a$ a dále dělením číslem $\sin\alpha$ najdeme

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}. \tag{7.5}$$

Příklad 7.7. V pravoúhlém trojúhelníku je dána odvěsna $a = 315$ mm a protilehlý úhel $\alpha = 40°$; určete přeponu c.

Řešení. Ze vzorce $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ vypočteme $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ (t. j. najdeme vzorec (7.5)). V našem případě tedy $c = 315$ mm : : $\sin 40° = 315$ mm : $0{,}643 = 489{,}8\ldots$ mm $\doteq 490$ mm.

V řešení předchozích úloh 7.4 a 7.5 jsme si velice snadno odvodili ze základního vzorce (7.3) nové vzorce (7.4) a (7.5). Tyto nové vzorce není třeba si pamatovat právě proto, že si je každý v případě potřeby okamžitě odvodí ze základního (7.3). Přesto je dobře upozornit, že tím byly vlastně dokázány pro pravoúhlý trojúhelník dvě věty:

Věta 7.2. Odvěsna pravoúhlého trojúhelníka je rovna jeho přeponě násobené sinem protějšího úhlu, t. j.

$$a = c \sin\alpha. \tag{7.6}$$

Věta 7.3. Přepona pravoúhlého trojúhelníka je rovna jeho odvěsně dělené sinem protějšího úhlu, t. j.

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}. \tag{7.7}$$

Poznámka. Právě tak, jak jsme v 6. odst. z tangenty došli ke kotangentě, můžeme ze sinu přejít k nové goniometrické funkci, když místo poměru $\frac{a}{c}$ (protější odvěsny ku přeponě) uvažujeme převrácený poměr $\frac{c}{a}$ (přepony k protější odvěsně).

Tato nová funkce se nazývá *kosekans* α a značí se $\operatorname{cosec}\alpha$. V praxi se vůbec neužívá, proto se jí nebudeme blíže zabývat a uvedeme jen její definici.

Definice 7.2. Kosekans ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr přepony k protilehlé odvěsně (k úhlu α):

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}. \tag{7.8}$$

Cvičení.

7.1. Bez použití tabulek najděte a) $\sin 20°$, b) $\sin 77°$ a nalezené výsledky porovnejte s hodnotami uvedenými v tabulkách (úhly sestrojte pomocí úhloměru).

7.2. Je dán pravoúhlý $\triangle\ ABC$; vyjádřete $\sin\beta$.

7.3. Je dán pravoúhlý $\triangle\ VQM$ s pravým úhlem při vrcholu Q a s úhlem ω při vrcholu V; vyjádřete $\sin\omega$.

7.4. V pravoúhlém $\triangle\ ABC$ je odvěsna $a = 5$ cm a přepona $c = 7$ cm; vypočtěte $\sin\alpha$.

7.5. Sestrojte ostrý úhel α, je-li a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, b) $\sin\alpha = 0{,}653$.

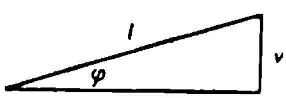
7.6. V tabulkách vyhledejte hodnoty a) $\sin 13°$, b) $\sin 68°$, c) $\sin 22°40'$, d) $\sin 81°50'$, e) $\sin 32°47'$, f) $\sin 46°24'$.

7.7. Dány jsou siny ostrých úhlů; vyhledejte pomocí tabulek příslušné úhly a) $\sin\alpha = 0{,}22495$, b) $\sin\beta = 0{,}92718$, c) $\sin\gamma = 0{,}3$, d) $\sin\delta = 0{,}75$, e) $\sin\varphi = 0{,}38238$, f) $\sin\psi = \frac{5}{14}$. Při použití třímístných tabulek zaokrouhlete nejprve na tři desetinná místa, v posledním případě převeďte nejprve na deset. zlomek.

7.8. V pravoúhlém $\triangle\ ABC$ je odvěsna $a = 6{,}5$ cm, přepona $c = 10$ cm; jak velký je úhel α protější k dané odvěsně?

7.9. Rovnoměrně stoupající přímá silnice stoupne na délku 500 m o 60 m; v jakém úhlu stoupá?

7.10. V pravoúhlém $\triangle\ MNP$ je dána přepona $\overline{PM} = 16{,}3$ cm a úhel $\omega = 39°$ při vrcholu M; jak veliká je odvěsna $\overline{PN}$?



Obr. 27.

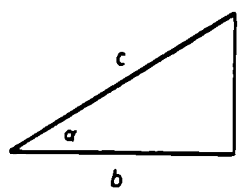
7.11. Nakloněná rovina (obr. 27) o délce $l = 1$ m má sklon $\varphi = 15°30'$; jaká je její výška?

7.12. V pravoúhlém $\triangle ABC$ je dána odvěsna $a = 4,35$ m a protější úhel $\alpha = 53°45'$; vypočtěte jeho přeponu c.

7.13. Vypočtěte délku s površky rotačního kužele, jehož výška je $v = 25$ cm a jehož površky svírají s rovinou základny úhel $\omega = 56°30'$. (Zakreslete si osový řez a v něm si všimněte pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny jsou výška kužele a poloměr základní kružnice a přeponou je površka kužele.)

8. KOSINUS OSTRÉHO ÚHLU

Zbývá ještě blíže si povšimnout poslední z úměr (3.1), a to úměry $b : c = b' : c'$. Úplně stejnou úvahou jako v odst. 4 bychom zase ukázali, že tento poměr přilehlé odvěsny k přeponě je týž pro všechny pravoúhlé trojúhelníky, které mají stejný úhel α a že závisí jen na velikosti α. Goniometrická funkce tímto poměrem definovaná se nazývá *kosinus* α a značí se $\cos\alpha$ (obr. 28). Definujeme tedy:



Obr. 28.

DEFINICE 8.1a. Kosinus ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr přilehlé odvěsny (k úhlu α) k přeponě:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}. \tag{8.1}$$

Máme-li na mysli jen ostré úhly, pak stačí uvádět (a zapamatovat si) jednodušší znění horní definice:

DEFINICE 8.1b. Kosinus je poměr přilehlé odvěsny k přeponě.

Poznámka. Stejně jako sinus je i kosinus ostrého úhlu číslo nepojmenované, vždy kladné a menší než 1; tedy $0 < \cos\alpha < 1$.

Obrátíme se zase nejprve k základním úlohám.

ÚLOHA 8.1. Je dán ostrý úhel α; najděte jeho kosinus.

Řešení. V libovolném pravoúhlém trojúhelníku, jehož jeden úhel je α, určíme délku odvěsny b přilehlé úhlu α a délku přepony c. Poměr $\dfrac{b}{c}$ je hledaný kosinus.

Příklad 8.1. Vypočtěte cos30°, cos45° a cos60°

Řešení. cos45° určíme pomocí nám známého rovnoramenného trojúhelníka (obr. 7), jehož obě odvěsny mají délku a a přepona je (jak jsme již našli v příkladu 7.1) $c = a\sqrt{2}$. Tedy $\cos 45° = a : a\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Pro stanovení cos30° a cos60° užijeme zase $\triangle\, MQP$ (obr. 13). Jest $\cos 30° = \overline{PQ} : \overline{PM} = \frac{1}{2}a\sqrt{3} : a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. A dále $\cos 60° = \overline{MQ} : \overline{MP} = \frac{1}{2}a : a = \frac{1}{2}$. Celkem jsme našli hodnoty

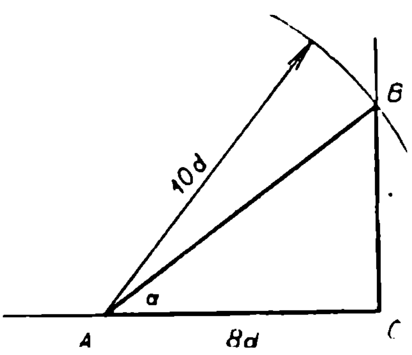
$$\cos 30° = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\quad \cos 45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\quad \cos 60° = \tfrac{1}{2},\qquad (8.2)$$

jež je výhodné si zapamatovat.

Úloha 8.2. Sestrojte ostrý úhel α, víte-li, že $\cos\alpha = k$ (kde pro k platí $0 < k < 1$).

Řešení. Sestrojíme libovolný pravoúhlý $\triangle\, ABC$, ve kterém by poměr jedné odvěsny b k přeponě c byl právě k; pak úhel α přilehlý k odvěsně b je hledaný.

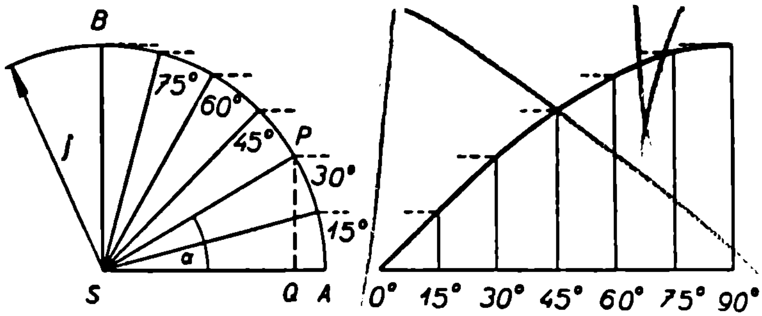
Příklad 8.2. Sestrojte ostrý úhel α, je-li $\cos\alpha = 0{,}8$.



Obr. 29.

Řešení. Na jedno rameno pravého úhlu o vrcholu C (obr. 29) naneseme od vrcholu délku $8d$, kde d je libovolná nenulová úsečka (v obr. $d = 3$ mm). Tím dostaneme bod A. Kruhový oblouk o středu A a poloměru rovném $10d$ protíná druhé rameno v bodě B. Úhel α při vrcholu A v $\triangle\, ABC$ je hledaný úhel.

Grafický obraz kosinu si sestrojíme podobně jako graf sinu (obr. 30a, b). Všimneme si nejprve téhož $\triangle\ SPQ$ jako v obr. 26a. Jeho pomocí najdeme $\cos x = \overline{SQ} : \overline{SP}$; vzhledem k tomu, že $\overline{SP} = j$, udává úsečka $\overline{SQ}$ (měřená jednotkou j) přímo $\cos\alpha$ (po vynechání označení j). V obr. 30a je voleno $\alpha = 30°$, $j = 2$ cm; změříme-li $\overline{SQ}$, najdeme $\overline{SQ} \doteq 17{,}3$ mm $=$



a) Obr. 30. b)

$= 0{,}865 \,.\, 2$ cm $= 0{,}865 \,.\, j$. Našli jsme tedy $\cos 30° \doteq 0{,}865$. (Přesnější hodnotu najdeme pomocí prvého vzorce (8.2); dosadíme-li tam $\sqrt{3} \doteq 1{,}732$, dostaneme $\cos 30° \doteq 0{,}866$).

Naneseme-li nyní známým způsobem (obr. 30b) v bodech intervalu $(0°, 90°)$ přiřazených jednotlivým ostrým úhlům takto sestrojené úsečky $\overline{SQ}$, t. j. hodnoty kosinu násobené zvolenou jednotkou j, dostaneme hledaný grafický obraz. Okamžitě vidíme, že křivka znázorňující průběh kosinu klesá zleva doprava. Kosinus se v tomto ohledu chová tedy podobně jako kotangenta. Vyjádříme to přesněji větou:

VĚTA 8.1. Kosinus ostrého úhlu je funkce klesající. Roste-li úhel α v otevřeném intervalu $(0°, 90°)$, pak $\cos\alpha$ klesá v otevřeném intervalu $(1, 0)$.

Důkaz. Uvažujme dva úhly α_1, α_2, pro které je $\alpha_1 < \alpha_2$. Příslušné trojúhelníky sestrojené podle obr. 30a označme $\triangle\ SP_1Q_1$ (s úhlem α_1) a $\triangle\ SP_2Q_2$ (s úhlem α_2). Protože

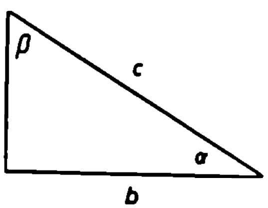
$\alpha_1 < \alpha_2$, musí na jednotkové kružnici být P_2 blíže k bodu B než P_1 a tedy Q_2 blíže k S než Q_1. To však znamená, že $\overline{SQ_2} < \overline{SQ_1}$ a tedy, vzhledem k významu těchto úseček, je $\cos\alpha_2 < \cos\alpha_1$, což je totéž jako $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$. Našli jsme tudíž, že pro $\alpha_1 < \alpha_2$ je $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$, jinými slovy: s rostoucím úhlem hodnoty kosinu klesají. Blíží-li se úhel α úhlu $0°$, pak P se blíží bodu A a také Q se blíží A, t. j. $\cos\alpha$ se blíží 1; blíží-li se α úhlu $90°$, pak P se blíží bodu B a Q bodu S, t. j. $\cos\alpha$ se blíží 0.

Pro kosinus si dokážeme hned další významnou větu:

VĚTA 8.2. Kosinus ostrého úhlu je rovný sinu doplňkového úhlu, t. j.

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha). \tag{8.3}$$

Důkaz (obr. 31). Podle definice kosinu je $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$. Vyjádříme nyní ještě $\sin\beta$; podle definice sinu je $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$ a tedy je $\cos\alpha = \sin\beta$, což se dá se zřetelem k tomu, že $\beta = 90° - \alpha$, napsat ve tvaru (8.3).



Obr. 31.

Poznámka. Právě vzhledem k vlastnosti vyjádřené větou 8.2 má kosinus svůj název: vyjadřuje totiž *sinus komplementu* (doplňkového úhlu). Úplně stejně jako (8.3) dá se odvodit

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha). \tag{8.4}$$

Užitím vzorce (8,3) můžeme hodnoty $\cos 30°$, $\cos 45°$ a $\cos 60°$ uvedené v (8.2) najít okamžitě pomocí (7.2).

Vzorec (8.3) umožňuje podobné vhodné uspořádání tabulek hodnot kosinu a sinu, s jakým jsme se setkali již u tangenty a kotangenty. Pro úhly do $45°$ (v levém sloupci) jsou hodnoty příslušných kosinů uvedeny ve sloupci, který je nahoře nadepsán cos, pro úhly nad $45°$ (v pravém sloupci) jsou příslušné hodnoty kosinů ve sloupci, který je dole označen cos. A právě vztah (8.3), po případě (8.4), umožňuje zjednodušení. Sloupec nahoře označený cos je zdola označen sin a obráceně.

Není třeba blíže vysvětlovat jak se hodnoty kosinů v tabulkách čtou. Na jednu okolnost je však třeba důrazně upozornit: kosinus je funkce klesající, to znamená, že při interpolaci musíme nalezené opravy odečítat (podobně jako tomu bylo u kotangenty).

Příklad 8.3. Vypočtěte $\cos 26°32'$.

Řešení. Máme-li k disposici jen třímístné tabulky (na str. 180 a 181), pak najdeme

$$\begin{array}{rl} \cos 26°32' = 0,899 & \\ -\quad 4 & \quad \frac{8}{60} \cdot 32 \\ \hline 0,895. & \end{array}$$

Příklad 8.4. Najděte ostrý úhel α, pro který je $\cos\alpha =$ $= 0,7348$.

Řešení. (Pomocí pětimístných tabulek.)

$$\begin{array}{rrr} \cos\alpha = 0,73480 & & \\ 333 & & 42°50' \\ \hline 147 & 19,8 & -7' \\ & \alpha = & \overline{42°43'}. \end{array}$$

Zbývá ještě ukázat užití kosinu. V definičním vzorci (8.1) pro kosinus ostrého úhlu

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \tag{8.5}$$

vystupují úhel α, přilehlá odvěsna b a přepona c. Známe-li kterékoliv dva z těchto základních prvků pravoúhlého trojúhelníka, můžeme zbývající prvek vypočítat právě pomocí vzorce (8.5). Dostaneme celkem tři případy.

Úloha 8.3. V pravoúhlém trojúhelníku je dána odvěsna b a přepona c; určete úhel α přilehlý k dané odvěsně.

Řešení. Pro hledaný úhel α najdeme nejprve kosinus. Jest $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; k této hodnotě kosinu určíme pak již α z tabulek.

Příklad 8.5. V pravoúhlém $\triangle ABC$ je odvěsna $b = 31{,}5$ mm, přepona $c = 40$ mm; určete úhel α.

Řešení. Jest $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, tedy v našem případě $\cos\alpha = \frac{31{,}5 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 0{,}7875$. Užitím pětimístných tabulek najdeme již snadno (podle příkladu 8.4) $\alpha = 38°3'$.

Úloha 8.4. V pravoúhlém trojúhelníku je dána přepona c a úhel α; vypočtěte přilehlou odvěsnu b.

Řešení. Ze vzorce (8.5) najdeme vynásobením c pro přilehlou odvěsnu $c \,.\, \cos\alpha = b$, t. j.

$$b = c \,.\, \cos\alpha. \tag{8.6}$$

Příklad 8.6. V pravoúhlém $\triangle ABC$ je $c = 17{,}5$ cm, $\alpha = 65°$; určete přilehlou odvěsnu b.

Řešení. Ze vzorce $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ vypočteme $b = c \,.\, \cos\alpha$, tedy v našem případě $b = 17{,}5 \text{ cm} \,.\, \cos 65° = 17{,}5 \,.\, 0{,}423 \text{ cm} \doteq 7{,}4$ cm.

Úloha 8.5. V pravoúhlém trojúhelníku je dána odvěsna b a přilehlý úhel α; vypočtěte jeho přeponu c.

Řešení. Vyjdeme opět ze vzorce $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, odtud nejprve najdeme $c \,.\, \cos\alpha = b$; vydělením číslem $\cos\alpha$ dostaneme pro hledanou přeponu

$$c = \frac{b}{\cos\alpha} \tag{8.7}$$

Příklad 8.7. V pravoúhlém $\triangle ABC$ je odvěsna $b = 15$ cm a přilehlý úhel $\alpha = 23°50'$; určete přeponu c.

Řešení. Ze vzorce $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ vypočteme $c = \frac{b}{\cos\alpha}$; v našem případě $c = 15 \text{ cm} : \cos 23°50' = 15 \text{ cm} : 0{,}915 \doteq 16{,}4 \text{ cm}$.

V úlohách 8.4 a 8.5 jsme si odvodili nové vzorce (8.6) a (8.7). Zase není třeba si je zvláště pamatovat, protože si je sami vždy okamžitě odvodíme ze základního vzorce (8.5). Obsah vzorců (8.6) a (8.7) lze vyjádřit větami:

VĚTA 8.3. **Odvěsna pravoúhlého trojúhelníka je rovna jeho přeponě násobené kosinem přilehlého úhlu:**

$$b = c \cos\alpha. \tag{8.8}$$

VĚTA 8.4. **Přepona pravoúhlého trojúhelníka je rovna jeho odvěsně dělené kosinem přilehlého úhlu**

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}. \tag{8.9}$$

Poznámka 1. Hodláme-li si zapamatovat obsah vět 8.3 a 8.4, potom abychom si zbytečně nepletli příslušné vzorce, jistě poslouží tato poznámka: počítáme-li odvěsnu, t. j. kratší stranu, pak přeponu násobíme kosinem, vždyť kosinus je menší než 1 a násobením přepony číslem menším než 1 dostaneme délku menší než původní. A obráceně: počítáme-li přeponu, jež je delší než odvěsna, pak dělíme kosinem, neboť dělíme-li odvěsnu číslem menším než 1, dostaneme délku větší než původní. Podobnou poznámku jsme mohli ovšem uvést také za větami 7.2 a 7.3.

Poznámka 2. Uvažujeme-li místo poměru $\frac{b}{c}$ převrácený poměr $\frac{c}{b}$ (přepony k přilehlé odvěsně), dostáváme zřejmě zase novou — ale už také poslední — goniometrickou funkci, jež se nazývá *sekans* α a značí se $\sec\alpha$. Stejně jako jsme se nezabývali kosekansem, nebudeme se zabývat ani touto funkcí; uvedeme jen její přesnou definici:

DEFINICE 8.2. Sekans ostrého úhlu α (v pravoúhlém trojúhelníku) je poměr přepony k přilehlé odvěsně (k úhlu α), t. j.

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}. \tag{8.10}$$

Poznámka 3. Nyní, když jsme probrali všechny goniometrické funkce ostrého úhlu, uveďme alespoň v poznámce, že v některých tabulkách bývá ještě uvedena zvláštní tabulka hodnot sinu a tangenty úhlů postupujících po 1′ v intervalu (0°, 4°). Tím jsou ovšem dány také hodnoty kosinu a kotangenty úhlů v intervalu (86°, 90°).

Cvičení.

8.1. Narýsujte úhly a) 15°, b) 72° (bez užití úhloměru) a najděte jejich kosiny; porovnejte s hodnotami z tabulek.

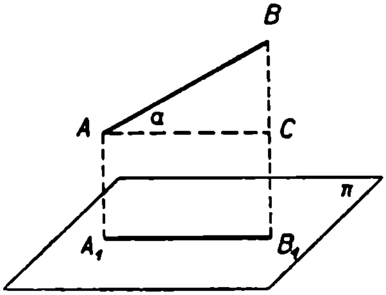
8.2. V pravoúhlém $\triangle\, KLM$ s pravým úhlem při vrcholu K a úhlem λ (μ) při vrcholu L (M) vyjádřete $\cos\lambda$ a $\cos\mu$.

8.3. V pravoúhlém $\triangle\, XYZ$ je odvěsna $\overline{XZ} = 10$ cm a přepona $\overline{XY} = 12{,}5$ cm; vypočtěte $\cos\xi$, kde ξ je úhel při vrcholu X.

8.4. Sestrojte ostrý úhel α, je-li a) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, b) $\cos\alpha = 0{,}345$.

8.5. Pomocí tabulek najděte a) cos13°, b) cos57°, c) cos44°40′, d) cos82°10′, e) cos19°11′, f) cos70°6′.

8.6. K daným hodnotám kosinů vyhledejte užitím tabulek příslušné ostré úhly a) $\cos\alpha = 0{,}78801$, b) $\cos\beta = 0{,}15643$, c) $\cos\xi = 0{,}95$, d) $\cos\eta = 0{,}4$, e) $\cos\zeta = 0{,}44544$, f) $\cos\omega = \frac{4}{5}$. Máte-li jen třímístné tabulky, pak zaokrouhlete předem dané kosiny na tři deset. místa; v posledním případě převeďte na deset. zlomek.



Obr. 32.

8.7. Určete $\cos(90° - \varphi)$, víte-li, že $\sin\varphi = 0{,}353$.

8.8. V pravoúhlém $\triangle\, ABC$ je odvěsna $b = 5$ cm a přepona $c = 14$ cm; jak velký je úhel α přilehlý k odvěsně b?

8.9. Jaký úhel svírá úsečka $\overline{AB} = 1$ dm s průmětnou π (obr. 32), jestliže délka jejího pravoúhlého průmětu $\overline{A_1B_1}$ do π je 6,5 cm?

8.10. V pravoúhlém $\triangle PQR$ je přepona $\overline{PQ} = 6,7$ cm a úhel při vrcholu P je $\varphi = 27°27'$; vypočtěte odvěsnu $\overline{PR}$.

8.11. Určete velikost pravoúhlého průmětu $\overline{A_1B_1}$ úsečky $\overline{AB} = 10,5$ cm (obr. 32), víte-li, že přímka AB svírá s průmětnou úhel $\alpha = 25°$.

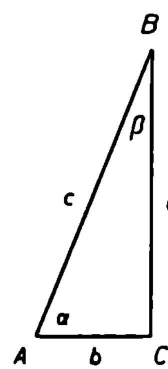
8.12. V pravoúhlém $\triangle RST$ je dána odvěsna $\overline{RT} = 65,5$ cm a úhel při vrcholu R je $\varrho = 33°15'$; určete délku přepony $\overline{RS}$.

8.13. Vypočtěte délku úhlopříčky u obdélníka, je-li jeho jedna strana $a = 7,5$ cm a úhel úhlopříčky u s touto stranou je $35°$.

9. ŘEŠENÍ PRAVOÚHLÉHO TROJÚHELNÍKA

V úvodu jsme uvedli, že úkolem trigonometrie je řešení trojúhelníků, čímž rozumíme výpočet všech neznámých hlavních prvků (stran a úhlů) trojúhelníka pomocí jeho daných prvků. Užitím až dosud odvozených vět a vzorců můžeme již řešit *pravoúhlé trojúhelníky.*

Je známo, že pravoúhlý trojúhelník (obr. 33) je určen 1. přeponou a úhlem, 2. odvěsnou a úhlem, 3. přeponou a odvěsnou nebo 4. oběma odvěsnami. Musíme tedy celkem řešit čtyři základní úlohy; vždy ukážeme, jak nejvýhodněji pomocí daných prvků určíme zbývající hlavní prvky. Kromě toho uvedeme ještě navíc, jak se z daných prvků vypočte plošný obsah p trojúhelníka.



Obr. 33.

Poznámka. Je třeba poznamenat, že v dalším nebudeme vlastně řešit žádné nové úlohy; se všemi jsme se již setkali v úlohách předchozích odstavců. Uvedeme proto v řešení úlohy vždy přímo vzorce pro hledané prvky. Je jich celá řada; to však nikterak neznamená, že si nutně musíme všechny uvedené vzorce pamatovat. Kladli jsme stále důraz na to, abychom znali řádně definiční vzorce goniometrických funkcí ostrého úhlu, a to úplně stačí. Uvažme totiž, že dané dva prvky a další hledaný prvek určují trojici prvků; je-li tato trojice tvořena dvěma stranami a úhlem, pak k řešení použijeme vždy té goniometrické funkce uvedeného úhlu, jež je definována zmíněnými dvěma stranami. Z tohoto vzorce se již snadno vypočte hledaný prvek.

ÚLOHA 9.1. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána jeho přepona c a úhel α.

Řešení (obr. 33). Neznámé prvky a, b, β jsou dány těmito vzorci: $a = c \sin\alpha$ (viz (7.6)), $b = c \cos\alpha$ (viz (8.8)), $\beta = 90° - \alpha$. Jelikož plošný obsah pravoúhlého trojúhelníka je $p = \frac{1}{2}ab$, dostáváme při našem určení $p = \frac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha$.

Příklad 9.1. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li $c = 53{,}5$ cm, $\alpha = 26°30'$.

Řešení. Z tabulek najdeme $\sin 26°30' = 0{,}446$, $\cos 26°30' = 0{,}895$ a dále podle horních vzorců:

$$a = c \sin\alpha;\ a = 53{,}5 \text{ cm} \,.\, \sin 26°30' = 53{,}5 \quad 0{,}446 \text{ cm} = 23{,}861 \text{ cm} \doteq 23{,}9 \text{ cm},$$
$$b = c \cos\alpha;\ b = 53{,}5 \text{ cm} \quad \cos 26°30' = 53{,}5 \quad 0{,}895 \text{ cm} = 47{,}8825 \text{ cm} \doteq 47{,}9 \text{ cm},$$
$$\beta = 90° - \alpha;\ \beta = 90° - 26°30' = 63°30',$$
$$p = \tfrac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha;\ p = \tfrac{1}{2}53{,}5^2 \text{ cm}^2 \,.\, 0{,}446 \,.\, 0{,}895 \doteq 571{,}3 \text{cm}^2.$$

K poslednímu výsledku uveďme, že kdybychom p počítali přímo podle vzorce $p = \frac{1}{2}ab$ s již vypočtenými přibližnými hodnotami a, b, tedy počítali $p = \frac{1}{2}\, 23{,}9 \,.\, 47{,}9 \text{ cm}^2$, pak bychom samozřejmě došli k méně přesnému výsledku, než když počítáme p přímo pomocí daných prvků ze vzorce $p = \frac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha$.

ÚLOHA 9.2. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána jeho odvěsna a a úhel α (nebo β).

Řešení (obr. 33). Hledáme b, c, β. Platí pro ně $b = a \cotg\alpha$ (viz (6,9)), $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ (viz (7.7)), $\beta = 90° - \alpha$. Kdyby místo α

byl dán úhel β, pak buď nejdříve vypočteme $\alpha = 90° - \beta$ a užijeme předchozích vzorců, nebo přímo najdeme $b =$ $= a\,\mathrm{tg}\beta$, $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$. Pro plošný obsah $p = \frac{1}{2}ab$ najdeme $p = \frac{1}{2}a^2 \mathrm{cotg}\alpha$ nebo $p = \frac{1}{2}a^2 \mathrm{tg}\beta$.

Příklad 9.2. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li $a =$ $= 18{,}5$ dm, $\alpha = 42°24'$.

Řešení. Nejdříve pomocí tabulek určíme $\sin 42°24' =$ $= 0{,}674$, $\mathrm{cotg}\,42°24' = 1{,}095$. Užijeme nyní vzorců z úlohy 9.2:

$$b = a\,\mathrm{cotg}\alpha;\quad b = 18{,}5\ \mathrm{dm}\,.\,\mathrm{cotg}\,42°24' = 18{,}5\,.\,1{,}095\ \mathrm{dm} \doteq 20{,}3\ \mathrm{dm},$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha};\quad c = \frac{18{,}5\ \mathrm{dm}}{\sin 42°24'} = 18{,}5\ \mathrm{dm} : 0{,}674 \doteq 27{,}4\ \mathrm{dm},$$

$$\beta = 90° - \alpha;\ \beta = 90° - 42°24' = 47°36',$$

$$p = \tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{cotg}\alpha;\quad p = \tfrac{1}{2}\,18{,}5^2\ \mathrm{dm}^2\,.\,\mathrm{cotg}\,42°24' = \tfrac{1}{2}\,342{,}25\,.\,1{,}095\ \mathrm{dm}^2 \doteq 187{,}4\ \mathrm{dm}^2.$$

Úloha 9.3. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána přepona c a odvěsna a.

Řešení (obr. 33). Hledáme b, α, β. Odvěsnu b určíme pomocí Pythagorovy věty $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (viz věta 1.2); úhel α najdeme ze vztahu $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$. Úhel β pak již stanovíme z podmínky $\beta = 90° - \alpha$. Pro p dostaneme po dosazení $p = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - a^2}$. Často, místo abychom počítali b pomocí Pythagorovy věty (což je poměrně nevýhodné, neboť musíme odmocňovat), najdeme raději nejprve α a pak b vypočteme ze vzorce $b = c\cos\alpha$ (viz (8.6)) nebo z $b = a\,\mathrm{cotg}\alpha$ (viz (6.9)); plošný obsah p počítáme pak přímo podle vzorce $p = \frac{1}{2}ab$ (tedy pomocí vypočtené hodnoty b).

Příklad 9.3. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li $c = 64{,}6$ cm, $a = 48{,}5$ cm.

Řešení. Postupujeme bez užití Pythagorovy věty. Jest:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \sin\alpha = \frac{48{,}5\ \text{cm}}{64{,}6\ \text{cm}} \doteq 0{,}751 \text{ a tedy } \alpha = 48°40',$$

$$b = c \cos\alpha;\ b = 64{,}6\ \text{cm}\quad \cos 48°40' = 64{,}6\quad 0{,}66\ \text{cm} \doteq$$
$$\doteq 42{,}6\ \text{cm},$$

$$\beta = 90° - \alpha; \beta = 90° - 48°40' = 41°20',$$

$$p = \tfrac{1}{2}ab;\ p = \tfrac{1}{2}\ 48{,}5\ \text{cm}\ .\ 42{,}6\ \text{cm} \doteq 1033\ \text{cm}^2.$$

Úloha 9.4. Řešte pravoúhlý trojúhelník, jsou-li dány odvěsny a, b.

Řešení (obr. 33). Hledáme c, α, β. Přeponu c určíme pomocí Pythagorovy věty $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; úhel α najdeme na př. ze vzorce $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. Pro úhel β užijeme vztahu $\beta = 90° - \alpha$. Plošný obsah p je dán přímo vzorcem $p = \frac{1}{2}ab$. Podobně jako v předchozí úloze i zde se často vyhneme počítání s odmocninami a k výpočtu přepony c raději užijeme již nalezeného úhlu α; počítáme tedy buď $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ (viz (7.7)), nebo $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$ (viz (8.7)).

Příklad 9.4. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li $a = 27{,}5$ cm, $b = 34{,}8$ cm.

Řešení. Výpočet provedeme bez užití Pythagorovy věty:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{27{,}5\ \text{cm}}{34{,}8\ \text{cm}} \doteq 0{,}79 \text{ a tedy } \alpha = 38°19',$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha};\ c = \frac{27{,}5\ \text{cm}}{\sin 38°19'} = 27{,}5\ \text{cm} : 0{,}62 \doteq 44{,}4\ \text{cm},$$

$$\beta = 90° - \alpha;\ \beta = 90° - 38°19' = 51°41',$$

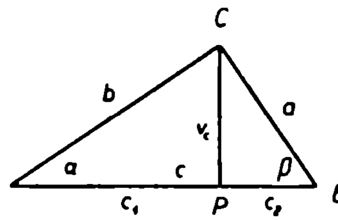
$$p = \tfrac{1}{2}ab;\ p = \tfrac{1}{2}\ 27{,}5\ \text{cm}\ .\ 34{,}8\ \text{cm} = 478{,}5\ \text{cm}^2.$$

Známe-li řešení těchto čtyř základních úloh pro pravoúhlé trojúhelníky, můžeme již přikročit k řešení některých dalších úloh týkajících se na př. určení pravoúhlých trojúhelníků jinými prvky než základními, k řešení rovnoramenných trojúhelníků, obdélníků, kosočtverců, lichoběžníků, pravidelných mnohoúhelníků atd. Úlohu budeme umět řešit, podaří-li se nám v daném útvaru vyhledat nějaké pravoúhlé trojúhelníky (určené základními prvky), pomocí nichž bychom mohli hledané prvky určit.

Vyřešíme několik typických úloh, u kterých právě vynikne zmíněný princip.

a) Všimneme si nejprve řešení *pravoúhlého trojúhelníka určeného jinými než základními prvky.*

ÚLOHA 9.5. Řešte pravoúhlý trojúhelník, určený výškou v_c ke straně c a úhlem α.



Obr. 34.

Řešení (obr. 34). Hledáme a, b, c, β. Výška v_c dělí pravoúhlý $\triangle ABC$ na dva pravoúhlé trojúhelníky APC a BPC. V $\triangle APC$ známe odvěsnu v_c a protější úhel α, tedy podle úlohy 9.2 najdeme $b = \dfrac{v_c}{\sin\alpha}$, $c_1 = v_c \operatorname{cotg}\alpha$. V $\triangle BPC$ zase známe odvěsnu v_c a přilehlý úhel α, neboť $\sphericalangle PCB = \alpha$ a tedy podle téže úlohy je $a = \dfrac{v_c}{\cos\alpha}$, $c_2 = v_c \operatorname{tg}\alpha$. Našli jsme již a, b, ale také c známe, je totiž $c = c_1 + c_2$. Pro β ovšem platí $\beta = 90° - \alpha$. Tím jsou všechny základní prvky $\triangle ABC$ nalezeny.

Příklad 9.5. Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li $v_c = 5$ cm, $\alpha = 48°15'$.

Řešení (obr. 34). Postupujeme podle vzorců uvedených v obecném řešení:

$$b = \frac{v_c}{\sin\alpha};\ b = \frac{5\ \text{cm}}{\sin 48°15'} = 5\ \text{cm} : 0{,}746 \doteq 6{,}7\ \text{cm},$$

$c_1 = v_e \operatorname{cotg}\alpha;\ c_1 = 5\ \text{cm} \,.\, \operatorname{cotg}48°15' = 5\ \text{cm} \,.\, 0{,}892 = 4{,}46\ \text{cm},$

$a = \dfrac{v_e}{\cos\alpha};\ a = \dfrac{5\ \text{cm}}{\cos 48°15'} = 5\ \text{cm} : 0{,}666 \doteq 7{,}5\ \text{cm},$

$c_2 = v_e \operatorname{tg}\alpha;\ c_2 = 5\ \text{cm} \,.\, \operatorname{tg}48°15' = 5\ \text{cm} \,.\, 1{,}121 = 5{,}605\ \text{cm} \doteq$
$\doteq 5{,}6\ \text{cm},$

$c = c_1 + c_2;\ c = 4{,}46\ \text{cm} + 5{,}6\ \text{cm} \doteq 10{,}1\ \text{cm}.$

Úloha 9.6. Řešte pravoúhlý trojúhelník, znáte-li jeho plošný obsah p a úhel α.

Řešení. Pro plošný obsah platí známý vzorec $p = \frac{1}{2}ab$; odvěsny a, b jsou však vázány ještě na př. vztahem $b = a\,.\,\operatorname{cotg}\alpha$. Dosadíme-li odtud za b do vzorce pro plošný obsah, dostaneme $p = \frac{1}{2}a^2\operatorname{cotg}\alpha$, což je rovnice pro neznámou stranu a; z toho již plyne $a = \sqrt{\dfrac{2p}{\operatorname{cotg}\alpha}} = \sqrt{2p\operatorname{tg}\alpha}$. Určili jsme tedy protější odvěsnu; dále můžeme proto postupovat podle úlohy 9.2.

Příklad 9.6. Vypočtěte obě odvěsny pravoúhlého trojúhelníka, je-li $p = 100\ \text{cm}^2$, $\alpha = 32°20'$.

Řešení. Užijeme výsledku obecného řešení:

$a = \sqrt{2p\operatorname{tg}\alpha};\ a = \sqrt{2\,.\,100\ \text{cm}^2\,.\operatorname{tg}32°20'} = \sqrt{200\,.\,0{,}633}\ \text{cm} \doteq$
$\doteq 11{,}3\ \text{cm},$

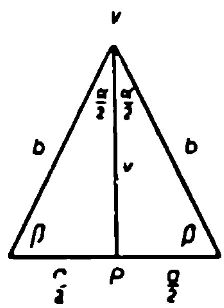
$b = a\operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{2p\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}^2\alpha} = \sqrt{2p\operatorname{cotg}\alpha};$

$b = \sqrt{2\,.\,100\ \text{cm}^2\,.\,\operatorname{cotg}32°20'} = \sqrt{200\,.\,1{,}580}\ \text{cm} \doteq 17{,}8\ \text{cm}.$

b) Máme-li řešit *rovnoramenný trojúhelník* (o základně a, ramenech b, úhlu α proti základně a úhlech β při základně — obr. 35), pak jej rozdělíme výškou v k základně na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky $\triangle MPV$ a $\triangle NPV$. Základními prvky každého z nich jsou: odvěsny $\frac{1}{2}a$, v, přepona b, úhel β protější k odvěsně v, úhel $\frac{1}{2}\alpha$ protější k odvěsně $\frac{1}{2}a$. Řešení rovnoramenných trojúhelníků lze tedy převést na řešení jednoho z těchto pravoúhlých trojúhelníků. Uveďme alespoň stručně řešení všech základních úloh; kromě základních prvků najdeme ještě plošný obsah p; připomeňme ještě, že oba úhly jsou vázány vztahem $\alpha + 2\beta = 180°$.

ÚLOHA 9.7. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li dána základna a a úhel α (nebo β).

Řešení (obr. 35). Z $\triangle MPV$ určíme $b = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{a}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$ $\left(\text{nebo } b = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\cos\beta} = \dfrac{a}{2\cos\beta}\right)$. Jelikož $p = \frac{1}{2}av$, musíme ještě najít v. Jest $v = \frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$ (nebo $v = \frac{1}{2}a \operatorname{tg}\beta$) a tedy $p = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$ (nebo $p = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{tg}\beta$).



Obr. 35.

Příklad 9.7. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li $a = 48$ mm, $\alpha = 50°$.

Řešení. $b = \dfrac{a}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$; $b = \dfrac{48 \text{ mm}}{2\sin 25°} = \dfrac{48 \text{ mm}}{2 \,.\, 0{,}423} \doteq 56{,}7$ mm. Z rovnice $2\beta + \alpha = 180°$ najdeme $\beta = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = \frac{1}{2} \,.\, 130° = 65°$. Konečně $p = \frac{1}{4}a^2 \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha$; $p = \frac{1}{4} \,.\, 48^2\text{mm}^2 \,.\, \operatorname{cotg}25° = \frac{1}{4} \,.\, 2304 \,.\, 2{,}145 \text{ mm}^2 \doteq 1236 \text{ mm}^2$.

ÚLOHA 9.8. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li dáno rameno b a úhel α.

Řešení (obr. 35). Z $\triangle MPV$ plyne $\frac{1}{2}a = b\sin\frac{1}{2}\alpha$ a tedy $a = 2b\sin\frac{1}{2}\alpha$. Pro v najdeme $v = b\cos\frac{1}{2}\alpha$ a tedy $p = \frac{1}{2}av = b^2 \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha$. Kdyby byl dán úhel β, našli bychom nejdříve α a dále bychom počítali podle uvedeného.

Příklad 9.8. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li $b = 25{,}4$ cm, $\alpha = 22°30'$.

Řešení. $a = 2b\sin\frac{1}{2}\alpha$; $a = 2 \,.\, 25{,}4 \text{ cm} \,.\, \sin 11°15' = 2 \,.\, 25{,}4 \,.\, 0{,}195 \text{ cm} \doteq 9{,}9$ cm, $\beta = \frac{1}{2}(180° - \alpha)$; $\beta = \frac{1}{2}(180° - 22°30') = 78°45'$;

$p = b^2 \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha$; $p = 25{,}4^2 \text{ cm}^2 \,.\, \sin 11°15' \,.\, \cos 11°15' = 645{,}16 \,.\, 0{,}195 \,.\, 0{,}981 \text{ cm}^2 \doteq 123{,}4 \text{ cm}^2$.

ÚLOHA 9.9. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li dána základna a a rameno b.

Řešení (obr. 35). Úhel α najdeme pomocí $\triangle\ MPV$; jest $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{b} = \frac{a}{2b}$. Výšku v vypočteme pomocí Pythagorovy věty $v = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}$ a tedy $p = \frac{1}{2}av = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}$ (nebo bez užití Pythagorovy věty $v = b\cos\frac{1}{2}\alpha$ a dále $p = \frac{1}{2}ab\,.\,\cos\frac{1}{2}\alpha$).

Příklad 9.9. Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li $a = 7{,}3$ cm, $b = 4{,}8$ cm.

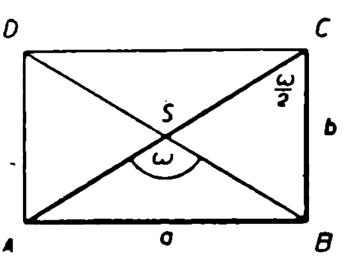
Řešení.

$\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{a}{2b}$; $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{7{,}3\text{ cm}}{2\,.\,4{,}8\text{ cm}} = 7.3 : 9{,}6 \doteq 0{,}76042$, tedy $\frac{1}{2}\alpha = 49°30'$, $\alpha = 99°$, $\beta = 90° - \frac{1}{2}\alpha$; $\beta = 90° - 49°30' = 40°30'$,

$p = \frac{1}{2}ab\cos\frac{1}{2}\alpha$; $p = \frac{1}{2}\,.\,7{,}3\text{ cm}\,.\,4{,}8\text{ cm}\,.\,0{,}649 \doteq 11{,}37\text{ cm}^2$.

c) Přikročme nyní k *řešení některých čtyřúhelníků* (obdélníků, kosočtverců, lichoběžníků), u kterých se pomocný pravoúhlý trojúhelník sestrojí velice snadno. Na př. obdélník je rozdělen úhlopříčkou na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky; kosočtverec je úhlopříčkami rozdělen na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky atd. Uveďme alespoň některé příklady.

Příklad 9.10. Vypočtěte plošný obsah obdélníka, pro který je dána strana $a = 17{,}9$ cm a úhel úhlopříček $\omega = 128°36'$

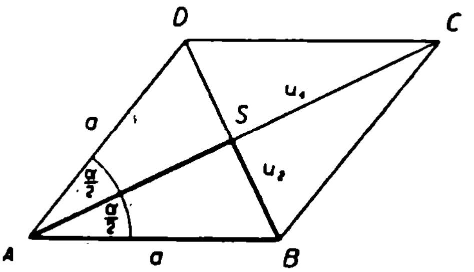


Obr. 36.

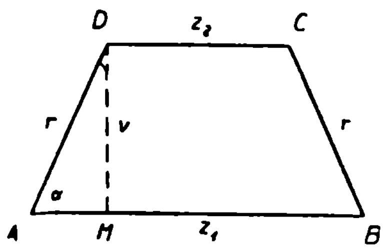
Řešení (obr. 36). Stačí určit stranu b; v pravoúhlém $\triangle\ ABC$ je úhel při vrcholu C rovný $\frac{1}{2}\omega$ a tedy $b = a\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\omega$. Pro plošný obsah najdeme pak $p = ab = a^2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\omega$. V našem případě je $p = 17{,}9^2\text{ cm}^2\,.\operatorname{cotg}64°18' = 320{,}41\,.\,0{,}481\text{ cm}^2 \doteq 154{,}1\text{ cm}^2$.

Příklad 9.11. Vypočtěte úhlopříčky u_1, u_2 kosočtverce, který je dán stranou $a = 42{,}5$ mm a úhlem $\alpha = 57°40'$ sousedních stran.

Řešení (obr. 37). Z pravoúhlého $\triangle\, ABS$, ve kterém známe přeponu a a úhel $\frac{1}{2}\alpha$, určíme obě odvěsny, t. j. $\frac{1}{2}u_1$ a $\frac{1}{2}u_2$. Jest $\frac{1}{2}u_1 = a\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}u_2 = a\sin\frac{1}{2}\alpha$, tedy $u_1 = 2a\cos\frac{1}{2}\alpha$, $u_2 = 2a\sin\frac{1}{2}\alpha$. Dosazením daných hodnot najdeme $u_1 = 2\,.\,42{,}5\text{ mm}\,.\cos 28°50' = 2\,.\,42{,}5\,.\,0{,}876\text{ mm} \doteq 74{,}5\text{ mm}$, $u_2 = 2\,.\,42{,}5\text{ mm}\,.\sin 28°50' = 2\,.\,42{,}5\,.\,0{,}482\text{ mm} \doteq 41\text{ mm}$.



Obr. 37.

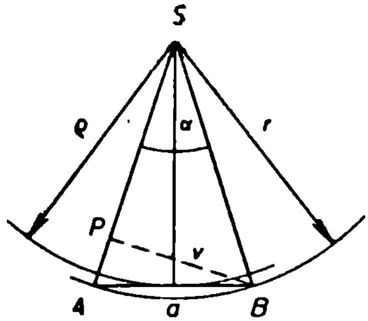


Obr. 38.

Příklad 9.12. Určete plošný obsah rovnoramenného lichoběžníka, jsou-li jeho základny $z_1 = 83{,}5$ cm, $z_2 = 31{,}7$ cm a úhel ramene se základnou $\alpha = 67°15'$

Řešení (obr. 38). Pro plošný obsah platí známý vzorec $p = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)v$. Stačí určit výšku v, jež je odvěsnou pravoúhlého $\triangle\, AMD$, ve kterém známe úhel α a přilehlou odvěsnu $\overline{AM} = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$. Jest $v = \overline{AM}\,.\,\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)\,.\,\mathrm{tg}\alpha$ a tedy $p = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\,.\,\frac{1}{2}(z_1 - z_2)\,\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{4}(z_1{}^2 - z_2{}^2)\,\mathrm{tg}\alpha$. Po dosazení najdeme $p = \frac{1}{4}(83{,}5^2\text{ cm}^2 - 31{,}7^2\text{ cm}^2)\ \mathrm{tg}67°15' = \frac{1}{4}(6972{,}25 - 1004{,}89)\,.\,2{,}386\text{ cm}^2 \doteq 3560\text{ cm}^2$.

d) Také u pravidelných mnohoúhelníků snadno najdeme pomocný pravoúhlý trojúhelník. *Pravidelný n-úhelník* je totiž složen z n shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 39), které již umíme řešit. Úhel proti základně známe: je $\alpha = \dfrac{360°}{n} = \dfrac{4R}{n}$. U pravidelného n-úhelníka nás zajímají poloměr r kružnice opsané, poloměr ϱ kružnice vepsané a strana a. Jsou to postupně rameno, výška a základna každého ze zmíněných rovnoramenných trojúhelníků. Je-li tedy (kromě již známého úhlu α) dán jeden z těchto prvků, můžeme již ostatní vypočítat; obyčejně hledáme také plošný obsah p.



Obr. 39.

Úloha 9.10. Řešte pravidelný n-úhelník, je-li dán poloměr r kružnice opsané.

Řešení (obr. 39). Jest $\frac{1}{2}a = r \sin\frac{1}{2}\alpha = r \sin\dfrac{2R}{n}$, tedy $a = 2r \sin\dfrac{2R}{n}$. Dále $\varrho = r\cos\dfrac{2R}{n}$. Je li p' plošný obsah $\triangle ABS$, pak $p = np'$. Pro p' však platí $p' = \frac{1}{2}a\varrho = r^2 \sin\dfrac{2R}{n}\cos\dfrac{2R}{n}$ a tedy $p = nr^2 \sin\dfrac{2R}{n}\cos\dfrac{2R}{n}$. Tento vzorec můžeme poněkud zjednodušit. Vypočteme totiž pomocí pravoúhlého $\triangle BPS$ výšku v ke straně AS v $\triangle ABS$. Jest $v = r\sin\alpha = r\sin\dfrac{4R}{n}$. Tedy $p' = \frac{1}{2}rv = \frac{1}{2}r^2\sin\alpha = \frac{1}{2}r^2\sin\dfrac{4R}{n}$; pak je $p = np' = \frac{1}{2}nr^2\sin\dfrac{4R}{n}$.

Příklad 9.13. Řešte pravidelný sedmiúhelník, je-li $r = 5$ cm.

Řešení. Pro pravidelný sedmiúhelník je $\alpha = \dfrac{4R}{7} \doteq 51°26'$

Postupně najdeme:

$a = 2r\sin\dfrac{2R}{n}$; $a = 2.5\,\text{cm}\,.\sin 25°43' = 2.5\,.\,0{,}434\,\text{cm} \doteq 4{,}3\,\text{cm}$,

$\varrho = r \cos \frac{2R}{n}$; $\varrho = 5$ cm. $\cos 25°43' = 5 \,.\, 0{,}901$ cm $\doteq 4{,}5$ cm,

$p = \frac{1}{2}nr^2 \sin \frac{4R}{n}$; $p = \frac{1}{2} \,.\, 7 \,.\, 5^2$ cm$^2 \,.\, \sin 51°26' = \frac{7}{2} \,.\, 25 \,.$
$.\, 0{,}782$ cm$^2 \doteq 68{,}4$ cm^2.

Úloha 9.11. Řešte pravidelný n-úhelník, je-li dána strana a.

Řešení (obr. 39). Především je $r = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\sin \frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{a}{2 \sin \frac{2R}{n}}$.

Dále $\varrho = \frac{1}{2}a \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}$ a tedy $p = np' = n.\ \frac{1}{2}a\varrho =$
$= \frac{1}{4}na^2 \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}$.

Příklad 9.14. Vypočtěte plošný obsah pravidelného osmiúhelníka, je-li $a = 10$ cm.

Řešení. $p = \frac{1}{4}na^2 \operatorname{cotg} \frac{2R}{n}$; $p = \frac{1}{4} \,.\, 8 \,.\, 10^2$ cm$^2 \,.\, \operatorname{cotg} 22°30' =$
$= \frac{8}{4} \,.\, 100 \,.\, 2{,}41421$ cm$^2 \doteq 482{,}8$ cm^2.

Úloha 9.12. Řešte pravidelný n-úhelník, je-li dán poloměr ϱ kružnice vepsané.

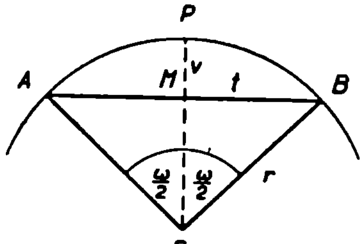
Řešení (obr. 39). Snadno najdeme $a = 2\varrho \operatorname{tg} \frac{2R}{n}$, $r = \varrho :$
$: \cos \frac{2R}{n}$ a $p = np' = n\frac{1}{2}a\varrho = n\varrho^2 \operatorname{tg} \frac{2R}{n}$.

Příklad 9.15. Vypočtěte stranu a pravidelného desetiúhelníka, je-li $\varrho = 8{,}5$ cm.

Řešení. $a = 2\varrho \operatorname{tg} \frac{2R}{n}$; $a = 2 \,.\, 8{,}5$ cm $.\, \operatorname{tg} 18° = 2 \,.\, 8{,}5$
$.\, 0{,}32492$ cm $= 8{,}5 \,.\, 0{,}64984$ cm $\doteq 5{,}5$ cm.

Poznámka. Na základě vzorců, jež jsme si odvodili v úlohách 9.10 ÷ 9.12, jsou sestavovány tabulky pro pravidelné mnohoúhelníky. Čteme v nich na př., že strana pravidelného desetiúhelníka je $a = 0{,}64984\varrho$; úloha 9.12 nám říká, že koeficient při ϱ v tomto vzorci není nic jiného než $2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{10} = 2\operatorname{tg}18^\circ$ (porovnejte s příkladem 9.15).

e) Ještě krátce si všimneme *tětivy t kružnice* (obr. 40); není-li tětiva průměrem kružnice, pak je základnou rovnoramenného trojúhelníka, jehož ramena se rovnají poloměru r kružnice a úhel proti základně je středový úhel ω příslušný tětivě t. Vzájemný vztah mezi prvky r, t, ω je dán vzorcem



Obr. 40.

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\tfrac{1}{2}t}{r} = \frac{t}{2r}.$$

Poznámka. Tětiva dělí kruh na dvě kruhové úseče, z nichž se obyčejně uvažuje ta, jejíž oblouk přísluší středovému úhlu $\omega < 180^\circ$. Výškou v úseče se rozumí vzdálenost středu P příslušného oblouku od středu M tětivy. Tedy $v = \overline{PS} - \overline{MS} = r - r\cos\frac{1}{2}\omega = r(1 - \cos\frac{1}{2}\omega)$. Plošný obsah kruhové úseče u příslušné středovému úhlu ω vypočteme, když od plošného obsahu kruhové výseče $SAPB$ odečteme plošný obsah rovnoramenného $\triangle\, SAB$. Plošný obsah výseče je $\frac{\pi r^2}{360^\circ}\omega = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{arc}\omega$ a plošný obsah $\triangle\, SAB$ (podle vzorce $p' = \frac{1}{2}r^2\sin\alpha$ pro plošný obsah rovnoramenného trojúhelníka, který jsme si mimochodem odvodili v úloze 9.10) je $\frac{1}{2}r^2 \,.\, \sin\omega$, tedy plošný obsah úseče u je

$$u = \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{arc}\omega - \tfrac{1}{2}r^2\sin\omega = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arc}\omega - \sin\omega)r^2.$$

Příklad 9.16. Vypočtěte délku tětivy t příslušné středovému úhlu $\omega = 116^\circ$ v kružnici o poloměru $r = 15$ cm.

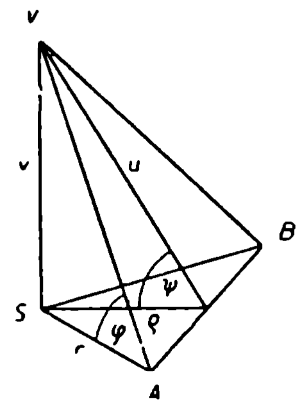
Řešení. Ze vztahu $\sin\frac{1}{2}\omega = \frac{t}{2r}$ plyne $t = 2r\sin\frac{1}{2}\omega$ a tedy

$t = 2 \,.\, 15\,\text{cm} \,.\, \sin 58° = 2 \,.\, 15 \,.\, 0{,}84805\,\text{cm} = 15 \,.\, 1{,}69610\,\text{cm} \doteq$
$\doteq 25{,}4\ \text{cm}$.

Poznámka. Rovněž zde poznamenejme, že hodnoty t, v, u bývají vypočteny ve zvláštních tabulkách pro středové úhly postupující po 1°. Tak na př. pro úhel $\omega = 116°$ najdeme v těchto tabulkách hodnotu $t = 1{,}69610r$; podle našeho výpočtu koeficient u r jest $2 \,.\, \sin 58°$ (porovnejte s příkladem 9.16).

f) Také ve *stereometrii* (která se zabývá prostorovými úlohami) můžeme někdy k řešení úlohy použít vhodně zvolených pravoúhlých trojúhelníků. Ukažme to alespoň na jedné úloze.

ÚLOHA 9.13. Najděte úhel φ pobočných hran a úhel ψ pobočných stěn pravidelného n-bokého jehlanu s podstavou, je-li podstavná hrana a a pobočná hrana b.



Obr. 41.

Řešení (obr. 41). Podstavou je pravidelný n-úhelník, jehož základní prvky jsou $\alpha = \dfrac{4R}{n}$, r, ϱ, a. Především je $\cos\varphi =$ $= r : b$, kde $r = a : 2\sin\dfrac{2R}{n}$ (viz úloha 9.11). Tím je určen úhel φ. Podobně pro ψ najdeme $\cos\psi = \varrho : u$, kde u je výška ke straně a v pobočné stěně (a tedy $u = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}$) a kde ϱ jsme vypočetli (viz úlohu 9.11) již dříve, $\varrho = \frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\dfrac{2R}{n}$.

Příklad 9.17. Určete φ a ψ pro pravidelný jehlan čtyřboký, jehož $a = 15{,}3$ cm, $b = 23{,}4$ cm.

Řešení. V tomto případě je $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $\varrho = \frac{1}{2}a$ a tedy

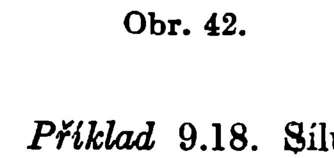
$$\cos\varphi = \frac{r}{b} = \frac{a\sqrt{2}}{2b};\ \cos\varphi = \frac{15{,}3\ \text{cm} \,.\, \sqrt{2}}{2 \,.\, 23{,}4\ \text{cm}} \doteq 0{,}462,\ \varphi = 62°28'$$

Dále je $\cos\psi = \frac{\varrho}{u} = \frac{a}{2\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}}$; $\cos\psi = \frac{15{,}3}{2\sqrt{23{,}4^2 - \frac{1}{4}15{,}3^2}} \doteq$ $\doteq 0{,}346$, $\psi = 69°45'$.

g) Až dosud jsme se zabývali jen úlohami z geometrie, ve kterých vyhledání vhodného pravoúhlého trojúhelníka bylo celkem průzračné. V řadě *praktických příkladů* však přistupují obtíže, které spočívají hlavně v tom, že na prvý pohled není patrno jejich geometrické jádro. Podaří-li se nám geometrisovat úlohu, pak další výpočet je již snadný. Zase uveďme jen jednu typickou úlohu.

Úloha 9.14. Danou sílu P (vyjádřenou v kg) rozložte na dvě k sobě kolmé složky Q_1, Q_2 tak, aby úhel PQ_1 byl rovný ω (při čemž $0° < \omega < 90°$).

Řešení (obr. 42). Především je třeba z fysiky znát, že sílu lze znázornit úsečkou (při vhodné volbě jednotky, na př. 1 kg znázorníme úsečkou délky 1 cm) určitého směru a smyslu, tedy t. zv. *orientovanou úsečkou*. Úhlem ω sil P, Q_1 rozumíme úhel příslušných orientovaných úseček. Rčením „rozložte sílu P ve složky Q_1, Q_2" rozumíme nalézt velikosti sil Q_1 a Q_2, t. j. délky znázorňujících úseček. Další je již zřejmé. Geometricky úloha zní: Najděte strany Q_1 a Q_2 obdélníka, znáte-li jeho úhlopříčku P a úhel ω úhlopříčky P se stranou Q_1. Pro strany Q_1 a Q_2 najdeme délky $Q_1 = P\cos\omega$, $Q_2 = P\sin\omega$. Výsledek zase přečteme fysikálně: hledané složky jsou $P\cos\omega$ a $P\sin\omega$. Pro přesnost dodejme, že jsme mlčky předpokládali, že síla P není nulová.



Obr. 42.

Příklad 9.18. Sílu $P = 220$ kg rozložte na dvě k sobě kolmé složky Q_1, Q_2 tak, aby $\sphericalangle PQ_1 = \omega = 35°10'$.

Řešení. $Q_1 = P \cos\omega$; $Q_1 = 220 \text{ kg} \,.\, \cos 35°10' = 220 \,.\, 0{,}817 \text{ kg} \doteq 179{,}7 \text{ kg}$. $Q_2 = P \sin\omega$; $Q_2 = 220 \text{ kg} \,.\, \sin 35°10' = 220 \,.\, 0{,}576 \text{ kg} \doteq 126{,}7 \text{ kg}$.

Cvičení.

Řešte pravoúhlý trojúhelník z daných prvků, jestliže a, b jsou odvěsny, α, β protější úhly, c přepona, v_c výška k přeponě, p plošný obsah:

9.1. a) $c = 100$ cm, $\alpha = 21°30'$; b) $c = 17{,}8$ cm, $\alpha = 57°30'$; c) $c = 12{,}8$ cm, $\beta = 20°$.

9.2. a) $a = 51{,}7$ cm, $\alpha = 35°30'$; b) $a = 113$ mm, $\beta = 16°40'$; c) $b = 91$ mm, $\beta = 49°12'$; d) $b = 6{,}3$ cm, $\alpha = 71°55'$.

9.3. a) $c = 45$ mm, $a = 29$ mm; b) $c = 8{,}3$ cm, $b = 6{,}2$ cm.

9.4. a) $a = 13$ cm, $b = 7{,}5$ cm; b) $a = 65{,}3$ cm, $b = 27{,}8$ cm.

9.5. a) $v_c = 2{,}7$ cm, $\alpha = 31°50'$; b) $v_c = 10$ cm, $\beta = 76°$.

9.6. a) $a = 45{,}6$ cm, $v_c = 17{,}3$ cm; b) $b = 210$ mm, $v_c = 150$ mm.

9.7. a) $p = 23{,}8$ cm², $\alpha = 40°$; b) $p = 1$ dm², $\beta = 17°30'$.

9.8. a) $p = 17$ cm², $a = 5{,}4$ cm; b) $p = 25$ dm², $b = 125$ cm.

Řešte rovnoramenný trojúhelník z daných prvků, jestliže a je základna, b rameno, α úhel proti základně, β úhel při základně, v výška k základně:

9.9. a) $a = 6$ cm, $\alpha = 32°$; b) $a = 73{,}5$ mm, $\beta = 28°16'$.

9.10. a) $b = 45$ mm, $\alpha = 45°$; b) $b = 16{,}3$ cm, $\beta = 70°$.

9.11. $a = 126$ mm, $b = 76{,}8$ mm.

9.12. $a = 10$ cm, $v = 15$ cm.

9.13. $b = 85$ mm, $v = 67$ mm.

9.14. Určete plošný obsah obdélníka, je-li dána jeho strana $b = 3{,}5$ cm a úhel úhlopříček $\omega = 73°20'$.

9.15. Vypočtěte úhel úhlopříček obdélníka, jsou-li jeho strany $a = 8{,}4$ cm, $b = 4{,}5$ cm.

9.16. Vypočtěte délku úhlopříček u_1, u_2 kosočtverce, je-li jeho strana $a = 38{,}7$ mm, úhel jeho stran $\alpha = 43°20'$.

9.17. Určete úhel sousedních stran kosočtverce, jehož jedna úhlopříčka $u_1 = 8$ cm a strana $a = 4{,}5$ cm.

9.18. V rovnoramenném lichoběžníku jsou dány základny $z_1 = 75$ mm, $z_2 = 63$ mm a úhel ramene se základnou $\alpha = 55°30'$; vypočtěte plošný obsah.

9.19. Najděte délku základny z_2 rovnoramenného lichoběžníka, je-li $z_1 = 100$ mm, délka ramene $r = 37{,}3$ mm a úhel ramene se základnou $\alpha = 66°$.

Řešte pravidelný n-úhelník, je-li a jeho strana, r poloměr kružnice opsané, ϱ poloměr kružnice vepsané, p plošný obsah:

9.20. a) $n = 5$, $r = 6{,}5$ cm; b) $n = 10$, $r = 10$ cm.

9.21. a) $n = 7$, $a = 5$ cm; b) $n = 8$, $a = 4{,}5$ cm.

9.22. a) $n = 5$, $\varrho = 10$ cm; b) $n = 7$, $\varrho = 3{,}8$ cm.

9.23. a) $n = 5$, $p = 100$ cm²; b) $n = 8$, $p = 100$ cm².

9.24. Vypočtěte délku tětivy t příslušné středovému úhlu $\omega = 75°$ v kružnici o poloměru $r = 25$ cm.

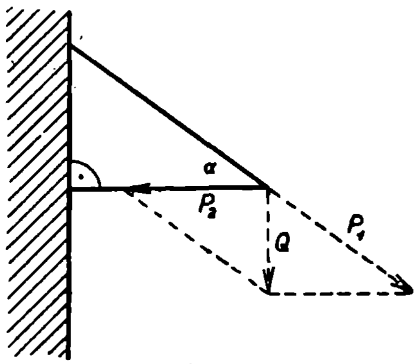
9.25. Jaký poloměr má kružnice, v níž středovému úhlu $\omega = 73°40'$ přísluší tětiva $t = 60$ cm?

9.26. V kružnici o poloměru $r = 6{,}5$ cm jest dána tětiva $t = 43$ mm; najděte příslušný středový úhel ω.

9.27. Jaká je výška v úseče příslušející středovému úhlu 110° v kružnici o poloměru $r = 7{,}5$ cm?

9.28. Je dán pravidelný čtyřstěn; vypočtěte a) úhel jeho hran se stěnami, b) úhel jeho stěn.

9.29. Určete velikost výslednice R dvou k sobě kolmých sil $P_1 = 65$ kg, $P_2 = 48$ kg působících na hmotný bod; jak veliký je úhel ω, který výslednice R svírá se silou P_1?



Obr. 43.

9.30. Rozložte sílu $R = 100$ kg na dvě k sobě kolmé složky P_1 a P_2 tak, aby $\omega = \measuredangle P_1R = 27°40'$.

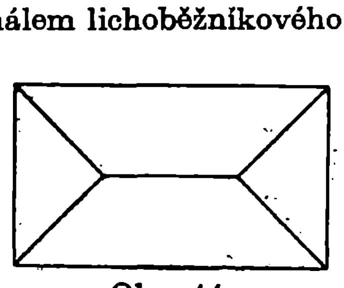
9.31. Prutový nosník (obr. 43), jehož pruty svírají úhel $\alpha = 22°30'$, je zatížen břemenem $Q = 275$ kg; stanovte namáhání na tah (P_1) a tlak (P_2).

9.32. Jaká je délka převodového řemene u převodu, jehož jedno kolo má průměr $d_1 = 850$ mm, druhé $d_2 = 250$ mm a vzdálenost středů obou kol je $l = 2250$ mm při a) otevřeném, b) zkříženém opásání?

9.33. Jaké je dovolené zatížení krátkého dutého sloupku, jehož průřez je omezen pravidelným osmiúhelníkem o malém průměru $d_1 = 230$ mm a soustřednou kružnicí o průměru $d_2 = 210$ mm (dovolené zatížení je $z = 7$ kg/mm², což čteme 7 kg na mm²; $d_1 = 2\varrho$, kde ϱ je poloměr kružnice vepsané)?

9.34. Kolik m³ vody proteče za hodinu kanálem lichoběžníkového průřezu, je-li šířka jeho dna $z = 3{,}5$ m, mají-li jeho stěny sklon 65° a 40° a je-li průměrná výška vody v kanále $h = 1{,}25$ m (rychlost vody je $v = 0{,}9$ m/sec)?

9.35. Vypočtěte plošnou velikost střechy nad obdélníkovým půdorysem (obr. 44) o rozměrech $a = 9{,}5$ m, $b = 12{,}5$ m, jestliže sklon střechy je $\alpha = 27°30'$.


Obr. 44.

Poznámka. Kdo neumí počítat s logaritmy, může tento odstavec vynechat, neboť se v něm jen ukazuje, jak můžeme pohodlněji a přesněji užitím logaritmů provádět nám již známé výpočty.

V předcházejících odstavcích a zvláště v posledním jsme se při trigonometrickém řešení úloh stále setkávali s násobením a dělením. Mnozí z vás vědí, že logaritmováním lze tyto početní výkony zjednodušit a převést na sčítání a odčítání — ovšem logaritmů daných čísel. Přitom mocnění a odmocňování se převádí na násobení a dělení. Je nasnadě položit si otázku, jak lze tohoto podstatného zjednodušení výpočtu užít při řešení goniometrických úloh. Zřejmě stačí znát kromě (dekadických) logaritmů obyčejných čísel ještě (dekadické) logaritmy goniometrických čísel*).

Tyto (dekadické, někdy také nazývané Briggsovy) logaritmy goniometrických funkcí jsou sestaveny v tabulkách obdobným způsobem jako hodnoty goniometrických funkcí. Úhly v intervalu (0°, 45°) jsou uvedeny vlevo a hodnoty logaritmů dané funkce (na př. sinu) se čtou v příslušném řádku a ve sloupci, který nahoře nese označení log uvažované funkce (tedy v našem případě logsin, viz obr. 45). Úhly v intervalu (45°, 90°) jsou uvedeny vpravo, hodnoty se čtou ve sloupci, který je označen dole. Hodnoty logaritmů goniometrických funkcí bývají obyčejně zkracovány na čtyři nebo pět desetinných míst; podle toho se také říká čtyřmístné nebo pětimístné**) tabulky. V pětimístných tabulkách

*) O logaritmech, logaritmických tabulkách a počítání s nimi na př. poučí jeden ze svazků této knižnice Vítězslav Jozífek: *O logaritmech a logaritmických tabulkách*, Brána k vědění, sv. 7 (Praha, 1949, JČMF).

**) V dříve zmíněných Valouchových tabulkách (viz pozn. na str. 30) jsou jak čtyřmístné, tak pětimístné tabulky logaritmů hodnot goniometrických funkcí.

(a jen o nich budeme mluvit) postupují úhly po 1′ (obr. 45), každému stupni je obyčejně věnována jedna stránka tabulek. Pro logaritmy sinů a tangent malých úhlů (do 5′) a tedy současně pro logaritmy kosinů a kotangent velkých úhlů (přes 89°55′) bývá připojena přesnější tabulka pro úhly postupující po 1″

Protože — jak jsme dříve našli — jsou hodnoty sinu a kosinu ostrých úhlů čísla mezi 0 a 1, jsou jejich logaritmy záporná čísla. Na př. $\log\sin 30° = \log\frac{1}{2} = -\log 2 = -0{,}30103$. Z praktických důvodů se proto uvádí v tabulkách místo hodnot $\log\sin\alpha$ a $\log\cos\alpha$ vždy jejich doplněk do 10. Podobně i pro logaritmy tangenty a kotangenty. Tedy v horním případě najdeme v tabulkách pod $\log\sin 30°$ hodnotu 9,69897. Pro její skutečnou hodnotu ovšem platí $\log\sin 30° = -0{,}30103 = 10 - 0{,}30103 - 10 = 9{,}69897 - 10$. *Číslo — 10 (t. j. charakteristika — 10) není v tabulkách uváděno a je ho třeba vždy k hodnotám nalezeným v tabulkách připojit.*

22°

	logsin	d.
0	9,57 358	
		31
1	57 389	31
2	57 420	31
3	57 451	31
4	57 482	32
5	9,57 514	

Obr. 45.

Nyní již čtení tabulek nebude činit žádné obtíže. Na př. pro $\log\sin 22°3'$ najdeme (obr. 45) 9,57451 — 10. Také však obráceně, víme-li, že na př. $\log\sin\alpha = 9{,}57389 - 10$, pak z tabulek snadno vyhledáme $\alpha = 22°1'$ (obr. 45). Není-li daný úhel nebo daný logaritmus některé z goniometrických funkcí uveden v tabulkách, pak užijeme *interpolace*. Princip interpolace je založen na téže myšlence jako interpolace goniometrických funkcí. Omezíme-li se totiž na malé intervaly úhlů, jsou zřejmě rozdíly úhlů vzatých z tohoto intervalu přibližně úměrny rozdílům logaritmů příslušných goniometrických hodnot. Při vhodné volbě zmíněného intervalu je chyba tak malá, že nalezené hodnoty (určené na pět desetinných míst) můžeme vzít za přesné hodnoty (zaokrouhlené na pět desetinných míst).

Příklad 10.1. Určete $\log\sin 22°3'27''$

Řešení. V tabulkách (obr. 45) najdeme jen hodnoty $\log\sin 22°3' = 9{,}57451 - 10$ a $\log\sin 22°4' = 9{,}57482 - 10$. Vzroste-li tedy úhel z $22°3'$ o $1'$ na $22°4'$, vzroste logaritmus jeho sinu o 31 jednotek posledního desetinného místa (tedy o 31 stotisícin). Na $1''$ (z intervalu $\langle 22°3', 22°4' \rangle$) připadá tedy 31:60 jednotek posledního desetinného místa; $27''$ přísluší pak přírůstek (*oprava*) $\frac{31}{60} \cdot 27 \doteq 14$ jednotek posledního deset. místa. Protože sinus ostrého úhlu je funkce rostoucí, je také jeho logaritmus funkce rostoucí, a proto opravu *přičteme*. Je tedy $\log\sin 22°3'27'' = 9{,}57451 - 10 + 0{,}00014 =$ $= 9{,}57465 - 10$. Celý výpočet napíšeme přehledně takto:

$$\begin{array}{rr} \log\sin 22°3'27'' = & 9{,}57451 - 10 \\ + \frac{31}{60} \cdot 27 \ldots & 14 \\ \hline & 9{,}57465 - 10 \end{array}$$

Diference sousedních hodnot logaritmů (v našem případě 31 stotisícin) bývá v tabulkách přímo uváděna ve sloupci označeném *d.*, a to v jednotkách posledního desetinného místa (obr. 45). V tabulkách bývají však často vypočítány i opravy příslušející jednotlivým vteřinám, a to v části označené *P. P.* (*partes proportionales* — úměrné dílky). Pro každou *tabulkovou diferenci*, jež se vyskytuje na příslušné stránce tabulek (v našem případě pro diferenci 31), jsou vypočteny opravy v jednotkách pátého desetinného místa, a to pro $1'' \div 10''$, $20''$, $30''$, $40''$ a $50''$. Tak v našem případě najdeme pro $20''$ opravu 10,7 a pro $7''$ opravu 3,7, dohromady pro $27''$ opravu $14{,}4 \doteq 14$, jak jsme našli přímým výpočtem.

Příklad 10.2. Určete logcos37°15′32″.

Řešení.

$$\begin{array}{rrl} & \log\cos 37°15'32'' = & 9{,}90091 - 10 \\ - & \frac{9}{60} \cdot 32 & - \quad\;\; 5 \\ \hline & & 9{,}90086 - 10 \end{array}$$

Kosinus ostrého úhlu je funkce klesající, proto opravu musíme *odečíst*. Abychom předešli chybám, které se tu často činí, je dobré předem si v tabulkách zjistit, mezi kterými hodnotami musí hledaná hodnota logaritmu ležet.

Příklad 10.3. Určete logtg63°47′56″.

Řešení.

$$\begin{array}{rrl} & \log\mathrm{tg}\, 63°47'56'' = & 10{,}30766 - 10 \\ & \frac{32}{60} \cdot 56 & + \quad\;\; 30 \\ \hline & & 10{,}30796 - 10 \end{array}$$

Tangens ostrého úhlu je funkce rostoucí, proto opravu *přičteme*.

Příklad 10.4. Určete logcotg43°12′49″.

Řešení.

$$\begin{array}{rrl} & \log\mathrm{cotg}\, 43°12'49'' = & 10{,}02731 - 10 \\ - & \frac{26}{60} \cdot 49 & - \quad\;\; 21 \\ \hline & & 10{,}02710 - 10 \end{array}$$

Kotangens ostrého úhlu je funkce klesající, proto opravu *odečítáme*.

Příklad 10.5. Určete ostrý úhel α, je-li $\log\sin\alpha = 9{,}57432 - - 10$.

Řešení. V tabulkách (obr. 45) najdeme jen hodnoty 9,57420 — 10 a 9,57451 — 10 příslušející úhlům 22°2′ a 22°3′. Hledaný úhel α bude ležet mezi těmito úhly. Přírůstku 31 jednotek posledního deset. místa přísluší vzrůst úhlu o $1' = 60''$.

Tedy naší diferenci 12 jednotek posledního deset. místa (totiž 9,57432 — 9,57420 = 0,00012) přísluší oprava 12 : : $\frac{31}{60} \doteq$ 23 vteřin. Je tedy $\alpha = 22°2'23''$. K určení opravy opět můžeme s výhodou použít části *P* . *P*; v našem případě ve sloupci 31 (tolik činí tabulková diference) hledáme, kolika stupňům přísluší naše diference 12. V pravém sloupci vyhledáme číslo nejblíže nižší 12, což je 10,3, k němuž přísluší oprava 20″; dále najdeme nejbližší číslo ke zbytku 12 — — 10,3 = 1,7, což je 1,6; této diferenci přísluší oprava 3″. Dohromady jako dříve najdeme 23″. Opravu přičteme, neboť sinus ostrého úhlu je funkce rostoucí. Celý postup opět zapisujeme přehledně

$$
\begin{array}{rll}
\log\sin\alpha = & 9{,}57432 - 10 & \\
& \underline{\phantom{9{,}5}420} & \;\; 22°2' \\
& \phantom{9{,}5}12 : \frac{31}{60} & \underline{+ \quad\;\; 23''} \\
& \qquad\quad \alpha = & \;\; 22°2'23''.
\end{array}
$$

Příklad 10.6. Určete ostrý úhel α, je-li $\log\cos\alpha =$ = 9,96164 — 10.

Řešení.

$$
\begin{array}{rll}
\log\cos\alpha = & 9{,}96164 - 10 & \\
& \underline{\phantom{9{,}9}162} & \ldots\, 23°44' \\
& \phantom{9{,}96}2 : \frac{6}{60} & \underline{- \qquad 20''} \\
& \qquad\quad \alpha = & \;\; 23°43'40''.
\end{array}
$$

Opravu odečítáme, neboť kosinus ostrého úhlu je funkce klesající.

Příklad 10.7. Určete ostrý úhel α, je-li $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 10{,}76698$ — 10.

Řešení.

$$
\begin{array}{rll}
\log\mathrm{tg}\,\alpha = & 10{,}76698 - 10 & \\
& \underline{\phantom{10{,}7}641} & \ldots\, 80°17' \\
& \phantom{10{,}7}57 : \frac{76}{60} & \underline{+ \qquad 45''} \\
& \qquad\quad \alpha = & \;\; 80°17'45''.
\end{array}
$$

Tangens ostrého úhlu je funkce rostoucí, proto opravu přičítáme.

Příklad 10.8. Určete ostrý úhel α, je-li $\cot g\alpha = 9{,}79886 - 10$.

Řešení. $\log\cot g\alpha = 9{,}79886 - 10$

$$\begin{array}{rl} \underline{860} & \ldots 57^\circ 50' \\ 26 : \frac{28}{60} & \underline{- \quad 56''} \\ \alpha = & 57^\circ 49' \ 4'' \end{array}$$

Kotangens ostrého úhlu je funkce klesající, proto opravu odečítáme.

Nakonec ještě ukažme řešení jednoduchých trigonometrických příkladů pomocí tabulek logaritmů goniometrických hodnot.

Příklad 10.9. Vypočtěte odvěsnu a pravoúhlého trojúhelníka, je-li jeho protější úhel $\alpha = 36^\circ 15' 47''$ a přepona $c = 117{,}32$.

Řešení. Podle (7.6) jest $a = c \sin\alpha$ a tedy $\log a = \log c + \log\sin\alpha$. V našem případě je $\log a = \log 117{,}32 + \log\sin 36^\circ 15' 47''$.

Najdeme tedy $\log 117{,}32 = 2{,}06937$ a $\log\sin 36^\circ 15' 47'' = 9{,}77195 - 10$, takže $\log a = 2{,}06937 + 9{,}77195 - 10 = 1{,}84132$. Z toho nalezneme $a = 69{,}393$; jelikož však c bylo dáno na dvě desetinná místa, zaokrouhlíme také a na dvě desetinná místa a tedy $a \doteq 69{,}39$. Celý postup píšeme obvykle opět přehledněji, na př. takto:

$$\begin{array}{lrl} a = c\sin\alpha; & \log a = & \log c + \log\sin\alpha \\ & \log a = & 2{,}06937 \\ & & \underline{9{,}77195 - 10} \\ & & 1{,}84132 \\ a \doteq 69{,}39 & & 130 \ldots 69{,}393. \end{array}$$

Příklad 10.10. Vypočtěte přeponu c pravoúhlého trojúhelníka, je-li odvěsna $b = 316{,}35$ a přilehlý úhel $\alpha = 18^\circ 5' 54''$

Řešení. Pišme hned v snadno srozumitelné úpravě:

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}; \qquad \log c = \log b - \log\cos\alpha$$

$$\begin{array}{lrl}
& \log c = & 2{,}50017 \\
& & \underline{10 \qquad -9{,}97796} \\
& & 2{,}52221 \\
c = 332{,}82 & & 218 \ldots 332{,}82.
\end{array}$$

Příklad 10.11. Najděte úhel α v pravoúhlém trojúhelníku, jehož odvěsny jsou $a = 153{,}34$, $b = 126{,}81$.

Řešení. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$; $\log\operatorname{tg}\alpha = \log a - \log b$

$$\begin{array}{lrl}
& \log\operatorname{tg}\alpha = & \underline{2{,}18566 - 2{,}10315} \\
& & \underline{0{,}08251} \\
& & 10{,}08251 - 10 \\
\alpha = 50°24'37'' & & 235 \quad \ldots 50°24'37''
\end{array}$$

K tomuto výpočtu poznamenejme, že jsme našli $\log\operatorname{tg}\alpha = 0{,}08251$. Toho nemůžeme přímo užít k vyhledání α, neboť v tabulkách jsou uvedeny hodnoty, ke kterým je třeba vždy připojit charakteristiku — 10. Odečteme tedy a přičteme současně k tomuto číslu 10, t. j. píšeme $0{,}08251 = 10{,}08251 - 10$. Pak můžeme již vyhledat podle dříve uvedeného postupu příslušný úhel α.

Příklad 10.12. Najděte úhel α v pravoúhlém trojúhelníku, je-li přepona $c = 516{,}32$ a odvěsna $a = 212{,}85$.

Řešení. $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$; $\log\sin\alpha = \log a - \log c$

$$\begin{array}{lrl}
& \log\sin\alpha = & \underline{2{,}32808 - 2{,}71292} \\
& & 9{,}61516 - 10 \\
\alpha = 24°20'47'' & & 494 \qquad \ldots 24°20'47''.
\end{array}$$

Opět je třeba připojit důležitou poznámku. Našli jsme totiž $\log\sin\alpha = 2{,}32808 - 2{,}71292$. Je to zřejmě záporné číslo, není však nutné je vůbec vyhledat; mějme totiž na paměti, že stejně musíme $\log\sin\alpha$ napsat ve tvaru jakéhosi kladného čísla a charakteristiky — 10. Připočteme tedy hned 10 k prvnímu číslu a samozřejmě odečteme ještě 10, t. j. upravíme zpaměti druhý řádek výpočtu na tvar

$$\log \sin\alpha = 12{,}32808 - 2{,}71292 - 10$$

a píšeme do třetího řádku hned rozdíl prvých dvou čísel, t. j. 9,61516, a připojíme ovšem ještě — 10.

Cvičení.

10.1. Vyhledejte z tabulek $\log\sin\alpha$, $\log\cos\alpha$, $\log\mathrm{tg}\,\alpha$, $\log\mathrm{cotg}\,\alpha$, je-li a) $\alpha = 42°15'$, b) $\alpha = 68°32'$, c) $\alpha = 32°15'27''$, d) $\alpha = 71°3'41''$.

10.2. Určete úhel α, je-li a) $\log\sin\alpha = 9{,}74093 - 10$, b) $\log\sin\alpha = 9{,}97966 - 10$, c) $\log\sin\alpha = -0{,}70660$, d) $\log\sin\alpha = 9{,}86028 - 10$, e) $\log\sin\alpha = -0{,}37195$.

10.3. Určete úhel α, je-li a) $\log\cos\alpha = 9{,}89771 - 10$, b) $\log\cos\alpha = -0{,}28027$, c) $\log\cos\alpha = 9{,}51253 - 10$, d) $\log\cos\alpha = -0{,}06714$.

10.4. Jaký je úhel α, je-li a) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 9{,}71833 - 10$, b) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 10{,}68575 - 10$, c) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = -0{,}36586$, d) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}21070$, e) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 9{,}89165 - 10$, f) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 10{,}14748 - 10$, g) $\log\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}73512$?

10.5. Najděte úhel α, je-li a) $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = 10{,}21751 - 10$, b) $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = 9{,}31933 - 10$, $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = -0{,}39834$, d) $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = 10{,}26872 - 10$, e) $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = 9{,}95768 - 10$, f) $\log\mathrm{cotg}\,\alpha = 0{,}08530$.

10.6. Řešte některé z příkladů ve cvičení k odst. 9 znovu užitím logaritmů a přesvědčte se o správnosti dřívějšího řešení.

11. VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI OSTRÉHO ÚHLU

Dříve než jsme došli k řešení pravoúhlých trojúhelníků, zavedli jsme si goniometrické funkce (uveďme je v pořádku, ve kterém se obvykle uvádějí: sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans — z nichž posledních dvou se v praxi vůbec neužívá, a proto nebudeme o nich podrobně jednat) a odvodili jsme si pro ně několik jednoduchých vět. Tím se nám však obsah trigonometrie rozpadl ve dvě části: v t. zv. *goniometrii*, jež se zabývá odvozováním vlastností a vzájemných vztahů goniometrických funkcí a ve *vlastní trigonometrii*, ve které se řeší trojúhelníky.

Zatím jsme z goniometrie uvedli jen to nejnutnější pro praktické řešení pravoúhlých trojúhelníků. Nyní úvahy doplníme. Především jsme našli (viz (6.5), (6.7), (8.3), (8.4)),

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos(90° - \alpha), \quad \cos\alpha = \sin(90° - \alpha) \\ \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{cotg}(90° - \alpha), \quad \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha). \end{aligned} \tag{11.1}$$

Tyto vzorce si lehko zapamatujeme, zavedeme-li si zjednodušující označení. Budeme totiž říkat, že kosinus (kotangens) je *kofunkcí* k funkci sinus (tangens) a stejně, že sinus (tangens) je kofunkcí k funkci kosinus (kotangens). Teď tedy obsah vzorců (11.1) můžeme vyslovit souhrnně v jediné větě:

VĚTA 11.1. Funkce ostrého úhlu α je rovna příslušné kofunkci doplňkového úhlu $90° - \alpha$.

Dále připomeňme již dokázané vzorce (6.2), t. j.

$$\text{a) } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \text{b) } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}; \tag{11.2}$$

můžeme je nahradit jediným vzorcem

$$\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\alpha = 1, \tag{11.3}$$

což vyslovíme větou:

VĚTA 11.2. Součin tangenty a kotangenty téhož ostrého úhlu α je roven 1.

Přikročme nyní k odvození nových vztahů. Dokážeme:

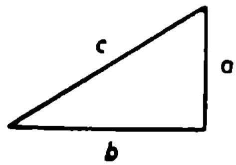
VĚTA 11.3. Tangens ostrého úhlu α je podílem sinu a kosinu téhož úhlu; kotangens ostrého úhlu α je podílem kosinu a sinu téhož úhlu, t. j.

$$\text{a) } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{b) } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{11.4}$$

Důkaz. Tyto důležité vzorce odvodíme snadno: podle definice je totiž (obr. 46) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$, a proto

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

čímž jsou vzorce (11.4) dokázány.



Obr. 46.

Další věta mluví o vztahu sinu a kosinu téhož ostrého úhlu α.

VĚTA 11.4. Platí vzorec

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{11.5}$$

Důkaz. Především si řekneme, jak tento (zase důležitý) vzorec čteme: sinus na druhou α plus kosinus na druhou α rovná se jedné. A nyní přikročme k důkazu. Podle Pythagorovy věty platí $a^2 + b^2 = c^2$ (obr. 46). Vydělme tuto rovnici číslem c^2. Dostaneme

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,\ \text{čili}\ \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Protože však $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ a $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, dostaneme po dosazení do poslední rovnice

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1 \tag{11.6}$$

a to je hledaný výsledek. Je však zvykem jej psát ve tvaru (11.5), a proto si jej také v tomto tvaru zapamatujeme. Přitom mějme na paměti, že (11.5) a (11.6) je vlastně jeden a týž vzorec.

Poznámka. Rovnice (11.5) umožňuje vyjádřit jednu z funkcí $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ pomocí druhé; jest totiž

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \tag{11.7}$$

nebo

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}. \tag{11.8}$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do (11.4), dostaneme také vyjádření $\mathrm{tg}\,\alpha$ a $\mathrm{cotg}\,\alpha$ buď jen pomocí $\sin\alpha$ nebo jen pomocí $\cos\alpha$. Lehko najdeme

$$\text{a) } \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}, \quad \text{b) } \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}, \tag{11.9}$$

$$\text{a) } \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, \quad \text{b) } \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}. \tag{11.10}$$

Přirozeně, vzorce (11.7) ÷ (11.10) si nemusíme nutně pamatovat, neboť jsou snadnými důsledky základních vzorců (11.4) a (11.5).

Ještě další dva vzorce jsou velice důležité:

VĚTA 11.5. Platí

$$\text{a) } 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \text{b) } 1 + \mathrm{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{11.11}$$

Důkaz. Alespoň u prvého z nich řekneme, jak se čte: jedna plus tangens na druhou α rovná se jedna lomeno kosinus na druhou α. Dokážeme je opět ze známého vzorce (obr. 46) $a^2 + b^2 = c^2$; vydělíme-li tuto rovnici číslem b^2, dostaneme

$\frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{c^2}{b^2}$, t. j. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\left(\frac{b}{c}\right)^2}$. Dosadíme-li sem $\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, najdeme

$$(\operatorname{tg}\alpha)^2 + 1 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2}, \tag{11.12}$$

což opět píšeme v jednodušším tvaru (11.11a). Úplně obdobně bychom odvodili (11.11b).

Poznámka. Místo rovnic (11.11) se uvádějí často

$$\text{a) } \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \text{b) } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}}, \tag{11.13}$$

které se však okamžitě dají odvodit z (11.11). Na příklad z (11.11a) plyne postupně $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = 1$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ a odtud už přímo (11.13a). Podobně se vypočte (11.13b) z (11.11b). Všimneme-li si blíže vzorců (11.13), vidíme, že prvý z nich vyjadřuje $\cos\alpha$ pomocí $\operatorname{tg}\alpha$, druhý $\sin\alpha$ pomocí $\operatorname{cotg}\alpha$. Zbývá ještě uvést vzorce, které by vyjadřovaly $\cos\alpha$ pomocí $\operatorname{cotg}\alpha$ a obdobně $\sin\alpha$ pomocí $\operatorname{tg}\alpha$. To již stačí do (11.13) dosadit z (11.2); najdeme

$$\text{a) } \cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}}, \quad \text{b) } \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{11.14}$$

Skutečně: dosadíme-li na př. do (11.13a) za $\operatorname{tg}\alpha$ podle vzorce $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$, dostaneme postupně:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{cotg}^2\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha + 1}{\operatorname{cotg}^2\alpha}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{cotg}^2\alpha + 1}}}{\mathrm{cotg}\alpha} = \frac{\mathrm{cotg}\alpha}{\sqrt{\mathrm{cotg}^2\alpha + 1}},$$

což je vlastně (11.14a). Úplně stejně se odvodí druhý vzorec.

Snad bude užitečné uvést, které z převodových vzorců (11.2) $\div$ (11.14) je třeba si pamatovat. Přehlédneme-li výsledky, shledáme, že stačí znát jen (11.3), (11.4), (11.5) a (11.11); z nich si již snadno odvodíme sami ostatní vzorce. Odmocniny ve všech těchto vzorcích je ovšem třeba brát kladně.

Příklad 11.1. Vyjádřete hodnoty $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{cotg}\alpha$, víte-li že $\sin\alpha = \frac{5}{3}$.

Řešení. Podle (11.7) je $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$. Podle (11.4a) je $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$ a konečně podle (11.2a) je $\mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$.

Cvičení.

11.1. Vypočtěte hodnoty $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{cotg}\alpha$, znáte-li a) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, b) $\sin\alpha = \dfrac{m}{n}$ (při čemž $n > m > 0$).

11.2. Vypočtěte hodnoty $\sin\omega$, $\mathrm{tg}\omega$, $\mathrm{cotg}\omega$, je-li a) $\cos\omega = \frac{3}{5}$, b) $\cos\omega = \dfrac{p}{q}$ $(q > p > 0)$.

11.3. Určete hodnoty zbývajících goniometrických funkcí, je-li a) $\mathrm{tg}\varphi = 2$, b) $\mathrm{cotg}\psi = k$ $(k > 0)$.

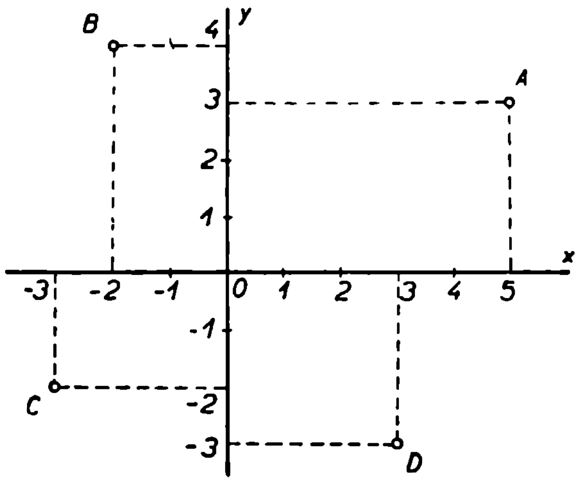
II. část

12. DEFINICE GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ OBECNÉHO ÚHLU

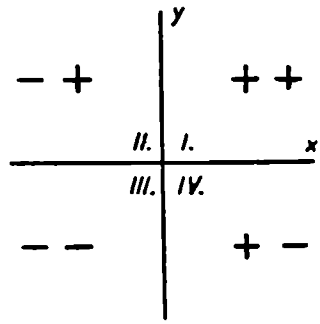
Definice a věty z goniometrie ostrého úhlu, t. j. úhlu otevřeného intervalu (0°, 90°), umožnily jen řešení pravoúhlých trojúhelníků. Mohli bychom jimi sice řešit i obecné trojúhelníky, na př. rozdělili bychom daný trojúhelník vhodně volenou výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky, ale tato cesta je poněkud zdlouhavá a nevhodná.

Abychom našli výhodné methody pro *řešení obecných trojúhelníků*, všimneme si toho, že v daných trojúhelnících se mohou vyskytovat také tupé úhly. Dosavadní postup pak už udává další cestu: budeme muset nejprve nějakým způsobem definovat goniometrické funkce také pro tupé úhly, t. j. pro úhly otevřeného intervalu (90°, 180°). Hned si však tento úkol poněkud rozšíříme: raději podáme definice goniometrických funkcí pro úhly mezi 0° a 360° (tedy pro úhly uzavřeného intervalu ⟨0°, 360°⟩). Samozřejmě definice musí být takové, aby z nich při omezení na úhly otevřeného intervalu (0°, 90°) vyplynuly dřívější definice.

Poznámka. V dalším s výhodou užijeme *pravoúhlých souřadnic* v rovině. Zvolme v rovině dvě k sobě kolmé přímky x, y (obr. 47), kterým budeme říkat *souřadnicové osy*; osu x volme vodorovnou, osu y svislou. Každou z nich pokládejme za číselnou osu, t. j. znázorníme na nich čísla a to tak, aby společný průsečík os O (*počátek*) byl nulou na obou osách a dále tak, aby kladná čísla na ose x byla napravo od O a aby kladná čísla na ose y byla nad O. Je-li M libovolný bod v rovině, pak jím sestrojíme kolmice k osám x a y; tyto kolmice nám postupně na ose x a y určí čísla, jimž říkáme *pravoúhlé souřadnice bodu M*. Podrobněji: kolmice k ose x určí na ose x číslo, kterému říkáme x-souřadnice, kolmice k ose y určí na této ose y-souřadnici bodu M. Píšeme pak M (x; y) a říkáme,



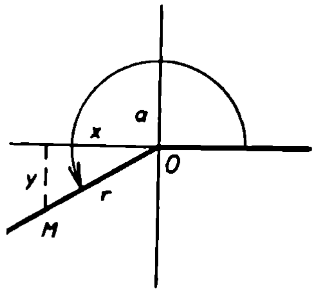
Obr. 47.



Obr. 48.

že bod M má souřadnice x a y (v tomto pořádku). Tak na př. na obr. 47 jsou zobrazeny body A (5; 3), B (—2; 4), C (—3; —2), D(3; —3). Podívejme se blíže na souřadnice jednotlivých bodů. Především je zřejmé, že každý bod osy x má y-souřadnici nulovou a každý bod osy y má opět x-souřadnici nulovou. Osy x a y dělí rovinu na čtyři části, *kvadranty*, které jsou v obr. 48 označeny číslicemi I÷IV. Všechny body téhož kvadrantu mají znaménka obou souřadnic pevná, a to v I. kvadrantu ++, v II. —+, ve III. ——, ve IV. +—, při čemž 1. (2.) znaménko je znamení x-(y-) souřadnice.

Chceme definovat goniometrické funkce pro úhly uzavřeného intervalu ⟨0°, 360°⟩. Proto si zvolme libovolný počátek O a souřadnicové osy x a y. Nanášejme nyní úhly α z našeho intervalu podle tohoto předpisu (obr. 49): Jejich společný vrchol je počátek O, jejich společné prvé rameno je kladná poloosa x (rozumíme tím tu část osy x, na níž jsou kladná čísla) a druhé rameno dostaneme otočením prvého ramene kolem počátku v kladném smyslu právě o úhel α (při čemž kladným smyslem otáčení rozumíme smysl otáčení, při kterém kladná poloosa x přejde v kladnou poloosu y). V obr. 49 je tak nanesen úhel $\alpha = 210°$. Zvolme si nyní na druhém rameni libovolný bod M (různý od počátku) o souřadnicích x, y. Abychom se mohli stručněji vyjádřit, budeme vzdálenosti $\overline{OM}$ (která je vždy kladná) bodu M od počátku O říkat průvodič r bodu M.



Obr. 49.

Nyní již můžeme definovat goniometrické funkce pro úhly α mezi 0° a 360°, t. j. pro úhly α z uzavřeného intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$.

Definice 12.1. Sinus úhlu α je poměr $y : r$;

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}.$$

Definice 12.2. Kosinus úhlu α je poměr $x : r$;

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}.$$

Definice 12.3. Tangens úhlu α je poměr $y : x$;

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x}.$$

Definice 12.4. Kotangens úhlu α je poměr $x : y$;

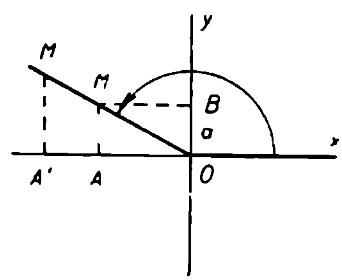
$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y}.$$

Poznámka. Hned poznamenejme, že při definici tangenty předpokládáme, že x-souřadnice není nulová (protože $y : 0$ nemá žádný význam), t. j. předpokládáme, že úhel α není

90° ani 270°. Není tedy hodnota tangenty pro tyto úhly definována. Podobně předpokládáme, že v definici kotangenty není $y = 0$, t. j. že úhel α není 0°, 180°, 360°. Tedy kotangens není pro tyto úhly definován.

Ještě bychom mohli definovat *sekans* jako poměr $r : x$ $\left(\sec\alpha = \dfrac{r}{x}\right)$ a *kosekans* jako poměr $r : y$ $\left(\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{r}{y}\right)$, ale těmito funkcemi se nebudeme zabývat.

Naše definice musíme poněkud doplnit; mohlo by se totiž podle nich zdát, že velikost sinu, kosinu atd. závisí nejen na velikosti úhlu α, nýbrž také na poloze bodu M na druhém rameni. Tomu však tak není. Je-li $\alpha = 0°, 90°, 180°, 270°$ a 360°, pak je okamžitě zřejmé, že žádná z definovaných funkcí nezávisí na volbě bodu M. Nechť je tedy dán úhel α různý od právě uvedených (v obr. 50 je volen tupý úhel); pak můžeme sestrojit pravoúhlý $\triangle\, MAO$ (nebo bychom mohli sestrojit $\triangle\, MBO$), jehož odvěsny jsou rovny souřadnicím x, y bodu M, jestliže ovšem u těchto souřadnic změníme případné záporné znaménko v kladné, a jehož přepona je rovna průvodiči r bodu M. Volíme-li na druhém rameni úhlu α další bod M' (obr. 50), pak — jak je zřejmé z podobných trojúhelníků MAO a $M'A'O$ — poměry vypočítané podle našich definic jsou skutečně jak pro bod M tak pro M' tytéž a tedy hodnoty nově definovaných goniometrických funkcí nezávisí na volbě bodu M.

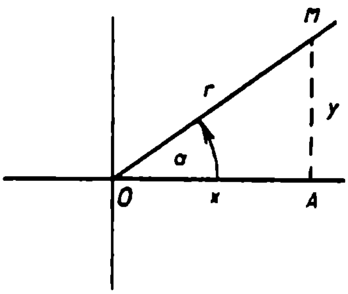


Obr. 50.

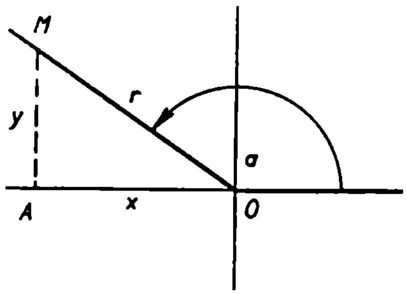
Nyní je třeba připojit další důležitý doplněk. Uvědomme si, že pro úhly otevřeného intervalu (0°, 90°) máme jednak staré definice goniometrických funkcí a jednak nové definice. Souhlasí tyto definice? Ano! Pro ostrý úhel α jsou totiž obě souřadnice x, y bodu M kladné a tedy v $\triangle\, MAO$ (obr.

51) je y-souřadnice přímo protější odvěsnou k úhlu α, x-souřadnice přilehlou odvěsnou a průvodič r přeponou. Pak na příklad definice 12.1 vlastně říká (pro ostrý úhel α) : sinus (ostrého) úhlu α je poměr protější odvěsny k přeponě, což je právě definice 7.1. Tím je ukázáno, že nová definice sinu, v případě, že se jedná o ostrý úhel, je táž jako dřívější. Podobně je tomu s ostatními funkcemi.

Pomocí našich definic 12.1 ÷ 12.4 si snadno získáme přehled o hodnotách goniometrických funkcí; nejprve si všimneme jen znamének těchto hodnot.



Obr. 51.



Obr. 52.

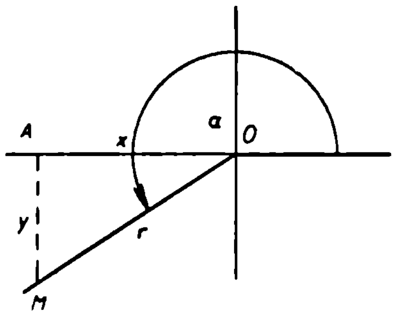
V *I. kvadrantu* (obr. 51), t. j. pro *ostré* úhly ($0° < \alpha < 90°$), jsou x-souřadnice i y-souřadnice bodu M kladné, a proto jsou hodnoty sinu, kosinu, tangenty a kotangenty kladné (jak ostatně víme z dřívějška). Podrobněji: $\sin\alpha = \overline{MA} : \overline{MO}$, $\cos\alpha = \overline{OA} : \overline{MO}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \overline{MA} : \overline{OA}$, $\mathrm{cotg}\,\alpha = \overline{OA} : \overline{MA}$.

Ve *II. kvadrantu* (obr. 52), t. j. pro *tupé* úhly ($90° < \alpha < 180°$), je x-souřadnice bodu M záporná a y-souřadnice kladná, tedy hodnota sinu je kladná, hodnoty ostatních funkcí záporné. Podrobněji: $\sin\alpha = \overline{MA} : \overline{MO}$, $\cos\alpha = -\overline{OA} : \overline{MO}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\overline{MA} : \overline{OA}$, $\mathrm{cotg}\,\alpha = -\overline{OA} : \overline{MA}$ (je totiž $x = -\overline{OA}$, $y = \overline{MA}$, $r = \overline{MO}$).

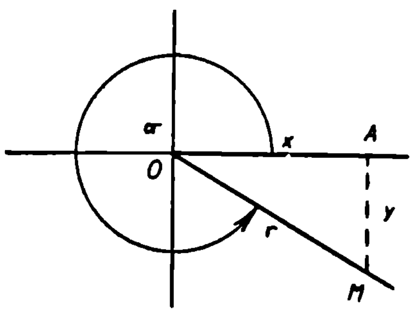
Ve *III. kvadrantu* (obr. 53), t. j. pro $180° < \alpha < 270°$

(úhel se nazývá *vypuklý*), jsou obě souřadnice bodu M záporné a tedy hodnoty sinu a kosinu jsou záporné, hodnoty tangenty a kotangenty kladné. Podrobněji: $\sin\alpha = -\overline{MA} : \overline{MO}$, $\cos\alpha = -\overline{OA} : \overline{MO}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \overline{MA} : \overline{OA}$; $\mathrm{cotg}\,\alpha = \overline{OA} : \overline{MA}$ (neboť je $x = -\overline{OA}$, $y = -\overline{MA}$, $r = \overline{MO}$).

Ve *IV. kvadrantu* (obr. 54), tedy pro úhly $270° < \alpha < 360°$ (také v tomto případě se nazývá úhel *vypuklý*) je x-souřadnice bodu M kladná, y-souřadnice záporná. Z toho plyne, že hodnoty sinu, tangenty a kotangenty jsou záporné,



Obr. 53.



Obr. 54.

hodnota kosinu kladná. Podrobněji: $\sin\alpha = -\overline{MA} : \overline{MO}$, $\cos\alpha = \overline{OA} : \overline{MO}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = -\overline{MA} : \overline{OA}$, $\mathrm{cotg}\,\alpha = -\overline{OA} : \overline{MA}$ (neboť $x = \overline{OA}$, $y = -\overline{MA}$, $r = \overline{MO}$).

Náš dosavadní výsledek týkající se znamének hodnot funkcí úhlů v jednotlivých kvadrantech sestavíme do přehledné tabulky (obr. 55).

Všimneme si nyní přímo hodnot jednotlivých goniometrických funkcí. Přitom bude výhodné užít ke stanovení hodnot každé z funkcí vždy jiného trojúhelníka. Vodítkem nám bude postup užitý již dříve pro případ ostrých úhlů.

Při vyšetřování průběhu goniometrických funkcí ostrého úhlu jsme si zvolili kružnici k o středu O a poloměru $j = \overline{OA}$

(obr. 56). Pro určení hodnot sinu a kosinu jsme užili $\triangle\, OPQ$. pro určení tangenty $\triangle\, OAM$, pro určení kotangenty $\triangle\, OBN$. A platí (jak jsme dříve našli)

$$\sin\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}, \cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}, \mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{OA}}, \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\overline{NB}}{\overline{OB}}. \qquad (12.1)$$

Toto vyjádření bylo velice výhodné, neboť ve všech napsaných zlomcích je jmenovatel stále stejný (rovný poloměru j zvolené kružnice) a tedy při změně úhlu α udávala změna čitatele přímo změnu hodnot funkcí.

	sin	cos	tg	cotg
I.	+	+	+	+
II.	+	—	—	—
III.	—	—	+	+
IV.	—	+	—	—

Obr. 55.

Díváme-li se na určení hodnot goniometrických funkcí ostrého úhlu ve (12.1) s hlediska nových definic, můžeme říci, že k určení hodnot jsme vlastně užili souřadnic bodů P, M, N, ležících na druhém rameni daného úhlu α. Přesněji: k určení hodnot sinu a kosinu jsme užili souřadnic bodu P, který leží na kružnici k, k určení hodnoty tangenty jsme užili souřadnic bodu M, který leží na tečně m kružnice k v bodě A a k určení hodnoty kotangenty jsme užili souřadnic bodu N, který leží na tečně n kružnice k v bodě B.

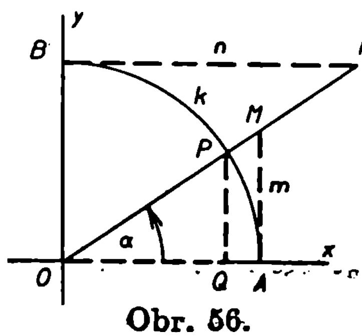
A právě uvedeného použijeme k vyšetření hodnot goniometrických funkcí úhlu v intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$. Druhé rameno zvoleného úhlu α protíná vždy kružnici k; průsečík označíme P; jeho souřadnic užijeme k určení hodnot sinu a kosinu.

Dále přímka, na níž leží druhé rameno úhlu α, protíná tečnu m (sestrojenou ke kružnici k v bodě A) v průsečíku M a tečnu n (sestrojenou v bodě B) v průsečíku N. Ukážeme, že můžeme souřadnic bodu M použít k určení hodnot tangenty a souřadnic bodu N k určení hodnot kotangenty.

Poznámka. Samozřejmě, je-li úhel rovný 90° nebo 270°, je rameno úhlu α rovnoběžné s tečnou m, takže neexistuje průsečík M. To však nevadí, neboť pro uvedené dva úhly není kotangens definován. Podobně, je-li $\alpha = 0°$, 180°, 360°, neexistuje průsečík N, ale pro tyto úhly zase není kotangens definován.

Sledujme nyní průběh goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech a samozřejmě i pro jejich hraniční úhly 0°, 90°, 180°, 270°, 360°. Vždy vyznačíme interval, který probíhá úhel α.

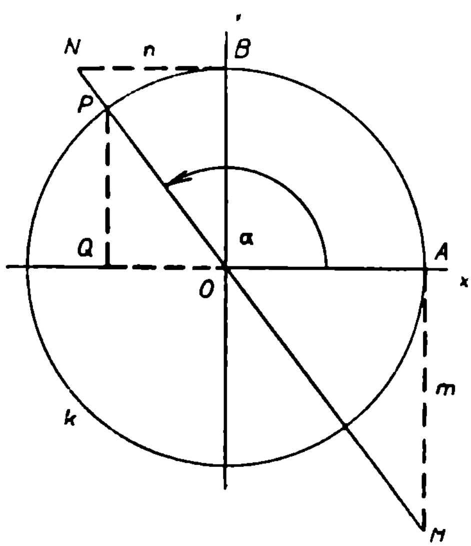
1. *Interval* $\langle 0°, 90° \rangle$ (obr. 56). Průběh funkcí v tomto intervalu vlastně známe. Jen je ještě třeba připojit jejich hodnoty pro 0° a 90°. Je-li $\alpha = 0°$, pak $P = M = Q = A$; jelikož souřadnice tohoto bodu jsou $x = \overline{OA}$, $y = 0$ a průvodič je $\overline{OA}$, dostaneme $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\mathrm{tg}\, 0° = 0$. Je-li $\alpha = 90°$, pak $P = N = B$ a tedy $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\mathrm{cotg}\, 90° = 0$. Jak víme, cotg 0° a tg 90° nejsou definovány a nebudeme se tedy přirozeně ptát po příslušných hodnotách. Všimneme si však toho, že klesá-li α k 0°, pak úsečka $\overline{BN}$ (je stále kladná a) roste nade všechny meze. Proto se zavádí znak $\mathrm{cotg}\, 0° = +\infty$ a říká se, že cotg 0° je plus nekonečno. Podobně, blíží-li se α úhlu 90°, pak kladná hodnota $\overline{AM}$ roste nade všechny meze, a proto zavádíme znak $\mathrm{tg}\, 90° = +\infty$. Hodnoty funkcí pro 0° a 90° jsou uvedeny také v tabulkách goniometrických funkcí.



Obr. 56.

2. *Interval* $\langle 90°, 180° \rangle$ (obr. 57). Nejdříve nechme hranice stranou. Víme, že platí podle definice (užíváme souřadnic bodu P) $\sin\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$, $\cos\alpha = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$, $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}$. Z podobných trojúhelníků PQO a MAO však plyne $\overline{PQ} : \overline{OQ} = \overline{MA} : \overline{OA}$ a tedy $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\overline{MA}}{\overline{OA}}$; vidíme, že $\operatorname{tg}\alpha$ je vyjádřen souřadnicemi bodu M, neboť jeho x-souřadnice je $\overline{OA}$ a y-souřadnice je $-\overline{MA}$. Podobně je $\overline{OQ} : \overline{PQ} = \overline{NB} : \overline{OB}$ a tedy $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\overline{NB}}{\overline{OB}}$. Našli jsme

$$\sin\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}, \cos\alpha = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}, \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\overline{MA}}{\overline{OA}}, \operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\overline{NB}}{\overline{OB}}. \tag{12.2}$$



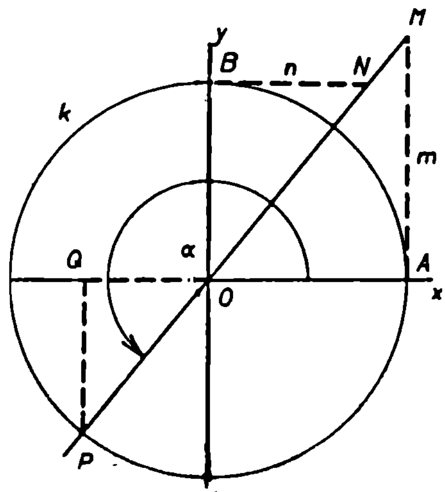
Obr. 57.

Nyní vypočteme hodnoty funkcí pro hranice. Hodnoty sinu, kosinu a kotangenty pro $\alpha = 90°$ již známe. Je-li $\alpha = 180°$, pak snadno vypočteme $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$. Sledujeme-li nyní podle odvozeného celkový průběh funkcí v intervalu $\langle 90°, 180° \rangle$, vidíme, že roste-li úhel α, pak hodnoty sinu klesají v uzavřeném intervalu $\langle 1, 0 \rangle$ a hodnoty kosinu klesají v uzavřeném intervalu $\langle 0, -1 \rangle$. Tangenta není sice pro $90°$ definovaná, ale klesá-li úhel k $90°$, pak úsečka $\overline{AM}$ roste nade všechny meze a tedy tangens klesá pod všechny (záporné) meze. Proto zavádíme další znak $\mathrm{tg}90° = -\infty$. A vidíme, že roste-li úhel v intervalu $\langle 90°, 180°\rangle$, roste tangens v intervalu $(-\infty, 0\rangle$. (Často je výhodné rozšířit definici tangenty i na úhel 90° a říci: tangens 90° nabývá dvou hodnot $+\infty$, $-\infty$, my však od toho upustíme). Konečně pro kotangentu najdeme: roste-li úhel v intervalu $\langle 90°, 180°\rangle$, pak kotangens klesá v intervalu $\langle 0, -\infty)$, při čemž zase znak $\mathrm{cotg}180° = -\infty$ vyjadřuje jen tu okolnost, že blíží-li se úhel α od 90° ke 180°, pak hodnoty kotangenty klesají pod všechny meze.

3. *Interval* $\langle 180°, 270°\rangle$ (obr. 58). Nejprve si všimneme jen otevřeného intervalu $(180°, 270°)$. Podle definice je $\sin\alpha = -\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}$, $\cos\alpha = -\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$, $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$, $\mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}$. Dosadíme-li sem $\overline{PQ} : \overline{OQ} = \overline{MA} : \overline{OA}$ a $\overline{OQ} : \overline{PQ} = \overline{NB} : \overline{OB}$, dostaneme

$$\sin\alpha = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}, \quad \cos\alpha = -\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}, \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{OA}}, \quad \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\overline{NB}}{\overline{OB}}. \tag{12.3}$$

Pro hraniční úhly známe $\sin 180°$, $\cos 180°$, $\mathrm{tg}180°$; vypočteme ještě $\sin 270° = -1$, $\cos 270° = 0$, $\mathrm{cotg}270° = 0$. Umluvíme-li se, že budeme značit $\mathrm{cotg}180° = +\infty$, $\mathrm{tg}270° = +\infty$ (z obdobných důvodů jako v předchozích případech), pak ze vzorců (12.3) snadno vyčteme: roste-li úhel α v uzavřeném intervalu $\langle 180°, 270°\rangle$, pak hodnoty sinu klesají v intervalu $\langle 0, -1\rangle$, hodnoty kosinu rostou v intervalu $\langle -1, 0\rangle$, hodnoty tangenty rostou v inter-

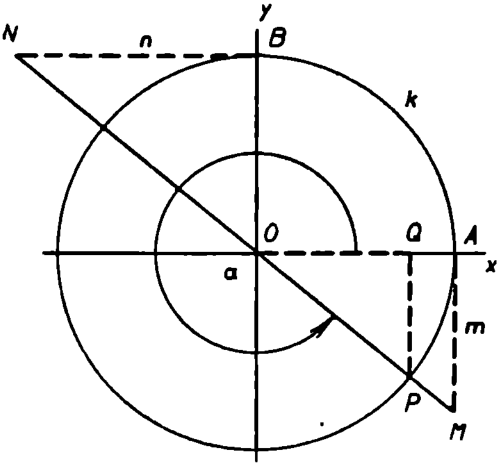


Obr. 58.

valu $\langle 0, +\infty)$, hodnoty kotangenty klesají v intervalu $(+\infty, 0\rangle$.

4. *Interval* $\langle 270°, 360°\rangle$ (obr. 59). Stejným způsobem jako v předchozích případech najdeme pro úhly mezi 270° a 360°:

$$\sin\alpha = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}, \cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}, \mathrm{tg}\alpha = -\frac{\overline{MA}}{\overline{OA}}, \mathrm{cotg}\alpha = -\frac{\overline{NB}}{\overline{OB}}. \tag{12.4}$$



Obr. 59.

Pro hraniční úhel 270° známe již příslušné hodnoty. Pro úhel 360° vypočteme $\sin 360° = 0$, $\cos 360° = 1$ a $\mathrm{tg}360° = 0$. Opět zavedeme znaky $\mathrm{tg}270° = -\infty$ a $\mathrm{cotg}360° = -\infty$. Pro průběh goniometrických funkcí v intervalu $\langle 270°, 360°\rangle$ jsme tedy našli: roste-li úhel v tomto intervalu, pak hodnoty sinu rostou v intervalu $\langle -1, 0\rangle$, hodnoty kosinu rostou v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, hodnoty tangenty rostou v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a hodnoty kotangenty klesají v intervalu $\langle 0, -\infty)$.

Místo abychom celkový výsledek vyslovili větou, raději jej shrneme do snadno srozumitelné tabulky (obr. 60).

Zdůrazněme však jinou důležitou vlastnost:

VĚTA 12.1. *Sinus a kosinus úhlu z intervalu $\langle 0°, 360°\rangle$ nabývají jen hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$.*

	I. 0° ... 90°	II. 90° ... 180°	III. 180° ... 270°	IV. 270° ... 360°
sin	0 ... 1	1 ... 0	0 ... —1	—1 ... 0
cos	1 ... 0	0 ... —1	— 1 ... 0	0 ... 1
tg	0 ... + ∞	—∞ ... 0	0 ... + ∞	—∞ ... 0
cotg	+ ∞ ... 0	0 ... —∞	+ ∞ 0	0 ... —∞

Obr. 60.

Tangens a kotangens úhlu z téhož intervalu nabývají všech možných hodnot (z intervalu $(-\infty, +\infty)$).

Důkaz spočívá vlastně ve dvou krocích. Nejprve je totiž třeba dokázat: je-li úhel v daném intervalu, pak hodnoty funkcí mohou být jen v uvedených intervalech. To jsme však již vlastně dokázali právě předchozí úvahou. Dále je nutno dokázat: je-li dána některá hodnota zcela určité goniometrické funkce, a to v příslušném uvedeném intervalu, pak k ní existuje alespoň jeden úhel v intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$. Důkaz této části (který vyžaduje trochu více pozornosti než dosavadní důkazy) provedeme jen pro sinus. V případě ostatních goniometrických funkcí bychom postupovali obdobně. Nechť je tedy dáno libovolné číslo a; samozřejmě a může být buď rovno 0 nebo kladné nebo záporné, ale předpokládáme, že leží v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Ptáme se, zda existuje úhel α z intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$ tak, že $\sin\alpha = a$. Existuje! Stačí na kružnici k, o které jsme mluvili vpředu, sestrojit příslušný bod P; jeho spojnice se středem O je už druhým ramenem hledaného úhlu α, jehož prvým ramenem je OA. Je-li $a = 0$, pak je okamžitě vidět, že jen $\alpha = 0°$, $180°$, $360°$ řeší úlohu. Je-li $a > 0$, pak ve vzdálenosti $a \,.\, \overline{OA}$ veďme rovnoběžku s osou x, a to tak, aby ležela v I. a II. kvadrantu. Její průsečíky s kružnicí k (jsou vždy dva, jenom v případě

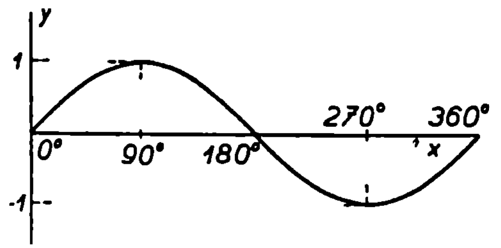
$a = 1$ je jeden) jsou hledané body P, neboť pro úhel $\alpha =$ $= \sphericalangle AOP$ najdeme $\sin\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{a \,.\, \overline{OA}}{\overline{OP}} = a$ (je totiž $\overline{OP} = \overline{OA}$). Je-li $a < 0$, pak je $-a$ kladné; ve vzdálenosti $-a \,.\, \overline{OA}$ veďme zase rovnoběžku s osou x, ale tak, aby ležela ve III. a IV. kvadrantu. Její průsečíky s kružnicí jsou hledané body P, neboť pro úhel $\alpha = \sphericalangle AOP$ platí v tomto případě $\sin\alpha = -\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = -\frac{-a \,.\, \overline{OA}}{\overline{OP}} = a$. Vidíme, že ať si zvolíme jakékoliv a z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, vždy existuje nějaký úhel α tak, že $\sin\alpha = a$.

Poznámka. Dosavadními úvahami je vlastně ukázána cesta k řešení základních úloh: 1. k danému úhlu najít hodnotu předepsané goniometrické funkce, 2. k dané hodnotě goniometrické funkce najít příslušný úhel. Podrobné řešení však odsuneme do dalšího odstavce.

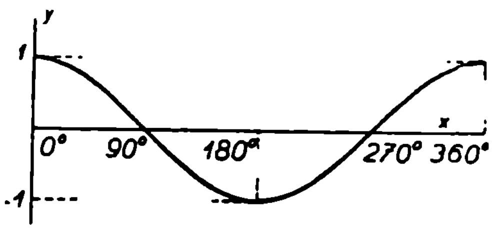
Dobrou pomůckou k poznání průběhu goniometrických funkcí (a hlavně k zapamatování výsledků uvedených v tabulkách v obr. 55, 60 a ve větě 12.1) je grafické znázornění jejich průběhu.

Postup znázornění je v podstatě týž, jakého jsme použili dříve. Stručně řečeno: v předchozím jsme znázornili průběh goniometrických funkcí jen v otevřeném intervalu $(0°, 90°)$, nyní znázorníme jejich průběh v širším intervalu $\langle 0°, 360°\rangle$. Zvolíme-li poloměr j kružnice rovný délkové jednotce, pak k znázornění hodnot sinu můžeme použít přímo úseček $\overline{PQ}$ z obr. 56÷59; podobně pro kosinus užijeme úseček $\overline{OQ}$, pro tangens $\overline{MA}$ a pro kotangens $\overline{NB}$. Přirozeně tyto úsečky nanášíme od číselné osy v kladném nebo v záporném smyslu osy y, když příslušná hodnota má znaménko kladné nebo záporné. V obr. 61 je zobrazen průběh sinu, v obr. 62 průběh kosinu, v obr. 63 průběh tangenty a v obr. 64 průběh kotangenty. Na grafu tangenty je dobře patrno, proč jsme na př. položili jednak tg90° = + ∞, jednak tg90° = — ∞. Obdobná poznámka platí ovšem i pro kotangentu.

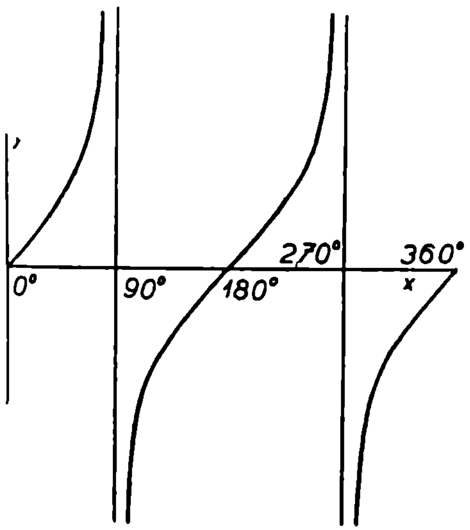
Po rozšíření původních definic goniometrických funkcí na úhly v uzavřeném intervalu ⟨0°, 360°⟩ se naskýtá otázka,



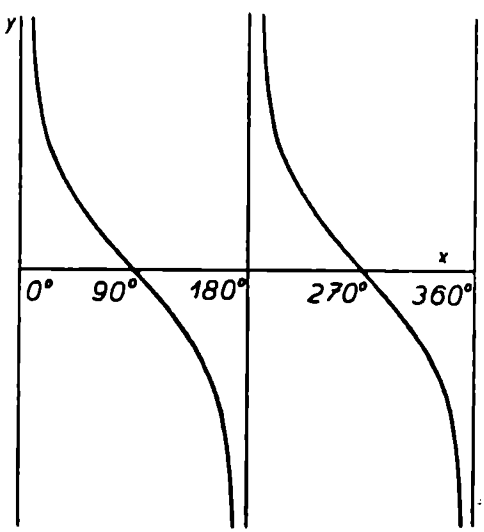
Obr. 61.



Obr. 62.



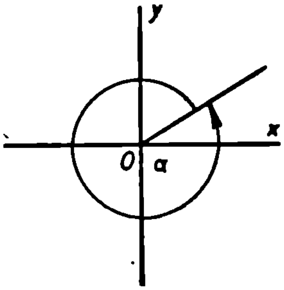
Obr. 63.



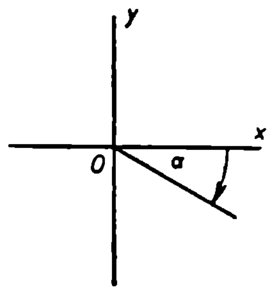
Obr. 64.

jak rozšířit jejich definici na libovolné kladné nebo záporné úhly. Rozšíření provedeme snadno. Zvolíme opět souřadnicové osy x, y. Daný úhel α naneseme tak, že za prvé rameno zvolíme kladnou poloosu x a druhé rameno sestrojíme otočením této poloosy o úhel α. Je-li úhel kladný, otáčíme v kladném smyslu, je-li záporný, pak v záporném smyslu (v obr. 65 je nanesen úhel $\alpha = 390°$, v obr. 66 úhel $\alpha = -45°$).

Zvolme zase na druhém rameni libovolný bod $M \neq O$ (znaménko $\neq$ čteme: „různý od“ nebo „nerovná se“). Jsou-li x, y jeho souřadnice a r průvodič, pak *goniometrické funkce libovolného úhlu daného α zavádíme opět definicemi*



Obr. 65.



Obr. 66.

12.1÷12.4; nebudeme je znovu uvádět. Takto definované goniometrické funkce označme souhrnně značkou f. Dokážeme pro ně důležitou větu:

VĚTA 12.2. Goniometrické funkce jsou periodické s periodou 360°, t. j.

$$f(\alpha + n \,.\, 360°) = f(\alpha), n \text{ celé číslo.} \qquad (12.5)$$

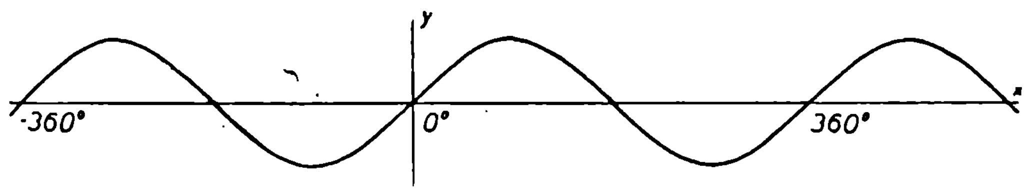
Důkaz. Říkáme, že funkce je periodická s periodou p, jestliže při změně proměnné o celistvý násobek p jsou hodnoty funkce stejné. A tomu v našem případě skutečně tak je, neboť polohy druhých ramen všech úhlů, které se liší o celistvý násobek 360°, splývají, tedy podle rozšířených definic goniometrických funkcí jsou jejich hodnoty tytéž, což právě je vyznačeno vzorcem (12.5).

Věta 12.2 vlastně říká, že stačí znát hodnoty goniometrických funkcí v libovolném intervalu šířky 360°, na př. tedy v intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$. Je tedy na př. $\sin 760° = \sin(40° + 2.360°) = \sin 40°$, $\cos(-30°) = \cos(330° - 1.360°) =$

$= \cos 330°$, $\mathrm{tg}(-75°) = \mathrm{tg}(285° - 1 . 360°) = \mathrm{tg}\,285°$, $\mathrm{cotg}\,515° = \mathrm{cotg}(155° + 1 . 360°) = \mathrm{cotg}\,155°$ atd.

Na základě věty 12.2 můžeme lehko zakreslit graf libovolné z goniometrických funkcí, a to v libovolném intervalu. Na obr. 67 je sestrojen jen grafický obraz sinu; příslušná křivka se nazývá *sinusoida.*

Poznámka. Uvedli jsme, že $\mathrm{tg}\alpha$ není definován pro $\alpha = 90°$ a $270°$. Je zřejmé, že $\mathrm{tg}\alpha$ není definován ani pro úhly $\alpha = 90° + k . 180°$, kde k je celé číslo. Podobně $\mathrm{cotg}\alpha$ není definován pro úhly $\alpha = k . 180°$, k celé číslo.



Obr. 67.

13. PODROBNĚJŠÍ VLASTNOSTI GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ OBECNÉHO ÚHLU

Prvá otázka, kterou si každý položí, je, zda mezi goniometrickými funkcemi obecného úhlu α platí obdobné vztahy, jaké jsme uvedli ve větách 11.2÷11.5 pro goniometrické funkce ostrého úhlu. Následující věta říká, že zmíněné vztahy platí beze změny.

VĚTA 13.1. Sinus, kosinus, tangens a kotangens obecného úhlu jsou vázány vztahy

$$\mathrm{tg}\alpha \,.\, \mathrm{cotg}\alpha = 1, \tag{13.1}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{13.2}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{13.3}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \mathrm{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \tag{13.4}$$

Důkaz. Uvažujme identitu $\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$ platnou pro každé $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Dosadíme-li sem příslušné hodnoty podle definice 12.3 a 12.4, dostaneme právě vztah (13.1). Podobně vzorce (13.2) plynou z identit $\frac{y}{r} : \frac{x}{r} = \frac{y}{x}$ (platící pro každé y a $x \neq 0, r \neq 0$) a $\frac{x}{r} : \frac{y}{r} = \frac{x}{y}$ (platící pro každé x a $y \neq 0$, $r \neq 0$). Další vztah (13.3) je důsledkem rovnice $x^2 + y^2 = r^2$, jež platí pro souřadnice x, y a průvodič r libovolného bodu M. Konečně rovnice (13.4) plynou z rovnice (13.3) dělením $\cos\alpha$, po případě $\sin\alpha$ (předpokládáme ovšem $\cos\alpha \neq 0$, po případě $\sin\alpha \neq 0$).

Poznámka. Protože vztah $\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} = 1$ neplatí pro $x = 0$, $y = 0$, neplatí vztah (13.1) pro žádný úhel α, který je celistvým násobkem 90°, což je samozřejmé, neboť v tomto případě buď tangens nebo kotangens není definován. Podobně (13.2) a (13.4) neplatí pro ty úhly α, pro něž není $\mathrm{tg}\,\alpha$ nebo $\mathrm{cotg}\,\alpha$ definován.

Další věty se úzce přimykají k větě 12.2, jež udává předpis, jak se vyjádří hodnota libovolné goniometrické funkce obecného úhlu pomocí hodnoty téže funkce pro jakýsi jiný úhel, a to na př. z uzavřeného intervalu $\langle 0°, 360° \rangle$. Učiníme totiž další důležitý krok a ukážeme, že dokonce také ještě goniometrické funkce tupého a vypuklého úhlu lze vyjádřit pomocí goniometrických funkcí ostrého úhlu.

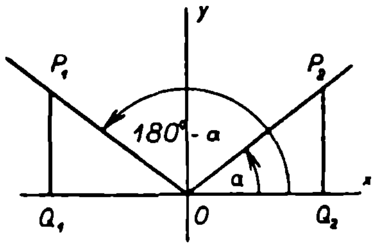
Poznámka. Podotkněme výslovně, že pro jednoduchost vynecháme z našich úvah hodnoty funkcí celistvého násobku 90° (t. j. 0°, 90°, 180°, 270°, 360°), neboť tyto hodnoty již známe (obr. 60); lze však ukázat, že i pro ně platí vzorce, jež si v dalším odvodíme.

Mezi nejpotřebnější věty této skupiny vět náleží:

VĚTA 13.2. Nechť $180^\circ - \alpha$ je tupý úhel; pak platí tyto převodové vzorce

$$\begin{aligned} &\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha, \\ &\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{cotg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Důkaz (obr. 68). Jelikož úhel $180^\circ - \alpha$ je podle předpokladu tupý, je α ostrý úhel. Naneseme oba úhly obvyklým způsobem; sestrojíme-li nyní pro úhel $180^\circ - \alpha$ trojúhelník OP_1Q_1 a pro úhel α trojúhelník OP_2Q_2 tak, že



Obr. 68.

$$\overline{OP_1} = \overline{OP_2}, \quad (13.6)$$

pak zřejmě trojúhelníky OP_1Q_1 a OP_2Q_2 jsou shodné a tedy

$$\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2}, \ \overline{OQ_1} = \overline{OQ_2}. \quad (13.7)$$

Podle definice sinu je $\sin(180^\circ - \alpha) = \overline{P_1Q_1} : \overline{OP_1}$, $\sin\alpha = \overline{P_2Q_2} : \overline{OP_2}$ a tedy podle (13.6) a (13.7) platí $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, což je prvý vzorec ve (13.5). Podobně je $\cos(180^\circ - \alpha) = -\overline{OQ_1} : \overline{OP_1}$, $\cos\alpha = \overline{OQ_2} : \overline{OP_2}$, odtud podle (13.6) a (13.7) plyne již $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, což je druhý vzorec ve (13.5). Další dva vzorce odvodíme již pomocí prvých dvou a z (13.1) a (13.2). Podle nich je postupně

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

což dává třetí vzorec v (13.5). Konečně

$$\operatorname{cotg}(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha,$$

a to je poslední rovnice ve (13.5).

Poznámka. Označíme-li daný tupý úhel β, t. j. položíme-li

$180° - \alpha = \beta$, pak $\alpha = 180° - \beta$; převodové rovnice (13.5) znějí takto:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \sin(180° - \beta),\ \cos\beta = -\cos(180° - \beta), \\ \operatorname{tg}\beta &= -\operatorname{tg}(180° - \beta),\ \operatorname{cotg}\beta = -\operatorname{cotg}(180° - \beta). \end{aligned} \tag{13.8}$$

Prakticky se lépe převádí užitím těchto vzorců. Pro zapamatování vzorců (13.5) nebo (13.8) je dobré uvést slovní znění věty 13.2: Hodnota funkce tupého úhlu je rovna hodnotě téže funkce ostrého úhlu výplňkového, *opatřené znaménkem příslušné funkce ve II. kvadrantu* (porovnejte s 2. řádkem tabulky v obr. 55).

Příklad 13.1. Najděte hodnotu $\operatorname{tg}137°50'$.

Řešení. Nejprve podle vzorců (13.5): daný tupý úhel $137°50'$ můžeme napsat ve tvaru $180° - 42°10'$; je tedy ostrý úhel $\alpha = 42°10'$, a proto podle třetího vzorce (13.5) je $\operatorname{tg}137°50' = -\operatorname{tg}42°10'$. Nebo můžeme postupovat podle (13.8). Podle třetího vzorce je $\operatorname{tg}137°50' = -\operatorname{tg}(180° - 137°50') = -\operatorname{tg}42°10'$. Protože, jak najdeme z třímístných tabulek, $\operatorname{tg}42°10' = 0{,}906$, jest $\operatorname{tg}137°50' = -0{,}906$, jak jsme mohli zhruba přečíst přímo z obr. 63.

Každý tupý úhel můžeme však také psát ve tvaru $90° + \alpha$, kde α je ostrý úhel; i pro tento způsob vyjádření si odvodíme převodové vzorce.

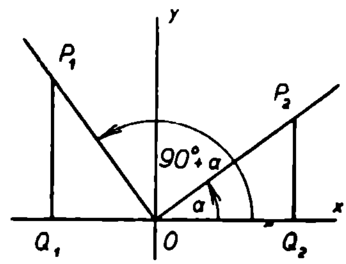
VĚTA 13.3. Nechť $90° + \alpha$ je tupý úhel; pak platí tyto převodové vzorce

$$\begin{aligned} \sin(90° + \alpha) &= \cos\alpha,\ \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha, \\ \operatorname{tg}(90° + \alpha) &= -\operatorname{cotg}\alpha,\ \operatorname{cotg}(90° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha. \end{aligned} \tag{13.9}$$

Důkaz (obr. 69). Úhel $90° + \alpha$ je podle předpokladu tupý a tedy úhel α je ostrý. Sestrojme již známé trojúhelníky OP_1Q_1 a OP_2Q_2 tak, aby $\overline{OP_1} = \overline{OP_2}$. Podle definice sinu je $\sin(90° + \alpha) = \overline{P_1Q_1} : \overline{OP_1}$, podle definice kosinu je $\cos\alpha = \overline{OQ_2} : \overline{OP_2}$. Jelikož však trojúhelníky OP_1Q_1 a OP_2Q_2 jsou shodné, je $\overline{P_1Q_1} = \overline{OQ_2}$, a tedy $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$, což je prvá rovnice ve (13.9). Podobně najdeme jednak $\cos(90° + \alpha) = -\overline{OQ_1} : \overline{OP_1}$, jednak $\sin\alpha = \overline{P_2Q_2} : \overline{OP_2}$. Protože je $\overline{OQ_1} = \overline{P_2Q_2}$, je $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$, což je druhý vzorec ve (13.9). Konečně snadno již z (13.1) a (13.2) odvodíme

$$\operatorname{tg}(90° + \alpha) = \frac{\sin(90° + \alpha)}{\cos(90° + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha,$$

$$\operatorname{cotg}(90° + \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(90° + \alpha)} = \frac{1}{-\operatorname{cotg}\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha.$$



Obr. 69.

Poznámka. Také vzorce (13.9) lze přepsat na jiný tvar. Položíme-li $90° + \alpha = \beta$, pak $\alpha = \beta - 90°$; po dosazení do (13.9) dostaneme

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \cos(\beta - 90°), \cos\beta = -\sin(\beta - 90°), \\ \operatorname{tg}\beta &= -\operatorname{cotg}(\beta - 90°), \operatorname{cotg}\beta = -\operatorname{tg}(\beta - 90°). \end{aligned} \tag{13.10}$$

Vyjádříme zase vzorce (13.9) [a (13.10)] slovy: hodnota funkce tupého úhlu je rovna hodnotě příslušné kofunkce úhlu zmenšeného o 90° opatřené znaménkem dané funkce ve II. kvadrantu.

Příklad 13.2. Najděte hodnotu $\cos 162°17'$.

Řešení. Protože $162°17' = 90° + 72°17'$, je podle (13.9) $\cos 162°17' = -\sin 72°17'$. Nebo jsme mohli užít (13.10). Našli bychom postupně: $\cos 162°17' = -\sin(162°17' - 90°) = -\sin 72°17'$. Z pětimístných tabulek najdeme $\sin 72°17' = 0{,}95258$ a tedy konečný výsledek je $\cos 162°17' = -0{,}95258$.

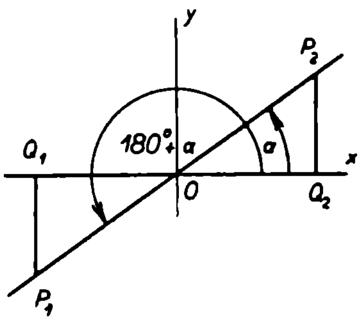
Odvodíme ještě další převodové vzorce pro vypuklé úhly.

Každý vypuklý úhel můžeme psát ve tvaru $180° + \alpha$, kde α je buď ostrý nebo tupý úhel. Ukážeme, že platí:

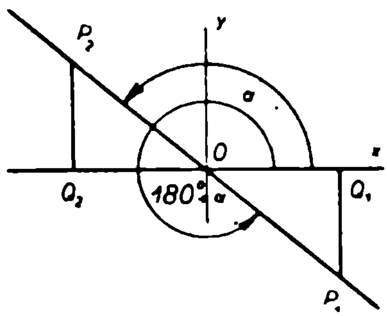
VĚTA 13.4. Nechť $180° + \alpha$ je vypuklý úhel; pak

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{cotg}(180° + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha. \quad (13.11)$$

Důkaz. Musíme uvažovat dvě možnosti. Buď úhel α je ostrý nebo tupý; v prvém případě druhé rameno daného úhlu



Obr. 70.



Obr. 71.

je ve III. kvadrantu (obr. 70), v druhém případě ve IV. kvadrantu (obr. 71). V obou případech sestrojíme nám již známé shodné trojúhelníky OP_1Q_1 a OP_2Q_2 tak, aby $\overline{OP_1} = \overline{OP_2}$. V prvém případě (obr. 70) je $\sin(180° + \alpha) = -\dfrac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{OP_1}} = -\dfrac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{OP_2}} = -\sin\alpha$ a podobně $\cos(180° + \alpha) = -\dfrac{\overline{OQ_1}}{\overline{OP_1}} = -\dfrac{\overline{OQ_2}}{\overline{OP_2}} = -\cos\alpha$. V druhém případě (obr. 71) je $\sin(180° + \alpha) = -\dfrac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{OP_1}} = -\dfrac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{OP_2}} = -\sin\alpha$ a obdobně $\cos(180° + \alpha) = \dfrac{\overline{OQ_1}}{\overline{OP_1}} = \dfrac{\overline{OQ_2}}{\overline{OP_2}} = -\cos\alpha$. Tedy v obou případech platí oba prvé vzorce (13.11). Platnost dalších dvou dokážeme již z prvých dvou a z (13.2) a (13.1). Jest $\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) = \dfrac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{cotg}(180^\circ + \alpha) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha)} = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \mathrm{cotg}\alpha$.

Poznámka. Je-li úhel α tupý, pak ovšem musíme výsledek dále upravit podle věty 13.3. Mohli bychom sice odvodit ještě vzorce, které by hodnoty funkcí úhlů ve IV. kvadrantu vyjadřovaly přímo hodnotami funkcí jistých úhlů v I. kvadrantu, to však již necháme stranou, neboť naše odvozené vzorce už umožňují výpočet hodnoty libovolné goniometrické funkce pro libovolný úhel α.

Příklad 13.3. Najděte hodnotu $\sin 295^\circ 20'$

Řešení. Pišme $295^\circ 20' = 180^\circ + 115^\circ 20'$, tedy podle (13.11) je $\sin 295^\circ 20' = \sin(180^\circ + 115^\circ 20') = -\sin 115^\circ 20'$. Úhel $115^\circ 20'$ je tupý, můžeme proto užít na př. vzorců (13.5): $\sin 115^\circ 20' = \sin 64^\circ 40'$. Tedy je $\sin 295^\circ 20' = -\sin 64^\circ 40' = -0{,}90383$.

Ze vzorců (13.11) lze vyčíst ještě důsledek, který doplňuje větu 12.2 :

VĚTA 13.5. Funkce tangens a kotangens jsou periodické s periodou 180°, t. j.

$$\mathrm{tg}(\alpha + n \,.\, 180^\circ) = \mathrm{tg}\alpha,\ \mathrm{cotg}(\alpha + n \,.\, 180^\circ) = \mathrm{cotg}\alpha,\quad n \text{ celé číslo.} \tag{13.12}$$

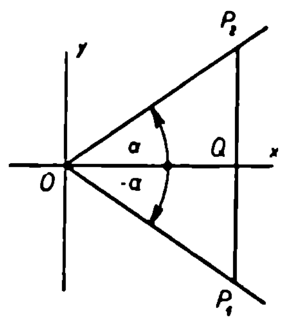
Důkaz. O obou funkcích víme již podle věty 12.2, že jsou periodické s periodou 360°; teď ukážeme, že jsou periodické s menší periodou 180°. Druhé dva vzorce ve (13.11) totiž říkají, že hodnoty tangenty nebo kotangenty tupého úhlu se vždy rovnají hodnotě téže funkce úhlu zmenšeného o 180°, t. j. ležícího v intervalu $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$, ale z toho právě plyne naše tvrzení. Ostatně obr. 63 a obr. 64 názorně ukazují odvozenou vlastnost.

Ačkoliv máme již odvozeny všechny věty, které umožňují výpočet hodnot goniometrických funkcí libovolného úhlu pomocí hodnot funkcí úhlů z intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$, připojíme k našim větám další větu platnou pro záporné úhly.

VĚTA 13.6. Pro funkce úhlu $-\alpha$ platí

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha,$$
$$\mathrm{cotg}(-\alpha) = -\mathrm{cotg}\alpha. \qquad (13.13)$$

Důkaz (obr. 72). Naneseme si obvyklým způsobem úhel $-\alpha$ a mimo to sestrojíme také úhel α (v obr. 72 je narýsovaný úhel α ostrý). Jejich druhá ramena jsou souměrně položena podle osy x. K určení hodnot goniometrických funkcí úhlu $-\alpha$ (po případě α) užijeme souřadnic bodu P_1 (po případě P_2) zvoleného na jeho druhém rameni. Body P_1 a P_2 volíme



Obr. 72.

tak, aby $\overline{OP_1} = \overline{OP_2}$. Zřejmě x-souřadnice obou bodů jsou tytéž, ale y-souřadnice se liší ve znaménku. To však pro určení hodnot goniometrických funkcí značí, že kosinus obou úhlů je týž (neboť $\cos(-\alpha) = \frac{x}{r} = \cos\alpha$), kdežto sinus, tangens a kotangens mají opačná znaménka (v jejich definičních rovnicích vystupuje totiž y-souřadnice).

Příklad 13.4. Vypočtěte $\mathrm{tg}(-45^\circ)$.

Řešení. Podle (13.13) je $\mathrm{tg}(-45^\circ) = -\mathrm{tg}45^\circ = -1$. Bez použití právě dokázané věty jsme mohli dojít k témuž výsledku, ovšem zdlouhavější cestou. Podle (12.5), (13.11) a (13.8) je postupně $\mathrm{tg}(-45^\circ) = \mathrm{tg}(360^\circ - 45^\circ) = \mathrm{tg}315^\circ = \mathrm{tg}(180^\circ + 135^\circ) = \mathrm{tg}135^\circ = \mathrm{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\mathrm{tg}45^\circ = -1$.

Nakonec vyřešíme základní dvě úlohy.

Úloha 13.1. Najděte hodnotu dané goniometrické funkce pro libovolný úhel.

Řešení. Podle věty 12.2 vyjádříme hledanou hodnotu funkce hodnotou téže funkce pro úhel z intervalu $\langle 0°, 360°\rangle$. Potom užitím vhodné z vět 13.2 $\div$ 13.5 vyjádříme nalezenou hodnotu goniometrické funkce úhlu z intervalu $\langle 0°, 90°\rangle$, kterou již vyhledáme z tabulek.

Příklad 13.5. Najděte cos 1000°.

Řešení. $\cos 1000° = \cos(720° + 280°) = \cos 280° = \cos(180° + 100°) = -\cos 100° = -\cos(90° + 10°) = \sin 10° = 0{,}985$ nebo jsme mohli počítat kratčeji: $\cos 1000° = \cos(1080° - 80°) = \cos(-80°) = \cos 80° = \sin 10°$

Dříve než přikročíme k řešení obrácené úlohy, uvědomíme si, že goniometrické funkce jsou periodické s periodou 360°; ptáme-li se po všech úhlech, pro něž daná goniometrická funkce má danou hodnotu (ovšem pro sinus a kosinus musí tato hodnota být vzata z intervalu $\langle -1, 1\rangle$), stačí najít všechny úhly polootevřeného intervalu $\langle 0°, 360°)$ (nepočítáme do něho tedy již hranici 360°), pro něž daná funkce nabývá dané hodnoty. Podle věty 12.1 takové úhly existují; nyní větu 12.1 ještě doplníme větou, která říká kolik takových úhlů existuje.

Věta 13.7. Ke každé hodnotě goniometrické funkce existují v intervalu $\langle 0°, 360°)$ dva úhly, pro které daná funkce má danou hodnotu.

Důkaz podáme jen pro sinus, a to tím, že navážeme na důkaz věty 12.1 a doplníme jej. Nechť je tedy dáno číslo a, kde $-1 \leq a \leq 1$. Zvolíme-li si libovolnou délku $\overline{OA}$, musíme nalézti vlastně všechny body P, jejichž vzdálenost od O by byla právě $\overline{OP} = \overline{OA}$ a jejichž y-souřadnice by byla $a \,.\, \overline{OA}$. Takové body jsou jen v průsečících kružnice o středu

O a poloměru $\overline{OA}$ s jakousi přímkou, o které jsme mluvili v důkazu věty 12.1, rovnoběžnou s osou x. Podstatné je, že takové průsečíky existují vždy dva (splývají jen pro $a = \pm 1$). Označíme-li je P_1, P_2, pak $\sphericalangle AOP_1$ a $\sphericalangle AOP_2$ jsou hledané úhly.

Poznámka. K důkazu jsme mohli použít také grafického znázornění goniometrických funkcí (obr. 61÷64). Je-li dána hodnota některé z nich, pak vedeme rovnoběžku s osou x tak, aby y-souřadnice bodů této přímky byly rovny dané hodnotě. Tato přímka protíná příslušný graf ve dvou bodech; úhly příslušné těmto bodům jsou hledané úhly.

Pro skutečné vyhledání úhlů je užitečná další věta.

VĚTA 13.8. Součet úhlů příslušných dané kladné hodnotě sinu je 180°; součet úhlů příslušných záporné hodnotě sinu je 540°; součet úhlů příslušných dané hodnotě kosinu je 360° a konečně rozdíl úhlů příslušných dané hodnotě tangenty nebo kotangenty je 180°.

Důkaz. Základní myšlenku důkazu ukážeme jen pro sinus. Nechť $0 < a \leqq 1$; vztahu $\sin\alpha = a$ vyhovuje jistě nějaký ostrý úhel α_1, který umíme snadno najít. Potom však úhel $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$ je další hledaný úhel, neboť podle (13.5) platí $\sin\alpha_1 = \sin(180° - \alpha_1)$. Pro oba úhly platí ovšem $\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$. Hledáme-li úhly, které vyhovují vztahu $\sin\beta = -a$, pak najdeme nejprve úhly α_1, α_2, které vyhovují podmínce $\sin\alpha = a$. Protože jsme zvolili $\sin\alpha$ tak, že $\sin\beta = -\sin\alpha$, musí podle (13.11) být $\beta = 180° + \alpha$ a tedy $\beta_1 = 180° + \alpha_1$ a $\beta_2 = 180° + \alpha_2 = 360° - \alpha_1$. Je pak skutečně $\beta_1 + \beta_2 = 540°$. Podobně by se postupovalo v ostatních případech.

ÚLOHA 13.2. K dané hodnotě goniometrické funkce najděte příslušný úhel.

Řešení je naznačeno v předchozí větě. Znaménko hodnoty dané funkce říká, do kterého intervalu náleží hledané úhly.

Vyhledáme nejprve úhly, pro něž daná funkce má hodnotu rovnou původní hodnotě, u níž jsme případné záporné znaménko změnili v kladné. Pak užijeme známých převodových vzorců k výpočtu hledaných úhlů.

Příklad 13.6. Najděte úhly (v intervalu $\langle 0°, 360°)$), pro něž a) $\sin\alpha = 0{,}5$, b) $\sin\beta = -0{,}5$.

Řešení. a) Úlohu řeší ostrý a tupý úhel; hledaný ostrý úhel je zřejmě $\alpha_1 = 30°$, tedy druhý úhel je $\alpha_2 = 180° - 30° = 150°$. b) Úlohu řeší úhly, jejichž druhá ramena jsou ve III. a IV. kvadrantu. Protože už známe úhly α_1, α_2, které vyhovují vztahu $\sin\alpha = -\sin\beta = 0{,}5$, musí $\beta_1 = 180° + \alpha_1 = 210°$, $\beta_2 = 180° + \alpha_2 = 330°$.

Příklad 13.7. Najděte úhly (v intervalu $\langle 0°, 360°)$), pro něž a) $\cos\alpha = 0{,}35293$, b) $\cos\beta = -0{,}35293$.

Řešení. a) Úlohu řeší ostrý úhel a vypuklý úhel z intervalu $(270°, 360°)$. Především je totiž $\alpha_1 = 69°20'$; protože platí $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, je $\alpha_2' = -69°20'$, což však není úhel v našem intervalu. Stačí k němu přičíst 360° a tedy $\alpha_2 = 360° - 69°20' = 290°40'$ je druhý hledaný úhel. b) Úlohu řeší jednak tupý úhel, jednak vypuklý úhel z intervalu $(180°, 270°)$. Jelikož je $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, je $\beta_1 = 180° - \alpha_1 = 110°40'$ a dále protože $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$, je $\beta_2 = 180° + \alpha_1 = 249°20'$ (nebo jsme mohli pomocí α_2 najít: $\beta_2' = 180° - \alpha_2 = -110°40'$, který sice neleží v našem intervalu, ale $\beta_2' + 360°$ již v našem intervalu leží, je to β_2).

Příklad 13.8. Najděte úhly (v intervalu $\langle 0°, 360°)$), pro něž a) $\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}27994$, b) $\mathrm{tg}\,\beta = -1{,}27994$.

Řešení pro tangentu a kotangentu je snadné. Podle věty 13.5, je-li α_1 řešením, pak také $\alpha_2 = \alpha_1 + 180°$ je řešením. a) Úlohu řeší $\alpha_1 = 52°$, tedy $\alpha_2 = 52° + 180° = 232°$ je také řešení. b) Protože je $\mathrm{tg}\,\beta = -\mathrm{tg}\,\alpha$, jsou hledané úhly $\beta_1 = 180° - \alpha_1 = 180° - 52° = 128°$ a $\beta_2 = 180° + \beta_1 = 308°$.

Příklad 13.9. Najděte úhly (v intervalu $\langle 0°, 360°)$), pro něž a) $\cotg\alpha = 0{,}85713$, b) $\cotg\beta = -0{,}85713$.

Řešení. a) Snadno najdeme $\alpha_1 = 49°24'$, tedy druhým řešením musí být $\alpha_2 = 180° + 49°24' = 229°24'$. b) Ze vztahu $\cotg\beta = -\cotg\alpha$ plyne $\beta_1 = 180° - \alpha_1 = 180° - 49°24' = 130°36'$ a dále $\beta_2 = \beta_1 + 180° = 130°36' + 180° = 310°36'$.

Cvičení.

13.1. Určete hodnoty ostatních goniometrických funkcí, je-li a) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, b) $\tg\alpha = 1{,}5$.

13.2. Ve kterém intervalu leží úhel, jehož a) sinus a kosinus mají postupně znaménka $+\ -$, b) kosinus a tangens mají znaménka $-\ +$, c) sinus a kotangens mají znaménka $+\ -$?

13.3. Najděte hodnoty a) $\sin 130°$, b) $\cos 109°20'$, c) $\tg 108°27'$, d) $\cotg 151°13'$, e) $\sin 212°53'$, f) $\cos 314°15'$, g) $\tg 250°50'$, h) $\cotg 300°$.

13.4. Určete a) $\sin 515°$, b) $\cos 600°$, c) $\tg 410°50'$, d) $\cotg 405°$.

13.5. Určete a) $\sin(-30°)$, b) $\cos(-45°)$, c) $\tg(-60°)$.

V intervalu $\langle 0°, 360°)$ najděte úhly, pro které je

13.6. a) $\sin\alpha = 0{,}65324$, b) $\sin\alpha = -0{,}72621$.

13.7. a) $\cos\alpha = 0{,}57765$, b) $\cos\alpha = -0{,}87211$.

13.8. a) $\tg\alpha = 0{,}91099$, b) $\tg\alpha = -1{,}35142$.

13.9. a) $\cotg\alpha = 1{,}25$, b) $\cotg\alpha = -0{,}8$.

14. SOUČTOVÉ (A ROZDÍLOVÉ) VĚTY PRO GONIOMETRICKÉ FUNKCE

Hned na začátku podotkněme, že při řešení trojúhelníků bychom se mohli docela dobře obejít bez znalosti vět tohoto odstavce; přesto si je odvodíme, neboť v některých případech jsou velice užitečné. O jaké věty se vlastně jedná? Stručně řečeno, jsou to věty, které udávají řešení této úlohy:

Jsou známy hodnoty goniometrických funkcí dvou úhlů α a β; je třeba určit hodnoty goniometrických funkcí úhlů $\alpha + \beta$ nebo $\alpha - \beta$.

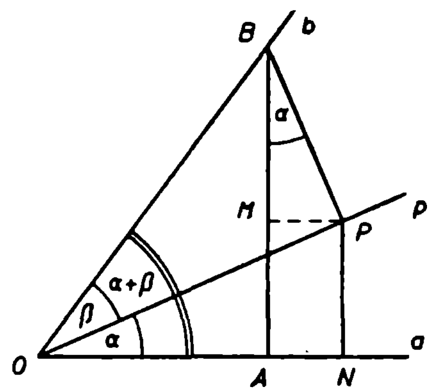
Základem je věta:

Věta 14.1. Nechť α, β jsou dva libovolné úhly, pak platí

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Důkaz je poněkud delší; rozložíme jej na několik částí.

a) Předpokládejme nejprve $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$, $\alpha + \beta < 90°$. Sestrojíme si styčné úhly $\alpha = \sphericalangle\, ap$, $\beta = \sphericalangle\, pb$ (obr. 73); na rameni b zvolíme libovolný bod $B \neq O$, spustíme z něho jednak kolmici BA na rameno a, jednak kolmici BP na rameno p. Spusťme ještě z P kolmici PM na AB a kolmici PN na rameno a. Především z pravoúhlého $\triangle\, OAB$ plyne



Obr. 73.

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}, \quad \cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}; \tag{14.2}$$

dále z pravoúhlého $\triangle\, OPN$ najdeme

$$\sin\alpha = \frac{\overline{PN}}{\overline{OP}}, \quad \cos\alpha = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}}. \tag{14.3}$$

Ale $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ můžeme také vyjádřit z pravoúhlého $\triangle\, MPB$, neboť v něm úhel při vrcholu B je právě α (jest totiž $BP \perp OP$, $BA \perp ON$ a tedy $\sphericalangle\, PBM = \sphericalangle\, PON = \alpha$), takže je také

$$\sin\alpha = \frac{\overline{MP}}{\overline{BP}}, \quad \cos\alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{BP}}; \tag{14.4}$$

konečně z pravoúhlého $\triangle\, OPB$ dostaneme

$$\sin\beta = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}}, \quad \cos\beta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}}. \tag{14.5}$$

Pro úsečku $\overline{AB}$ platí $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$; protože však je $\overline{AM} = \overline{PN}$, můžeme tuto rovnost přepsat na $\overline{AB} = \overline{PN} + \overline{MB}$. Vydělením $\overline{OB}$ dostaneme $\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{PN}}{\overline{OB}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{OB}}$; dosaďme sem za $\overline{PN}$ ze (14.3) a $\overline{MB}$ ze (14.4); najdeme

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \sin\alpha + \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \cos\alpha;$$

po dosazení z (14.2) a (14.5) už dostaneme prvý dokazovaný vzorec.

Vyjděme nyní ze vztahu $\overline{OA} = \overline{ON} - \overline{NA}$; jelikož $\overline{NA} = \overline{MP}$, dostáváme $\overline{OA} = \overline{ON} - \overline{MP}$. Dělme opět tuto rovnici $\overline{OB}$; najdeme $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} - \frac{\overline{MP}}{\overline{OB}}$, kam dosadíme za $\overline{ON}$ ze (14.3) a za $\overline{MP}$ ze (14.4). Výsledek dosazení je

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \cos\alpha - \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \sin\alpha,$$

odkud již po dosazení ze (14.2) a (14.5) plyne druhý dokazovaný vzorec.

b) Zatím jsme vzorce (14.1) dokázali jen pro takové ostré úhly, jejichž součet byl menší než 90°. Předpokládejme nyní, že zase je $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$, ale $\alpha + \beta > 90°$ Položme v tomto případě $\alpha_1 = 90° - \alpha$, $\beta_1 = 90° - \beta$. Zřejmě pro α_1 a β_1 platí předpoklady uvedené v části a), t. j. $0° < \alpha_1 < 90°$, $0° < \beta_1 < 90°$, $\alpha_1 + \beta_1 < 90°$ (jak plyne z toho, že $\alpha_1 + \beta_1 = 180° - (\alpha + \beta)$ a $\alpha + \beta > 90°$). Tedy je podle dokázaného

$$\sin(\alpha_1 + \beta_1) = \sin\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_1 \sin\beta_1,$$

t. j. $\sin[180° - (\alpha + \beta)] = \sin(90° - \alpha) \cos(90° - \beta) + \cos(90° - \alpha) \sin(90° - \beta)$, a to lze podle (13.5), (8.3) a (8.4) přepsat na

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta,$$

což už je, až na pořadí členů, prvá rovnice ve (14.1). Úplně obdobně platí

$$\cos(\alpha_1 + \beta_1) = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 - \sin\alpha_1 \sin\beta_1,$$

t. j.

$$\cos[180° - (\alpha + \beta)] = \cos(90° - \alpha) \cos(90° - \beta) - \\ - \sin(90° - \alpha) \sin(90° - \beta).$$

Tento vztah můžeme opět užitím (13.5), (8.3) a (8.4) přepsat na

$$-\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta,$$

z čehož už násobením -1 dostaneme druhou rovnici (14.1).

c) Platnost vzorců (14.1) je tedy dosud dokázána pro libovolné dva ostré úhly. Připomeňme, že oba vzorce platí také v případě, kdy alespoň jeden z úhlů α, β je roven $0°$, jak se snadno přesvědčíme dosazením.

Učiňme nyní další krok. Za předpokladu, že (14.1) platí pro libovolné dva úhly α, β, dokážeme, že platí také pro případ, kdy k jednomu z nich, na př. k úhlu α, přičteme $90°$; položme tedy $\alpha_1 = \alpha + 90°$, tedy $\alpha = \alpha_1 - 90°$. Podle předpokladu je

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta,$$

t. j.

$$\sin[(\alpha_1 - 90°) + \beta] = \sin(\alpha_1 - 90°) \cos\beta + \\ + \cos(\alpha_1 - 90°) \sin\beta.$$

Podle (13.13) jest však $\sin[(\alpha_1 - 90°) + \beta] = \sin[(\alpha_1 + \beta) - 90°] = -\sin[90° - (\alpha_1 + \beta)]$, $\sin(\alpha_1 - 90°) = -\sin(90° - \alpha_1)$ a $\cos(\alpha_1 - 90°) = \cos(90° - \alpha_1)$; po dosazení do předcházející rovnice dostáváme

$$-\sin[90° - (\alpha_1 + \beta)] = -\sin(90° - \alpha_1) \cos\beta + \\ + \cos(90° - \alpha_1) \sin\beta.$$

Užitím (8.3) a (8.4) (těchto vzorců můžeme skutečně užít, neboť se dá lehko dokázat, že platí pro libovolné úhly a ne jen pro ostré úhly) a současným násobením -1 najdeme

$$\cos(\alpha_1 + \beta) = \cos\alpha_1 \cos\beta - \sin\alpha_1 \sin\beta,$$

tedy druhou rovnici (14.1) pro úhly $\alpha_1 = \alpha + 90°$, β. Podobně odvodíme postupně

$$\begin{gathered}\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,\\ \cos[(\alpha_1 - 90°) + \beta] = \cos(\alpha_1 - 90°) \cos\beta - \\ - \sin(\alpha_1 - 90°) \sin\beta,\\ \cos[90° - (\alpha_1 + \beta)] = \cos(90° - \alpha_1) \cos\beta + \sin(90° - \alpha_1) \cdot \\ \cdot \sin\beta,\\ \sin(\alpha_1 + \beta) = \sin\alpha_1 \cos\beta + \cos\alpha_1 \sin\beta.\end{gathered}$$

Tím jsou však rovnice (14.1) dokázány pro libovolné kladné úhly, neboť každý úhel větší nebo rovný 90° dostaneme z úhlu z intervalu $\langle 0°, 90°)$ postupným přičítáním 90°. Pro úhly intervalu $\langle 0°, 90°)$ vzorce (14.1) platí, jak je dokázáno v částech a) a b), tedy platí pro všechny kladné úhly, jak jsme právě dokázali v c).

d) Zbývá provést důkaz platnosti vzorců (14.1) pro záporné úhly. Každý záporný úhel dostaneme však z kladného úhlu odečtením nějakého násobku 360°. Ale goniometrické funkce jsou periodické, jejich hodnoty se zmíněným odečtením nezmění, a proto vzorce (14.1) platí pro zcela libovolné úhly. Tím je tvrzení věty 14.1 dokázáno.

VĚTA 14.2. *Pro dva libovolné úhly α, β platí*

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta,\\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta, \qquad (14.6)\\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.\end{aligned}$$

Důkaz. Je to vlastně šest vztahů. V každém řádku platí současně buď horní nebo dolní znaménka. Říká se jim někdy *součtové* (*rozdílové*) *věty*. Důkaz platnosti prvých dvou vzorců pro horní znaménka je podán větou 14.1. Podle téže věty však můžeme za úhel β zvolit libovolný úhel. Zvolme úhel $-\beta$; dosazením do (14.1) dostaneme

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta),$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos(-\beta) - \sin\alpha \sin(-\beta).$$

Dosadíme-li sem však podle (13.13) $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, pak hned dosaneme prvé dva vzorce pro dolní znaménka.

Dále je

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}.$$

Dělme čitatel i jmenovatel součinem $\cos\alpha \cos\beta$; najdeme

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

což je právě vzorec ve třetím řádku pro horní znaménka. Připomeňme, že přirozeně předpokládáme, že jak $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, tak i $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ jsou skutečně definovány, t. j. že ani α, β, ale ani $\alpha + \beta$ nedají se psát ve tvaru $90° + n \cdot 180°$ (tedy vzorec na př. neplatí, když je $\alpha = 30°$ a současně $\beta = 60°$). Úplně obdobně bychom dokázali platnost posledního vzorce pro dolní znaménka.

Příklad 14.1. Vypočtěte $\sin(\alpha - \beta)$, je-li $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$ a víte-li, že α i β leží v intervalu $\langle 90°, 180°\rangle$.

Řešení. Z daných hodnot a podle podmínek najdeme $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$. Dosadíme nyní prostě do vzorce $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$, dostaneme $\sin(\alpha - \beta) = \frac{12}{13} \cdot -\frac{3}{5} - (-\frac{5}{13}) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}$.

VĚTA 14.3. Jest

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad (14.7)$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Důkaz. Stačí do vzorců (14.6) pro $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ a $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ položit $\alpha = \beta$.

Příklad 14.2. Vyjádřete $\sin 3\alpha$ funkcí $\sin\alpha$.

Řešení. Úhel 3α pišme ve tvaru $2\alpha + \alpha$. Pak je postupně $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha = (2\sin\alpha\,.$ $.\cos\alpha) \cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \sin\alpha = \sin\alpha(3 \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$ $= 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha$.

Poznámka. Užitím vzorců (14.7) můžeme zjednodušit výrazy, ve kterých se vyskytují goniometrické funkce. Tak na př. v úloze 9.1 jsme našli pro plošný obsah pravoúhlého trojúhelníka $p = \frac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha$; po dosazení ze (14.7) zjednodušíme na $p = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha$. Podobně vzorec $p = b^2 \sin\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\alpha$ z úlohy 9.8 lze upravit na $p = \frac{1}{2}b^2 \sin\alpha$ a stejně vzorec $p =$ $= r^2 \sin\dfrac{2R}{n} \cos\dfrac{2R}{n}$ z úlohy 9.10 na $p = \frac{1}{2}r^2 \sin\dfrac{4R}{n}$, jak jsme ostatně našli přímo v úloze 9.10 jiným způsobem.

Vzorce (14.7) udávají, jak se vypočtou funkce dvojnásobného úhlu ze známých funkcí daného úhlu. Odvodíme ještě obrácené vzorce:

VĚTA 14.4. Platí

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}},$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}, \qquad (14.8)$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}.$$

Důkaz. Vyjdeme z rovnic

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1, \quad \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \cos\alpha,$$

z nichž prvá je rovnicí (13.3) napsanou pro úhel $\frac{1}{2}\alpha$ a druhá je druhou rovnicí (14.7) napsanou také pro úhel $\frac{1}{2}\alpha$. Sečtením obou rovnic dostaneme $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 1 + \cos\alpha$ a odečtením druhé rovnice od první $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha$. Z těchto rovnic již snadno odvodíme prvé dvě rovnice ve (14.8). Třetí vzorec dostaneme, vydělíme-li prvou rovnici (14.8) druhou rovnicí.

Příklad 14.3. Vypočtěte funkce úhlu $\frac{1}{2}\alpha$, je-li $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Řešení. Podle vzorců (14.8) najdeme $\sin\frac{1}{2}\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \pm\frac{1}{2}$. Omezíme-li se na úhly α z intervalu $\langle 0°, 360°\rangle$, pak (vzhledem k tomu, že bylo dáno $\cos\alpha > 0$) mohou nastat jen tyto dva případy: a) buď je $0° < \alpha < 90°$ a tedy $\sin\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ a $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$, b) nebo je $270° < \alpha < 360°$, pak je $135° < \frac{1}{2}\alpha < 180°$ a tedy $\sin\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\frac{1}{2}\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{2}$.

Užitím věty 14.2 lehko odvodíme další velice užitečnou větu:

VĚTA 14.5. Pro libovolné dva úhly α, β platí vzorce

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),\\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).
\end{aligned} \tag{14.9}$$

Důkaz. Jsou-li α, β dva libovolné úhly, pak jistě existují další dva úhly γ a δ tak, že

$$\alpha = \gamma + \delta,\ \beta = \gamma - \delta. \qquad (14.10)$$

Skutečně: napsané rovnice jsou vlastně rovnicemi pro neznámé úhly γ a δ. Sečtením obou rovnic najdeme $\alpha + \beta = 2\gamma$, odečtením $\alpha - \beta = 2\delta$, tedy

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),\ \delta = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta). \qquad (14.11)$$

Vyjádříme nyní $\sin\alpha = \sin(\gamma + \delta)$ a $\sin\beta = \sin(\gamma - \delta)$ podle (14.6). Jest

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sin(\gamma + \delta) = \sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta,\\ \sin\beta &= \sin(\gamma - \delta) = \sin\gamma\cos\delta - \cos\gamma\sin\delta.\end{aligned}$$

Sečtením a odečtením těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\gamma\cos\delta,\\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\gamma\sin\delta.\end{aligned}$$

Dosadíme-li sem za γ a δ ze (14.11), dostaneme právě prvé dvě rovnice (14.9). Obdobně je

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(\gamma + \delta) = \cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\sin\delta,\\ \cos\beta &= \cos(\gamma - \delta) = \cos\gamma\cos\delta + \sin\gamma\sin\delta.\end{aligned}$$

Jejich sečtením a odečtením najdeme

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\gamma\cos\delta,\\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\gamma\sin\delta.\end{aligned}$$

Také sem dosadíme ještě za γ a δ ze (14.11); dostaneme zbývající dvě rovnice ve (14.9).

Poznámka. Význam vzorců (14.9) spočívá právě v tom, že součet (rozdíl) funkcí je vyjádřen součinem funkcí. Můžeme jich tedy s výhodou užít při úpravě daných výrazů na výrazy vhodné pro logaritmování.

Příklad 14.4. Vyjádřete součet $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ ve tvaru součinu za předpokladu, že α, β, γ jsou úhly trojúhelníka (tedy $\alpha + \beta + \gamma = 180°$).

Řešení. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin[180° - (\alpha + \beta)] = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$. Pro prvé dva sčítance užijeme prvého vzorce (14.9), třetího sčítance upravíme podle prvého vzorce (14.7). Tedy $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)[\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)]$. Nyní však platí $\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cos[90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)] = \cos\frac{1}{2}\gamma$ a dále [podle (14.9)] $\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta$. Tedy výsledek je

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Cvičení.

14.1. Vypočtěte $\cos(\alpha + \beta)$ a $\cos(\alpha - \beta)$, je-li $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\cos\beta = \frac{5}{13}$ a víte-li, že α i β leží v intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ\rangle$.

14.2. Určete $\mathrm{tg}(\alpha + \beta)$ a $\mathrm{tg}(\alpha - \beta)$, je-li $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{2}$.

14.3. Vypočtěte užitím součtových vět hodnoty goniometrických funkcí pro úhel 15° (uvažte, že $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$).

14.4. Najděte hodnotu $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}\,2\alpha$, $\mathrm{cotg}\,2\alpha$, je-li $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{20}{21}$ a leží-li α v intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ\rangle$.

14.5. Vyjádřete a) $\cos 3\alpha$, b) $\sin 4\alpha$ funkcemi $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

14.6. Najděte hodnoty goniometrických funkcí úhlu $\frac{1}{2}\alpha$, jestliže znáte $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ (úhel α je v intervalu $\langle 0^\circ, 90^\circ\rangle$).

14.7. Zjednodušte výrazy a) $\sin\alpha + \cos\alpha$, b) $\sin\alpha - \cos\alpha$ [užijte vztahu $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$].

14.8. Zjednodušte $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}$.

14.9. Nechť α, β, γ jsou úhly trojúhelníka; vyjádřete součinem a) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma$, b) $\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\alpha + \mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\beta + \mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\gamma$.

15. ZÁKLADNÍ VĚTY PRO ŘEŠENÍ OBECNÝCH TROJÚHELNÍKŮ

Při řešení trojúhelníků budeme z vět odvozených v goniometrii obecného úhlu potřebovat věty týkající se úhlů intervalu $(0^\circ, 180^\circ)$. Uvedeme jednoduchý důsledek těchto vět, platný pro úhly trojúhelníka.

VĚTA 15.1. Pro úhly α, β, γ trojúhelníka platí

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta),\ \cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta),\ \mathrm{tg}\,\gamma = -\mathrm{tg}(\alpha + \beta),$$
$$\mathrm{cotg}\,\gamma = -\mathrm{cotg}(\alpha + \beta), \tag{15.1}$$

$\sin\frac{1}{2}\gamma = \cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\cos\frac{1}{2}\gamma = \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma =$
$$= \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),\ \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\gamma = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta). \qquad (15.2)$$

Důkaz plyne okamžitě z toho, že pro úhly α, β, γ trojúhelníka platí rovnice $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

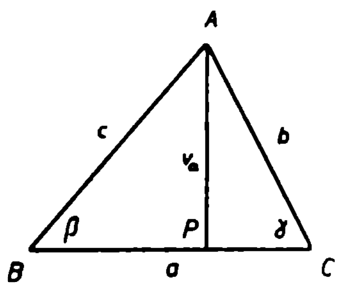
Poznámka. Mimo uvedené vzorce platí ještě další vzorce téhož typu, které dostaneme z (15.1) a (15.2) tak zvanou *cyklickou záměnou* prvků; rozumíme tím záměnu, při které místo α píšeme β, místo β píšeme γ a konečně místo γ píšeme α. Z takto získaných vzorců obdržíme opět nové další cyklickou záměnou.

Mezi stranami a úhly obecného trojúhelníka platí řada vztahů, z nichž některé nejdůležitější odvodíme. Nejprve dokážeme:

VĚTA 15.2 (SINOVÁ VĚTA). Strany trojúhelníka jsou úměrny sinům protějších úhlů, t. j.

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma. \qquad (15.3)$$

Důkaz. V $\triangle ABC$ spusťme s vrcholu A výšku v_a na protější stranu a; pata výšky nechť je P. Nutno rozeznávat tři případy:



Obr. 74.

a) Jsou-li úhly β a γ ostré (obr. 74), pak P leží mezi body B a C. Dostaneme pravoúhlý $\triangle ABP$ s úhlem β při vrcholu B a pravoúhlý $\triangle ACP$ s úhlem γ při vrcholu C. Z $\triangle ABP$ najdeme pro výšku

$$v_a = c \sin\beta. \qquad (15.4)$$

Tutéž výšku v_a vyjádříme ještě užitím $\triangle ACP$; nyní jest

$$v_a = b \sin\gamma. \qquad (15.5)$$

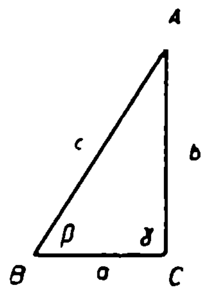
Z rovnic (15.4) a (15.5) plyne však okamžitě rovnice

$$b \sin\gamma = c \sin\beta, \qquad (15.6)$$

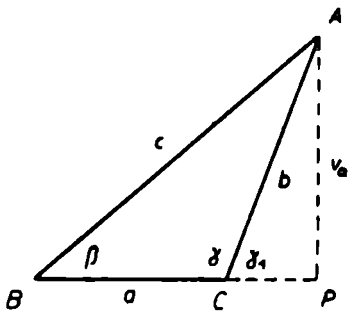
t. j. úměra

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma. \qquad (15.7)$$

b) Nejsou-li oba úhly β a γ ostré, pak jeden z nich, můžeme předpokládat, že je to právě γ, je buď pravý nebo tupý. Nechť γ je pravý (obr. 75), pak z $\triangle ABC$ dostaneme $b = c\sin\beta$, což však je jen zvláštním případem vztahu (15.6), neboť pro pravý úhel γ platí $\sin\gamma = 1$. Tedy i v tomto případě platí (15.7).



Obr. 75.



Obr. 76.

c) Nechť γ je tupý (obr. 76); pak bod P leží na přímce BC vně úsečky $\overline{BC}$. Dostaneme opět pravoúhlý $\triangle ABP$ s úhlem β při vrcholu B a pravoúhlý $\triangle ACP$ tentokráte s úhlem $\gamma_1 = 180° - \gamma$ při vrcholu C. Vyjádříme opět výšku v_a dvojím způsobem. Dostaneme jednak (15.4) (z $\triangle ABC$) a jednak $v_a = b\sin\gamma_1 = b\sin(180° - \gamma) = b\sin\gamma$, tedy opět (15.5). To však značí, že také v tomto případě platí úměra (15.7).

Kdybychom tutéž úvahu provedli pro výšky v_c a v_b, našli bychom

$$\begin{aligned} a : b &= \sin\alpha : \sin\beta, \\ a : c &= \sin\alpha : \sin\gamma. \end{aligned} \qquad (15.8)$$

Úměry (15.7) a (15.8) se obyčejně zapisují ve tvaru jediné postupné úměry (15.3). Tím je sinová věta dokázána.

Odvodíme si nyní další větu:

VĚTA 15.3 (KOSINOVÁ VĚTA). Čtverec strany trojúhelníka je roven součtu čtverců zbývajících dvou stran, zmenšenému o dvojnásobný součin těchto stran vynásobený kosinem úhlu jimi sevřeného:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma. \tag{15.9}$$

Důkaz provedeme opět ve třech krocích.

a) Nechť úhly β a γ jsou ostré (obr. 74). Pak z $\triangle\, ACP$ dostaneme $v_a{}^2 = b^2 - \overline{PC}^2$; podobně z $\triangle\, ABP$ určíme $v_a{}^2 = c^2 - \overline{BP}^2 = c^2 - (a - \overline{PC})^2$. Je tedy $b^2 - \overline{PC}^2 = c^2 - (a - \overline{PC})^2$. Odtud již snadno nalezneme $c^2 = a^2 + b^2 - 2a\,.\,\overline{PC}$. Dosadíme-li sem však $\overline{PC} = b \cos\gamma$, jak plyne z pravoúhlého $\triangle\, ACP$, pak dostaneme ihned dokazovaný vzorec (15.9).

b) Nechť γ je pravý (obr. 75); daný $\triangle\, ABC$ je pravoúhlý s přeponou c. Podle Pythagorovy věty je $c^2 = a^2 + b^2$. To však říká, že i v tomto případě platí (15.9), neboť pro $\gamma = 90°$ jest $\cos\gamma = 0$.

c) Nechť γ je tupý úhel (obr. 76). Obdobným způsobem jako v případě a) najdeme $c^2 = a^2 + b^2 + 2a\,.\,\overline{PC}$. Dosadíme-li sem $\overline{PC} = b \cos\gamma_1 = b\,.\cos(180° - \gamma) = -b \cos\gamma$, dostaneme zase (15.9). Tím je platnost vzorce (15.9) dokázána pro všechny případy. Úplně obdobně bychom dokázali ještě další dva vzorce

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta; \end{aligned} \tag{15.10}$$

tím je dokázána platnost věty.

Poznámka. Kosinové větě se někdy říká také *Carnotova* (čteme karnotova) *věta* nebo *rozšířená věta Pythagorova,* vzhledem k tomu, že věta Pythagorova je jejím zvláštním případem. Připomeňme, že ze tří vzorců (15.9) a (15.10) stačí si zapamatovat jediný; zbývající dva plynou z něho cyklickou záměnou elementů: nyní tím rozumíme, že zaměníme nejen úhly podle schematu $\alpha \to \beta$, $\beta \to \gamma$, $\gamma \to \alpha$, nýbrž současně i strany podle obdobného schematu $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$.

Pro řešení obecných trojúhelníků úplně vystačí základní věty sinová a kosinová. Přesto k nim připojíme ještě některé další věty, které řešení trojúhelníků v mnohých případech ulehčují.

VĚTA 15.4 (TANGENTOVÁ VĚTA). Součet dvou stran v trojúhelníku má se k jejich rozdílu jako tangenta polovičního součtu protějších úhlů k tangentě jejich polovičního rozdílu:

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta). \qquad (15.11)$$

Důkaz. K odvození užijeme sinové věty. Z prvního vzorce (15.8) plyne $a = d\sin\alpha$, $b = d\sin\alpha$ (kde d je jakýsi koeficient různý od nuly) a odtud $a + b = d(\sin\alpha + \sin\beta)$, $a - b = d(\sin\alpha - \sin\beta)$. Vydělením obou rovnic najdeme

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}. \qquad (15.12)$$

Pravou stranu této rovnice však snadno upravíme

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)} : \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

a tedy

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}.$$

Dosadíme-li tento výsledek do (15.12), dostáváme přímo (15.11). Tím je však tangentová věta dokázána; další dva vzorce dostaneme z (15.11) známou cyklickou záměnou.

Poznámka. Věta tangentová se často označuje jako *Neperova* (Napierova) *úměra* nebo věta.

VĚTA 15.5 (1. a 2. MOLLWEIDŮV VZOREC). Pro strany a úhly obecného trojúhelníka platí

$$(a + b) : c = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$(a - b) : c = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) : \cos\tfrac{1}{2}\gamma. \qquad (15.13)$$

Důkaz obou vzorců založíme opět na sinové větě. Z postupné úměry (15.3) plyne $a = d\sin\alpha$, $b = d\sin\beta$, $c = d\sin\gamma$ a tedy $a + b = d(\sin\alpha + \sin\beta)$, $c = d\sin\gamma$. Vydělením obou rovnic najdeme

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma}. \qquad (15.14)$$

Pravou stranu této rovnice upravíme [užijeme při tom druhého vzorce v (15.2)] na

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}{2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma} =$$
$$= \frac{\cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma}$$

a tedy

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\sin\tfrac{1}{2}\gamma},$$

což dosazeno do (15.14) dává 1. Mollweidův vzorec v (15.13). Úplně obdobně dokážeme 2. vzorec vycházejíce z úměry

$$(a - b) : c = (\sin\alpha - \sin\beta) : \sin\gamma.$$

Ke každému ze vzorců (15.13) existují ovšem ještě další dva, které z nich dostaneme cyklickou záměnou elementů.

Poznámka. Uvedené vzorce jsou známy také pod jménem *Cagnoliho* (čteme kaňoliho) *rovnice.*

Věta 15.6. Pro poloviční úhly trojúhelníka platí

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}},$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}, \qquad (15.15)$$

(a další vzorce pro úhly $\frac{1}{2}\beta$ a $\frac{1}{2}\gamma$, které dostaneme z těchto cyklickou záměnou), při čemž $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Důkaz. Vyjděme z kosinové věty (15.9) napsané pro stranu a, t. j. z rovnice $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Z toho

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu $\cos\alpha$ do (14.8), dostaneme hledané vzorce. Naznačené provedeme nyní podrobně: vypočítáme nejprve jednak $1 - \cos\alpha$, jednak $1 + \cos\alpha$. Najdeme $1 - \cos\alpha = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}$, $1 + \cos\alpha = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}$. Pišme, jak obvykle, pro poloviční obvod trojúhelníka s, t. j. položme $a + b + c = 2s$; pak je $b + c - a = 2(s - a)$, $a - b + c = 2(s - b)$, $a + b - c = 2(s - c)$ a tedy

$$1 - \cos\alpha = \frac{2s(s - a)}{bc}, \quad 1 + \cos\alpha = \frac{2(s - b)(s - c)}{bc}.$$

Další je již zřejmé, stačí totiž nalezené hodnoty dosadit do (14.8) a dostaneme okamžitě vzorce (15.15). Odmocniny jsou ovšem opatřeny znaménkem $+$, neboť $\frac{1}{2}\alpha$ je jistě v intervalu $(0°, 90°)$, tedy $\sin\frac{1}{2}\alpha > 0$, $\cos\frac{1}{2}\alpha > 0$ i $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha > 0$.

Nakonec připojme ještě několik vět, ve kterých uvedeme jak se vypočítávají některé další prvky trojúhelníka, a to plošný obsah p, poloměr ϱ kružnice vepsané a poloměr r kružnice opsané, ze základních prvků.

VĚTA 15.7. Pro plošný obsah p trojúhelníka platí vzorce

$$p = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma, \tag{15.16}$$

$$p = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}, \tag{15.17}$$

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\textit{Heronův vzorec}). \tag{15.18}$$

Důkaz. Nejprve ukážeme platnost vzorce (15.16). Jak víme, pro plošný obsah trojúhelníka platí známý vzorec $p = \frac{1}{2}av_a$ (obr. 74). Pro výšku v_a však z $\triangle ACP$ najdeme $v_a = b\sin\gamma$, což dosazeno do předchozího vzorce dává $p = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, jak je uvedeno v (15.16). Samozřejmě s tímto vzorcem platí ještě další dva, které dostaneme z tohoto cyklickou záměnou prvků: $p = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, $p = \frac{1}{2}ac\sin\beta$. Další vztah (15.17) dostaneme již z (15.16) vhodnou úpravou užitím sinové věty. Z úměry $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ totiž určíme $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$, kam ještě můžeme dosadit [dle vzorce obdobného k (15.1)] $\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma)$, tedy $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$; po dosazení do (15.16) dostaneme právě (15.17). Další dva vztahy tohoto tvaru $p = \dfrac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\gamma)}$, $p = \dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$, plynou již z prvého cyklickou záměnou. Třetí vzorec (15.18) se dokazuje obvykle v planimetrii. Můžeme jej však okamžitě odvodit z (15.16). Jest totiž podle vzorců obdobných k (15.15),

$$\sin\gamma = 2\sin\tfrac{1}{2}\gamma\cos\tfrac{1}{2}\gamma = 2\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} =$$

$$= \frac{2}{ab}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ a tedy}$$

$$p = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{1}{2}ab\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

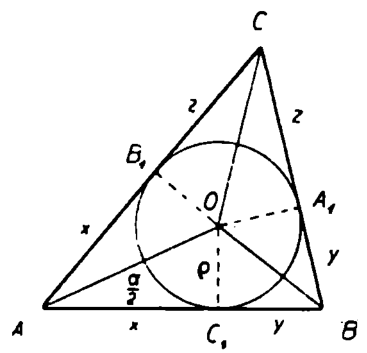
VĚTA 15.8. Pro poloměr ϱ kružnice trojúhelníku vepsané platí

$$\varrho = \frac{p}{s}, \tag{15.19}$$

$$\varrho = (s - a)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\alpha, \tag{15.20}$$

$$\varrho = \frac{a \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\beta + \gamma)}. \tag{15.21}$$

Důkaz. Prvý z těchto vzorců náleží do planimetrie a uvádíme jej pro úplnost. Odvodíme jej takto (obr. 77). Plošný obsah $\triangle ABC$ je rovný součtu plošných obsahů $\triangle ABO$, $\triangle BCO$ a $\triangle CAO$, t. j. $p = \frac{1}{2}a\varrho + \frac{1}{2}b\varrho + \frac{1}{2}c\varrho = \frac{1}{2}(a + b + c)\varrho = s\varrho$; odtud již plyne (15.19). Abychom odvodili další vztah (15.20), označme dotykové body kružnice vepsané na stranách a, b, c postupně A_1, B_1, C_1 (obr. 77). Pro úseky x, y, z, které tyto body určí na stranách a, b, c, platí zřejmě $x + y + z = s$ a tedy na př. $x = s - (y + z) = s - a$; podobně $y = s - b$, $z = s - c$. Dále již snadno z pravoúhlého $\triangle AOC_1$ najdeme $\varrho = x\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha = (s - a)\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$ a to je právě vztah (15.20). Další dva obdobné vztahy $\varrho = (s - b)\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta$ a $\varrho = (s - c)\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma$ odvodíme z tohoto cyklickou záměnou (nebo přímo z $\triangle OBC_1$ a $\triangle OCA_1$). Poznamenejme, že (15.20) jsme mohli odvodit také z (15.15), (15.18) a (15.19). Konečně třetí relaci (15.21) odvodíme z (15.20), a to takto: jest



Obr. 77.

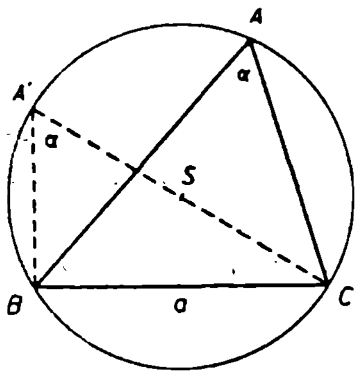
$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \frac{a}{s-a}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} = \frac{a}{s-a}\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Dosaďme tento výsledek do (15.20). Postupně najdeme
$$\varrho = (s-a)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = (s-a)\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = (s-a)\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{a}{s-a}$$
$\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma = \dfrac{a\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$, jak jsme chtěli ukázat. Ovšem se vzorcem (15.21) platí ještě dva obdobné, jež dostaneme cyklickou záměnou prvků.

Věta 15.9. Pro poloměr r kružnice trojúhelníku opsané platí

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}, \tag{15.22}$$

$$r = \frac{abc}{4p}. \tag{15.23}$$



Obr. 78.

Důkaz. Spojme bod C se středem S kružnice opsané; tato spojnice má s kružnicí mimo C ještě další společný bod, označme jej A'. a) Je-li úhel α ostrý (obr. 78), pak je bod $A' \neq B$; body A', B, C určují pravoúhlý $\triangle A'BC$, jehož úhel při vrcholu A je právě α. Z tohoto trojúhelníka najdeme

$\overline{A'C} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$; protože však $\overline{A'C} = 2r$, našli jsme $2r = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, odkud již plyne (15.22). b) Je-li α pravý, pak pro poloměr r okamžitě najdeme $r = \frac{1}{2}a$. Tedy zase platí (15.22), neboť pro $\alpha = 90^\circ$ je $\sin\alpha = 1$. c) Je-li α tupý úhel, pak v $\triangle BCA'$ je úhel při vrcholu A' rovný $\alpha_1 = 180^\circ - \alpha$. Pro $\overline{A'C} = 2r$ tedy najdeme $2r = \dfrac{a}{\sin\alpha_1} = \dfrac{a}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, z čehož je patrno, že i v tomto případě platí (15.22). Ke vzorci (15.22) existují ještě další dva obdobné, které z tohoto plynou cyklickou záměnou. Další vztah (15.23) odvodíme okamžitě z (15.22), kam dosadíme za $\sin\alpha$ ze vzorce $p = \frac{1}{2}bc$. $\sin\alpha$; jest totiž $\sin\alpha = \frac{2p}{bc}$ a tedy $r = \frac{a}{2} \cdot \frac{bc}{2p} = \frac{abc}{4p}$.

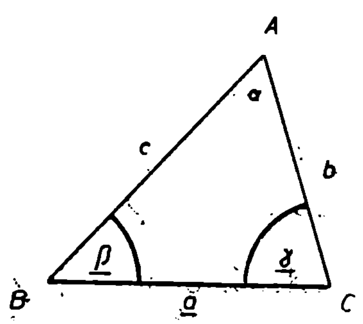
16. ŘEŠENÍ OBECNÝCH TROJÚHELNÍKŮ

Vět předchozího odstavce použijeme nyní k řešení obecných trojúhelníků. Především přihlédneme k nejdůležitějším základním úlohám, kdy trojúhelník je určen třemi nezávislými základními prvky. Jak je známo z plamimetrie, jsou jen čtyři případy určení trojúhelníka základními prvky: 1. stranou a dvěma úhly, 2. dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným, 3. třemi stranami a 4. dvěma stranami a úhlem ležícím proti větší z nich. Řešit takto určené trojúhelníky bude pro nás znamenat vypočítat zbývající hlavní prvky; kromě toho vždy připojíme výpočet plošného obsahu trojúhelníka.

Poznámka. Za každou úlohou jsou uvedeny dva řešené příklady, z nichž prvý je počítán jen užitím goniometrických tabulek, kdežto druhý logaritmicky.

ÚLOHA 16.1. Řešte trojúhelník, který je určen stranou a a úhly β, γ.

Řešení (obr. 79; dané prvky jsou podtrženy). Hledáme tedy α, b, c, p. Především můžeme okamžitě vypočítat α. Jest $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$. Dále určíme strany sinovou větou; v úměrách $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ a $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$ známe totiž vždy tři prvky, takže čtvrtý můžeme vypočítat. Jest



Obr. 79.

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)}, \; c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Plošný obsah p určíme podle (15.17), t. j. $p = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} =$ $= \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)}$, anebo také užitím již jedné vypočtené strany podle (15.16), tedy na př. $p = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$.

Je vždy důležité ještě uvést, jak smíme zadat dané prvky, aby skutečně existoval (a to jediný) trojúhelník z daných prvků; v našem případě platí pro dané prvky jediná samozřejmá podmínka: musí být $\beta + \gamma < 180°$.

Příklad 16.1. Řešte trojúhelník, je-li $a = 52$ cm, $\beta = 63°14'$, $\gamma = 57°43'$

Řešení. Jelikož je $\beta + \gamma = 63°14' + 57°43' = 120°57' <$ $< 180°$, je danými prvky trojúhelník skutečně určen.

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$; $\alpha = 180° - 120°57' = 59°3'$,

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}; \; b = \frac{52 \text{ cm} \,.\, \sin 63°14'}{\sin 59°3'} = \frac{52 \,.\, 0{,}893 \text{ cm}}{0{,}857} \doteq 54{,}2 \text{ cm},$$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}; \; c = \frac{52 \text{ cm} \,.\, \sin 57°43'}{\sin 59°3'} = \frac{52 \,.\, 0{,}845 \text{ cm}}{0{,}857} \doteq 51{,}3 \text{ cm},$$

$p = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$; $p = \frac{1}{2}52 \text{ cm} \,.\, 54{,}2 \text{ cm} \,.\, \sin 57°43' = \frac{1}{2}\, 52 \,.\, 54{,}2$ $.\, 0{,}845 \text{ cm}^2 \doteq 1190{,}8 \text{ cm}^2$.

Příklad 16.2. Řešte trojúhelník, je-li $a = 135{,}3$ m, $\beta =$ $= 48°50'32''$, $\gamma = 107°16'17''$

Řešení. Jest $\beta + \gamma = 156°6'49'' < 180°$ a tedy trojúhelník je danými prvky určen. Pro jednoduchost vynecháme při výpočtu označení *m*.

$\alpha = 180° - (\beta - \gamma)$; $\alpha = 180° - 156°6'49'' = 23°53'11''$.

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha};$$

$$\begin{aligned}
\log b &= \log a + \log\sin\beta - \log\sin\alpha,\\
\log b &= 2{,}13130\\
&\quad\ 9{,}87674 - 10\\
&\quad\ 10 \quad - \ 9{,}60737\\
\hline
&\quad\ 2{,}40067 \qquad\qquad b = 251{,}58 \text{ m},
\end{aligned}$$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \cos(\gamma - 90°)}{\sin\alpha};$$

$$\begin{aligned}
\log c &= \log a + \log\cos(\gamma - 90°) - \log\sin\alpha,\\
\log c &= 2{,}13130\\
&\quad\ 9{,}97996 - 10\\
&\quad\ 10 \quad - \ 9{,}60737\\
\hline
&\quad\ 2{,}50389 \qquad\qquad c = 319{,}07 \text{ m},
\end{aligned}$$

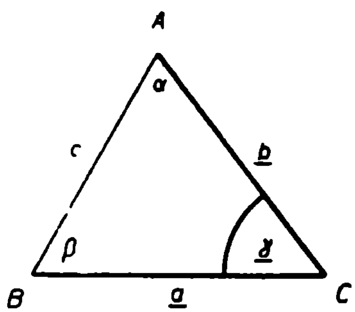
$$p = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} = \frac{a^2 \sin\beta \cos(\gamma - 90°)}{2 \sin\alpha};$$

$$\begin{aligned}
\log p &= 2 \log a + \log\sin\beta + \log\cos(\gamma - 90°) -\\
&\qquad\qquad - \log 2 - \log\sin\alpha,\\
\log p &= 4{,}26260\\
&\quad\ 9{,}87674 - 10\\
&\quad\ 9{,}97996 - 10\\
&\qquad\qquad - \ 0{,}30103\\
&\quad\ 10 \quad - \ 9{,}60737\\
\hline
&\quad\ 4{,}21090 \qquad\qquad \ldots\ p = 16252 \text{ m}^2.
\end{aligned}$$

Je velice užitečné nakonec se přesvědčit o správnosti výpočtu. Můžeme to učinit na př. tak, že na základě vypočtených prvků určíme prvky dané. V našem případě užijeme třeba 2. Mollweidova vzorce $a = (b + c)\dfrac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}(\gamma - \beta)}$; $a = 570{,}65 \cdot \dfrac{\sin 11°56'35''}{\cos 29°12'53''}$; snadno se přesvědčíme, že najdeme právě $a = 135{,}3$.

ÚLOHA 16.2: Řešte trojúhelník, který je určen dvěma stranami a, b a úhlem γ jimi sevřeným.

Řešení (obr. 80). Hledáme prvky α, β, c, p. Podle kosinové věty najdeme pro stranu c výraz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Další výpočet je již zřejmý. Známe totiž nyní všechny strany a jeden úhel; můžeme tedy zbývající úhly vypočítat ze sinové věty; pro $\sin\alpha$ a $\sin\beta$ platí $\sin\alpha = \dfrac{a\sin\gamma}{c}$, $\sin\beta = \dfrac{b\sin\gamma}{c}$ $\left(\text{anebo také } \sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}\right)$. Při výpočtu úhlů α a β z těchto vztahů je si třeba uvědomit, že jestliže na př. úhel α vyhovuje podmínce $\sin\alpha = m$ $\left(\text{kde } m = \dfrac{a\sin\gamma}{c}\right)$, pak téže podmínce vyhovuje úhel $\alpha_1 = 180° - \alpha$. Který z úhlů α, α_1 je skutečným řešením naší (jednoznačné) úlohy? K rozhodnutí této otázky použijeme známých vět z planimetrie: v trojúhelníku proti větší straně leží větší úhel (a obráceně: proti většímu úhlu leží větší strana), proti stejně velikým stranám leží stejně veliké úhly (a obráceně: proti stejně velikým úhlům leží stejně veliké strany). Konečně pro výpočet plošného obsahu užijeme vzorce $p = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Poznamenejme nakonec, že v tomto případě jsou dané prvky podrobeny jediné samozřejmé podmínce, musí totiž být $\gamma < 180°$.



Obr. 80.

Chceme-li úlohu řešit logaritmicky, pak je udaný postup nevýhodný, neboť při výpočtu strany a musíme sčítat a odčítat. Začněme raději s výpočtem úhlů α, β. Užijeme tangentové věty $(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, ze které najdeme $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \dfrac{a - b}{a + b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; tím určíme

$\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. K výsledku připojíme nám známý součet $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Máme tedy dvě rovnice pro α, β. Jejich sečtením dostaneme α, odečtením β. V trojúhelníku tedy již známe všechny základní prvky s výjimkou strany c, kterou určíme sinovou větou, na př. ze vztahu $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$. Plošný obsah počítáme jako dříve ze vzorce $p = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$.

Příklad 16.3. Řešte trojúhelník, je-li $a = 5{,}5$ cm, $b = 5{,}2$ cm, $\gamma \doteq 48°30'$.

Řešení. Užijeme při tom na př. čtyřmístných goniometrických tabulek. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$; $c^2 = 5{,}5^2 + 5{,}2^2 - 2 . 5{,}5 . 5{,}2 . \cos 48°30' = 30{,}25 + 27{,}04 - 2 . 5{,}5 . 5{,}2 . 0{,}6626 \doteq 19{,}39$, $c \doteq 4{,}403$,

$$\sin\alpha = \frac{a \sin\gamma}{c}; \quad \sin\alpha = \frac{5{,}5 . \sin 48°30'}{4{,}403} = \frac{5{,}5 . 0{,}7490}{4{,}403} \doteq$$
$$\doteq 0{,}9356,$$

tedy α je buď $69°20'$ nebo $180° - 69°20'$

$$\sin\beta = \frac{b \sin\gamma}{c}; \quad \sin\beta = \frac{5{,}2 . \sin 48°30'}{4{,}403} = \frac{5{,}2 . 0{,}7490}{4{,}403} \doteq$$
$$\doteq 0{,}8845,$$

odtud β je buď $62°11'$ nebo $180° - 62°11'$

Vzhledem k tomu, že pro strany v našem případě platí $a > b > c$, musí být také $\alpha > \beta > \gamma$. Snadno určíme, že tedy musí být $\alpha = 69°20'$, $\beta = 62°11'$ jak ostatně potvrzuje také součet $\alpha + \beta + \gamma = 69°20' + 62°11' + 48°30' = 180°1'$; chyba $1'$ vznikla zkracováním během výpočtu. $p = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$; $p = \frac{1}{2} . 5{,}5 . 5{,}2 . \sin 48°30' = \frac{1}{2}$ 5,5 5,2 . 0,749 $\doteq 10{,}71$.

Hledané prvky jsou tedy: $c \doteq 4{,}4$ cm, $\alpha = 69°20'$, $\beta = 62°10'$, $p \doteq 10{,}71$ cm².

Příklad 16.4. Řešte trojúhelník, je-li $a = 36{,}32$, $b = 27{,}15$, $\gamma = 51°23'40''$

Řešení. Budeme řešit logaritmicky; vypočteme nejprve úhly α, β užitím tangentové věty. Za tím účelem najdeme předem potřebné výrazy:

$$a - b = 36{,}32 - 27{,}15 = 9{,}17, \quad a + b = 36{,}32 + 27{,}15 = 63{,}47,$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\gamma = 90^\circ - 25^\circ 41' 50'' = 64^\circ 18' 10''$$

Z tangentové věty plyne $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \dfrac{a - b}{a + b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$;

odtud

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \log(a - b) + \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - \log(a + b),$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \log 9{,}17 + \log\operatorname{tg} 64^\circ 18' 10'' - \log 63{,}47 =$$

$$\begin{array}{rlr}
= 0{,}96237 & & \\
10{,}31766 - 10 & & \\
- \;1{,}80257 & & \\
\hline
9{,}47746 - 10 & & \\
714 & & 16^\circ 42' \\
\hline
32 & \ldots & 42'' \\
\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = & & 16^\circ 42' 42''.
\end{array}$$

Z rovnic $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 64^\circ 18' 10''$, $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 16^\circ 42' 42''$ dostaneme sečtením $\alpha = 81^\circ 52''$, odečtením $\beta = 47^\circ 35' 28''$

Stranu c určíme sinovou větou

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha};$$

$$\log c = \log a + \log\sin\gamma - \log\sin\alpha,$$

$$\log c = \log 36{,}32 + \log\sin 51^\circ 23' 40'' - \log\sin 81^\circ 52'' =$$

$$\begin{array}{l}
= 1{,}56015 \\
\;\; 9{,}89291 - 10 \\
10 \quad - \; 9{,}99462 \\
\hline
1{,}45844 \\
\quad 834 \ldots c = 28{,}737.
\end{array}$$

(Zkouška užitím vztahu $c = \dfrac{b \sin\gamma}{\sin\beta}$ dává $c = 28{,}735$).

Konečně pro plošný obsah p najdeme:

$$p = \tfrac{1}{2}ab \sin\gamma; \log p = \log a + \log b + \log\sin\gamma - \log 2,$$

$$\begin{array}{rl} \log p = & 1{,}56015 \\ & 1{,}43377 \\ & 9{,}89291 - 10 \\ & \quad - \ 0{,}30103 \\ \hline & 2{,}58580 \qquad\qquad p = 385{,}3. \end{array}$$

Hledané prvky jsou tedy:

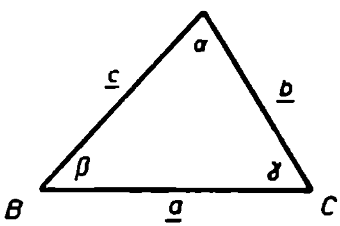
$\alpha = 81°52''$, $\beta = 47°35'28''$, $c \doteq 28{,}74$, $p \doteq 385{,}3$.

Úloha 16.3. Řešte trojúhelník, který je určen třemi stranami a, b, c.

Řešení (obr. 81). Hledáme úhly α, β, γ a plošný obsah p. Z kosinové věty pro úhly najdeme okamžitě

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \ \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



Obr. 81.

Plošný obsah určíme podle Heronova vzorce. Dané prvky nemůžeme dát zcela libovolně, musí vyhovovat známé podmínce, aby součet kterýchkoliv dvou z nich byl větší než zbývající třetí strana.

Jsou-li daná čísla více než dvojciferná, pak je výpočet tímto způsobem nevhodný. Raději použijeme vzorců (15.15) pro funkce polovičních úhlů trojúhelníka, jež se zvláště hodí k logaritmickému řešení dané úlohy. Obvykle se používá tangenty polovičních úhlů:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Počítáme-li všechny tři úhly, pak určení jejich součtu je současně dobrou zkouškou správnosti výpočtu. Plošný obsah najdeme jako dříve opět podle Heronova vzorce.

Příklad 16.5. Řešte trojúhelník, je-li $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

Řešení. Jelikož pro největší stranu platí $c < a + b$, je danými stranami trojúhelník určen.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos\alpha = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \,.\, 14 \,.\, 15} =$$

$$= \frac{196 + 225 - 169}{2 \,.\, 14 \,.\, 15} = \frac{252}{420} = 0{,}6,\ \alpha \doteq 53°8',$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \cos\beta = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \,.\, 13 \,.\, 15} =$$

$$= \frac{169 + 225 - 196}{2 \,.\, 13 \,.\, 15} = \frac{198}{390} = \frac{33}{65} \doteq 0{,}50769,\ \beta \doteq 59°29',$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}; \cos\gamma = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \,.\, 13 \,.\, 14} =$$

$$= \frac{169 + 196 - 225}{2 \,.\, 13 \,.\, 14} = \frac{140}{364} = \frac{5}{13} \doteq 0{,}38462,\ \gamma \doteq 67°23'.$$

Zkouška: $\alpha + \beta + \gamma = 53°8' + 59°29' + 67°23'' = 180°$ (není však nutné, aby při zkoušce součet byl právě 180°, vždyť zaokrouhluje na minuty).

Abychom mohli určit plošný obsah, najdeme nejdříve $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 21$, $s - a = 8$, $s - b = 7$, $s - c = 6$. Pak je $p = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$; $p = \sqrt{21 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6} = \sqrt{3^2 \,.\, 4^2 \,.\, 7^2} = 3 \,.\, 4 \,.\, 7 = 84$.

Příklad 16.6. Řešte trojúhelník, je-li $a = 25{,}47$, $b = 19{,}53$, $c = 17{,}85$.

Řešení. Dané strany určují skutečně trojúhelník, neboť pro největší stranu platí $a < b + c$. Buďeme řešit logaritmicky;

užijeme s výhodou vzorců pro poloviční úhly. K tomu účelu vypočteme nejdříve výrazy $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$; $s = \frac{1}{2}(25{,}47 + 19{,}53 + 17{,}85) = 31{,}425$, $s - a = 5{,}955$, $s - b = 11{,}895$, $s - c = 13{,}575$. Dále vyhledáme jejich logaritmy:

$$\log s = 1{,}49727,\ \log(s-a) = 0{,}77488,$$
$$\log(s-b) = 1{,}07537,\ \log(s-c) = 1{,}13274.$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}};$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}[\log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a)],$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}(1{,}07537 + 1{,}13274 - 1{,}49727 - 0{,}77488) = \tfrac{1}{2}\,.\,-0{,}06404 = -0{,}03202 = 9{,}96798 - 10,$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 42°53'23''.$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}};$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}[\log(s-a) + \log(s-c) - \log s - \log(s-b)],$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}(0{,}77488 + 1{,}13274 - 1{,}49727 - 1{,}07537) = \tfrac{1}{2}\,.\,-0{,}66502 = -0{,}33251 = 9{,}66749 - 10,$$

$$\tfrac{1}{2}\beta = 24°56'25''.$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}};$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}[\log(s-a) + \log(s-b) - \log s - \log(s-c)],$$

$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}(0{,}77488 + 1{,}07537 - 1{,}49727 - 1{,}13274) = \tfrac{1}{2}\,.\,-0{,}77976 = -0{,}38988 = 9{,}61012 - 10,$$

$$\tfrac{1}{2}\gamma = 22°10'13''.$$

Hledané úhly jsou tedy

$$\alpha = 85°46'46'',\ \beta = 49°52'50'',\ \gamma = 44°20'26''$$

Zkouška: $\alpha + \beta + \gamma = 85°46'46'' + 49°52'50'' + 44°20'26'' = 180°2''$; chyba $2''$ vznikla tím, že během výpočtu jsme vlastně při logaritmování a vyhledávání úhlů z daných logaritmů zaokrouhlovali.

Konečně určíme ještě plošný obsah podle Heronova vzorce:

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

$$\log p = \tfrac{1}{2}[\log s + \log(s-a) + \log(s-b) + \log(s-c)],$$

$$\log p = \tfrac{1}{2}(1{,}49727 + 0{,}77488 + 1{,}07537 + 1{,}13274) = \\ = \tfrac{1}{2} \,.\, 4{,}48026 = 2{,}24013$$

$$005 \ldots 173{,}83.$$

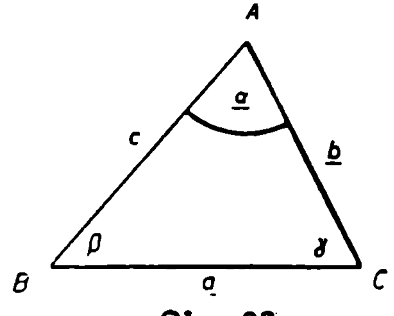
Plošný obsah je tedy $p = 173{,}83$.

Poznámka. Kdybychom chtěli poněkud zkrátit celý počet, pak bychom mohli s výhodou použít vzorců (15.19) a (15.20). Je totiž zřejmě $\varrho = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ a pak již podle (15.20) dostáváme jednoduché vyjádření

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\varrho}{s-a}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \frac{\varrho}{s-b}, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\varrho}{s-c}.$$

Stačí tedy najít nejprve $\log \varrho$ a pak již $\log \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$ atd. vypočteme poměrně rychle. Také plošný obsah p pak vypočteme snadno; podle (15.19) je $p = \varrho s$.

ÚLOHA 16.4. Řešte trojúhelník, který je určen dvěma stranami a úhlem proti větší z nich.



Obr. 82.

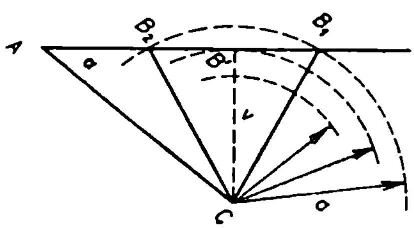
Řešení (obr. 82). Dané strany označme a, b a předpokládejme, že $a > b$, pak daný úhel musíme označit α. Hledáme prvky β, γ, c, p. Nejdříve určíme úhel β užitím sinové věty.

Jest $\sin\beta = \dfrac{b \sin\alpha}{a}$. Odtud již najdeme β. Dále je $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. Stranu c dostaneme zase užitím sinové věty, ať již ve tvaru $c = \dfrac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$ nebo $c = \dfrac{b \sin\gamma}{\sin\beta}$. Konečně pro plošný obsah p užijeme vzorce $p = \frac{1}{2}ab \sin\gamma$.

Je třeba zmínit se o výpočtu úhlu β. Z planimetrie je totiž známo, že existuje jediný trojúhelník určený danými prvky. Podmínkou $\sin\beta = m \left(\text{kde } m = \dfrac{b \sin\alpha}{a}\right)$ jsou však určeny dva různé (je totiž $m < 1$, neboť $\dfrac{b}{a} < 1$ a $\sin\alpha \leqq 1$) úhly z intervalu $(0°, 180°)$. Jeden z nich je ostrý, označme jej β (vyhledáme jej z tabulek), kdežto druhý β_1 je tupý: $\beta_1 = 180° - \beta$. Který z nich vyhovuje naší úloze? Ostrý úhel β! Je-li totiž v trojúhelníku nějaký úhel tupý, pak jistě leží tento úhel proti největší straně; podle předpokladu však strana b je menší než a, tedy nemůže proti b ležet tupý úhel. Dodejme ještě, že dané prvky můžeme zadat libovolně, ovšem musí být $\alpha < 180°$.

Místo úlohy 16.4 bývá často položena obecnější úloha: řešte trojúhelník, který je určen dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich. Provedeme rozbor. Dané strany označme a, b a daný úhel α. Jsou myslitelny tři případy: buď je $a > b$, nebo $a = b$, nebo $a < b$. Prvý případ je vlastně probrán úlohou 16.4. Druhý případ vyšetříme snadno. Je-li totiž $a = b$, pak musí být $\alpha = \beta$; jedná se tedy o rovnoramenný trojúhelník, který už umíme dál řešit. Pro úhel α platí nyní omezení $\alpha < 90°$.

Zbývá třetí případ, kdy $a < b$. Z planimetrie je známo, že v tomto případě, kdy je dán úhel proti menší straně, úloha buď 1. nemá řešení, nebo 2. má právě jedno, nebo 3. právě dvě řešení. V posledních dvou případech musí ovšem být daný úhel $\alpha < 90°$. Připomeňme krátce, jak se postupuje při planimetrickém řešení této úlohy (obr. 83). Sestrojíme úhel α o vrcholu A a na jedno rameno naneseme od vrcholu A stranu b, tím dostaneme vrchol C. Nyní opíšeme kružnici o středu C a poloměru a, který je podle předpokladu menší než b. Tato kružnice buď 1. nemá s druhým ramenem žádný bod společný a tedy neexistuje žádný trojúhelník, který by vyhovoval dané úloze, nebo 2. dotýká se druhého ramene úhlu α v bodě B', pak jediný pravoúhlý $\triangle AB'C$ řeší úlohu, nebo konečně 3. protíná druhé rameno úhlu α ve dvou různých bodech B_1 a B_2 a tedy v tomto případě existují právě dva trojúhelníky AB_1C a AB_2C, které řeší úlohu.



Obr. 83.

Naším úkolem je rozhodnout, jak *jen početně* z daných prvků $a < b$, α poznáme, který z těchto tří případů 1. $\div$ 3. nastane. Nechť vzdálenost bodu C od druhého ramene je v (obr. 83), potom $v = b \sin\alpha$ (jak plyne z pravoúhlého $\triangle AB'C$). Zřejmě nastane-li 1. případ, pak $a < v$, t. j. $a < b \sin\alpha$, nastane-li 2. případ, pak $a = v$, t. j. $a = b \sin\alpha$, konečně nastane-li 3. případ, pak $a > v$, t. j. $a > b \sin\alpha$. Důležité je, že platí také obráceně (a to je hledaný výsledek): jestliže $a < b \sin\alpha$, pak nastane 1. případ (neboť potom $\frac{b \sin\alpha}{a} > 1$ a tedy neexistuje žádný úhel β, pro který by $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$, neboť hodnota sinu nemůže být větší než 1). Jestliže $a = b \sin\alpha$, pak nastane 2. případ (existuje jediný úhel $\beta = 90°$ tak, že $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$, neboť potom $\frac{b \sin\alpha}{a} = 1$ a tedy $\sin\beta = 1$). Jestliže $a > b \sin\alpha$, pak nastává 3. případ (neboť potom existují ostrý úhel β_1 a tupý úhel $\beta_2 = 180° -$

$-\beta_1$ tak, že $\sin\beta_1 = \sin\beta_2 = \frac{b \sin\alpha}{a}$). Jak ve 2., tak ve 3. případě musí být daný úhel α ostrý, neboť v obou případech podle předpokladu $a < b$ musí být také $\alpha < \beta$ a to by při $\alpha \geqq 90°$ nebylo možné.

Příklad 16.7. Řešte trojúhelník, je-li $a = 150$, $b = 100$, $\gamma = 50°$.

Řešení. Je dán úhel proti větší straně a tedy existuje jediné řešení.

$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}; \sin\beta = \frac{100 \,.\, \sin 50°}{150} = \frac{100 \,.\, 0{,}76604}{150} =$$

$$= 0{,}51069, \beta = 30°43',$$

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta); \gamma = 180° - (50° + 30°43') = 99°17',$$

$$c = \frac{b \sin\gamma}{\sin\alpha}; \; c = \frac{100 \,.\, \sin 99°17'}{\sin 30°43'} = \frac{100 \,.\, \cos 9°17'}{\sin 30°43'} =$$

$$= \frac{100 \,.\, 0{,}98690}{0{,}51069} = 193{,}2.$$

(Zkouška: $c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$; $c = \frac{150 \,.\, \sin 99°17'}{\sin 50°} = \frac{150 \,.\, 0{,}98690}{0{,}76604} =$
$= 193{,}2$).

$p = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$; $p = \frac{1}{2}\, 150 \,.\, 100 \;\; \sin 99°17' = \frac{1}{2}\, 150 \;\; 100 \;\; 0{,}98690 = 7401{,}75$.

Příklad 16.8. Řešte trojúhelník, je-li $a = 172{,}4$, $b = 236{,}7$, $\alpha = 37°46'20''$

Řešení. Je dán úhel proti menší z daných stran a je tedy třeba nejprve porovnat a a $b \,.\, \sin\alpha$, abychom mohli rozhodnout, zda vůbec existuje řešení: $b \sin\alpha = 236{,}7 \sin 37°46'20'' \doteq 236{,}7 \,.\, 0{,}61 \doteq 144$. Protože $a > b \sin\alpha$ (neboť $172{,}4 > 144$), existují dvě řešení.

$\sin\beta = \dfrac{b \sin\alpha}{a}$ | $\log\sin\beta = \log b + \log\sin\alpha - \log a,$

$\log\sin\beta = \log 236{,}7 + \log\sin 37°46'20'' -$
$- \log 172{,}4 =$
$= 2{,}37420$
$9{,}78712 - 10$
$- \ 2{,}23654$

$\beta_1 = 57°14'43''$, $\quad 9{,}92478 - 10 \ \ldots 57°14'43''$

$\beta_2 = 180° - \beta_1; \beta_2 = 180° - 57°14'43'' = 122°45'17''.$

1. *řešení* (užijeme β_1):

$\gamma_1 = 180° - (\alpha + \beta_1); \gamma_1 = 180° - (37°46'20'' + 57°14'43'') =$
$= 180° - 95°1'3'' = 84°58'57'',$

$c_1 = \dfrac{a \sin\gamma_1}{\sin\alpha}$ | $\log c_1 = \log a + \log\sin\gamma_1 - \log\sin\alpha,$

$\log c_1 = \log 172{,}4 + \log\sin 84°58'57'' -$
$- \log\sin 37°46'20'' =$
$= 2{,}23654$
$9{,}99833 - 10$
$10 \quad - 9{,}78712$

$c_1 = 280{,}38, \quad 2{,}44775 \quad 280{,}38$

(Zkouška $c_1 = \dfrac{b \sin\gamma_1}{\sin\beta_1}$ vede k témuž výsledku).

$p_1 = \frac{1}{2}ab \sin\gamma_1; \log p_1 = \log 0{,}5 + \log a + \log b + \log\sin\gamma_1,$
$\log p_1 = \log 0{,}5 + \log 172{,}4 + \log 236{,}7 +$
$+ \log\sin 84°58'57'' = 0{,}69897 - 1 +$
$+ 2{,}23654 + 2{,}37420 + 9{,}99833 -$
$p_1 = 20325. \quad - 10 = 4{,}30804 \ldots 20325$

2. *řešení* (užijeme β_2):

$\gamma_2 = 180° - (\alpha + \beta_2); \gamma_2 = 180° - (37°46'20'' + 122°45'17'') =$
$= 19°28'23'',$

$c_2 = \dfrac{a \sin\gamma_2}{\sin\alpha}$ | $\log c_2 = \log a + \log\sin\gamma_2 - \log\sin\alpha,$

$\log c_2 = \log 172{,}4 + \log\sin 19°28'23'' -$
$- \log\sin 37°46'20'' =$

$$
\begin{array}{lll}
 & = 2{,}23654 & \\
 & 9{,}52292 - 10 & \\
 & \underline{10 \quad - \quad 9{,}78712} & \\
c_2 = 93{,}83, & 1{,}97234 & 93{,}83
\end{array}
$$

(Zkouška $c_2 = \dfrac{b \sin\gamma_2}{\sin\beta}$ vede k témuž výsledku).

$$
\begin{aligned}
p_2 &= \tfrac{1}{2}ab \sin\gamma_2; \log p_2 = \log 0{,}5 + \log a + \log b + \log\sin\gamma_2,\\
&\log p_2 = \log 0{,}5 + \log 172{,}4 + \log 236{,}7 +\\
&\quad + \log\sin 19°28'23'' = 0{,}69897 - 1 +\\
&\quad + 2{,}23654 + 2{,}37420 + 9{,}52292 - 10 =\\
p_2 = 6801{,}9. &\quad = 3{,}83263 \ldots 6801{,}9
\end{aligned}
$$

K základním úlohám 16.1 ÷ 16.4 je ovšem možno připojit celou řadu dalších úloh, kdy trojúhelník je určen jinými prvky než základními. Uveďme alespoň jednu takovou úlohu.

ÚLOHA 16.5. Řešte trojúhelník, který je určen plošným obsahem p a úhly β, γ.

Řešení. Pro plošný obsah p platí [dle (15.17)]

$p = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)}$; odtud najdeme $a = \sqrt{\dfrac{2p \sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}}$. Dále již postupujeme podle úlohy 16.1.

Příklad 16.9. Řešte trojúhelník, je li $p = 100$, $\beta = 35°$, $\gamma = 105°$.

Řešení. Ze vzorce (15.17) vypočteme $a = \sqrt{\dfrac{2p \sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta \sin\gamma}}$.

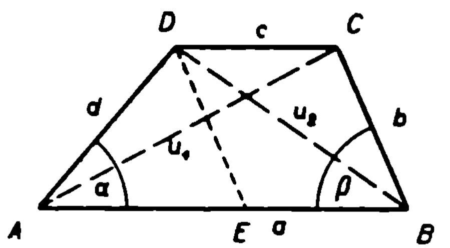
$$
\begin{aligned}
\log a &= \tfrac{1}{2}(\log 2 + \log p + \log\sin(\beta + \gamma) - \log\sin\beta -\\
&\quad - \log\sin\gamma),\\
\log a &= \tfrac{1}{2}(0{,}30103 + 9{,}80807 - 10 - 9{,}75859 + 10 -\\
&\quad - 9{,}98494 + 10) = \tfrac{1}{2} \,.\, 2{,}36557 \doteq 1{,}18278.\\
a &= 15{,}233.
\end{aligned}
$$

Užitím sinové věty najdeme ještě $b = 13{,}592$, $c = 22{,}890$.

Čtyřúhelníky a vůbec *mnohoúhelníky* řešíme užitím vhodných trojúhelníků, sestrojených z daných prvků. Ukázku této methody podáme v další úloze.

ÚLOHA 16.6. Určete úhlopříčky lichoběžníka, jsou-li dány jeho strany.

Řešení (obr. 84). Nechť v lichoběžníku $ABCD$ základny jsou $\overline{AB} = a$, $\overline{DC} = c$, ramena $\overline{BC} = b$, $\overline{AD} = d$ a nechť $a > c$. Vrcholem D veďme DE rovnoběžně s BC. V trojúhelníku AED známe strany $\overline{AE} = a - c$, $\overline{ED} = b$, $\overline{AD} = d$, můžeme tedy podle úlohy 16.3 určit jeho úhly $\alpha = \sphericalangle DAB$ a $\beta = \sphericalangle AED$. Úhlopříčky u_1 a u_2 pak již najdeme z trojúhelníků ABC a ABD, ve kterých známe dvě strany a úhel jimi sevřený; vyhledáme je tedy podle úlohy 16.2. Připomeňme, že nikoliv každé čtyři úsečky a, b, c, d určí lichoběžník. Nutně musí $b + d > a - c$ a buď $b - d < a - c$ (je-li $b \geqq d$), nebo $d - b < a - c$ (je-li $d \geqq b$), jak plyne z určenosti $\triangle AED$.



Obr. 84.

Příklad 16.10. Určete úhlopříčky lichoběžníka, jehož základny jsou 10, 3 a ramena 6, 3.

Řešení (obr. 84). Položme $a = 10$, $b = 3$, $c = 3$, $d = 6$; podmínka $b + d > a - c$ je splněna $(9 > 7)$, současně platí $d - b < a - c$ $(3 < 7)$, a proto lichoběžník z daných prvků existuje. $\triangle AED$ má strany $a' = \overline{DE} = b = 3$, $b' = \overline{AD} = d = 6$, $c' = \overline{AE} = a - c = 7$. Počítejme tangenty polovičních úhlů. Jest $s' = \frac{1}{2}(a' + b' + c') = 8$, $s' - a' = 5$, $s' - b' = 2$, $s' - c' = 1$.

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s' - b')(s' - c')}{s'(s' - a')}} = \tfrac{1}{10}\sqrt{5}; \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = 9{,}349485 - 10,\ \tfrac{1}{2}\alpha = 12°36'16'',$$

$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s' - a')(s' - c')}{s'(s' - b')}} = \frac{1}{4}\sqrt{5}; \mathrm{logtg}\frac{1}{2}\beta =$
$= 9{,}747425 - 10,\ \frac{1}{2}\beta = 29°12'21''$

(Zkouška: $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s' - a')(s' - b')}{s'(s' - c')}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$;
$\mathrm{logtg}\frac{1}{2}\gamma = 10{,}048455 - 10,\ \frac{1}{2}\gamma = 48°11'23''$.)

Dále užijeme dvakráte kosinové věty. Jsou-li u_1, u_2 úhlopříčky, pak $u_1{}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$ a $u_2{}^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$. Po dosazení našich hodnot najdeme $u_1 \doteq 8{,}8$, $u_2 \doteq 5{,}2$. Chceme-li výsledek stanovit přesněji, pak přímý výpočet podle kosinové věty je poněkud nevhodný. Užijeme této příležitosti, abychom ukázali, jak se dá vzorec $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ upravit k logaritmování. Podle (14.6) položíme $\cos\gamma = -1 + 2\cos^2\frac{1}{2}\gamma$. Dostaneme postupně $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(-1 + 2\cos^2\frac{1}{2}\gamma) = (a + b)^2 - 4ab\cos^2\frac{1}{2}\gamma = (a + b + m)(a + b - m)$, kde $m = 2\sqrt{ab}\,.\,\cos\frac{1}{2}\gamma$.

V našem případě tedy

$u_1 = \sqrt{(a + b + m)(a + b - m)}$; $m = 2\sqrt{ab}\cos\frac{1}{2}\beta =$
$= 2\sqrt{10\,.\,3}\cos 29°12'21''$,

$\log m = \log 2 + \log\cos 29°12'21'' + \frac{1}{2}\log 30 = 0{,}98054$; $m =$
$= 9{,}5618$.

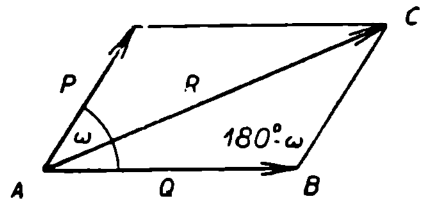
$u_1 = \sqrt{22{,}5618\,.\,3{,}4382}$; $\log u_1 = \frac{1}{2}(\log 22{,}5618 + \log 3{,}4382) =$
$u_1 = 8{,}8074$. $\qquad = 0{,}94485$

Úplně obdobně najdeme $u_2 = 5{,}2389$.

Konečně uveďme ještě jednu praktickou úlohu (z mechaniky).

Úloha 16.7. Najděte výslednici R dvou sil P, Q, které působí na hmotný bod, jestliže jejich úhel je ω.

Řešení. (Porovnejte s úlohou 9.14.) Najít výslednici R znamená určit její směr, smysl a velikost. V mechanice se ukazuje, že tyto hodnoty lze graficky najít z t. zv. *rovnoběžníka sil* (obr. 85). Tohoto rovnoběžníka užijeme jednak k početnímu vyjádření směru výslednice R (t. j. k výpočtu úhlů výslednice R se silami P, Q), jednak k výpočtu její velikosti. Zmíněné prvky určíme na př. z $\triangle ABC$, jehož strany AB a BC mají délky rovné velikostem sil P, Q a svírají úhel $180° - \omega$. Jedná se tedy v podstatě o řešení trojúhelníka daného dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným; řešíme podle úlohy 16.2. Přirozeně stále předpokládáme, že ani jedna z daných sil P, Q není nulová a že úhel ω není 0° ani 180°, neboť pak by se nejednalo o rovnoběžník.



Obr. 85.

Poznámka. Odvodíme si vzorec, jehož se v mechanice často používá pro určení velikosti výslednice R. Z $\triangle ABC$ plyne $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \,.\, \cos(180° - \omega)$; dosadíme-li sem $\cos(180° - \omega) = -\cos\omega$, vidíme, že platí:

Jestliže síly P, Q svírají úhel ω, pak pro velikost výslednice R platí

$$R^2 \doteq P^2 + Q^2 + 2PQ \cos\omega .$$

Příklad 16.11. Dány jsou síly $P = 84{,}5$ kg, $Q = 47{,}8$ kg, jež svírají úhel $\omega = 56°40'$. Jak veliká je výslednice R a jaké úhly svírá výslednice se silami P, Q?

Řešení (obr. 85). Jedná se o řešení $\triangle ABC$, pro který je $a = 84{,}5$, $c = 47{,}8$, $\beta = 180° - \omega = 123°20'$. Hledáme α, γ, b.

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \frac{a - c}{a + c}\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma);$$

$$\log\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \log(a - c) + \log\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma) - \log(a + c),$$

$$\begin{aligned}\log\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) &= \log 36{,}7 + \log\mathrm{tg}\,28°20' - \log 132{,}3 = \\ &= 1{,}56467 + 9{,}73175 - 10 - 2{,}12156 = \\ &= 9{,}17486 - 10,\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = 8°30'25'',$$

α, γ určíme z rovnic $\frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = 8°30'25''$, $\frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 28°20'$; $\alpha = 36°50'25''$, $\gamma = 19°49'35''$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}; \; b = \frac{84{,}5 . \sin 56°40'}{\sin 36°50'25''};$$

$$\begin{aligned} \log b &= \log 84{,}5 + \log\sin 56°40' - \log\sin 36°50'25'' = \\ &= 1{,}92686 + 9{,}92194 - 10 - 9{,}77785 + 10 = \\ &= 2{,}07095, \end{aligned}$$

$b = 117{,}75.$

Výslednice $R = 117{,}75$ kg svírá s P úhel $\gamma = 19°49'35''$ a s Q úhel $\alpha = 36°50'25''$.

Cvičení.

Vypočtěte zbývající z prvků α, β, γ, a, b, c, p trojúhelníka ABC, je-li dáno:

16.1. a) $a = 5$ cm, $\beta = 48°$, $\gamma = 59°$, b) $b = 123{,}5$ mm, $\alpha = 115°18'$, $\gamma = 37°32'$.

16.2. a) $a = 75$ mm, $b = 60$ mm, $\gamma = 28°45'$, b) $a = 213{,}5$ mm, $c = 172{,}5$ mm, $\beta = 118°40'25''$.

16.3. a) $a = 8{,}5$ cm, $b = 7{,}2$ cm, $c = 6{,}8$ cm, b) $a = 93{,}8$ cm, $b = 65{,}3$ cm, $c = 72{,}9$ cm.

16.4. a) $a = 65$ mm, $b = 46$ mm, $\alpha = 42°30'$, b) $b = 456{,}5$ mm, $c = 632{,}4$ mm, $\gamma = 62°15'45''$.

16.5. a) $b = 17{,}5$ cm, $c = 26{,}3$ cm, $\beta = 33°20'$, b) $a = 66{,}8$ cm, $b = 102{,}6$ cm, $\alpha = 42°30'$.

16.6. Vypočtěte poloměr kružnice vepsané a opsané $\triangle ABC$, je-li $a = 8$ cm, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$; narýsujte $\triangle ABC$ a přesvědčte se o správnosti výpočtu změřením příslušných délek.

16.7. Řešte trojúhelník, je-li plošný obsah $p = 750$ cm², $\alpha = 107°50'$, $\beta = 42°45'$.

16.8. Vypočtěte délky úhlopříček u_1, u_2 rovnoběžníka určeného stranami $a = 48{,}3$ mm, $b = 32{,}7$ mm, které svírají úhel $\alpha = 126°30'$.

16.9. V lichoběžníku je dána větší základna $a = 56{,}3$ cm, jeho výška $v = 20$ cm a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 48°$ ramen se základnou; najděte délku druhé základny, ramen a úhlopříček.

16.10. Síly $P = 350$ kg a $Q = 420$ kg působící na hmotný bod svírají úhel $\omega = 112°30'$. Najděte jejich výslednici.

16.11. Sílu $R = 200$ kg rozložte na dvě složky P, Q, z nichž prvá svírá s R úhel $\alpha = 45°$ a druhá úhel $\beta = 60°$.

16.12. Síla $R = 50$ kg je rozložena na dvě složky, z nichž prvá je $P = 45$ kg, druhá $Q = 30$ kg. Najděte úhly těchto složek s danou silou.

Zvláště rozsáhlé uplatnění nachází rovinná trigonometrie v t. zv. *nižší geodesii*, do které spadá několik úzce příbuzných oborů, z nichž nejběžnější je *praktická geometrie* (zeměměřictví), jež se zabývá měřením, výpočtem a zobrazováním menších částí zemského povrchu (pokud je lze pokládat za rovinné).

Z těchto úkolů praktické geometrie nás bude zajímat jen výpočet, lépe řečeno: řešení některých nejzákladnějších trigonometrických úloh, jež se v praktické geometrii vyskytují.

Poznámka. Bude ovšem na místě zmínit se alespoň o tom, jak praktická geometrie získává potřebná data k výpočtu, t. j. geometricky řečeno, prvky potřebné k řešení úlohy. V podstatě se jedná o *stanovení délek* a *úhlů*. K přesnému měření délek se užívá v zeměměřictví *měřických pásem* a *latí*; k přímému měření úhlů slouží různé *úhloměrné stroje*, z nichž nejpřesnější jsou *theodolity*; některé jejich druhy (na př. *universální stroje*) slouží ke stanovení nejen vodorovných, nýbrž i svislých úhlů.*)

V trigonometrických úlohách praktické geometrie se jedná v podstatě vždy o určení vzdálenosti dvou bodů A, B, kterou nelze zjistit přímým měřením. Jednoduché typy těchto úloh patří k nám již známým úlohám o trojúhelnících. Především jsou to úlohy o měření výšek.

ÚLOHA 17.1. Nechť na svislé přímce AB je bod B přístupný; má se určit výška $\overline{AB}$.

Řešení (obr. 86a). Na vodorovné rovině jdoucí bodem B si zvolíme vhodně libovolný další bod M. Změříme vzdálenost

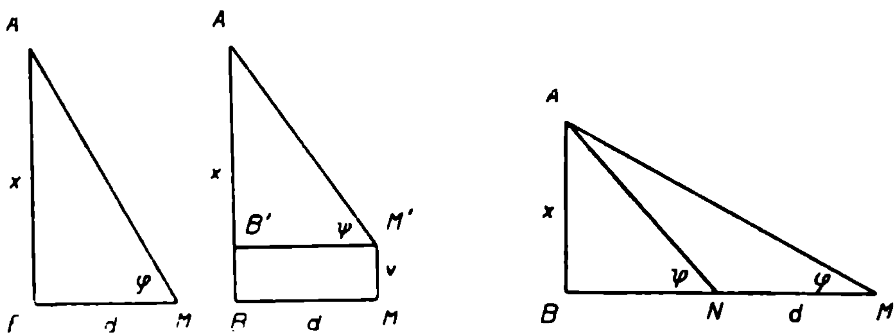
*) O základech praktické geometrie, o pomůckách a strojích, jichž se v zeměměřictví užívá ke stanovení délek a o methodách měření podrobně jedná knížka Pavla Potužáka: *Praktická geometrie I., II.*, Cesta k vědění, sv. 30 (1945) a sv. 49 (1948) (Praha, JČMF).

$d = \overline{BM}$ a úhel $\varphi = \sphericalangle AMB$. Pro $x = \overline{AB}$ pak platí (viz úloha 5.4)

$$x = d \operatorname{tg}\varphi. \tag{17.1}$$

Při praktickém měření úhlů používáme ovšem úhloměrného přístroje o výšce $\overline{M'M}$ (obr. 86b· výškou stroje rozumíme výšku vodorovné osy svislého dělícího kruhu, na kterém měříme svislé úhly). Ve skutečnosti měříme tedy úhel $\psi = \sphericalangle AM'B'$ Pro vzdálenost $x = \overline{AB}$ tedy najdeme (jest totiž $\overline{M'M} = \overline{B'B}$ a $\overline{B'M'} = \overline{BM}$)

$$x = \overline{AB'} + \overline{B'B} = d \operatorname{tg}\psi + v. \tag{17.2}$$



a) Obr. 86. b) Obr. 87.

Častější případ je však podán v další úloze.

Úloha 17.2. Nechť na svislé přímce AB je bod B nepřístupný; jest určit výšku $\overline{AB}$.

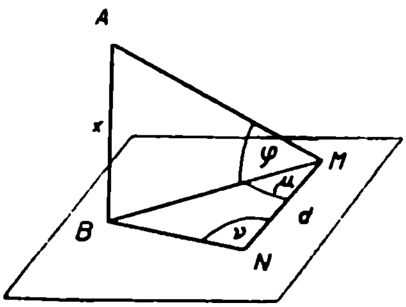
Řešení. Na vodorovné rovině procházející bodem B si zvolíme dva libovolné různé body M, N ($\overline{MN} = d$). Je možné dvojí: buď body M, N, B a) leží v přímce, nebo b) neleží v přímce.

V případě a) (pořadí uvedených bodů na přímce nechť je právě B, N, M — obr. 87) změříme úhly $\varphi = \sphericalangle AMB$ a $\psi = \sphericalangle ANB$; z $\triangle AMN$ podle sinové věty [$\overline{AN} : \overline{NM} =$

$= \sin\varphi : \sin(\psi - \varphi)]$ najdeme $\overline{AN} = \dfrac{d \sin\varphi}{\sin(\psi - \varphi)}$, a protože dále z pravoúhlého $\triangle\, ABN$ je $x = \overline{AN} \sin\psi$ (dle věty 7.2), dostaneme pro hledanou výšku

$$x = \frac{d \sin\varphi \sin\psi}{\sin(\psi - \varphi)}. \tag{17.3}$$

V případě b) (obr. 88) opět určíme úhel $\varphi = \sphericalangle AMB$, ale pak změříme úhly $\mu = \sphericalangle BMN$ a $\nu = \sphericalangle BNM$. Z $\triangle\, BMN$ plyne podle sinové věty $\overline{BM} : d = \sin\nu : \sin(\mu + \nu)$ a tedy $\overline{BM} = \dfrac{d \,.\, \sin\nu}{\sin(\mu+\nu)}$. Výšku x vyjádříme z pravoúhlého $\triangle\, ABM$; dostaneme $x = \overline{BM} \,.\, \mathrm{tg}\varphi$ (podle úlohy 5.4) a tedy



Obr. 88.

$$x = \frac{d \sin\nu \,\mathrm{tg}\varphi}{\sin(\mu + \nu)}. \tag{17.4}$$

Při skutečném měření svislých úhlů φ, ψ je samozřejmě zase třeba počítat s výškou úhloměrného stroje; tím se však již nebudeme podrobně zabývat.

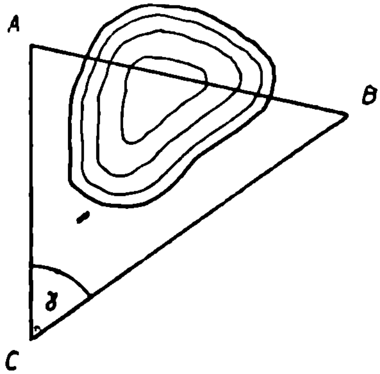
Další skupina úloh se týká případu, kdy přímka AB je vodorovná.

Úloha 17.3. Nechť body A, B jsou přístupné; jest určit vzdálenost $\overline{AB}$.

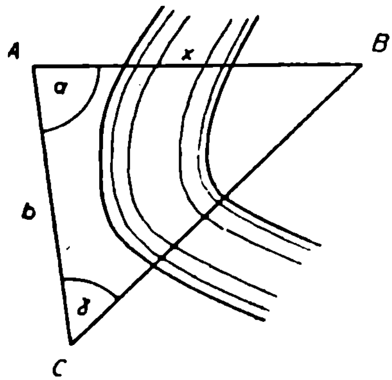
Řešení (obr. 89). Zvolme si na vodorovné rovině jdoucí body A, B další bod C tak, abychom mohli změřit vzdálenosti $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ a úhel $\gamma = \sphericalangle ACB$. Hledanou vzdálenost $x = \overline{AB}$ již určíme podle úlohy 16.2.

ÚLOHA 17.4. Nechť bod A je přístupný, bod B nepřístupný; jest určit vzdálenost $\overline{AB}$.

Řešení (obr. 90). Zvolíme si jako dříve další bod C tak, abychom mohli změřit vzdálenost $b = \overline{AC}$; dále změříme úhly $\alpha = \sphericalangle BAC$ a $\gamma = \sphericalangle ACB$ (tedy předpokládáme, že bod B je jak z bodu A tak z bodu C viditelný). Ze sinové věty plyne



Obr. 89.



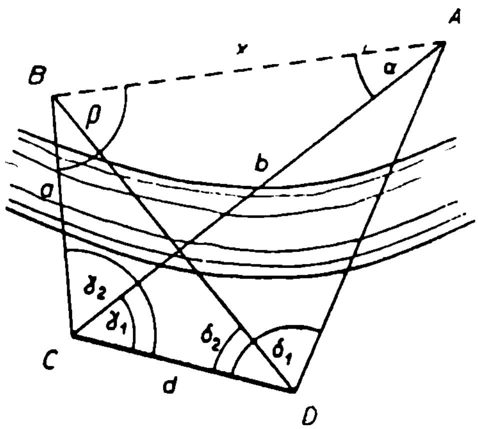
Obr. 90.

$$x = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}. \tag{17.5}$$

Poznámka. Tato úloha se v praktické geometrii vyskytuje velice často. Obvykle se totiž hledá ještě vzdálenost $\overline{CB}$. Úloha tedy zní: jest dána pevná vzdálenost (*základna*) $b = \overline{AC}$; máme určit vzdálenost třetího bodu B od koncových bodů A, C základny, jsou-li ještě změřeny úhly $\alpha = \sphericalangle BAC$ a $\gamma = \sphericalangle BCA$ v daných bodech. Říkáme pak, že bod B byl určen *protínáním vpřed.*

ÚLOHA 17.5. Nechť body A, B jsou nepřístupné; jest určit vzdálenost $\overline{AB}$.

Řešení (obr. 91). Úlohu zřejmě nemůžeme řešit jen pomocí trojúhelníka, nutno vzít v úvahu čtyřúhelník. Zvolíme si tedy (ovšem ve vodorovné rovině procházející body A, B) dva různé přístupné body C, D, aby s A, B tvořily čtyřúhelník, a to tak, aby z nich byly body A, B viditelné; změříme jednak základnu $d = \overline{CD}$ a jednak úhly $\gamma_1 = \sphericalangle ACD$, $\gamma_2 = \sphericalangle BCD$, $\delta_1 = \sphericalangle ADC$, $\delta_2 = \sphericalangle BDC$. To však znamená, že každý z trojúhelníků ACD a BCD je určen stranou a dvěma přilehlými úhly. Můžeme tedy užitím sinové věty z $\triangle\, BCD$ určit stranu $a = \overline{BC}$; stejným způsobem z $\triangle\, ACD$



Obr. 91.

najdeme stranu $b = \overline{AC}$. Pak v $\triangle\, ABC$ známe dvě strany a, b a úhel $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ při vrcholu C a určíme tedy již lehko zbývající stranu, t. j. hledanou vzdálenost $x = \overline{AB}$.

Chceme-li celý postup vypsat vzorci, dostáváme

$$a = \frac{d \sin\delta_2}{\sin(\gamma_2 + \delta_2)}, \quad b = \frac{d \sin\delta_1}{\sin(\gamma_1 + \delta_1)}. \tag{17.6}$$

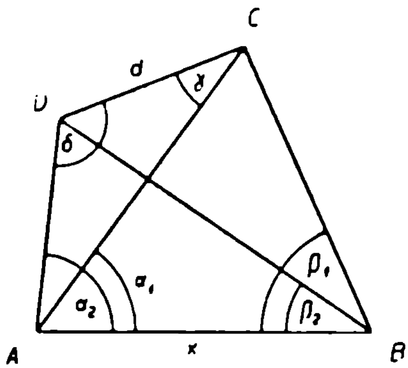
Označíme-li $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, pak z tangentové věty psané ve tvaru $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \dfrac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ vypočteme $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Jelikož však $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90° - \frac{1}{2}\gamma$, můžeme určit α i β. Pro stranu x tedy dostaneme

$$x = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}\left(= \frac{b \sin\gamma}{\sin\beta}\right). \tag{17.7}$$

Poznámka. Mohli jsme ovšem místo a, b najít $\overline{AD}$ a $\overline{BD}$ a x určit z $\triangle\, ABD$; tento způsob výpočtu může sloužit jako zkouška správnosti prvého řešení.

Úloha 17.6 (Hansenova úloha). Nechť body A, B jsou přístupné; jest určit vzdálenost $\overline{AB}$, známe-li vzdálenost $d = \overline{CD}$ dvou nepřístupných bodů C, D viditelných z bodů A, B.

Řešení (obr. 92). Samozřejmě předpokládáme, že body A, B, C, D tvoří čtyřúhelník. Poněvadž body C, D jsou z A i B viditelné, můžeme stanovit úhly $\alpha_1 = \sphericalangle\, BAC$, $\alpha_2 = \sphericalangle\, BAD$, $\beta_1 = \sphericalangle\, ABC$, $\beta_2 = \sphericalangle\, ABD$. Kdybychom ještě znali úhel $\delta = \sphericalangle\, ADC$ (nebo $\gamma = \sphericalangle\, ACD$), pak bychom z $\triangle\, ACD$ našli $\overline{AC} = \dfrac{d \sin\delta}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}$ (neboť $\sphericalangle\, CAD = \alpha_2 - \alpha_1$) a tedy pro $x = \overline{AB}$ by z $\triangle\, ABC$ plynulo $x = \dfrac{\overline{AC} . \sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin\beta_1}$, t. j. hledaná délka by byla



Obr. 92.

$$x = \frac{d \sin\delta \sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin\beta_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}. \tag{17.8}$$

Zbývá jen najít úhel δ. Především platí

$$\gamma + \delta = 180^\circ - (\alpha_2 - \alpha_1); \tag{17.9}$$

dále jest (podle sinové věty z $\triangle\, ACD$) $\sin\gamma : \sin\delta = \overline{AD} : \overline{AC}$.

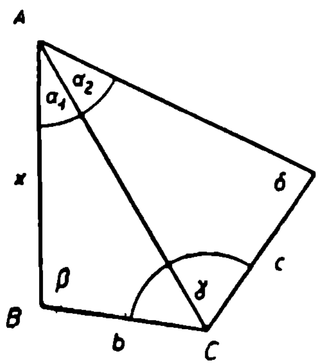
Z $\triangle\, ABD$ najdeme $\overline{AD} = \dfrac{x \sin\beta_2}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)}$, podobně z $\triangle\, ABC$ plyne $\overline{AC} = \dfrac{x \sin\beta_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}$; obóje dosazeno do předchozího poměru dává

$$\sin\gamma : \sin\delta = k, \tag{17.10}$$

kde $k = \dfrac{\sin\beta_2 \sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin\beta_1 \sin(\alpha_2 + \beta_2)}$ je známé číslo. Ze dvou rovnic (17.9) a (17.10) však už úhly γ a δ určíme jednoduchým obratem. Pišme totiž (17.10) ve tvaru $\sin\gamma : \sin\delta = k : 1$; pak z této úměry (podle známé věty o úměrách) plyne úměra $(\sin\gamma - \sin\delta) : (\sin\gamma + \sin\delta) = (k - 1) : (k + 1)$, což není nic jiného než vhodně upravená předchozí úměra; upravíme-li levou stranu poslední úměry podle (14.9), dostaneme $2\sin\frac{1}{2}(\gamma - \delta)\cos\frac{1}{2}(\gamma + \delta) : 2\sin\frac{1}{2}(\gamma + \delta)\cos\frac{1}{2}(\gamma - \delta) = (k - 1) : (k + 1)$, t. j. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma - \delta) = \dfrac{k - 1}{k + 1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma + \delta)$. V této rovnici však pravou stranu známe, a proto můžeme odtud vypočítat úhel $\frac{1}{2}(\gamma - \delta)$; řekněme, že najdeme $\frac{1}{2}(\gamma - \delta) = \sigma$. Pak pro úhly γ a δ máme jednak tento vztah a jednak vztah (17.9). Z nich už snadno vypočteme úhel δ potřebný k určení x podle vzorce (17.8).

Úloha 17.7 (Snellova úloha). Je dána poloha tří bodů B, C, D (t. j. známe strany $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ a úhel $\gamma = \sphericalangle BCD$). Jest určit polohu bodu A, z něhož jsou body B, C, D viditelné (t. j. jest určit jeho vzdálenosti od nich).

Řešení (obr. 93). Předpokládejme opět, že body A, B, C, D tvoří čtyřúhelník. Poněvadž body B, C, D jsou z bodu A viditelné, můžeme určit úhly $\alpha_1 = \sphericalangle BAC$ a $\alpha_2 = \sphericalangle CAD$. Hledejme na př. vzdálenost $x = \overline{AB}$. Kdybychom znali úhel $\beta = \sphericalangle ABC$, pak bychom z $\triangle ABC$ našli pro hledanou vzdálenost



Obr. 93.

$$x = \frac{b \sin(\alpha_1 + \beta)}{\sin\alpha_1}. \tag{17.11}$$

Je tedy třeba ještě určit úhel β. Za tím účelem vyjádříme dvojím způsobem $\overline{AC}$. Z $\triangle ABC$ najdeme $\overline{AC} = \frac{b \sin\beta}{\sin\alpha_1}$, podobně z $\triangle ACD$ dostaneme $\overline{AC} = \frac{c \sin\delta}{\sin\alpha_2}$. Z toho již plyne $\frac{b \sin\beta}{\sin\alpha_1} = \frac{c \sin\delta}{\sin\alpha_2}$, což můžeme napsat ve tvaru $\sin\beta : \sin\delta = k$, kde $k = \frac{c \sin\alpha_1}{b \sin\alpha_2}$ je známé číslo. Tím jsme našli jednu podmínku pro úhly β a δ; druhá podmínka je vyjádřená rovnicí (jak plyne ze čtyřúhelníka $ABCD$) $\beta + \delta = 360° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma)$. Z nalezených dvou podmínek však už umíme — methodou uvedenou v předchozí úloze — nalézt β a δ. Tím je úloha řešena, neboť pak pro x platí (17.11) a další vzdálenosti $\overline{AC}$ a $\overline{AD}$ již snadno vypočteme z $\triangle ABC$ a $\triangle ACD$.

Poznámka 1. Tomuto způsobu určení polohy bodu A se v zeměměřictví říká *protínání zpětné*. Při zpětném protínání se totiž měří úhly v hledaném bodě, kdežto při protínání vpřed v daných bodech (porovnejte s poznámkou za úlohou 17.4).

Poznámka 2. V praktické geometrii se určuje poloha libovolného bodu vzhledem k t. zv. *trigonometrické síti*; je to soustava vhodně volených pevných bodů (zvaných *trigonometrické* nebo také *triangulační body*), které lze spojit sítí trojúhelníků. Vycházejíce ze změřené pevné základny, můžeme postupným měřením úhlů (*triangulací*) vypočítat strany všech trojúhelníků trigonometrické sítě. Základní síť (jejíž strany u nás jsou přibližně 25 km dlouhé) se zjemňuje vkládáním nových trigonometrických bodů, až se dojde k t. zv. *katastrální trigonometrické síti*, jejíž trojúhelníky mají délku stran asi 2 km. Teprve tato síť slouží praktickým geometrům k podrobnému měření. Základní methody pro určení polohy bodu vyměřovaného objektu vzhledem k této síti jsou právě protínání vpřed a protínání zpětné (spolu s *kombinovaným protínáním*, při kterém se měří úhly jak v daných pevných bodech, tak ve vyměřovaných — hledaných — bodech).

Cvičení.

17.1. Jest určit výšku měřické (triangulační) věže, jejíž střed B základny je přístupný, jestliže theodolitem výšky $v = 1{,}25$ m, postaveným ve vzdálenosti $d = 14{,}5$ m od osy věže (na vodorovné rovině jdoucí bodem B), byl zaměřen její vrchol A pod úhlem $\psi = 43°30'$ (obr. 86b).

17.2. Určete výšku továrního komínu; hrot A jeho hromosvodu byl zaměřen ze dvou bodů M, N (jejichž spojnice je vodorovná a prochází středem B kruhové základny komína) pod úhly $\psi = 57°15'$ a $\varphi = 46°10'$ (při čemž body M a N leží na téže straně komínu); vzdálenost bodů M a N je $d = 13$ m (obr. 87).

17.3. Jaká je výška antenního stožáru (vysílací stanice), jehož pata je nepřístupná? Na vodorovné rovině jdoucí patou B jsou zvoleny body M, N ve vzdálenosti $d = 50$ m od sebe tak, že $\mu = \sphericalangle BMN = 38°25'12''$, $\nu = \sphericalangle BNM = 43°40'30''$; dále byl zaměřen z bodu M hrot A stožáru pod úhlem $\varphi = 47°56'24''$ (obr. 88).

17.4. Jaká je nepřístupná vzdálenost dvou přístupných míst (bodů) A, B, jestliže byly změřeny jejich vzdálenosti $\overline{AC} = 123{,}5$ m, $\overline{BC} = 163{,}7$ m od dalšího bodu C a změřen úhel $\gamma = \sphericalangle ACB = 67°42'12''$ (obr. 89)?

17.5. Určete vzdálenost dvou bodů A, B v terénu, z nichž B je nepřístupný, jestliže byla změřena vzdálenost $\overline{AC} = 35$ m dalšího bodu C od bodu A a určeny úhly $\sphericalangle CAB = 117°45'30''$, $\sphericalangle ACB = 43°50'24''$ (obr. 90).

17.6. Vypočtěte vzdálenost dvou nepřístupných bodů A, B, jestliže byla změřena základna $\overline{CD} = 100$ m a určeny úhly $\sphericalangle ACD = 47°25'$, $\sphericalangle BCD = 105°50'$, $\sphericalangle ADC = 115°46'$, $\sphericalangle BDC = 63°25'$ (obr. 91).

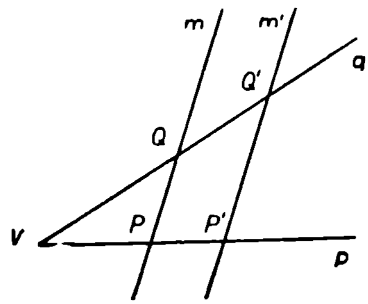
17.7. Najděte vzdálenost dvou nepřístupných bodů A, B, jestliže byla změřena základna $\overline{CD} = 160$ m (přitom však úsečka $\overline{CD}$ protíná úsečku $\overline{AB}$ — zakreslete si obrázek) a jsou-li úhly $\sphericalangle ACD = 42°15'$, $\sphericalangle BCD = 50°12'$, $\sphericalangle ADC = 37°55'$, $\sphericalangle BDC = 63°29'$.

17.8. Vyhledejte vzdálenost dvou přístupných bodů A, B, znáte-li základnu $\overline{CD} = 1863{,}5$ m a úhly $\sphericalangle BAC = 25°28'36''$, $\sphericalangle BAD = 139°6'50''$, $\sphericalangle ABC = 132°32'20''$, $\sphericalangle ABD = 31°50'42''$ (obr. 92).

17.9. Najděte vzdálenost trigonometrického bodu A od tří trigonometrických bodů B, C, D, je-li $\overline{BC} = 2100{,}5$ m, $\overline{CD} = 1875$ m, $\sphericalangle BCD = 114°22'45''$, $\sphericalangle BAC = 75°50'12''$, $\sphericalangle CAD = 49°43'30''$ (obr. 93).

18. DODATEK: DŮKAZY VĚT O PODOBNOSTI TROJÚHELNÍKŮ

Při důkazech se budeme opírat o jednu větu z planimetrie, jež jedná o čtyřech přímkách p, q, m, m' (obr. 94), z nichž dvě (označené p, q) jsou různoběžné a druhé dvě (přímky m, m') neprocházejí průsečíkem V přímek p, q a nejsou ani s jednou z nich rovnoběžné. Tedy m, m' protínají přímky p, q v bodech P, Q, P', Q', při čemž žádný z těchto bodů nesplývá s V. Zmíněné větě se říká *věta o úměrnosti úseček* a zní takto:



Obr. 94.

VĚTA 18.1. Jsou-li přímky m, m' rovnoběžné, pak úseky $\overline{VP}$, $\overline{VQ}$ a $\overline{VP'}$, $\overline{VQ'}$, jež tyto rovnoběžky vytínají na různoběžkách p, q, jsou úměrné, t. j. platí

$$\overline{VP} : \overline{VQ} = \overline{VP'} : \overline{VQ'}. \qquad (18.1)$$

Poznámka. Větu přejímáme bez důkazu z planimetrie, kde se často uvádí v jednodušším znění: rovnoběžky vytínají na různoběžkách úseky úměrné.

Dokážeme, že platí i obrácená věta:

VĚTA 18.2. Jestliže pro úseky $\overline{VP}$, $\overline{VQ}$ a $\overline{VP'}$, $\overline{VQ'}$, které dvě přímky m, m' vytínají na různoběžkách p, q, platí úměra (18.1), t. j.

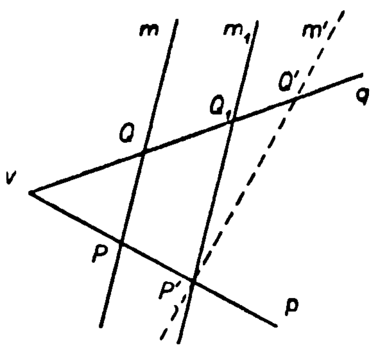
$$\overline{VP} : \overline{VQ} = \overline{VP'} : \overline{VQ'}, \qquad (18.2)$$

pak přímky m, m' jsou rovnoběžné.

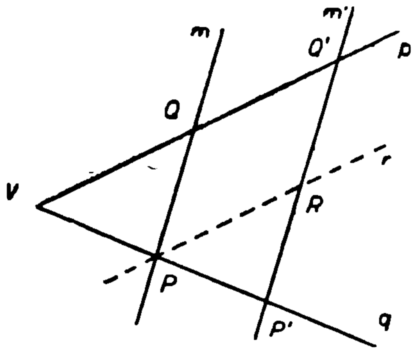
Důkaz. Zase se jedná o čtyři přímky p, q, m, m'; teď však předpokládáme, že pro úseky $\overline{VP}$, $\overline{VQ}$ atd. platí úměra (18.2) a chceme dokázat, že přímky m, m' jsou rovnoběžné. Veďme bodem P' (obr. 95) přímku m_1 rovnoběžnou s m. Ta protne přímku q v bodě Q_1. Různoběžky p, q jsou proťaty dvěma rovnoběžkami m a m_1, můžeme tedy užít věty 18.1; podle ní platí úměra

$$\overline{VP}:\overline{VQ}=\overline{VP'}\ \ \overline{VQ_1}. \tag{18.3}$$

Úměry (18.2) a (18.3) mají však prvé tři členy stejné, tedy i čtvrté členy se musí sobě rovnat, t. j. $\overline{VQ'}=\overline{VQ_1}$, a proto $Q'=Q_1$. To však říká, že přímka m' je totožná s m_1 (neboť má s přímkou m_1 dva body P' a Q_1 společné) a tedy je skutečně $m' \parallel m$, jak jsme měli dokázat.



Obr. 95.



Obr. 96.

Nyní již lehko dokážeme větu:

VĚTA 18.3. Jestliže přímky m, m' jsou rovnoběžné, pak úseky vyťaté těmito rovnoběžkami na přímkách p, q jsou úměrné úsekům vyťatým přímkami p, q na rovnoběžkách m, m', t. j. platí úměry

$$\overline{VP}:\overline{VP'}=\overline{PQ}:\overline{P'Q'},\quad \overline{VQ}:\overline{VQ'}=\overline{PQ}:\overline{P'Q'}. \tag{18.4}$$

Důkaz. Veďme bodem P rovnoběžku r s přímkou p (obr. 96). Ta protíná m' v bodě R. Z rovnoběžníka $PRQ'Q$ plyne

$$\overline{RQ'}=\overline{PQ}. \tag{18.5}$$

Uvažujme nyní různoběžky q, m' proťaté rovnoběžkami p, r; můžeme užít věty 18.1 (máme teď však jiné označení), podle které tedy platí $\overline{P'V}:\overline{P'P}=\overline{P'Q'}:\overline{P'R}$, t. j.

$\overline{VP'} : \overline{PP'} = \overline{P'Q'} : \overline{P'R}$. Tuto úměru můžeme upravit na úměru $\overline{VP'} : (\overline{VP'} - \overline{PP'}) = \overline{P'Q'} : (\overline{P'Q'} - \overline{P'R})$ (užili jsme při tom věty, že z úměry dostaneme zase úměru, když druhý člen dané úměry nahradíme rozdílem prvého a druhého členu a současně čtvrtý člen nahradíme rozdílem třetího a čtvrtého). Protože $\overline{VP'} - \overline{PP'} = \overline{VP}$ a $\overline{P'Q'} - \overline{P'R} = \overline{RQ'} = \overline{PQ}$ [podle (18.5)], můžeme poslední úměru přepsat na $\overline{VP'}\ \ \overline{VP} = \overline{P'Q'} : \overline{PQ}$; dostaneme tedy (po výměně druhého členu s prvním a současné výměně čtvrtého členu s třetím) právě prvou úměru v (18.4). Druhá úměra plyne již z první a z (18.1) (psané ve tvaru $\overline{VP} : \overline{VP'} = \overline{VQ} : \overline{VQ'}$). Úměry (18.4) se často nahrazují jedinou postupnou úměrou

$$\overline{VP} : \overline{VQ} : \overline{PQ} = \overline{VP'}\ \ \overline{VQ'} : \overline{P'Q'}. \tag{18.6}$$

Nyní, když jsme si odvodili pomocné věty o úměrnosti úseček, snadno dokážeme věty 2.2 a 2.3 o podobnosti trojúhelníků. Především dokážeme větu (porovnejte s větami 2.2):

VĚTA 18.4. Nechť $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ a $\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{B'C'}$ jsou odpovídající si strany podobných trojúhelníků ABC a $A'B'C'$; pak pro ně platí úměra

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'} : \overline{B'C'} \tag{18.7}$$

Důkaz (obr. 97). Protože trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné, jsou podle definice podobnosti jejich odpovídající úhly stejně veliké. Naneseme-li na ramena úhlu BAC úsečky $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ a $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$, a to tak, že $\overline{AB''}$ naneseme od vrcholu A na rameno AB a podobně $\overline{AC''}$ od A na rameno AC, pak $\triangle\ AB''C''$ a $\triangle\ A'B'C'$ jsou shodné. Dále je přímka $B''C''$ rovnoběžná s BC, neboť $\sphericalangle\ ABC = \sphericalangle\ AB''C''$ a různoběžky AB a AC jsou tedy proťaty dvěma rovnoběžkami BC a $B''C''$; můžeme použít věty 18.3, tedy platí úměra

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AB''} : \overline{AC''} : \overline{B''C''}.$$

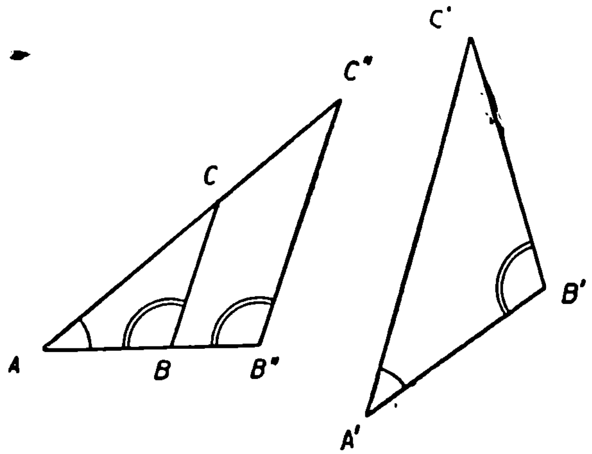
Jelikož však $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$ a $\overline{B''C''} = \overline{B'C'}$, plyne odtud dále

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'} : \overline{B'C'},$$

což však je právě vztah (18.7), který jsme chtěli dokázat.

Zbývá ještě dokázat větu (porovnejte s větami 2.3):

VĚTA 18.5. Jestliže pro strany $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ a $\overline{A'B'}$, $\overline{A'C'}$, $\overline{B'C'}$ trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ platí



Obr. 97.

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'} : \overline{B'C'}, \tag{18.8}$$

pak trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné.

Důkaz (obr. 97). Máme dány trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ a předpokládáme, že pro jejich strany platí postupná úměra (18.8). Naneseme na rameno AB úhlu BAC od vrcholu A úsečku $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$, podobně na AC od A úsečku $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$. Protože podle předpokladu (18.8) je $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'}$, je také $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AB''} : \overline{AC''}$; můžeme tedy použít věty 18.2, podle níž jsou pak přímky BC a $B''C''$ rovnoběžné. To však znamená, že podle věty 18.3 [přesněji řečeno pode úměry (18.6)] platí

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AB''} : \overline{AC''} : \overline{B''C''}.$$

Protože jsme zvolili $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ a $\overline{AC'} = \overline{A'C'}$, říká poslední úměra, že platí

$$\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'} : \overline{B''C''}.$$

Porovnáme-li nalezenou úměru s (18.8), vidíme, že obě postupné úměry se shodují v prvých pěti členech, musí tedy i poslední členy být sobě rovné, t. j. musí platit $\overline{B'C'} = \overline{B''C''}$. To však říká (vzhledem k tomu, že jsme již volili $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ a $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$, že odpovídající si strany $\triangle\, AB''C''$ a $\triangle\, A'B'C'$ jsou stejně veliké. Z toho však již plyne naše tvrzení, neboť $\triangle\, AB''C''$ a $\triangle\, A'B'C'$ jsou shodné a je tedy postupně $\measuredangle\, BAC = \measuredangle\, B''AC'' = \measuredangle\, B'A'C'$, $\measuredangle\, ABC = \measuredangle\, AB''C'' = \measuredangle\, A'B'C'$, což říká, že odpovídající si úhly v $\triangle\, ABC$ a $\triangle\, A'B'C'$ jsou stejně veliké, t. j. oba trojúhelníky jsou podobné, jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Pro podobnost trojúhelníků se v planimetrii odvozují ještě další věty, ale my jsme potřebovali dokázat jen věty 2.2 a 2.3, neboť jen těchto vět jsme používali při zavedení goniometrických funkcí.

19. ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ ZE CVIČENÍ

Poznámka. Výsledky jsou uváděny jen zaokrouhleně na přiměřený počet desetinných míst.

1.

1.1. $24°35'48''$. **1.2.** $c = 21{,}45$. **1.3.** 20.

2.

2.1. Jsou (položíme-li $\alpha' = \gamma_1$, $\beta' = \alpha_1$, pak $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$). **2.2.** Nejsou. **2.3.** $b' = 7{,}5\ cm$, $c' = 10\ cm$. **2.4.** Je (neboť $7{,}8 : 4{,}2 : 9 = 13 : 7 : 15$).

3.

3.1. Jsou (neboť $\beta = \varphi$). **3.2.** $a' = 25\,cm$, $b' = 60\,cm$. **3.3.** Jsou (neboť $2{,}7 : 12 = 13{,}5 : 60$).

4.

4.1. Sestrojí se pravoúhlý trojúhelník na př. o odvěsnách 1 *cm* a 10 *cm*; úhel proti straně 1 *cm* je hledaný. **4.2.** 2,8 *cm*. **4.3.** 1 *m*.

5.

5.1. Měřením a) 0,47, b) 2,54, v tabulkách a) 0,46631, b) 2,53865. **5.2.** $\mathrm{tg}\beta = \overline{AC} : \overline{BC} = b : a$. **5.3.** $\mathrm{tg}\alpha = 4$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{4}$. **5.4.** $\mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5}$. $\mathrm{tg}\beta = \frac{5}{12}$. **5.5.** Úhel α na př. leží při vrcholu A v pravoúhlém $\triangle\ ABC$, kde a) $a = 5{,}7\,cm$, $b = 10\,cm$, b) $a = 2{,}5\,cm$, $b = 1\,cm$. **5.6.** a) 0,75355, b) 6,31375, c) 0,27419, d) 1,22758, e) 0,44036, f) 1,97397. **5.7.** a) $\alpha = 18°$, b) $\beta = 66°$, c) $\gamma = 29°10'$, d) $\delta = 48°30'$, e) $\varphi = 33°22'$, f) $\psi = 53°8'$, g) $\lambda = 30°58'$, h) $\mu = 66°2'$. **5.8.** 11°19'. **5.9.** 33°41'. **5.10.** 4°17'. **5.11.** 56°19'. **5.12.** 58°. **5.13.** $a = 11{,}2\,cm$. **5.14.** $q = 6{,}5\,cm$. **5.15.** $a = 2{,}5\,cm$.

6.

6.1. Měřením a) 1,4, b) 0,47, v tabulkách a) 1,40195, b) 0,46631. **6.2.** $\mathrm{cotg}\varphi = \overline{PS} : \overline{QS}$, $\mathrm{cotg}\psi = \overline{QS} : \overline{PS}$. **6.3.** $\frac{12}{7}$. **6.4.** a) 2, b) 0,8, c) $\frac{1}{0{,}353} \doteq 2{,}83$. **6.5.** a) $\frac{15}{8}$, b) $\frac{2}{7}$, c) $\frac{1}{0{,}417} \doteq 2{,}4$. **6.6.** Úhel ω leží při vrcholu P v pravoúhlém $\triangle\ PQS$, jehož odvěsny $\overline{PS}$ a $\overline{QS}$ na př. jsou a) 3 *cm*, 4 *cm*, b) 9 *cm*, 4 *cm*, c) 16,53 *cm*, 10 *cm*. **6.7.** a) 2,47509, b) 0,24933, c) 2,41421, d) 0,17333, e) 1,14700, f) 0,96457. **6.8.** a) $\alpha = 18°$, b) $\beta = 67°$, c) $\lambda = 19°47'$, d) $\mu = 45°22'$, e) $\varphi = 33°41'$, f) $\psi = 68°12'$. **6.9.** 0,7. **6.10.** 18°26'. **6.11.** 39°48'. **6.12.** $\overline{RT} = 9{,}3\,cm$. **6.13.** 19,9.

7.

7.1. Měřením a) 0,34, b) 0,97, v tabulkách a) 0,34202, b) 0,97437. **7.2.** $\frac{b}{c}$. **7.3.** $\overline{MQ} : \overline{MV}$. **7.4.** $\frac{5}{7}$. **7.5.** Úhel α je na př. při vrcholu A pravoúhlého $\triangle\ ABC$, pro který a) $a = 3\,cm$, $c = 5\,cm$, b) $a = 65{,}3\,mm$, $c = 100\,mm$. **7.6.** a) 0,22495, b) 0,92718, c) 0,38537, d) 0,98986, e) 0,54147, f) 0,72417. **7.7.** a) $\alpha = 13°$, b) $\beta = 68°$, c) $\gamma = 17°27'$, d) $\delta = 48°35'$, e) $\varphi = 22°29'$, f) $\psi = 20°55'$. **7.8.** 40°32'. **7.9.** 6°54'. **7.10.** 10,3 *cm*. **7.11.** 26,7 *cm*. **7.12.** 5,395 *m*. **7.13.** 29,98 $cm \doteq 30\,cm$.

8.

8.1. a) Polovina úhlu 30°, měřením 0,26, v tabulkách 0,25882, b) středový úhel příslušející straně pravidelného pětiúhelníka, měřením 0,95, v tabulkách 0,95106. **8.2.** $\cos\lambda = \frac{\overline{LK}}{\overline{LM}}$, $\cos\mu = \frac{\overline{KM}}{\overline{LM}}$. **8.3.** 0,8. **8.4.** α je úhel při vrcholu A pravoúhlého $\triangle ABC$, kde na př. a) $b = 3\,cm$, $c = 5\,cm$, b) $b = 34{,}5\,mm$, $c = 100\,mm$. **8.5.** a) 0,97437, b) 0,54464, c) 0,71121, d) 0,13629, e) 0,94447, f) 0,34038. **8.6.** a) $\alpha = 38°$, b) $\beta = 81°$, c) $\xi = 18°12'$, d) $\eta = 66°25'$, e) $\zeta = 63°33'$, f) $\omega = 36°52'$. **8.7.** 0,353. **8.8.** 69°5′. **8.9.** 49°28′. **8.10.** 5,95 cm. **8.11.** 9,5 cm. **8.12.** 78,3 cm. **8.13.** 8,65 cm.

9.

9.1. a) $\beta = 68°30'$, $a = 36{,}65\,cm$, $b = 93\,cm$, $p = 1705\,cm^2$, b) $\beta = 32°30'$, $a = 15\,cm$, $b = 9{,}55\,cm$, $p = 71{,}8\,cm^2$, c) $\alpha = 70°$, $a = 12\,cm$, $b = 4{,}4\,cm$, $p = 26{,}33\,cm^2$. **9.2.** a) $\beta = 54°30'$, $b = 72{,}5\,cm$, $c = 89\,cm$, $p = 1874\,cm^2$, b) $\beta = 73°20'$, $b = 33{,}8\,mm$, $c = 117{,}9\,mm$, $p = 1912\,mm^2$, c) $\alpha = 40°48'$, $a = 78{,}5\,mm$, $c = 120{,}2\,mm$, $p = 3573\,mm^2$, d) $\beta = 18°5'$, $a = 19{,}3\,cm$, $b = 20{,}3\,cm$, $p = 60{,}8\,cm^2$. **9.3.** a) $\alpha = 40°7'$, $b = 34{,}4\,mm$, $p = 4991\,mm^2$, b) $\alpha = 41°40'$, $a = 5{,}5\,cm$, $p = 17{,}1\,cm^2$. **9.4.** a) $\alpha = 60°1'$, $c = 15\,cm$, $p = 48{,}75\,cm^2$, b) $\alpha = 66°56'$, $c = 70{,}9\,cm$, $p = 907{,}7\,cm^2$. **9.5.** a) $a = 3{,}2\,cm$, $b = 5{,}1\,cm$, $c = 6\,cm$, b) $a = 10{,}3\,cm$, $b = 41{,}3\,cm$, $c = 42{,}6\,cm$. **9.6.** a) $\alpha = 67°42'$, $b = 18{,}7\,cm$, $c = 49{,}3\,cm$, b) $\alpha = 45°35'$, $a = 214{,}3\,mm$, $c = 300\,mm$. **9.7.** a) $a = 6{,}3\,cm$, $b = 7{,}5\,cm$, b) $a = 2{,}52\,dm$, $b = 0{,}79\,dm$. **9.8.** a) $b = 6{,}3\,cm$, $\alpha = 40°37'$, b) $a = 4\,dm$, $\alpha = 17°45'$. **9.9.** a) $b = 10{,}9\,cm$, $p = 31{,}4\,cm^2$, b) $b = 41{,}7\,mm$, $p = 726{,}2\,mm^2$. **9.10.** a) $a = 34{,}4\,mm$, $p = 715{,}9\,mm^2$, b) $a = 11{,}15\,cm$, $p = 85{,}39\,cm^2$. **9.11.** $\alpha = 110°14'$, $p = 2767{,}1\,mm^2$. **9.12.** $\alpha = 36°52'$, $b = 15{,}8\,cm$, $p = 75\,cm^2$. **9.13.** $\alpha = 75°58'$, $a = 104{,}6\,mm$, $p = 3505{,}9\,mm^2$. **9.14.** 16,455 cm^2. **9.15.** 123°38′. **9.16.** 71,9 mm, 28,6 mm. **9.17.** 54°32′. **9.18.** 602,4 mm^2. **9.19.** 69,7 mm. **9.20.** a) $a = 7{,}64\,cm$, $\varrho = 5{,}26\,cm$, $p = 100{,}45\,cm^2$, b) $a = 6{,}18\,cm$, $\varrho = 9{,}51\,cm$, $p = 293{,}9\,cm^2$. **9.21.** a) $r = 5{,}76\,cm$, $\varrho = 5{,}19\,cm$, $p = 80{,}85\,cm^2$, b) $r = 5{,}88\,cm$, $\varrho = 5{,}43\,cm$, $p = 97{,}78\,cm^2$. **9.22.** a) $a = 14{,}53\,cm$, $r = 12{,}36\,cm$, $p = 363{,}27\,cm^2$, b) $a = 3{,}66\,cm$, $r = 4{,}22\,cm$, $p = 48{,}68\,cm^2$. **9.23.** a) $a = 7{,}62\,cm$, $r = 6{,}48\,cm$, $\varrho = 5{,}25\,cm$, b) $a = 4{,}55\,cm$, $r = 5{,}95\,cm$, $\varrho = 5{,}49\,cm$. **9.24.** 30,44 cm. **9.25.** 50,04 cm. **9.26.** 38°38′. **9.27.** 3,2 cm. **9.28.** a) 54°44′, b) 70°32′. **9.29.** $R = 80$ kg, $\omega = 36°27'$. **9.30.** $P_1 = 88{,}566\,kg$, $P_2 = 46{,}433\,kg$. **9.31.** $P_1 = 297{,}65\,kg$, $P_2 = 113{,}91\,kg$. **9.32.** a) 6268 mm, b) 6726,5 mm. **9.33.** 64 t. **9.34.** 18370 m^3. **9.35.** 133,9 m^2.

10.

10.1. a) 9,82761 — 10, 9,86936 — 10, 9,95825 — 10, 10,04175 — 10, b) 9,96878 — 10, 9,56343 — 10, 10,40534 — 10, 9,59466 — 10, c) 9,72732 — 10, 9,92719 — 10, 9,80013 — 10, 10,19987 — 10, d) 9,97583

— 10, 9,51129 — 10, 10,46454 — 10, 9,53546 — 10. **10.2.** a) 33°25′, b) 72°36′, c) 11°20′, d) 46°27′40″, e) 25°7′47″. **10.3.** a) 37°48′, b) 58°22′, c) 71°18″, d) 31°2′43″. **10.4.** a) 27°36′, b) 78°21′, c) 23°18′, d) 58°23′, e) 37°55′32″, f) 54°32′48″, g) 79°34′22″. **10.5.** a) 31°13′, b) 78°13′, c) 68°13′, d) 28°18′10″, e) 47°47′14″, f) 39°24′32″.

11.

11.1. a) $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{5}{12}$, b) $\frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{n}$, $\frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$, $\frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{m}$. **11.2.** a) $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, b) $\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{q}$, $\frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p}$, $\frac{p}{\sqrt{q^2 - p^2}}$. **11.3.** a) $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{1}{5}\sqrt{5}$, $\sin\varphi = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, b) $\operatorname{tg}\psi = \frac{1}{k}$, $\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}$, $\cos\psi = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}$.

13.

13.1. a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{4}{3}$ nebo $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = +\frac{3}{4}$, $\operatorname{cotg}\alpha = +\frac{4}{3}$, b) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ nebo $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$. **13.2.** a) (90°, 180°), b) (180°, 270°), c) (270°, 360°). **13.3.** a) 0,76604, b) — 0,32557, c) — 2,99743, d) — 1,82026, e) — 0,54293, f) 0,69779, g) 2,87700, h) — 0,57735. **13.4.** a) 0,42262, b) — 0,5, c) 1,22758, d) 1. **13.5.** a) — 0,5, b) $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711$, c) $-\sqrt{3} = -0{,}86603$. **13.6.** a) $\alpha_1 = 40°47'$, $\alpha_2 = 139°13'$, b) $\alpha_1 = 226°34'$, $\alpha_2 = 313°26'$. **13.7.** a) $\alpha_1 = 54°43'$, $\alpha_2 = 305°17'$, b) $\alpha_1 = 150°42'$, $\alpha_2 = 209°18'$. **13.8.** a) $\alpha_1 = 42°20'$, $\alpha_2 = 222°20'$, b) $\alpha_1 = 126°30'$, $\alpha_2 = 306°30'$. **13.9.** a) $\alpha_1 = 38°40'$, $\alpha_2 = 218°40'$, b) $\alpha_1 = 128°40'$, $\alpha_2 = 308°40'$.

14.

14.1. $-\frac{69}{221}$, $\frac{219}{221}$. **14.2.** 3, $\frac{1}{3}$. **14.3.** $\sin 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \doteq 0{,}2588192$, $\cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \doteq 0{,}9659258$, $\operatorname{tg} 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \doteq 0{,}2679492$. **14.4.** $\frac{840}{841}$, $\frac{41}{841}$, $\frac{840}{41}$, $\frac{41}{840}$. **14.5.** a) $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, b) $4\sin\alpha\cos\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$. **14.6.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\sqrt{\frac{5}{3}}$. **14.7.** a) $\sqrt{2}\cos(\alpha - 45°)$, b) $\sqrt{2}\sin(\alpha - 45°)$. **14.8.** $-\operatorname{cotg}\alpha$. **14.9.** a) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$, b) $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$.

16.

16.1. a) $\alpha = 73°$, $b = 3{,}9\,cm$, $c = 4{,}5\,cm$, $p = 16{,}6\,cm^2$, b) $\beta = 27°10'$, $a = 244{,}6\,mm$, $c = 164{,}8\,mm$, $p = 92\,cm^2$. **16.2.** a) $c = 36{,}5\,mm$, $\alpha = 99°4'$, $\beta = 52°11'$, $p = 1082{,}2\,mm^2$, b) $b = 332{,}7\,mm$, $\alpha = 34°16'$, $\gamma = 27°3'35''$, $p = 16156\,mm^2$. **16.3.** a) $\alpha = 74°42'22''$, $\beta = 54°47'28''$, $\gamma = 50°30'14''$ (tedy chyba 4″), $p = 23{,}6\,cm^2$, b) $\alpha = 85°18'4''$, $\beta = 43°56'$, $\gamma = 50°45'56''$, $p = 2372{,}2\,cm^2$. **16.4.** a) $\beta = 28°33'44''$, $\gamma = 108°56'16''$, $c = 91\,mm$, $p = 1414{,}1\,mm^2$, b) $\alpha = 78°1'41''$, $\beta = 39°42'34''$, $a = 699\,mm$, $p = 1412{,}1\,cm^2$. **16.5.** a) 1. *řešení*: $\gamma_1 = 55°40'20''$, $\alpha_1 = 90°59'40''$, $a_1 = 31{,}8\,cm$, $p_1 = 230{,}09\,cm^2$, 2. *řešení*: $\gamma_2 = 124°19'40''$, $\alpha_2 = 26°20'20''$, $a_2 = 14{,}13$ cm, $p_2 = 102{,}1\,cm^2$, b) neexistuje (neboť $a = 66{,}8 < 69{,}3 = b \sin\alpha$). **16.6.** $r = 4{,}14\,cm$, $\varrho = 1{,}93\,cm$. **16.7.** $a = 65{,}44\,cm$, $b = 46{,}67$ cm, $c = 33{,}77\,cm$. **16.8.** 72,7 *mm*, 39 *mm*. **16.9.** $b = 26{,}75\,cm$, $r_1 = 23{,}09\,cm$, $r_2 = 26{,}91\,cm$, $u_1 = 43{,}20\,cm$, $u_2 = 49{,}02\,cm$. **16.10.** $R = 431{,}7$ kg, $\sphericalangle PR = 63°59'52''$, $\sphericalangle QR = 48°30'8''$. **16.11.** $P = 179{,}3\,kg$, $Q = 146{,}4\,kg$. **16.12.** $\sphericalangle RP = 36°20'10''$, $\sphericalangle RQ = 62°43'12''$.

17.

17.1. 15 *m*. **17.2.** 41 *m*. **17.3.** 38,6 *m*. **17.4.** 163,4 *m*. **17.5.** 76,8 *m*. **17.6.** 412,9 *m*. **17.7.** 189 *m*. **17.8.** 412,1 *m*. **17.9.** $\overline{AB} = 1330{,}7\,m$, $\overline{AC} = 1983{,}1\,m$, $\overline{AD} = 2389{,}5\,m$.

20. VZORCE ROVINNÉ TRIGONOMETRIE

Poznámka. V tomto přehledu jsou uvedeny jen nejpotřebnější vzorce. Vzorce uvedené v závorkách nebyly v textu odvozovány. Místo „trigonometrická funkce“ budeme stručně říkat „funkce“.

A. GONIOMETRIE

1. *Definiční vzorce goniometrických funkcí*:

a) ostrého úhlu (obr. 98):

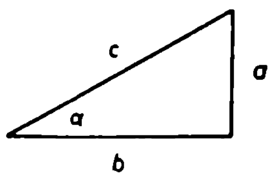
$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a},\ \sec\alpha = \frac{c}{b},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a};$$

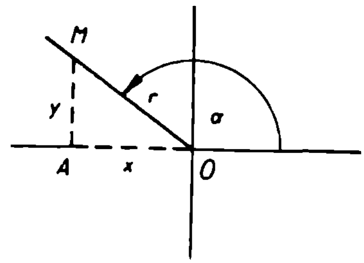
b) obecného úhlu (obr. 99):

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\ \cos\alpha = \frac{x}{r},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y},\ \sec\alpha = \frac{r}{x},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y}.$$



Obr. 98.



Obr. 99.

2. *Základní vztahy mezi funkcemi:*

$$\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\alpha = 1,\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

3. *Vyjádření funkce jinou funkcí:*

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha},\quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}},$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{cotg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{cotg}^2\alpha}},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{cotg}\,\alpha},$$

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}, \quad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}, \quad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

4. *Hodnoty funkcí pro* 0°, 30°, 45°, 60°, 90°:

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cotg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

5. *Hodnoty funkcí pro* 0°, 90°, 180°, 270°, 360°:

	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tg	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
cotg	$+\infty$	0	$\mp\infty$	0	$-\infty$

6. *Znaménka hodnot funkcí v jednotlivých kvadrantech*:

	I.	II.	III.	IV.
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tg	+	—	+	—
cotg	+	—	+	—

7. *Vztahy mezi funkcemi*

a) (doplňkových) úhlů α a $90° - \alpha$:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha, \quad \mathrm{cotg}(90° - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha;$$

b) úhlů α a $90° + \alpha$:

$$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(90° + \alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha, \quad \mathrm{cotg}(90° + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha;$$

c) (výplňkových) úhlů α a $180° - \alpha$:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha, \quad \mathrm{cotg}(180° - \alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha;$$

d) úhlů α a $180° + \alpha$:

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha.$$
$$\mathrm{tg}(180° + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha. \quad \mathrm{cotg}(180° + \alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha;$$

e) úhlů α a $270° - \alpha$:

$$(\sin(270° - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(270° - \alpha) = \mathrm{cotg}\,\alpha, \quad \mathrm{cotg}(270° - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha);$$

f) úhlů α a $270° + \alpha$:

$$(\sin(270° + \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(270° + \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(270° + \alpha) = -\mathrm{cotg}\,\alpha, \quad \mathrm{cotg}(270° + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha);$$

g) úhlů α a $-\alpha$:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha;$$

8. *Periodičnost goniometrických funkcí:*

$$\sin(n\,.\,360° + \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(n\,.\,360° + \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(n\,.\,180° + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{cotg}(n\,.\,180° + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha,$$

n celé číslo;

9. *Funkce součtu a rozdílu úhlů α, β:*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\left(\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \pm \operatorname{cotg}\alpha}\right).$$

10. *Funkce dvojnásobného úhlu 2α vyjádřené funkcemi úhlu α:*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \quad \left(\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}\right).$$

11. *Další vztahy mezi funkcemi úhlů 2α a α* (plynoucí ze vzorce $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$):

$$(\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$$
$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha, \quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha).$$

12. *Funkce úhlu α vyjádřené funkcemi polovičního úhlu* $\frac{1}{2}\alpha$ (důsledek vzorců 10):

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \cos\alpha = \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}.$$

13. *Další vztahy mezi funkcemi úhlů α a $\frac{1}{2}\alpha$* (důsledek vzorců 11):

$$\cos\alpha = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - 1, \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha, \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

14. *Funkce polovičního úhlu $\frac{1}{2}\alpha$ vyjádřené funkcemi úhlu α*:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad \left(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right).$$

15. *Funkce úhlu α vyjádřené funkcemi úhlu 2α* (důsledek vzorců 14):

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}}.$$

16. *Součet a rozdíl funkcí úhlů α a β vyjádřený součinem nebo podílem funkcí*:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta),$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$
$$\left(\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\right.$$
$$\left.\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\right).$$

17. *Součet funkcí tří úhlů α, β, γ, je-li $\alpha + \beta + \gamma = 180°$*:

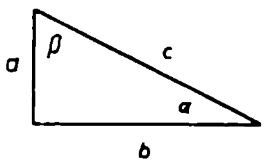
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma + 1),$$
$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

B. TRIGONOMETRIE

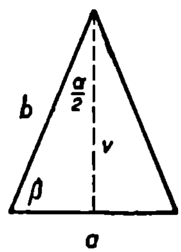
α) *Pravoúhlý trojúhelník* (obr. 100):

$$a = c\sin\alpha,\ a = c\cos\beta,\ a = b\,\mathrm{tg}\alpha,\ a = b\,\mathrm{cotg}\beta,\ a = \sqrt{c^2 - b^2},$$
$$b = c\cos\alpha,\ b = c\sin\beta,\ b = a\,\mathrm{cotg}\alpha,\ b = a\,\mathrm{tg}\beta,\ b = \sqrt{c^2 - a^2},$$
$$c = \frac{a}{\sin\alpha},\ c = \frac{a}{\cos\beta},\ c = \frac{b}{\cos\alpha},\ c = \frac{b}{\sin\beta},\ c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

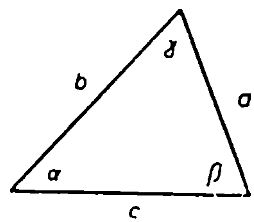
$$p = \tfrac{1}{4}c^2\sin 2\alpha,\ p = \tfrac{1}{2}b^2\,\mathrm{tg}\alpha,\ p = \tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{cotg}\alpha,$$
$$p = \tfrac{1}{4}c^2\sin 2\beta,\ p = \tfrac{1}{2}b^2\,\mathrm{cotg}\beta,\ p = \tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{tg}\beta.$$



Obr. 100.



Obr. 101.



Obr. 102.

β) *Rovnoramenný trojúhelník* (obr. 101):

$$a = 2b\sin\tfrac{1}{2}\alpha,\quad a = 2b\cos\beta,$$
$$b = \frac{a}{2\sin\frac{1}{2}\alpha},\quad b = \frac{a}{2\cos\beta},$$
$$v = \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha,\ v = \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\beta,\ v = b\cos\tfrac{1}{2}\alpha,\ v = b\sin\beta,$$
$$p = \tfrac{1}{4}a^2\,\mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha,\ p = \tfrac{1}{4}a^2\,\mathrm{tg}\beta,\ p = \tfrac{1}{2}b^2\sin\alpha,\ p = \tfrac{1}{2}b^2\sin 2\beta.$$

γ) *Obecný trojúhelník* (obr. 102):

1. *Sinová věta*:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

2. *Kosinová* (Carnotova) *věta*:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

3. *Tangentová* (Neperova) *věta*:

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta),$$
$$(b + c) : (b - c) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma),$$
$$(c + a) : (c - a) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma + \alpha) : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha).$$

4. *Mollweidovy vzorce* (Cagnoliho rovnice):

$$(a + b) : c = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) : \sin\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$(a - b) : c = \sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) : \cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$(b + c) : a = \cos\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) : \sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$(b - c) : a = \sin\tfrac{1}{2}(\beta - \gamma) : \cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$(c + a) : b = \cos\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) : \sin\tfrac{1}{2}\beta,$$
$$(c - a) : b = \sin\tfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) : \cos\tfrac{1}{2}\beta.$$

5. *Vzorce pro poloviční úhly trojúhelníka*:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \cos\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}},$$
$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

6. *Výšky trojúhelníka*:

$$v_a = b\sin\gamma,\quad v_a = c\sin\beta,$$
$$v_b = c\sin\alpha,\quad v_b = a\sin\gamma,$$
$$v_c = a\sin\beta,\quad v_c = b\sin\alpha.$$

7. *Poloměr ϱ kružnice trojúhelníku vepsané*:

$$\varrho = \frac{p}{s},$$

$$\varrho = (s-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha,\ \varrho = (s-b)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta,\ \varrho = (s-c)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$(\varrho = s\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma),$$
$$\varrho = \frac{a\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)},\ \varrho = \frac{b\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)},\ \varrho = \frac{c\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$
$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

8. *Poloměr r kružnice trojúhelníku opsané:*

$$r = \frac{abc}{4p},$$

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha},\ r = \frac{b}{2\sin\beta},\ r = \frac{c}{2\sin\gamma}.$$

9. *Plošný obsah p trojúhelníka*:

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \text{(Heronův vzorec)},$$
$$p = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma,\ p = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta,\ p = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

$$p = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)},\ p = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\gamma)},\ p = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

°	sin	tg	cotg	cos	°
0	0,000	0,000	∞	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
°	cos	cotg	tg	sin	°

°	sin	tg	cotg	cos	°
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
°	cos	cotg	tg	sin	°

OBSAH

I. část.

Str.

Předmluva 3
1. Úvod 5
2. Podobnost trojúhelníků 8
3. Podobnost pravoúhlých trojúhelníků 12
4. Úkos, stoupání 15
5. Tangens ostrého úhlu 20
6. Kotangens ostrého úhlu 38
7. Sinus ostrého úhlu 46
8. Kosinus ostrého úhlu 53
9. Řešení pravoúhlého trojúhelníka 61
10. Logaritmy goniometrických funkcí 77
11. Vztahy mezi goniometrickými funkcemi ostrého úhlu...... 84

II. část.

12. Definice goniometrických funkcí obecného úhlu 90
13. Podrobnější vlastnosti goniometrických funkcí obec. úhlu .. 105
14. Součtové (a rozdílové) věty pro goniometrické funkce 116
15. Základní věty pro řešení obecných trojúhelníků........... 125
16. Řešení obecných trojúhelníků 135
17. Užití v praktické geometrii 154
18. Dodatek: důkazy vět o podobnosti trojúhelníků 163
19. Řešení příkladů ze cvičení 167
20. Vzorce rovinné trigonometrie 171

Třímístná tabulka hodnot goniometrických funkcí pro úhly od 0° do 90° 180

Brána k vědění *svazek* 25

Doc. Dr Alois Urban

TRIGONOMETRIE

Vydalo Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952 — Šéfredaktor Dr Miroslav Střída — Odborný redaktor Miroslav Fuka — Literární redaktorka Věra Pašková — Z nové sazby písmem Extended vytiskla a knihařsky zpracovala Státní tiskárna n. p., závod 05 (Prometheus), Praha VIII — 1. vydání, náklad 3300 výtisků (1—3300) — 301 03/2 — 45971/51/7/III/1 — 119 — 1% — Sazba 1. VIII. 1951 — Tisk 17. 1. 1952 — 5,75 plánovacích archů — 9,61 autorských archů — 9,88 vydavatelských archů — 184 stran, 102 obrázků — Papír 221-07, 70×100 cm, 80 g

Cena brož. 96 Kčs

DT 514