# Oddělitelnost množin

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

# ODDĚLITELNOST MNOŽIN

59

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAROSLAV MORÁVEK
MILAN VLACH

# Oddělitelnost množin

PRAHA 1987
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

# PŘEDMLUVA

Čtenář už zajisté řešil některé jednoduché rovnice, nerovnice, soustavy rovnic a pravděpodobně i soustavy nerovnic. Značná část této knížky je věnována řešení úloh, jejichž nedílnou součástí je řešení soustav tzv. lineárních nerovnic (popřípadě rovnic), tj. soustav nerovnic, které lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m,
\end{aligned}$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou neznámé a $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$, $b_1, b_2, \ldots b_m$ jsou daná čísla[1]). Jedním ze základních teoretických prostředků, které nám umožní dokázat řadu důležitých tvrzení, je věta o oddělitelnosti konvexních mnohostěnů, jejíž obsah můžeme na tomto místě čtenáři přiblížit pouze tím, řekneme-li, že v rovině pro každé dva konvexní mnohoúhelníky, které nemají společné body,

[1]) Všechna čísla, se kterými se v této knížce setkáme, budou čísla reálná, a budeme proto přívlastek reálný vynechávat.

existuje taková přímka, že uvažované mnohoúhelníky leží v opačných polorovinách touto přímkou určených, tj., že uvažované mnohoúhelníky jsou touto přímkou odděleny.

Tato věta, kterou uvádíme v obecném případě bez důkazu, je spolu s dalšími nutnými pojmy vyložena ve druhé kapitole. První kapitola má přípravný charakter — připomínáme v ní některé pojmy a výsledky známé ze středoškolského studia a uvádíme některé nové pojmy, nezbytné k dalšímu výkladu, zvláště pak pojem $n$-rozměrného prostoru. Bohužel není v této knížce možné věnovat se podrobněji geometrii vícerozměrných prostorů; naštěstí můžeme odkázat čtenáře na knížku prof. Karla Havlíčka *Prostory o čtyřech a více rozměrech*, která vyšla jako 12. svazek v edici *Škola mladých matematiků*. Dále se v knížce vyskytl — i když jen okrajově — pojem konvexní množiny. Pro hlubší seznámení s tímto pojmem lze čtenáři vřele doporučit knihu doc. Jana Vyšína *Konvexní útvary*, 9. svazek zmíněné edice.

Poslední, nejrozsáhlejší kapitola je věnována užití získaných teoretických výsledků v různých oblastech matematiky, které už mají velmi blízko k praktickým aplikacím.

Tato knížka je dalším pokusem zařadit do sbírky *Škola mladých matematiků* zpracování tématu, které výrazně přesahuje oblast středoškolské matematiky. Z toho také vyplývá způsob zpracování, který se liší od mnoha předcházejících knížek, jež byly většinou sbírkami řešených úloh.

# 1. kapitola

# PŘÍPRAVNÉ ÚVAHY

## 1.1. Lineární nerovnice

Nejprve si připomeneme několik známých pojmů a postupů. Řešme například tuto soustavu čtyř nerovnic o dvou neznámých $x$, $y$:

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -x + 2y &\leqq -4, \\ x &\geqq 0, \\ y &\geqq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

tj. hledejme takovou uspořádanou dvojici čísel $x$, $y$, po jejichž dosazení do (1) za neznámé $x$, $y$ dostaneme platnou soustavu nerovností. Poslední dvě nerovnice soustavy (1) nám říkají, že čísla $x$, $y$ mají být nezáporná; proto zpravidla místo o řešení soustavy (1) hovoříme o nezáporném řešení soustavy:

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -x + 2y &\leqq -4. \end{aligned} \tag{2}$$

Množinu všech nezáporných řešení soustavy (2) můžeme geometricky znázornit v rovině způsobem, který je běžně znám ze střední školy.

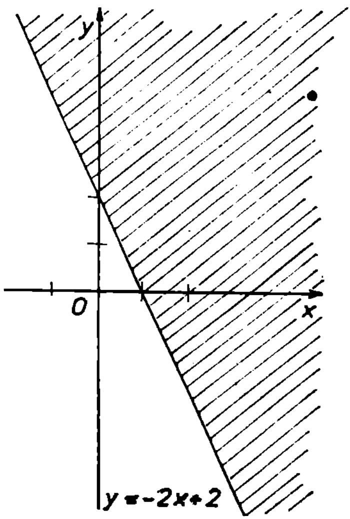
Jsou-li $x$, $y$ souřadnice bodu v rovině (v pevně zvolené pravoúhlé soustavě souřadnic), pak všechny body $(x, y)$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnici

$$-2x - y \leqq -2, \tag{3}$$

leží na jedné straně od přímky, jejíž rovnice je

$$y = -2x + 2. \tag{4}$$

Snadno také zjistíme, na které straně; stačí dosadit do (3) souřadnice libovolného bodu roviny, neležícího na

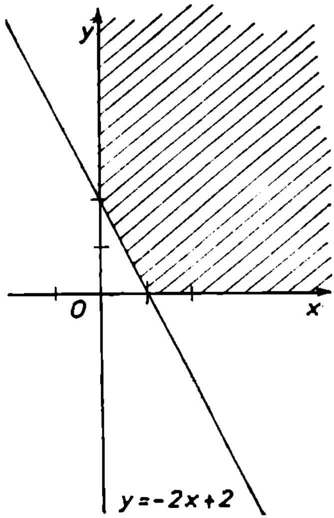



Obr. 1.

přímce (4), např. souřadnice počátku soustavy souřadnic, tj. $x = 0$, $y = 0$. Odtud vidíme, že první nerovnici soustavy (2) vyhovují všechny body ležící na přímce (4) a všechny body ležící na opačné straně od přímky (4), než leží počátek soustavy souřadnic.

Množinu všech řešení první nerovnice soustavy (2) lze tedy znázornit šrafovanou polorovinou (obr. 1). Nezáporná řešení pak budou znázorněna tou částí této poloroviny, která leží v prvním kvadrantu (obr. 2).

Stejným způsobem zjistíme, že body, znázorňující ne-

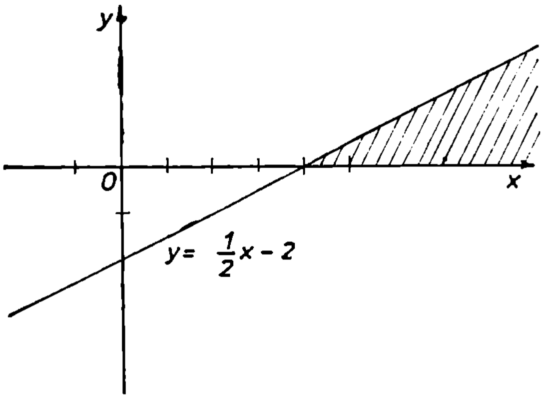



Obr. 2.

záporná řešení druhé nerovnice soustavy (2), leží na opačné straně od přímky

$$y = \frac{1}{2} x - 2,$$

než leží počátek soustavy souřadnic, nebo na ní (obr. 3). Nezáporná řešení soustavy (2) jsou pak znázorněna body, které znázorňují zároveň nezáporná řešení první nerovnice i druhé nerovnice soustavy (2) (tj. body šrafované plochy na obr. 3). Z obr. 3 je patrné, že množina bodů




Obr. 3.

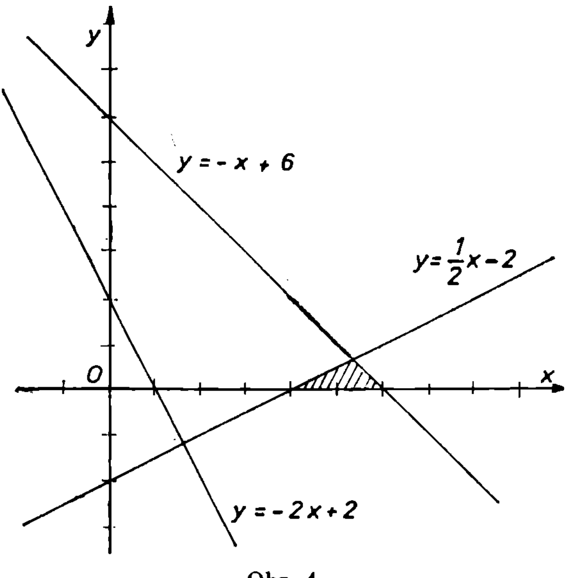
znázorňujících nezáporná řešení soustavy (2) není omezená.[1]

[1]) Množinu $A$ bodů roviny nazýváme *omezenou*, jestliže existují taková čísla $a$, $b$, že pro každý bod množiny $A$ o souřadnicích $(x, y)$ platí $|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$.

Přidáme-li k soustavě (2) nerovnici

$$x + y \leqq 6,$$

bude množina znázorňující množinu všech nezáporných řešení této nové soustavy omezená (viz šrafovaná plocha na obr. 4).

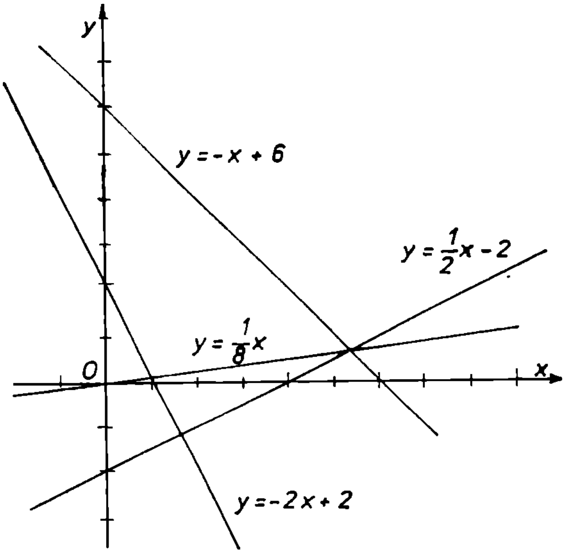



Obr. 4.

Přidáme-li ještě nerovnici

$$x - 8y \leqq 0,$$

bude mít vzniklá soustava pouze jediné řešení, znázorněné bodem o souřadnicích $\left(\frac{16}{3}, \frac{2}{3}\right)$ (viz obr. 5).




Obr. 5.

Přidáme-li nakonec ještě nerovnici

$$2x + y \leqq 2,$$

dostaneme soustavu, která nemá nezáporné řešení.

Zjistili jsme tedy na příkladech, že soustava lineárních nerovnic o dvou neznámých (tj. nerovnic, které mají tvar $ax + by \leqq c$) nemusí mít žádné nezáporné řešení, nebo může mít jediné nezáporné řešení, nebo může mít nekonečně mnoho nezáporných řešení; v posledním případě může být množina bodů roviny znázorňujících tato řešení buď omezená, nebo neomezená.

O tom, že poslední z uvedených soustav, tj. soustava

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -x + 2y &\leqq -4, \\ x + y &\leqq 6, \\ x - 8y &\leqq 0, \\ 2x + y &\leqq 2, \end{aligned} \tag{5}$$

nemá nezáporné řešení, jsme se mohli velmi snadno přesvědčit takto: Vynásobíme-li druhou nerovnici třiceti a poslední nerovnici dvaceti, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -2x - y &\leqq -2, \\ -30x + 60y &\leqq -120, \\ x + y &\leqq 6, \\ x - 8y &\leqq 0, \\ 40x + 20y &\leqq 40. \end{aligned} \tag{6}$$

Soustavy (5) a (6) mají zřejmě stejnou množinu nezáporných řešení. Avšak soustava (6) nemá nezáporné řešení, neboť kdyby ho měla, bylo by toto řešení i nezáporným řešením nerovnice

$$10x + 72y \leqq -76, \tag{7}$$

která vznikne sečtením všech nerovnic soustavy (6). Nerovnost (7) však zřejmě nemá nezáporné řešení.

Podobného postupu můžeme užít i v případě soustav o jiném počtu rovnic a neznámých. Vyšetřujme např. tuto soustavu čtyř nerovnic o třech neznámých $x$, $y$, $z$.

$$\begin{aligned} 5x - y - z &\leqq 1, \\ -10x + 10y - z &\leqq -3, \\ -2x - y + 10z &\leqq -4, \\ 7x + y + 5z &\leqq 2. \end{aligned} \tag{8}$$

Vynásobíme-li první a poslední nerovnici číslem 2, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 10x - 2y - 2z &\leqq 2, \\ -10x + 10y - z &\leqq -3, \\ -2x - y + 10z &\leqq -4, \\ 14x + 2y + 10z &\leqq 4. \end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovnic dostaneme nerovnici

$$12x + 9y + 17z \leqq -1,$$

která zřejmě nemá nezáporné řešení, a tedy ani původní soustava (8) nemá nezáporné řešení.

Pozorný čtenář si ještě všiml, že uvedený postup je speciálním případem obecnějšího postupu. Dříve než tento postup vyložíme pro případ obecné soustavy čtyř tzv. lineárních nerovnic o třech neznámých, zavedeme si nové označení, které se nám později v mnohém vyplatí.

Místo abychom označili neznámé písmeny $x$, $y$, $z$, označíme je po řadě symboly $x_1$, $x_2$, $x_3$; pro koeficient, jímž je v první nerovnici násobena první, resp. druhá, resp. třetí neznámá, užijeme symbolu se dvěma indexy, např. $a_{11}$, resp. $a_{12}$, resp. $a_{13}$; podobně symboly $a_{21}, a_{22}, a_{23}$ budou po řadě označovat koeficienty u neznámých $x_1$, $x_2$, $x_3$ ve druhé nerovnici; je už zřejmé, jak budou označeny koeficienty v ostatních nerovnicích. Pravou stranu první nerovnice označíme $b_1$, druhé nerovnice $b_2$, třetí a čtvrté nerovnice $b_3$ a $b_4$.

Na základě této dohody můžeme obecnou soustavu čtyř lineárních nerovnic o třech neznámých $x_1$, $x_2$, $x_3$ zapsat takto:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\leqq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_2 &\leqq b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 &\leqq b_4. \end{aligned} \tag{9}$$

Položíme-li např. $a_{11} = 5$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = -1$, $b_1 = 1$, dostaneme první nerovnici soustavy (8).

Výše popsaný postup, kterým jsme se přesvědčili, že soustava (8) nemá nezáporné řešení, je obsažen v důkazu tohoto trvzení:

**Věta A.** *Existují-li čtyři nezáporná čísla $y_1, y_2, y_3, y_4$ tak, že platí nerovnosti*

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + y_3a_{31} + y_4a_{41} &\geqq 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + y_3a_{32} + y_4a_{42} &\geqq 0, \\ y_1a_{13} + y_2a_{23} + y_3a_{33} + y_4a_{43} &\geqq 0, \end{aligned} \tag{10}$$

*a že zároveň platí nerovnost*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 + y_4b_4 < 0, \tag{11}$$

*pak soustava* (9) *nemá nezáporné řešení.*

*Důkaz.* Kdyby soustava (9) měla nezáporné řešení a kdyby existovala nezáporná čísla $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ s vlastnostmi uvedenými v předpokladech věty A, bylo by (protože čísla $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ jsou nezáporná) toto řešení také řešením soustavy

$$\begin{aligned} y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) &\leqq y_1b_1, \\ y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) &\leqq y_2b_2, \\ y_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) &\leqq y_3b_3, \\ y_4(a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3) &\leqq y_4b_4, \end{aligned} \tag{12}$$

a také nezáporným řešením nerovnice, která vznikne sečtením všech nerovnic soustavy (12). Avšak po snadných úpravách (po provedení naznačeného násobení čísly $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ a po vytknutí neznámých $x_1$, $x_2$, $x_3$) zjistíme, že tato nerovnice má tvar

$$\begin{aligned} &(y_1a_{11} + y_2a_{21} + y_3a_{31} + y_4a_{41})\,x_1 + \\ &+ (y_1a_{12} + y_2a_{22} + y_3a_{32} + y_4a_{42})\,x_2 + \\ &+ (y_1a_{13} + y_2a_{23} + y_3a_{33} + y_4a_{43})\,x_3 \leqq \\ &\leqq y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 + y_4b_4, \end{aligned}$$

ze kterého je patrné, že nemůže mít nezáporné řešení, neboť podle předpokladu jsou koeficienty u neznámých nezáporná čísla, kdežto pravá strana nerovnosti je záporná.

Větu A lze vyslovit v této logicky ekvivalentní formě:

**Věta B.** *Má-li soustava* (9) *nezáporné řešení, pak platí toto: Jsou-li* $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ *taková nezáporná čísla, že platí nerovnosti* (10), *pak také platí nerovnost*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 + y_4b_4 \geqq 0\,.$$

Čtenář si pravděpodobně položí otázku, zda větu A (nebo jí ekvivalentní větu B) lze obrátit. Jak vyplyne z dalšího výkladu, odpověď na tuto otázku je kladná.

## 1.2. Oddělitelnost množin

Už v předmluvě jsme se zmínili o důležitosti věty o oddělitelnosti konvexních mnohostěnů. Myšlenku této věty vyložíme nejdříve v rovině.

Mějme přímku $p$ v rovině $\varrho$. O přímce $p$ budeme říkat, že *odděluje* navzájem množiny $M_1$ a $M_2$ bodů roviny $\varrho$, jestliže množiny $M_1$ a $M_2$ leží v navzájem opačných otevřených polorovinách určených přímkou $p$. O dvou množinách $M_1$, $M_2$ bodů roviny $\varrho$ budeme říkat, že jsou navzájem *oddělitelné*, jestliže existuje přímka oddělující množiny $M_1$ a $M_2$.

Je zřejmé, že jsou-li množiny $M_1$ a $M_2$ oddělitelné, pak množiny $M_1$ a $M_2$ nemají společné body, čili, jak často říkáme, jsou disjunktní. Kdyby totiž bod $X$ patřil do množiny $M_1$ i do množiny $M_2$, pak pro bod $P$ neležící na přímce $p$, která odděluje množiny $M_1$ a $M_2$, by úsečka $XP$ zároveň měla i neměla společný bod s přímkou $p$.

Dá se snadno ukázat, že obrácené tvrzení neplatí. Vezmeme-li za $M_1$ všechny body určité kružnice $k$ a za $M_2$ množinu ležící uvnitř kruhu určeného kružnicí $k$, dostaneme množiny $M_1$, $M_2$, nemající společný bod. Avšak množiny $M_1$, $M_2$ nejsou oddělitelné, neboť pro každou přímku $p$ nastává právě jeden z těchto dvou případů:

1. přímka $p$ nemá s kružnicí $k$ žádný společný bod; v takovém případě leží množiny $M_1$, $M_2$ ve stejné polorovině určené přímkou $p$, a nejsou tedy přímkou $p$ odděleny;

2. přímka $p$ má s kružnicí $k$ společný alespoň jeden bod; v takovém případě množina $M_1$ neleží (celá) ani v jedné z (otevřených) polorovin určených přímkou $p$, a nemůže tedy ležet ani v polorovině opačné k polorovině určené přímkou $p$, ve které leží (leží-li tam vůbec) množina $M_2$.

Hlavní myšlenka věty o oddělitelnosti konvexních mnohoúhelníků spočívá v tom, že v případě konvexních mnohoúhelníků lze výše uvedené tvrzení obrátit, tj. že každé dva konvexní mnohoúhelníky $K_1$, $K_2$ roviny $\varrho$, které nemají žádný bod společný, lze oddělit. Větu o oddělitelnosti konvexních mnohoúhelníků lze tedy vyslovit takto:

**Věta C.** *Dva konvexní mnohoúhelníky roviny $\varrho$ jsou oddělitelné právě tehdy, jsou-li disjunktní.*

Jak jsme se už zmínili, obecnou větu o oddělitelnosti konvexních mnohostěnů nebudeme dokazovat; přesto však v tomto speciálním případě uvedeme úvahy naznačující jednu z možných cest vedoucích k důkazu.

Vzhledem k tomu, co bylo uvedeno výše, stačí dokázat, že jsou-li $K_1$, $K_2$ dva disjunktní konvexní mnohoúhelníky, jsou mnohoúhelníky $K_1$, $K_2$ oddělitelné.

Nejprve dokážeme, že existuje dvojice bodů $X_0$, $Y_0$ taková, že
1. $X_0 \in K_1$, 2. $Y_0 \in K_2$ a 3. $|X_0Y_0| \leqq |XY|$ pro všechny dvojice bodů $X$, $Y$ takové, že $X \in K_1$ a $Y \in K_2$. Popíšeme konstrukci bodů $Y_0$ a $X_0$. Při této konstrukci budeme potřebovat následující jednoduché lemma.

**Lemma.** *Nechť $AB$ a $CD$ jsou dvě libovolné úsečky ležící v rovině. Potom existují dva body $X'$ a $Y'$ tak, že*
*1. $X' \in AB$, 2. $Y' \in CD$ a 3. $|X'Y'| \leqq |XY|$ pro všechny dvojice bodů $X$, $Y$ takové, že $X \in AB$ a $Y \in CD$.*

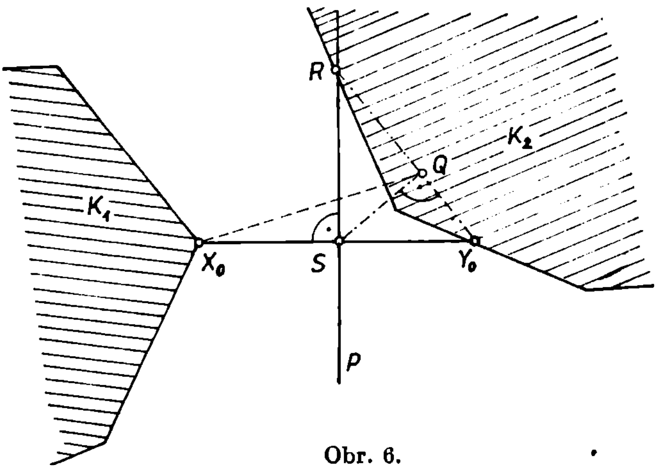
*Důkaz* lemmatu lze provést snadno rozebráním jednotlivých typických případů vzájemné polohy úseček a přenecháváme jej čtenáři.

Vraťme se nyní k důkazu věty. Nechť obvod mnohoúhelníka $K_1$ sestává z úseček $u_1, u_2, \ldots, u_r$ $(r \geqq 3)$ a obvod mnohoúhelníka $K_2$ z úseček $v_1, v_2, \ldots, v_s$ $(s \geqq 3)$. Uvažujme nyní všechny možné dvojice úseček $u_i$ a $v_j$, kde $i = 1, 2, \ldots, r$ a $j = 1, 2, \ldots, s$. Na základě lemmatu existuje ke každé dvojici $u_i$, $v_j$ dvojice bodů $X(i, j)$ a $Y(i, j)$ tak, že $X(i, j) \in u_i$, $Y(i, j) \in v_j$ a $|X(i, j)$ $Y(i, j)| \leqq |XY|$ pro všechny dvojice $X$ a $Y$ takové, že $X \in u_i$ a $Y \in v_j$. Budiž nyní $M$ množina čísel $d_{ij} =$ $= |X(i; j)\ Y(i, j)|$ $(i = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, s)$. Protože $M$ je konečná, existuje dvojice indexů $i^*$, $j^*$, pro kterou je číslo $d_{i^* j^*}$ minimální, tj. platí

$$d_{i^* j^*} = |X(i^*, j^*)\, Y(i^*, j^*)| \leqq d_{ij} = |X(i, j)\, Y(i, j)|.$$

(Pokud existuje takových dvojic více než jedna, vybereme některou z nich.) Čtenář snadno sám dokáže, že body $X_0 = X(i^*, j^*)$ a $Y_0 = Y(i^*, j^*)$ jsou body s nejkratší vzdáleností.

K zakončení důkazu zbývá sestrojit přímku $p$ oddělující $K_1$ od $K_2$. Protože mnohoúhelníky $K_1$ a $K_2$ nemají společné body, je bod $X_0$ různý od bodu $Y_0$; je tedy možné vést středem úsečky $X_0Y_0$ přímku $p$ kolmou k této úsečce. Ukážeme, že kolmice $p$ odděluje mnohoúhelníky $K_1$, $K_2$:




Obr. 6.

Kdyby přímka $p$ mnohoúhelníky $K_1$, $K_2$ neoddělovala, existoval by bod $R$, ležící na přímce $p$ a zároveň náležející jednomu z mnohoúhelníků $K_1$, $K_2$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že bod $R$ náleží mnohoúhelníku $K_2$ (viz obr. 6). Označíme-li $Q$ patu výšky $SQ$ v pravoúhlém trojúhelníku $Y_0RS$ ($\sphericalangle S = 90°$), pak (protože body $Y_0$, $R$ náleží konvexnímu mnohoúhelníku $K_2$) bod $Q$ náleží mnohoúhelníku $K_2$. Avšak

$$|X_0Q| < |X_0Y_0|,$$

neboť

$$|X_0Q| < |X_0S| + |SQ| < |X_0S| + |SY_0| = |X_0Y_0|.$$

To je však ve sporu s vlastností dvojice bodů $X_0$, $Y_0$.

## 1.3. Pojem $n$-rozměrného prostoru

Víme, že polohu bodu na přímce můžeme určit jedním číslem, polohu bodu v rovině uspořádanou dvojicí a polohu bodu v prostoru uspořádanou trojicí čísel. Vyjdeme-li z této skutečnosti, můžeme dospět k této definici $n$-rozměrného prostoru:

Množinu všech uspořádaných $n$-tic $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reálných čísel $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$ nazveme *$n$-rozměrným prostorem* a označíme symbolem $R^n$.

Přitom dvě uspořádané $n$-tice $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ považujeme za stejné (sobě rovné), platí-li $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_n = y_n$. Prvky množiny $R^n$ budeme nazývat *body* prostoru $R^n$; čísla $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$

budeme nazývat *souřadnicemi* bodu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

V případě, že $n = 1, 2, 3$, budeme užívat známého geometrického znázornění prostoru $R^n$ pomocí pevně zvolené pravoúhlé soustavy souřadnic. Na tomto místě chceme čtenáře upozornit na to, že v definicích pojmů, formulacích vět a při provádění důkazů budeme užívat výhradně analytických (volněji řečeno početních) metod, které budou vycházet doslovně z definice prostoru $R^n$ jakožto množiny všech uspořádaných $n$-tic reálných čísel. Kdybychom však důsledně odmítli užívat geometrických představ, zbavili bychom výklad veškeré geometrické názornosti a připravili bychom se o možnost porovnávat smysl definic, tvrzení a základních myšlenek důkazů se zkušeností, kterou jsme získali při každodenním vnímání prostorových vlastností světa, v němž žijeme. Z těchto důvodů budeme užívat „geometrické" terminologie, která umožňuje dávat jednotlivým definicím, větám a myšlenkovým postupům názorný geometrický smysl. Používání geometrických představ někdy umožní i „uhodnout předem" přesné, nebo alespoň „přibližné" znění věty, popřípadě postup důkazu. Proto v poslední části tohoto odstavce zavedeme geometrické názvy pro podmnožiny prostoru $R^n$, se kterými se v dalším, výkladu budeme setkávat.

Jsou-li $a_1$, $b$ daná čísla, přičemž $a_1 \neq 0$, pak množinu prvků prostoru $R^1$, jejichž souřadnice $x_1$ vyhovují rovnici

$$a_1 x_1 = b\,,$$

lze znázornit bodem; je to prostě jednobodová množina.

Jsou-li $a_1$, $a_2$, $b$ daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel $a_1$, $a_2$ je různé od nuly, pak množinu bodů prostoru $R^2$, jejichž souřadnice $x_1$, $x_2$ vyhovují rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b,$$

lze znázornit přímkou.

Jsou-li $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b$ daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel $a_1$, $a_2$, $a_3$ je různé od nuly, pak množinu bodů prostoru $R^3$, jejichž souřadnice $x_1$, $x_2$, $x_3$ vyhovují rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b,$$

lze znázornit rovinou.

Bude užitečné zavést pro podobné množiny (čtenář už tuší jaké) v prostorech $R^n$ speciální název. Dospíváme tak k této definici:

Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ jsou daná čísla, přičemž alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je různé od nuly. Množinu bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru $R^n$, jejichž souřadnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovují rovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{13}$$

nazveme *nadrovinou* v prostoru $R^n$. Rovnici (13) nazýváme rovnicí této nadroviny.

Množinu bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqq b, \tag{14}$$

nazveme *uzavřeným poloprostorem* v prostoru $R^n$ určeným nerovnicí (14). Množinu bodů, jejichž souřadnice vyhovují nerovnici

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqq b, \tag{15}$$

nazveme rovněž uzavřeným polopostorem, a to uzavřeným poloprostorem určeným nerovnicí (15).

Uzavřené poloprostory určené nerovnicemi (14), (15) nazýváme také (navzájem) *opačnými uzavřenými poloprostory* určenými nadrovinou o rovnici (13).

*Otevřenými* (navzájem *opačnými*) poloprostory určenými nadrovinou o rovnici (13) nazýváme množiny bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnicím

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n < b,$$

resp.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n > b.$$

Jsou-li $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ body prostoru $R^n$, pak *úsečkou* spojující body $Y$, $Z$ nazýváme množinu těch bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro jejichž souřadnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1, \\ x_2 &= \lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \lambda y_n + (1 - \lambda) z_n, \end{aligned}$$

kde $\lambda$ může být libovolné číslo, pro které platí $0 \leqq \lambda \leqq 1$.

O množině bodů prostoru $R^n$ říkáme, že je *konvexní*,[1]) jestliže pro libovolné dva její body do ní patří i celá úsečka tyto body spojující.

---

[1]) Na rozdíl od knížek [2] a [3] počítáme prázdnou množinu mezi množiny konvexní.

## Cvičení

1. Dokažte, že má-li soustava lineárních rovnic o třech neznámých $x_1, x_2, x_3$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

nezáporné řešení, pak pro každé řešení $(y_1, y_2, y_3)$ (nikoli jen nezáporné!) soustavy lineárních nerovnic

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + y_3a_{31} &\geqq 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + y_3a_{32} &\geqq 0, \\ y_1a_{13} + y_2a_{23} + y_3a_{33} &\geqq 0 \end{aligned}$$

platí nerovnost

$$y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3 \geqq 0.$$

2. *Uzavřeným kruhem se středem* $S$ *a poloměrem* $r$ ($r > 0$) rozumíme množinu bodů $X$ roviny $\varrho$, pro které platí nerovnost $|SX| \leqq r$; *otevřeným kruhem se středem* $S$ *a poloměrem* $r$ ($r > 0$) rozumíme množinu bodů $X$ roviny $\varrho$, pro které platí $|SX| < r$. Dokažte, že

a) jsou-li $K_1$ a $K_2$ uzavřené kruhy, jsou $K_1$ a $K_2$ oddělitelné právě tehdy, jestliže kruhy $K_1$ a $K_2$ nemají společné body;

b) jsou-li $K_1$ a $K_2$ otevřené kruhy, jsou $K_1$ a $K_2$ oddělitelné právě tehdy, jestliže kruhy $K_1$ a $K_2$ nemají společné body.

Obdobné tvrzení však neplatí, je-li jeden z kruhů $K_1$, $K_2$ otevřený a druhý uzavřený.

**3.** Nechť bod $M$ neleží na přímce $p$. Které přímky oddělují bod $M$ a přímku $p$?

**4.** Ukažte, že může existovat více dvojic s vlastností dvojice $(X_0, Y_0)$ z naznačeného důkazu věty C. V takovém případě však existuje takových bodů nekonečně mnoho.

**5.** Znázorněte v rovině množiny těch bodů $X = (x_1, x_2)$ prostoru $R^2$, pro jejichž souřadnice platí:

(a) $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$ a zároveň $x_2 \geqq x_1^2$,
(b) $x_1 \leqq 1$ a zároveň $x_1^2 + x_2^2 > 1$,
(c) $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$ a zároveň $|x_1| + |x_2| \geqq 1$.

## 2. kapitola

# ODDĚLITELNOST KONVEXNÍCH MNOHOSTĚNŮ

## 2.1. Konvexní mnohostěny

V tomto odstavci budeme definovat důležitou třídu podmnožin prostoru $R^n$, které budeme nazývat konvexními mnohostěny. Konvexní mnohostěny budou pro nás důležité tím, že pojem konvexního mnohostěnu zobecňuje v jistém smyslu pojem konvexního mnohoúhelníku v rovině a zároveň i pojem množiny všech řešení soustavy lineárních nerovnic (popřípadě rovnic). Při výkladu budeme postupovat takto: Nejprve uvedeme definici konvexního mnohostěnu, potom ukážeme geometrickou interpretaci tohoto pojmu a nakonec uvedeme některé základní vlastnosti konvexních mnohostěnů potřebné v dalším výkladu.

Soustavou $m$ lineárních nerovnic o $n$ neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (kde $m$, $n$ jsou přirozená čísla), nazýváme soustavu nerovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m, \end{aligned} \tag{16}$$

kde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}, b_1, b_2, \ldots, b_m$ jsou daná čísla.

Množinu všech bodů $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru $R^n$, jejichž souřadnice vyhovují všem nerovnicím soustavy (16) nazýváme *konvexním*[1]) *mnohostěnem* v prostoru $R^n$ definovaným soustavou (16).

Konvexním mnohostěnem v prostoru $R^n$ je tedy každá taková množina $K$ bodů prostoru $R^n$, pro kterou existuje taková soustava lineárních nerovnic o $n$ neznámých, že množina $K$ představuje množinu všech řešení této soustavy.

**Příklad 1.** Prázdná množina je konvexním mnohostěnem v prostoru $R^n$, neboť představuje množinu všech řešení nerovnice

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n \leqq -1.$$

**Příklad 2.** Prostor $R^n$ je konvexním mnohostěnem v prostoru $R^n$, neboť představuje množinu všech řešení soustavy

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n \leqq 1.$$

**Příklad 3.** V prostoru $R^1$ jsou konvexními mnohostěny pouze tyto množiny: (a) prázdná množina; (b) prostor $R^1$; (c) množiny těch bodů $X = (x_1)$ prostoru $R^1$, pro které platí $a \leqq x_1 \leqq b$, kde $a, b$ jsou čísla, pro která je $a \leqq b$; (d) množiny těch bodů $X = (x_1)$ prostoru $R^1$, pro které platí $x_1 \leqq b$, kde $b$ je jisté číslo; (e) množiny těch

---

[1]) To, že konvexní mnohostěn je konvexní množina, dokážeme později; viz věta 2.

bodů $X = (x_1)$ prostoru $R^1$, pro které platí $a \leqq x_1$, kde $a$ je jisté číslo.

Podejme si hned *důkaz* tvrzení obsaženého v příkladu 3. Je-li $K$ konvexní mnohostěn v prostoru $R^1$, pak $K$ představuje množinu všech řešení jisté soustavy nerovnic tvaru:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 &\leqq b_2, \\ \dots&\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 &\leqq b_m. \end{aligned} \tag{17}$$

Může nastat právě jedna z těchto dvou možností:

1. Soustava (17) nemá řešení.
2. Soustava (17) má řešení.

Nastává-li první možnost, dostáváme případ (a). Stačí tedy dále vyšetřovat pouze druhou možnost. Nechť je tedy množina $K$ neprázdná. Potom nastává právě jedna z těchto čtyř vzájemně se vylučujících možností:

(2a) $a_{i1} = 0$ pro $i = 1, 2, \dots, m$;
(2b) existují takové indexy $i_0, j_0$, že platí
$a_{i_01} > 0, a_{j_01} < 0$;
(2c) $a_{i1} \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, m$ a existuje takový index $i_0$, že platí $a_{i_01} > 0$;
(2d) $a_{i1} \leqq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, m$ a existuje takový index $i_0$, že platí $a_{i_01} < 0$.

Nastává-li případ (2a), musí být $b_i \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, m$, neboť podle předpokladu soustava (17) má řešení. Avšak je-li $a_{i1} = 0$ a $b_i \geqq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, m$, je řešením soustavy (17) každé reálné číslo; nastává tedy případ (b).

Nastává-li případ (2b), dostáváme případ (c): Nechť $i_0, i_1, \ldots, i_r$ jsou všechny indexy, pro které platí $a_{i_0 1} > 0$, $a_{i_1 1} > 0, \ldots, a_{i_r 1} > 0$, a nechť $j_0, j_1, \ldots, j_s$ jsou všechny indexy, pro které platí $a_{j_0 1} < 0$, $a_{j_1 1} < 0, \ldots, a_{j_s 1} < 0$.

Označíme-li písmenem $a$ největší z čísel $\frac{b_{j_0}}{a_{j_0 1}}, \frac{b_{j_1}}{a_{j_1 1}}, \ldots, \frac{b_{j_s}}{a_{j_s 1}}$ a písmenem $b$ nejmenší z čísel $\frac{b_{i_0}}{a_{i_0 1}}, \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 1}}, \ldots, \frac{b_{i_r}}{a_{i_r 1}}$, je množina $K$ tvořena všemi čísly $x_1$, pro která platí $a \leqq x_1 \leqq b$.

Nastává-li případ (2c) a jsou-li $i_0, i_1, \ldots, i_r$ všechny indexy, pro které platí $a_{i_0 1} > 0$, $a_{i_1 1} > 0, \ldots, a_{i_r 1} > 0$, dospíváme k případu (d), neboť množina $K$ je tvořena všemi čísly $x_1$, pro která platí $x_1 \leqq b$, kde $b$ je nejmenší z čísel $\frac{b_{i_0}}{a_{i_0 1}}, \frac{b_{i_1}}{a_{i_1 1}}, \ldots, \frac{b_{i_r}}{a_{i_r 1}}$.

Je už zřejmé, jakým způsobem dospějeme k tomu, že možnosti (2d) odpovídá případ (e).

*Poznámka.* Získané výsledky můžeme shrnout také takto: Konvexním mnohostěnem v prostoru $R^1$ je buď prázdná množina, nebo celý prostor $R^1$, nebo průnik konečného počtu uzavřených poloprostorů prostoru $R^1$ (uzavřené poloprostory prostoru $R^1$ je přirozené nazývat uzavřenými polopřímkami).

**Příklad 4.** Vyšetřujme nyní konvexní mnohostěny v prostoru $R^2$. Nechť $K$ je konvexní mnohostěn v prostoru $R^2$ daný soustavou nerovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leqq b_2, \\ \dots\dots\dots&\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\leqq b_m. \end{aligned} \tag{18}$$

Jestliže v nerovnici $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqq b_i$, kde $i$ je jedno z čísel $1, 2, \dots, m$, je alespoň jedno z čísel $a_{i1}$, $a_{i2}$ různé od nuly, pak je touto nerovnicí určen jistý uzavřený poloprostor prostoru $R^2$ (v případě prostoru $R^2$ je přirozené nazývat tento poloprostor uzavřenou polorovinou).

Jestliže je $a_{i1} = a_{i2} = 0$, pak buď tato nerovnice nemá řešení ($b_i < 0$), nebo souřadnice libovolného bodu prostoru $R^2$ jsou jejím řešením ($b_i \geqq 0$). Vzhledem k tomu, že řešení soustavy (18) jsou představována těmi body prostoru $R^2$, jejichž souřadnice vyhovují všem nerovnicím soustavy (18), dostáváme, že konvexní mnohostěn v prostoru $R^2$ je buď množina prázdná, nebo celý prostor $R^2$, nebo množina, která je průnikem konečně mnoha uzavřených polorovin (tento průnik může být také prázdnou množinou). Všimněme si ještě, že každý průnik konečného počtu uzavřených polorovin je konvexním mnohostěnem v prostoru $R^2$.

Čtenář už sám nahlédne, že analogická situace nastává v případě konvexních mnohostěnů v prostoru $R^3$ (pouze místo o průniku uzavřených polorovin musíme hovořit o průniku uzavřených poloprostorů).

Rovněž v případě konvexního mnohostěnu v prostoru $R^n$ zadaného soustavou (16) můžeme říci, že $K$ je buď prázdná množina, nebo celý prostor (viz příklad 1 a příklad 2), nebo průnik konečného počtu poloprostorů určených těmi nerovnicemi $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leqq b_i$, ve kterých je alespoň jedno z čísel $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ různé od nuly.

Konvexní mnohostěny mají jednu důležitou vlastnost, kterou uvedeme bez důkazu, ale kterou budeme v dalším výkladu často používat.

Uvažujme zobrazení prostoru $R^n$ do prostoru $R^m$, které je definováno tak, že bodu $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru $R^n$ přiřazuje prvek $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ prostoru $R^m$ podle předpisu

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n, \end{aligned} \tag{*}$$

kde $c_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou daná čísla. Zobrazení tvaru (*) se nazývá *lineární zobrazení*.

Je-li $K$ konvexní mnohostěn v prostoru $R^n$, pak jeho obrazem při zobrazení definovaném předpisem (*) je jistá množina $L$ bodů prostoru $R^m$ (bod $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ prostoru $R^m$ patří do množiny $L$, existuje-li takový bod $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mnohostěnu $K$, že pro souřadnice bodů $Y$, $X$ platí (*)). Dá se dokázat, že platí tato věta:

**Věta 1.** *Je-li $K$ konvexní mnohostěn v prostoru $R^n$, je obraz $L$ množiny $K$ při zobrazení určeném předpisem (*) konvexním mnohostěnem v prostoru $R^m$.*

Na závěr tohoto odstavce dokážeme ještě tuto větu:

**Věta 2.** *Konvexní mnohostěn v prostoru $R^n$ je konvexní množinou.*

*Důkaz.* Nechť $K$ je konvexní mnohostěn v prostoru $R^n$ určený soustavou (16) a nechť body $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ prostoru $R^n$ patří do množiny $K$. Podle definice konvexní množiny stačí dokázat, že pro každé číslo $\lambda$, pro které platí $0 \leqq \lambda \leqq 1$, patří bod $X = \lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1, \lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2, \ldots, \lambda y_n + (1 - \lambda) z_n$ do množiny $K$. Stačí tedy dokázat, že platí

$$
\begin{aligned}
& a_{11}(\lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1) + a_{12}(\lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2) + \ldots \\
& \ldots + a_{1n}(\lambda y_n + (1 - \lambda) z_n) \leqq b_1, \\
& a_{21}(\lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1) + a_{22}(\lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2) + \ldots \\
& \ldots + a_{2n}(\lambda y_n + (1 - \lambda) z_n) \leqq b_2, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& a_{m1}(\lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1) + a_{m2}(\lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2) + \ldots \\
& \ldots + a_{mn}(\lambda y_n + (1 - \lambda) z_n) \leqq b_m.
\end{aligned}
$$

Protože $b_i = \lambda b_i + (1 - \lambda) b_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, vyplývá platnost poslední soustavy z našich předpokladů násobením každé nerovnice platné soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n &\leqq b_1, \\ a_{21}y_2 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n &\leqq b_m \end{aligned}$$

číslem $\lambda$, každé nerovnice platné soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1n}z_n &\leqq b_1, \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2n}z_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}z_1 + a_{m2}z_2 + \ldots + a_{mn}z_n &\leqq b_m \end{aligned}$$

číslem $(1 - \lambda)$ a sečtením odpovídajících si nerovnic.

## 2.2. Oddělitelnost konvexních mnohostěnů

Buďte $M_1$ a $M_2$ dvě neprázdné podmnožiny prostoru $R^n$. Budeme říkat, že množiny $M_1$ a $M_2$ jsou (vzájemně) *oddělitelné*, jestliže existují taková čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$, že alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je různé od nuly a že pro všechny body $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ množiny $M_1$ platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n > b$$

a pro všechny body $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ množiny $M_2$ platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n < b.$$

Užijeme-li terminologie zavedené v předchozí kapitole, můžeme právě vyslovenou definici vyjádřit také takto: Dvě neprázdné podmnožiny $M_1$ a $M_2$ prostoru $R^n$ nazýváme oddělitelnými množinami, jestliže existuje taková nadrovina prostoru $R^n$, že množiny $M_1$ a $M_2$ leží v opačných otevřených poloprostorech touto nadrovinou určených.

Podle definice je zřejmé, že oddělitelné množiny nemají společné body. Snadno ukážeme, že neprázdné množiny, které nemají společné body, nemusí být oddělitelné. Nechť např. $M_1$ je sjednocením množin $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, kde množiny $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ jsou definovány takto (znázorněte si uvedené množiny v rovině):

$$
\begin{array}{ll}
A_1 = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqq x_1 \leqq 1, & x_2 = 0\}, \\
A_2 = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leqq x_1 \leqq 1, & x_2 = 1\}, \\
A_3 = \{(x_1, x_2) \mid & x_1 = 0,\ 0 \leqq x_2 \leqq 1\}, \\
A_4 = \{(x_1, x_2) \mid & x_1 = 1,\ 0 \leqq x_2 \leqq 1\},
\end{array}
$$

(tj. $A_1$ je množina bodů, jejichž souřadnice splňují podmínky $0 \leqq x_1 \leqq 1$ a $x_2 = 0$; způsob zápisu $A_2$, $A_3$ a $A_4$ je zcela analogický. Uvedeného způsobu definice množin se v matematice běžně používá) a nechť množina $M_2$ je tvořena těmito dvěma body: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Je zřejmé, že množiny $M_1$ a $M_2$ jsou neprázdné a nemají společné body. Přitom však množiny $M_1$ a $M_2$ nejsou oddělitelné, protože kdyby existovala taková čísla $a_1$, $a_2$, $b$, že alespoň jedno z čísel $a_1$, $a_2$ je různé od nuly a že pro každý bod $X = (x_1, x_2)$ množiny $M_1$ platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 > b$$

a zároveň pro každý bod $X = (x_1, x_2)$ množiny $M_2$ platí

$$a_1x_1 + a_2x_2 < b\,,$$

muselo by platit

$$a_1 + a_2 > 2b\,,$$

neboť body (0,1), (1,0) patří do množiny $M_1$ a zároveň

$$a_1 + a_2 < 2b\,,$$

neboť body $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ patří do množiny $M_2$.

Pro konvexní mnohostěny však platí tato věta (sr. s větou C v předchozí kapitole):

**Věta 3.** *Dva neprázdné konvexní mnohostěny v prostoru $R^n$ jsou oddělitelné právě tehdy, nemají-li společné body.*

Jak jsme se již zmínili, od důkazu této věty upouštíme, avšak v dalším výkladu si ukážeme některé její aplikace.

## Cvičení

**1.** Dokažte, že konvexní mnohostěn v prostoru $R^n$ je množina buď prázdná, nebo jednobodová, nebo obsahující nekonečně mnoho bodů.

**2.** Znázorněte tyto konvexní mnohostěny v prostoru $R^1$:

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 &\leqq 4, \\ 2x_1 &\leqq 10, \\ 3x_1 &\leqq 13, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -3x_1 &\leqq -4, \\ -2x_1 &\leqq 10, \\ -3x_1 &\leqq -13, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x_1 &\leqq 4, \\ -2x_1 &\leqq -1, \\ 0x_1 &\leqq 1, \\ -3x_1 &\leqq 0, \\ 5x_1 &\leqq 8. \end{aligned}$$

**3.** Dokažte, že průnik dvou konvexních mnohostěnů v prostoru $R^n$ je konvexním mnohostěnem.

**4.** Ukažte, že sjednocení dvou konvexních mnohostěnů v prostoru $R^n$ nemusí být konvexním mnohostěnem v prostoru $R^n$.

**5.** Znázorněte tyto konvexní mnohostěny v prostoru $R^2$:

$$\begin{aligned} \text{a)}\quad 0x_1 + x_2 &\geqq 0; \\ \text{b)}\quad x_1 + 0x_2 &\geqq 0, \\ 0x_1 + x_2 &\geqq 0; \\ \text{c)}\quad x_1 + x_2 &\leqq 1, \\ x_2 &\leqq 1, \\ x_1 - x_2 &\leqq 1. \end{aligned}$$

## 3. kapitola

# NĚKTERÁ UŽITÍ VĚTY O ODDĚLITELNOSTI

## 3.1. O řešitelnosti soustav lineárních nerovnic

V 1. kapitole jsme ve speciálních případech zjistili, že spolu se soustavou lineárních nerovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m \end{aligned} \tag{19}$$

je užitečné uvažovat ještě soustavu lineárních nerovnic tvaru

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} &\geqq 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} &\geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} &\geqq 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Platí totiž tato věta (sr. konec odstavce 1.1):

**Věta 4.** *Soustava lineárních nerovnic* (19) *má nezáporné* *řešení právě tehdy, platí-li pro každé nezáporné řešení* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *soustavy* (20) *nerovnost*

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_m b_m \geqq 0 .$$

*Důkaz.* **1.** Předpokládejme, že soustava (19) má nezáporné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a nechť $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je libovolné nezáporné řešení soustavy (20). Za těchto předpokladů je zřejmé, že $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je také řešením soustavy

$$\begin{aligned} &y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) \leqq y_1 b_1 , \\ &y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) \leqq y_2 b_2 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ &y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \leqq y_m b_m \end{aligned} \tag{21}$$

a tudíž také nerovnice, která vznikne sečtením všech nerovností soustavy (21). Avšak po provedení naznačeného násobení čísly $y_1, y_2, \ldots, y_m$ a po vytknutí čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zjistíme, že tato poslední nerovnice má tvar

$$\begin{aligned} &(y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + \ldots + y_m a_{m1})\, x_1 + \\ &+ (y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + \ldots + y_m a_{m2})\, x_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (y_1 a_{1n} + y_2 a_{2n} + \ldots + y_m a_{mn})\, x_n \leqq \\ &\leqq y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_m b_m . \end{aligned} \tag{22}$$

Z tohoto tvaru je patrné, že platí nerovnost

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 + \ldots + y_m b_m \geqq 0 ,$$

neboť podle předpokladů na levé straně nerovnice (22) jde o součet součinů nezáporných čísel.

2. Zbývá dokázat, že podmínka věty je postačující podmínkou existence nezáporného řešení soustavy (19). K tomu však stačí dokázat, že neexistuje-li nezáporné řešení soustavy (19), není splněna zmíněná podmínka. Předpokládejme tedy, že neexistuje nezáporné řešení soustavy (19). Označme symbolem $K_1$ množinu těch bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ prostoru $R^m$, pro jejichž souřadnice platí

$$\xi_1 \leqq b_1, \xi_2 \leqq b_2, \ldots, \xi_m \leqq b_m.$$

Dále symbolem $K_2$ označme množinu bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ prostoru $R^m$, jejichž souřadnice mají tyto vlastnosti: existuje takový bod $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ prostoru $R^n$, že

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \xi_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \xi_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= \xi_m, \\
x_1 &\geqq 0, \\
x_2 &\geqq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\
x_n &\geqq 0.
\end{aligned}$$

Jinými slovy: množina $K_2$ je množina bodů prostoru $R^m$ tvaru

$$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n, \ldots, \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n),$$

kde $x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$.

Množiny $K_1$ a $K_2$ jsou neprázdné konvexní mnohostěny. V případě množiny $K_1$ je to zřejmé, v případě množiny $K_2$

je to jednoduchý důsledek věty 1. Protože neexistuje nezáporné řešení soustavy (19), nemají množiny $K_1$ a $K_2$ společné body a jsou v důsledku věty 3 oddělitelné. Existují tedy taková čísla $a_1, a_2, \ldots, a_m, b$, přičemž alespoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$ je různé od nuly, že pro každý bod $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ množiny $K_1$ je

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m < b$$

a pro každý bod $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ množiny $K_2$ je

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m > b\,.$$

Odtud však plyne, že číslo $b$ je záporné, neboť bod $(0,0, \ldots, 0)$ patří do množiny $K_2$, takže platí

$$a_1 0 + a_2 0 + \ldots + a_m 0 > b\,.$$

Dále dokážeme, že čísla $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jsou nezáporná: Je-li $a_{i_0} < 0$ pro nějaké $i_0$ a položíme-li

$\xi_1 = b_1, \quad \xi_2 = b_2, \quad \ldots, \quad \xi_{i_0-1} = b_{i_0-1}, \xi_{i_0+1} = b_{i_0+1}, \quad \ldots,$
$\xi_m = b_m,$

$$\xi_{i_0} = \min\left[b_{i_0}, \frac{b - a_1b_1 - \ldots - a_{i_0-1}b_{i_0-1} - a_{i_0+1}b_{i_0+1} - \ldots - a_mb_m}{a_{i_0}}\right],$$

patří bod $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ do množiny $K_1$ (viz zavedení množiny $K_1$), a musí tedy platit

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m < b\,.$$

Přímým výpočtem však zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} & a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + \ldots + a_m\xi_m = \\ = {} & a_{i_0}\xi_{i_0} + (a_1\xi_1 \ldots + a_{i_0-1}\xi_{i_0-1} + a_{i_0+1}\xi_{i_0+1} + \ldots + \\ & + a_m\xi_m) \geqq \\ \geqq {} & b - a_1b_1 - \ldots - a_{i_0-1}b_{i_0-1} - a_{i_0+1}b_{i_0+1} - \ldots - \\ & - a_mb_m + \\ & + (a_1b_1 + \ldots + a_{i_0-1}b_{i_0-1} + a_{i_0+1}b_{i_0+1} + \ldots + \\ & + a_mb_m) = b , \end{aligned}$$

takže předpoklad $a_{i_0} < 0$ vede ke sporu.

Dokážeme nyní, že

$$y_1 = a_1, \ y_2 = a_2, \ \ldots, y_m = a_m$$

je takové nezáporné řešení soustavy (20), že platí nerovnost

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m < 0 ,$$

tj. že není splněna podmínka věty 4. Poslední nerovnost však plyne z toho, že číslo $b$ je záporné a že bod $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ patří do množiny $K_1$. Zbývá tedy dokázat, že $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je řešením soustavy (20).

Předpokládejme, že existuje index $j_0$ tak, že platí

$$y_1a_{1j_0} + y_2a_{2j_0} + \ldots + y_ma_{mj_0} < 0 ,$$

a položme $x_j = 0$ pro $j \neq j_0$,

$$x_{j_0} = \frac{b}{y_1a_{1j_0} + y_2a_{2j_0} + \ldots + y_ma_{mj_0}} .$$

Potom bod $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$, kde

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\
\xi_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\xi_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n
\end{aligned}$$

patří do množiny $K_2$, takže platí

$$y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + \dots + y_m\xi_m > b.$$

Avšak přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že platí

$$\begin{aligned}
& y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + \dots + y_m\xi_m = \\
& = y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + \\
& + y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) = \\
= {} & y_1a_{1j_0}\frac{b}{y_1a_{1j_0} + y_2a_{2j_0} + \dots + y_ma_{mj_0}} + \\
+ {} & y_2a_{2j_0}\frac{b}{y_1a_{1j_0} + y_2a_{2j_0} + \dots + y_ma_{mj_0}} + \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ {} & y_ma_{mj_0}\frac{b}{y_1a_{1j_0} + y_2a_{2j_0} + \dots + y_ma_{mj_0}} = b.
\end{aligned}$$

Tento spor nám říká, že index $j_0$ s uvedenou vlastností neexistuje, takže $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ je řešením soustavy (20) a důkaz věty 4 je dokončen.

Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil dokázat jako cvičení tyto věty:

**Věta 5.** *Soustava* (19) *má řešení (nejedná se tedy pouze o nezáporné řešení) právě tehdy, platí-li pro každé nezáporné řešení* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} &= 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} &= 0 \end{aligned}$$

*nerovnost*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m \geqq 0.$$

**Věta 6.** *Soustava lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

*má nezáporné řešení právě tehdy, platí-li pro každé (nikoliv jen nezáporné) řešení* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *soustavy* (20) *nerovnost*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m \geqq 0.$$

**Věta 7.** *Soustava lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

*má řešení právě tehdy, jestliže pro každé řešení* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} &= 0, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} &= 0 \end{aligned}$$

*platí*

$$y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m = 0.$$

## 3.2. O úlohách lineární optimalizace

Úlohou *lineární optimalizace* nazýváme tuto úlohu: Mezi nezápornými řešeními $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (pokud vůbec existují) soustavy lineárních nerovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m \end{aligned} \tag{23}$$

nalézt takové, pro které nabývá daná funkce $n$ proměnných

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{24}$$

kde ($c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou daná čísla) své největší hodnoty; stručně to zapisujeme symbolem

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max^{1)}. \tag{25}$$

---

[1]) Funkci $f$ nazýváme někdy *účelovou* funkcí; kromě toho i v případě, že hledáme nejmenší hodnotu funkce $f$, hovoříme o *úloze optimalizace*.

Pro nezáporná řešení soustavy (23) se vžil název *přípustná řešení* úlohy lineární optimalizace a pro přípustná řešení dávající největší hodnotu funkce (24) se vžil název *optimální řešení* úlohy lineární optimalizace.

Uveďme na tomto místě alespoň jeden příklad úlohy z praxe, která vede na úlohu lineární optimalizace. K výrobě různých druhů produkce je potřeba užít jistých technologických postupů a určitých surovin a úlohou je rozhodnout, jaká množství jednotlivých druhů produkce máme vyrobit, abychom při použití daných technologických postupů nepřekročili dané zásoby potřebných surovin a abychom přitom dosáhli co největšího zisku.

Předpokládejme, že se jedná o $n$ druhů produkce a že k výrobě je třeba $m$ druhů surovin. Označme symbolem $c_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) zisk z výroby každého jednotkového množství produkce $j$-tého druhu a symbolem $b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) zásobu $i$-té suroviny. Jsou-li technologické postupy takové, že k výrobě jednotkového množství $j$-té produkce je potřeba množství $a_{ij}$ $i$-té suroviny, a označíme-li $x_j$ hledané množství produkce $j$-tého druhu, pak

podmínky nepřekročení zásob jednotlivých surovin lze vyjádřit soustavou (23);
zisk z výroby lze vyjádřit vzorcem (24);
podmínku největšího zisku lze vyjádřit podmínkou (25).

Jak jsme už zjistili v 1. kapitole, soustava lineárních nerovnic nemusí mít žádné řešení, nemusí tedy existovat ani přípustné řešení úlohy lineární optimalizace. Jako cvičení by si měl čtenář ukázat, že i v případě, kdy soustava (23) má řešení, nemusí mít nezáporné řešení. Ukážeme si, že i v případě, kdy úloha lineární optimalizace má přípustné řešení, nemusí mít optimální řešení.

Můžeme k tomu užít soustavy (2) z 1. kapitoly, tj. soustavy

$$
\begin{aligned}
-2x_1 - \phantom{2}x_2 &\leqq -2, \\
-\phantom{2}x_1 + 2x_2 &\leqq -4,
\end{aligned}
$$

jejíž množina řešení je znázorněna na obr. 3, ze kterého je patrné, že tato množina není omezená. Je také zřejmé, že zvolíme-li pevně hodnotu neznámé $x_2 = \hat{x}_2$ tak, že je $\hat{x}_2 > 0$, bude existovat taková hodnota neznámé, $x_1 = \hat{x}_1$, že kromě dvojice čísel $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ bude řešením uvažované soustavy i každá dvojice čísel $(\bar{x}_1, \hat{x}_2)$, pro kterou platí $\bar{x}_1 > \hat{x}_1$. Odtud však plyne, že bude-li funkce $f(x_1, x_2)$ mít např. tvar

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

můžeme vhodnou volbou hodnot proměnných dosáhnout toho, aby funkce $f(x_1, x_2)$ nabývala hodnoty větší než jakékoliv předem zadané číslo, a nemůže tedy funkce $f$ nabývat na množině přípustných řešení své největší hodnoty.

Platí však tato věta.

**Věta 8.** *Existuje-li přípustné řešení úlohy* (23), (24),

(25) *a existuje-li takové číslo $M$, že pro všechna přípustná řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ platí*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq M,$$

*potom existuje i optimální řešení.*

*Důkaz.* Množina všech nezáporných řešení $(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n)$ soustavy (23) je konvexním mnohostěnem $K$ v prostoru $R^n$. Podle věty 1 je množina $\tilde{K}$ všech bodů $Z = (z_1)$ prostoru $R^1$, pro které existuje takový bod $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mnohostěnu $K$, že platí

$$z_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

konvexním mnohostěnem v $R^1$. Podle příkladu 3 kapitoly 2 je tedy $\tilde{K}$ buď (a) prázdná množina, nebo (b) prostor $R^1$, nebo (c) množina bodů $(x_1)$ prostoru $R^1$, pro které platí $a \leqq x_1 \leqq b$, kde $a$, $b$ jsou čísla, pro která je $a \leqq b$ nebo (d) množina bodů $(x_1)$ prostoru $R^1$, pro které platí $x_1 \leqq b$, kde $b$ je jisté číslo nebo (e) množina bodů $(x_1)$ prostoru $R^1$, pro které platí $a \leqq x_1$, kde $a$ je jisté číslo. Protože však podle předpokladu existuje přípustné řešení, nemůže nastat případ (a), protože kromě toho existuje číslo $M$ tak, že pro všechny body $(z_1)$ množiny $\tilde{K}$ platí $z_1 \leqq M$, nemohou nastat ani případy (b) a (e). Ať už nastává kterýkoliv ze zbývajících případů, optimální řešení existuje; je jím každé řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro které platí

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b,$$

a takové řešení existuje, neboť funkce

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

zobrazuje množinu $K$ na množinu $\tilde{K}$.

Výhodné je studovat spolu s úlohou (23), (24), (25) i tuto úlohu: Mezi nezápornými řešeními $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ soustavy lineárních nerovnic

$$\begin{aligned} y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1} &\geqq c_1, \\ y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2} &\geqq c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn} &\geqq c_n \end{aligned} \tag{23'}$$

nalézt takové, pro které nabývá funkce $m$ proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_m$

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m, \tag{24'}$$

své nejmenší hodnoty; stručně píšeme

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_m) \to \min. \tag{25'}$$

Úlohu (23'), (24'), (25') nazýváme úlohou *duální* k úloze (23), (24), (25).

Všimněme si toho, že obě úlohy jsou zadány systémem čísel

$$\begin{gathered} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1, \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, b_m, \\ c_1, c_2, \ldots, c_n, \end{gathered}$$

a toho, že duální úloha je úlohou lineární optimalizace stejného typu jako úloha (23), (24), (25), neboť soustavu (23′) můžeme převést na soustavu

$$\begin{aligned}
-a_{11}y_1 - a_{21}y_2 - \ldots - a_{m1}y_m &\leqq -c_1,\\
-a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \ldots - a_{m2}y_m &\leqq -c_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots,\\
-a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \ldots - a_{mn}y_m &\leqq -c_n
\end{aligned}$$

a podmínku (25′) na tvar

$$-g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max.$$

Kromě toho čtenář snadno nahlédne, že vytvoříme-li k duální úloze úlohu duální, dostaneme úlohu původní; proto často hovoříme o dvojici *vzájemně duálních* úloh.

**Věta 9.** *Je-li* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *přípustné řešení úlohy* (23), (24), (25) *a je-li* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *přípustné řešení duální úlohy, pak platí nerovnost*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

*Důkaz.* Užijeme-li postupně nerovností (23′) a (23) a nezápornosti přípustných řešení, dostaneme

$$\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + \ldots + c_nx_n \leqq\\
&\leqq (y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1})x_1 +\\
&+ (y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2})x_2 +\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ (y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn})x_n =\\
&= y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) +\\
&+ y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) +\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \leqq\\
&\leqq y_1b_1 + y_2b_2 + \ldots + y_mb_m.
\end{aligned}$$

**Věta 10.** *Přípustná řešení* $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$, $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \ldots, \hat{y}_m)$ *vzájemně duálních úloh* (23) — (25) *a* (23′) — (25′), *pro která platí*

$$c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + \ldots + c_n\hat{x}_n = b_1\hat{y}_1 + b_2\hat{y}_2 + \ldots + b_m\hat{y}_m$$

*jsou optimální.*

*Důkaz.* Ukážeme např., že $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ je optimální řešení úlohy (23) — (25); to, že $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_m)$ je optimální řešení úlohy (23′) — (25′), si čtenář zcela analogicky dokáže sám. Máme dokázat, že pro libovolné přípustné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ úlohy (23) — (25) platí nerovnost

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + \ldots + c_n\hat{x}_n.$$

Avšak podle věty 9 platí

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq b_1\hat{y}_1 + b_2\hat{y}_2 + \ldots + b_m\hat{y}_m$$

a podle předpokladu věty 10 platí

$$b_1\hat{y}_1 + b_2\hat{y}_2 + \ldots + b_m\hat{y}_m = c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + \ldots + c_n\hat{x}_n.$$

**Věta 11.** *Existují-li přípustná řešení vzájemně duálních úloh* (23) — (25) *a* (23′) — (25′), *pak existují i optimální řešení těchto úloh, a je-li* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *optimální řešení úlohy* (23) — (25) *a* $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *optimální řešení úlohy* (23′) — (25′), *pak platí*

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

*Důkaz.* Je zřejmé, že stačí dokázat existenci takových nezáporných řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ soustav

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqq b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqq b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqq b_m,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$
\begin{aligned}
-a_{11}y_1 - a_{21}y_2 - \ldots - a_{m1}y_m &\leqq -c_1, \\
-a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \ldots - a_{m2}y_m &\leqq -c_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\
-a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \ldots - a_{mn}y_m &\leqq -c_n,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

že platí

$$
b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{28}
$$

Protože však pro každé přípustné řešení platí podle věty 9 nerovnost

$$
b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \geqq c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,
$$

stačí místo (28) požadovat splnění podmínky

$$
b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \leqq c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,
$$

a ta je ekvivalentní s podmínkou

$$
b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n \leqq 0. \tag{29}
$$

Máme tedy dokázat, že soustava $m + n + 1$ nerovnic (26), (27), (29) o $m + n$ neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ má nezáporné řešení.

Předpokládejme, že tato soustava nemá nezáporné řešení, potom podle věty 4 existují taková nezáporná čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \lambda$, že platí

$$
\begin{array}{r}
a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m - c_1\lambda \geqq 0, \\
a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m - c_2\lambda \geqq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m - c_n\lambda \geqq 0, \\
-a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2 - \ldots - a_{1n}\eta_n + b_1\lambda \geqq 0, \\
-a_{21}\eta_1 - a_{22}\eta_2 - \ldots - a_{2n}\eta_n + b_2\lambda \geqq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
-a_{m1}\eta_1 - a_{m2}\eta_2 - \ldots - a_{mn}\eta_n + b_m\lambda \geqq 0,
\end{array}
\tag{30}
$$

a zároveň

$$
\begin{array}{r}
b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_m\xi_m - c_1\eta_1 - c_2\eta_2 - \\
- \ldots - c_n\eta_n < 0.
\end{array}
\tag{31}
$$

Ukážeme nejdříve, že nemůže být $\lambda = 0$. Je-li totiž $\lambda = 0$, dostaneme, na základě (30), soustavu nerovnic

$$
\begin{array}{r}
a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m \geqq 0, \\
a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m \geqq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m \geqq 0,
\end{array}
\tag{32a}
$$

$$
\begin{array}{r}
-a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2 - \ldots - a_{1n}\eta_n \geqq 0, \\
-a_{21}\eta_1 - a_{22}\eta_2 - \ldots - a_{2n}\eta_n \geqq 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
-a_{m1}\eta_1 - a_{m2}\eta_2 - \ldots - a_{mn}\eta_n \geqq 0.
\end{array}
\tag{32b}
$$

Podle předpokladu věty existuje přípustné řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ úlohy (23)—(25) a přípustné řešení $(y_1, y_2, \ldots,$

$y_m$) úlohy (23')—(25'). Vynásobíme-li $j$-tou nerovnici soustavy (32a) číslem $x_j$ a vzniklé nerovnice sečteme, dostaneme

$$\begin{aligned}
0 &\leqq x_1(a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{m1}\xi_m) + \\
&+ x_2(a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{m2}\xi_m) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ x_n(a_{1n}\xi_1 + a_{2n}\xi_2 + \ldots + a_{mn}\xi_m) = \\
&= \xi_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\
&+ \xi_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \xi_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \leqq \\
&\leqq \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \ldots + \xi_m b_m.
\end{aligned}$$

Vynásobíme-li $i$-tou nerovnici soustavy (32b) číslem $y_i$ a vzniklé nerovnice sečteme, dostaneme obdobně

$$\begin{aligned}
0 &\leqq y_1(-a_{11}\eta_1 - a_{12}\eta_2 - \ldots - a_{1n}\eta_n) + \\
&+ y_2(-a_{21}\eta_1 - a_{22}\eta_2 - \ldots - a_{2n}\eta_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ y_m(-a_{m1}\eta_1 - a_{m2}\eta_2 - \ldots - a_{mn}\eta_n) = \\
&= \eta_1(-a_{11}y_1 - a_{21}y_1 - \ldots - a_{m1}y_m) + \\
&+ \eta_2(-a_{12}y_1 - a_{22}y_2 - \ldots - a_{m2}y_m) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \eta_n(-a_{1n}y_1 - a_{2n}y_2 - \ldots - a_{mn}y_m) \leqq \\
&\leqq -\eta_1 c_1 - \eta_2 c_2 - \ldots - \eta_n c_n.
\end{aligned}$$

Sečtením takto získaných dvou nerovnic dostaneme nerovnici

$$\begin{aligned}
b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_m\xi_m - c_1\eta_1 - c_2\eta_2 - \ldots - \\
- c_n\eta_n \geqq 0,
\end{aligned}$$

která je ve sporu s nerovnicí (31); musí tedy být $\lambda > 0$. Potom však můžeme každou nerovnici soustavy (30) dělit číslem $\lambda$ a získat tak soustavu

$$
\begin{aligned}
a_{11}\frac{\xi_1}{\lambda} + a_{21}\frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots + a_{m1}\frac{\xi_m}{\lambda} &\geqq c_1, \\
a_{12}\frac{\xi_1}{\lambda} + a_{22}\frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots + a_{m2}\frac{\xi_m}{\lambda} &\geqq c_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\
a_{1n}\frac{\xi_1}{\lambda} + a_{2n}\frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots + a_{mn}\frac{\xi_m}{\lambda} &\geqq c_n, \\
a_{11}\frac{\eta_1}{\lambda} + a_{12}\frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + a_{1n}\frac{\eta_n}{\lambda} &\leqq b_1, \\
a_{21}\frac{\eta_1}{\lambda} + a_{22}\frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + a_{2n}\frac{\eta_n}{\lambda} &\leqq b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\
a_{m1}\frac{\eta_1}{\lambda} + a_{m2}\frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + a_{mn}\frac{\eta_n}{\lambda} &\leqq b_m.
\end{aligned}
$$

To však znamená, že $\left(\frac{\eta_1}{\lambda}, \frac{\eta_2}{\lambda}, \ldots, \frac{\eta_n}{\lambda}\right)$ je přípustné řešení úlohy (23)—(25) a že $\left(\frac{\xi_1}{\lambda}, \frac{\xi_2}{\lambda}, \ldots, \frac{\xi_m}{\lambda}\right)$ je přípustné řešení úlohy duální, tj. úlohy (23')—(25'). Pak ovšem podle věty 9 musí platit nerovnost

$$c_1 \frac{\eta_1}{\lambda} + c_2 \frac{\eta_2}{\lambda} + \ldots + c_n \frac{\eta_n}{\lambda} \leqq b_1 \frac{\xi_1}{\lambda} + b_2 \frac{\xi_2}{\lambda} + \ldots$$
$$\ldots + b_m \frac{\xi_m}{\lambda}\,.$$

Násobíme-li poslední nerovnost číslem $\lambda$, dostaneme nerovnost

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_n\eta_n \leqq b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_m\xi_m,$$

která je ve sporu s nerovnicí (31). Odtud však plyne, že předpoklad o tom, že soustava nerovnic (26), (27), (29) nemá nezáporné řešení, je nesprávný, čímž je věta dokázána.

Věta 11 umožňuje dokázat snadno tuto větu:

**Věta 12.** *Přípustná řešení* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *vzájemně duálních úloh* (23)—(25), (23')—(25') *jsou optimálními právě tehdy, jestliže jsou splněny tyto podmínky:*

*je-li* $x_j > 0$, *je* $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m = c_j$;
*je-li* $y_i > 0$, *je* $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$.

*Důkaz.* Při důkazu věty 9 jsme ukázali, že platí nerovnice

$$
\begin{aligned}
& c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \leqq \\
& \leqq (y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1})\, x_1 + \\
& + (y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2})\, x_2 + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{mn})\, x_n = \\
& = y_1\, (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\
& + y_2\, (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \leqq \\
& \leqq b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.
\end{aligned}
$$

Přitom však podle vět 10 a 11 jsou přípustná řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ optimální právě tehdy, platí-li

$$
c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m,
$$

tj. právě tehdy, platí-li

$$
\begin{aligned}
& [c_1 - (y_1a_{11} + y_2a_{21} + \ldots + y_ma_{m1})]\, x_1 + \\
& + [c_2 - (y_1a_{12} + y_2a_{22} + \ldots + y_ma_{m2})]\, x_2 + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + [c_n - (y_1a_{1n} + y_2a_{2n} + \ldots + y_ma_{nm})]x_n = 0
\end{aligned}
$$

a

$$
\begin{aligned}
& [b_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)]\, y_1 + \\
& + [b_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)]\, y_2 + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + [b_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n)]y_m = 0.
\end{aligned}
$$

Protože každý ze sčítanců na levé straně první rovnosti je nekladný a každý ze sčítanců na levé straně druhé rovnosti je nezáporný, musí být pro $j = 1, 2, \ldots, n$

$$[c_j - (y_1 a_{1j} + y_2 a_{2j} + \ldots + y_m a_{mj})]\, x_j = 0$$

a pro $i = 1, 2, \ldots, m$

$$[b_j - (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n)]\, y_i = 0.$$

Odtud už snadno plyne tvrzení věty.

**Příklad 5.** Vyšetřujme tyto vzájemně duální úlohy:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 \phantom{{}+ 4x_3} + x_4 & \leqq & 4, \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}+ 4x_3 + x_4} & \leqq & 3, \\ x_2 + 4x_3 + x_4 & \leqq & 3, \\ \multicolumn{3}{r}{x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0,} \end{array} \tag{33}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max. \tag{34}$$

$$\begin{array}{rcl} y_1 + 2y_2 \phantom{{}+ y_3} & \geqq & 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 & \geqq & 4, \\ 4y_3 & \geqq & 1, \\ y_1 \phantom{{}+ y_2} + y_3 & \geqq & 1, \\ \multicolumn{3}{r}{y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0,} \end{array} \tag{33'}$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = 4y_1 + 3y_2 + 3y_3 \to \min. \tag{34'}$$

Snadno se lze přesvědčit, že $\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ je přípustné řešení úlohy (33), (34). Věty 10 a 12 umožňují rozhodnout, zda toto řešení je optimální. Je-li $\left(1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$

optimální, musí podle věty 12 platit pro libovolné optimální řešení $(y_1, y_2, y_3)$ úlohy (33'), (34')

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 \phantom{+ y_3} &= 2, \\ 3y_1 + y_2 + y_3 &= 4, \\ 4y_3 &= 1. \end{aligned}$$

Snadno se lze přesvědčit, že tato soustava lineárních rovnic má jediné řešení, a to $y_1 = \frac{11}{10}$, $y_2 = \frac{9}{20}$, $y_3 = \frac{1}{4}$.

Avšak snadno zjistíme, že pro přípustná řešení $\left(1, 1, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{11}{10}, \frac{9}{20}, \frac{1}{4}\right)$ úloh (33), (34) a (33') (34') platí

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = \frac{13}{2} = 4y_1 + 3y_2 + 3y_3,$$

takže podle věty 10 jsou tato přípustná řešení i optimální.

## 3.3. O prahových funkcích

V tomto odstavci uvedeme jednu aplikaci pojmů z teorie lineárních nerovnic a pojmu oddělitelnosti množin, přičemž tato aplikace se vztahuje k teoretické i k technické kybernetice.

Představme si následující situaci. Určitá skupina sestávající z $n$ osob se sešla proto, aby rozhodla hlasováním o přijetí nějakého návrhu. Předpokládáme kvůli jednoduchosti, že se nikdo nemůže zdržet hlasování, tedy každý musí hlasovat buď pro návrh, nebo proti němu.

Přitom hlasy jednotlivých účastníků mohou mít různou „váhu“ (např. v závislosti na autoritě, kterou mají podle své odborné způsobilosti, nebo v závislosti na mocenském postavení, které zaujímají v uvažované skupině). Dále budeme předpokládat, že hlasující osoby jsou očíslovány v nějakém pevně zvoleném pořadí a že váhu $j$-tého člena lze vyjádřit nezáporným číslem $A_j$. Jeden z používaných způsobů pro zhodnocení výsledku provedeného hlasování spočívá v následujícím: Jestliže $j$-tý člen skupiny (s vahou hlasu $A_j$) hlasuje pro návrh, představujeme si, že jeho příspěvek pro přijetí návrhu je $A_j$; v opačném případě pokládáme jeho příspěvek pro přijetí návrhu za nulový. Po skončeném hlasování sečteme příspěvky jednotlivých členů a získaný součet porovnáme s jistou hodnotou $B$, kterou považujeme za „celkový počet hlasů“, jenž je nutný a postačující pro přijetí daného návrhu. Jestliže součet příspěvků (hlasů) jednotlivých členů není menší než $B$, považujeme návrh za přijatý, v opačném případě konstatujeme, že návrh přijat nebyl.[1])

Není těžké si rozmyslet, že lze tuto situaci popsat zavedením jisté funkce $f$ $n$ proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, přičemž každá proměnná $x_j$ nabývá pouze dvou hodnot

[1]) Speciálně v případě $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ můžeme mluvit o „demokratickém“ hlasování. Na druhé straně, situaci, kdy některý ze členů skupiny by chtěl prosazovat svůj názor namířeným samopalem, bychom naším lineárním modelem nepopsali.

0 a 1. Přitom položíme $x_j = 1$ v tom případě, jestliže $j$-tá osoba hlasuje pro návrh a $x_j = 0$ jestliže $j$-tá osoba hlasuje proti návrhu. Funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ může nabývat dvou hodnot, a sice hodnoty 1, jestliže návrh byl přijat, a hodnoty 0, jestliže návrh přijat nebyl. Z toho, co bylo řečeno, je patrné, že funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je definována tímto předpisem:

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 1, \quad \text{jestliže} \quad A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n \geqq B$$

a

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0, \quad \text{jestliže} \quad A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n < B.$$

**Příklad 6.** Položíme $n = 4$, $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 4$ a $B = 3$. Funkce $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ je definována předpisem:

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= 1, \text{jestliže } \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 \geqq 3 \\ f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= 0, \text{jestliže } \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 < 3. \end{aligned} \quad (*)$$

Sestrojíme nyní tabulku hodnot této funkce.

| $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ | $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ | $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ | $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ |
|---|---|---|---|
| 0 0 0 0 | 0 | 1 0 0 0 | 0 |
| 0 0 0 1 | 1 | 1 0 0 1 | 1 |
| 0 0 1 0 | 1 | 1 0 1 0 | 1 |
| 0 0 1 1 | 1 | 1 0 1 1 | 1 |
| 0 1 0 0 | 0 | 1 1 0 0 | 1 |
| 0 1 0 1 | 1 | 1 1 0 1 | 1 |
| 0 1 1 0 | 1 | 1 1 1 0 | 1 |
| 0 1 1 1 | 1 | 1 1 1 1 | 1 |

Popíšeme konstrukci tabulky. V levém sloupci jsou zapsány všechny uspořádané čtveřice $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, kde $\xi_j = 0$ nebo $\xi_j = 1$ pro $j = 1, 2, 3$ a $4$. Snadno zjistíme, že počet těchto čtveřic je $2^4 = 16$. (Každé $\xi_j$ nabývá dvou hodnot, a tedy celkový počet čtveřic je $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.) Celkový počet čtveřic v naší tabulce je 16, přičemž žádná čtveřice se nevyskytuje dvakrát. Z toho tedy vyplývá, že v tabulce se vyskytují všechny čtveřice, každá právě jednou. Na pořadí, ve kterém vypisujeme čtveřice, sice nezáleží (pokud ovšem odpovídajícím způsobem uspořádáme hodnoty funkce), poznamenejme však pro úplnost, že při konstrukci tabulky jsme použili tzv. *lexikografického uspořádání*. Lexikografické uspořádání je v našem případě definováno takto: Nechť $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ a $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ jsou dvě libovolné čtveřice z nul a jedniček. Čtveřice $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ *je před čtveřicí* $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, jestliže nastává alespoň jeden z těchto případů:

1. $\xi_1 = 0$, $\tau_1 = 1$ (ostatní $\xi_j$ a $v_j$ mohou být libovolná),
2. $\xi_1 = \tau_1$, $\xi_2 = 0$, $\tau_2 = 1$ ($\xi_3$, $\xi_4$, $\tau_3$ a $\tau_4$ mohou být libovolná),
3. $\xi_1 = \tau_1$, $\xi_2 = \tau_2$, $\xi_3 = 0$, $\tau_3 = 1$ ($\xi_4$ a $\tau_4$ mohou být libovolná) nebo
4. $\xi_1 = \tau_1$, $\xi_2 = \tau_2$, $\xi_3 = \tau_3$, $\xi_4 = 0$ a $\tau_4 = 1$.

Čtenář snadno ověří, že pořádí čtveřic v tabulce skutečně odpovídá lexikografickému uspořádání 1—4.

Při konstrukci lexikograficky uspořádané posloupnosti čtveřic lze použít následujícího mechanického postupu:

Každé čtveřici $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ přiřadíme ohodnocení

$$w(\xi) = \xi_1 . 2^3 + \xi_2 . 2^2 + \xi_3 . 2^1 + \xi_4 . 2^0$$

a čtveřice uspořádáme vzestupně podle rostoucích $w(\xi)$.

Po této krátké exkurzi do čistě kombinatorických otázek se vrátíme k funkci $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Funkce $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ je definována vztahy (*) a její hodnoty lze přečíst z tabulky. Ze vztahů (*) nebo z tabulky se lze přesvědčit o tom, že v uvažovaném příkladě je návrh přijat při všech možných hlasováních s výjimkou těchto tří případů:

1. Nikdo nehlasuje pro návrh; 2. pro návrh hlasuje pouze první účastník; 3. pro návrh hlasuje pouze druhý účastník. Idealizovaná situace s hlasováním nás přivádí k pojmu tzv. prahové funkce. Zatím jsme předpokládali, že čísla $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ jsou nezáporná; tento předpoklad souvisel s konkrétní povahou naší „hlasovací" situace. Obecně však tento předpoklad nemá opodstatnění, neboť prahové funkce se vyskytují i v jiných aplikacích matematiky, jako např. v neurofyziologii, v slaboproudé elektrotechnice, při konstrukci počítačů, v psychologii, sociologii, toxikologii, teorii baletu aj.

**Definice.** *Prahovou funkcí n proměnných* budeme rozumět funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definovanou na množině všech uspořádaných $n$-tic z jedniček a nul a zobrazující tuto množinu do množiny $\{0, 1\}$, přičemž musí být splněna tato podmínka: Existují reálná čísla $A_1, \ldots, A_n$ a $B$ tak, že platí:

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n \geqq B, \\ 0, \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n < B. \end{cases} \tag{35}$$

Čísla $A_1, \ldots, A_n$ se nazývají *vahami* a číslo $B$ *prahem*.

Z definice prahové funkce je patrné, že je to funkce dosti speciální struktury. V matematické logice a jejích aplikacích se definují tzv. logické funkce. Uvedeme tuto definici.

**Definice.** *Logickou funkcí n proměnných* (označení $F(x_1, \ldots, x_n)$), budeme rozumět zobrazení množiny všech uspořádaných $n$-tic z nul a jedniček do množiny $\{0, 1\}$.

*Poznámka.* Termín logická funkce pochází od toho, že proměnné $x_j$ i hodnotu funkce $F(x_1, \ldots, x_n)$ lze interpretovat jako logické výroky; přitom 1 interpretujeme jako pravdivý výrok „ano" a 0 jako nepravdivý výrok „ne". K ilustraci pojmu logické funkce viz cvičení 8 na konci kapitoly. Srovnáním obou dvou definic dostáváme tuto zřejmou větu:

**Věta 13.** *Každá prahová funkce je logickou funkcí.*

Obrácené tvrzení však neplatí, jak vyplývá z následujícího příkladu.

Příklad 7. Mějme logickou funkci $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, definovanou takto: $\varphi(0, 0, 0) = \varphi(1, 1, 1) = 1$, $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$, jestliže $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0, 0, 0)$ a $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (1, 1, 1)$. Dokážeme, že funkce $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ není prahová, tj. že neexistují čísla $A_1$, $A_2$, $A_3$ a $B$ tak, aby platilo

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{cases} 1, \text{jestliže } A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 \geqq B, \\ 0, \text{jestliže } A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 < B. \end{cases}$$

Důkaz provedeme sporem. Kdyby totiž taková čísla existovala, musela by splňovat nerovnosti

$$\begin{array}{rrl} A_1 + A_2 + A_3 & \geqq B, & (\varphi\,(1, 1, 1) = 1), \\ 0 & \geqq B, & (\varphi\,(0, 0, 0) = 1), \\ -A_1 \qquad\qquad & > -B, & (\varphi\,(1, 0, 0) = 0), \\ -A_2 \qquad & > -B, & (\varphi\,(0, 1, 0) = 0), \\ -A_3 & > -B, & (\varphi\,(0, 0, 1) = 0). \end{array}$$

Nyní druhou nerovnost vynásobíme dvěma a všechny nerovnosti takto vzniklého systému sečteme. Tím dostáváme nerovnost $0 > 0$, která však znamená spor.

Z příkladu 7 tedy vyplývá, že ne každá logická funkce je prahová. Na druhé straně, jestliže nějaká logická funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ je prahová, nejsou koeficienty a pravá strana ve vztazích (35) určeny jednoznačně. Ukážeme si tuto skutečnost na prahové funkci tří proměnných v následujícím příkladu. Důkaz v obecném případě si čtenář lehce provede samostatně.

**Příklad 8.** Vyšetřujme prahovou funkci tří proměnných $\psi(x_1, x_2, x_3)$ definovanou takto:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \geqq 2, \\ 0, \text{ jestliže } \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 < 2. \end{cases}$$

Není těžké ověřit, že funkce $\psi(x_1, x_2, x_3)$ je definována též např. takto:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } 10\xi_1 + 11\xi_2 + 12\xi_3 \geqq 20, \\ 0, \text{ jestliže } 10\xi_1 + 11\xi_2 + 12\xi_3 < 20. \end{cases}$$

Poslední dva příklady nás přivádějí k myšlence, že jedna z nejdůležitějších otázek, který vznikají v teorii prahových funkcí, je následující: Je dána logická funkce $F$ $n$ proměnných. Máme rozhodnout, zda tato funkce je prahová, a v kladném případě nalézt alespoň jedno vyjádření ve tvaru (35). Tato otázka je v celé své šíři značně složitá a lze říci, že doposud nebyla ani zdaleka uspokojivě dořešena. V našem výkladu se omezíme na to, že ukážeme, jak poslední otázka souvisí s pojmem oddělitelnosti, a jako důsledek vyslovíme jedno kritérium. Logická funkce je podle definice definována na množině všech uspořádaných $n$-tic $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, kde $\xi_j = 0$ nebo $\xi_j = 1$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Každá taková $n$-tice je bodem $n$-rozměrného prostoru $R^n$. Všecky tyto body tvoří jistou konečnou množinu v $R^n$. Označme poslední množinu symbolem $B^n$ [1]). Označme dále symbolem

[1]) Množina $B^n$ je množinou vrcholů $n$-rozměrné jednotkové krychle (viz [1] str. 69—70).

$F^{-1}(0)$ množinu všech bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ z $B^n$, pro něž platí $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, a symbolem $F^{-1}(1)$ množinu všech bodů $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, pro něž platí $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1$, tj. symbolicky (tohoto typu symboliky bylo už použito v odst. 2.2):

$$F^{-1}(0) = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B_n \mid F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0\}$$
$$F^{-1}(1) = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B_n \mid F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1\}.$$

(Množiny $F^{-1}(0)$ resp. $F^{-1}(1)$ se obvykle nazývají vzory 0, resp. 1 při zobrazení pomocí funkce $F$.)

Nyní je jasné, že zadáním funkce $F(x_1, \ldots, x_n)$ jsou jednoznačně určeny množiny $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$, a obráceně, ze znalosti množin $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ lze jednoznačně určit funkci $F$. (K určení funkce $F$ stačí ovšem znát jednu z množin $F^{-1}(0)$ nebo $F^{-1}(1)$).

Předpokládejme nyní, že $F(x_1, \ldots, x_n)$ je prahová funkce, a nechť platí

$$\begin{aligned} &F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 1, \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n \geqq B, \\ &F(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n < B. \end{aligned} \tag{35}$$

Poslední vztahy lze přepsat ekvivalentním způsobem takto:

$$\begin{aligned} &(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in F^{-1}(1), \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n \geqq B, \\ &(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in F^{-1}(0), \text{ jestliže } A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n < B. \end{aligned} \tag{35'}$$

**Tím je však dokázána následující**

**Věta 14.** *Funkce $F(x_1, \ldots, x_n)$ je prahová právě tehdy, jestliže nastává alespoň jeden z těchto dvou případů:*
a) *alespoň jedna z množin $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ je prázdná,*
b) *množiny $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ jsou neprázdné a oddělitelné.*

Abychom mohli vyslovit zajímavější kritérium pro to, že funkce $F$ je prahová, zavedeme pojem konvexního obalu konečné množiny bodů prostoru $R^n$. V dalším textu používáme často pro součet $a_1 + a_2 + \ldots + a_r$ symbolického zápisu $\sum_{j=1}^{r} a_j$.

**Definice.** Nechť $A$ je konečná neprázdná množina bodů prostoru $R^n$. Nechť množina $A$ obsahuje body

$$\begin{array}{l}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}),\\ (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}).\end{array}$$

*Konvexním obalem množiny* $A$ (označení $K(A)$) budeme rozumět množinu definovanou takto: $K(A)$ obsahuje každý takový bod $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, pro který existuje $k$-tice čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tak, že $\lambda_\varkappa \geqq 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$, $x_j = \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa x_j^{(\varkappa)}$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$ a $\sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa = 1$.

**Příklad 8.** Nechť body $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_k, y_k)$ jsou vrcholy konvexního mnohoúhelníka $M$. Položme $P =$

$= \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$, takže $P$ je jistá konečná množina. Snadno lze ukázat, že platí

$$K(P) = M.$$

Dále platí zřejmé

**Lemma.** *Platí* $K(A) \supset A$.

*Důkaz* přenecháváme čtenáři. (Návod: Položte $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{\varkappa-1} = 0, \lambda_\varkappa = 1, \lambda_{\varkappa+1} = 0, \ldots, \lambda_k = 0$ postupně pro $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$).

**Věta 15.** *Konvexní obal* $K(A)$ *je konvexním mnohostěnem v* $R^n$.

*Důkaz.* Uvažujme množinu $S$ těch bodů $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in R^k$, pro jejichž souřadnice platí $\lambda_\varkappa \geqq 0$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ a $\sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa = 1$. $S$ je zřejmě konvexním mnohostěnem v $R^k$.

Zobrazení definované vzorci

$$x_j = \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa x_j^{(\varkappa)}$$

je lineární zobrazení $R^k$ do $R^n$, které zobrazuje $S$ na $K(A)$. K zakončení důkazu nyní zbývá použít věty 1.

Nyní jsme schopni zformulovat a dokázat větu:

**Věta 16.** *Logická funkce* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *je prahovou funkcí právě tehdy, jestliže je splněna následující podmín-*

*ka: Buď platí* $F^{-1}(0) = \emptyset$, *nebo* $F^{-1}(1) = \emptyset$, *nebo množiny* $F^{-1}(0)$ *a* $F^{-1}(1)$ *jsou obě neprázdné a platí*

$$K(F^{-1}(0)) \cap K(F^{-1}(1)) = \emptyset. \tag{36}$$

*Důkaz.* A. *Postačitelnost podmínky.* Nechť je splněna podmínka věty. Rozlišíme tyto dvě možnosti:
1. Platí buď $F^{-1}(0) = \emptyset$, nebo $F^{-1}(1) = \emptyset$. V tomto případě je funkce $F$ prahová na základě věty 14.
2. Platí $F^{-1}(0) \neq \emptyset$ a $F^{-1}(1) \neq \emptyset$, a tedy též vtah (35'). Konvexní mnohostěny $K(F^{-1}(0))$, a $K(F^{-1}(1))$ jsou tedy na základě věty 3 oddělitelné, tj. existují čísla $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ a $B$ tak, že platí:

$$\begin{aligned} A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n &< B \text{ pro } (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K(F^{-1}(0)) \\ A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n &\geqq B \text{ pro } (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K(F^{-1}(1)) \end{aligned} \tag{37}$$

Jestliže si však uvědomíme, že platí (viz lemma) $K(F^{-1}(0)) \supset F^{-1}(0)$ a $K(F^{-1}(1)) \supset F^{-1}(1)$, přicházíme k závěru, že množiny $F^{-1}(0)$ a $F^{-1}(1)$ jsou také oddělitelné, což bylo třeba dokázat.

B. *Nutnost podmínky.* Nechť funkce $F$ je prahová, tj. nechť existují čísla $A_1$, ..., $A_n$ a $B$ tak, že platí vztahy (35). Jestliže jedna z množin $F^{-1}(0)$ nebo $F^{-1}(1)$ je prázdná, není už co dokazovat. Předpokládejme tedy, že platí $F^{-1}(0) \neq \emptyset$ a $F^{-1}(1) \neq \emptyset$. Dokážeme, že platí nerovnice (37), čímž bude důkaz dokončen. Dokážeme, že platí první ze vztahů (37). Druhý se dokáže zcela analogicky. Nechť množina $F^{-1}(1)$ obsahuje body

$$(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \ldots, (x_1^{(\varkappa)}, \ldots, x_n^{(\varkappa)}), \ldots, (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}).$$

Podle předpokladu platí

$$A_1 x_1^{(\varkappa)} + \ldots + A_n x_n^{(\varkappa)} \geqq B \tag{38}$$

pro $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$. Budiž nyní $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathsf{K}(\mathsf{F}^{-1}(1))$. Z nerovností (38) dostáváme

$$A_1 x_1 + \ldots + A_n x_n = A_1 \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa x_1^{(\varkappa)} + \ldots +$$
$$+ A_n \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa x_n^{(\varkappa)} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa (A_1 x_1^{(\varkappa)} + \ldots + A_n x_n^{(\varkappa)}) \geqq$$
$$\geqq \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa B = B \sum_{\varkappa=1}^{k} \lambda_\varkappa = B,$$

což bylo třeba dokázat.

Z podaného důkazu však vyplývá následující věta, která má daleko obecnější platnost než pouze v teorii prahových funkcí.

**Věta 17.** *Nechť* $\mathsf{A}$ a $\mathsf{B}$ *jsou dvě neprázdné konečné množiny bodů v prostoru* $\mathsf{R}^n$. *Potom jsou množiny* $\mathsf{A}$ *a* $\mathsf{B}$ *oddělitelné právě tehdy, jestliže platí*

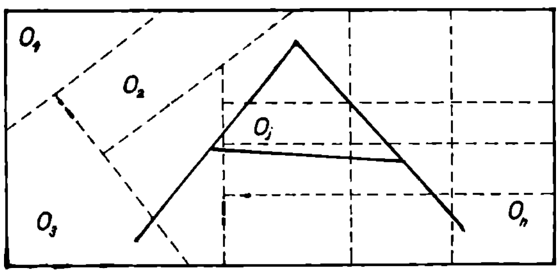
$$\mathsf{K}(\mathsf{A}) \cap \mathsf{K}(\mathsf{B}) = \emptyset.$$

## 3.4. O rozlišování objektů

Téma tohoto odstavce se úzce přimyká k tématu předcházejícího odstavce. Povíme si něco o klasifikaci údajů. V procesu současné vědeckotechnické revoluce se velká pozornost věnuje výzkumům souvisejícím s perspektivou automatického řešení tzv. intelektuálních úloh, jejichž řešení mohl podle tradičních názorů provádět pouze člověk. Tak např. počítače hrají šachy, užívají se při předpovídání počasí, k rozlišování zvuků řeči, k automatickému čtení rukopisů, k nalézání diagnóz v medicíně aj.

Mnohé z těchto úloh vyžadují schopnost klasifikovat (rozlišovat) velké množství údajů, popisujících zkoumané objekty, popřípadě celé situace. Všimněme si např. principu, na kterém pracují smyslové orgány člověka a živočichů. Jestliže pozorujeme nějaký předmět, probíhá v podstatě tento proces: Jednotlivé světelné signály přicházejí na sítnici oka a přinášejí informaci o rozměrech, tvaru, velikosti, vzdálenosti, barvě a prostorovém umístění objektu. Tato informace se přenáší prostřednictvím nervové soustavy do příslušných center a tam se vytváří obraz pozorovaného objektu. Tento mechanismus zrakového vnímání nám umožňuje rozlišovat velmi mnoho navzájem různých objektů (rozlišíme stůl, knihu, člověka atd.). Jako ilustraci matematických metod a problémů, které vznikají v souvislosti s problematikou rozlišování objektů, popíšeme jistý jednoduchý matematický model, který budeme nazývat *klasifikátorem objektů.*

Představme si, že máme k dispozici jistou obdélníkovou destičku a kousek křídy. Křídou můžeme na destičku kreslit různé obrazce — objekty, např. písmena latinské abecedy. Člověk držící křídu napíše nějaké písmeno, potom toto písmeno smaže a napíše nějaké jiné písmeno atd. Naším úkolem je diskutovat existenci zařízení, které by umožňovalo automaticky rozhodovat, které písmeno je na destičce vyobrazeno. Situace je zde totiž komplikována tím, že různí lidé píší např. písmeno *A* různě a dokonce ani týž člověk nenapíše dvakrát za sebou dvě stejná písmena *A*. Zařízení, které chceme navrhnout, musí především „umět číst" napsaná písmena. Každé písmeno na destičce je zobrazeno vlastně tím, že některé body na destičce jsou bílé (leží na nich vrstva křídy), ostatní jsou černé. Dokonalé zařízení by tedy muselo reagovat na jednotlivé body destičky, což je



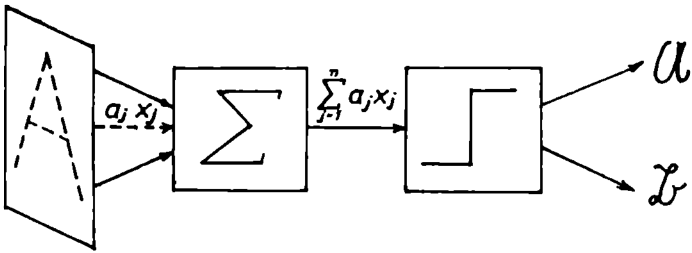

Obr. 7.

ovšem neuskutečnitelný požadavek, odporující základním fyzikálním faktům.

Abychom nalezli východisko z této situace, rozdělíme obdélníkovou tabulku na konečný počet oblastí, označených řekněme $O_1, O_2, \ldots, O_n$ (viz obr. 7.). Nyní každému objektu na destičce přiřadíme jistou podmnožinu množiny $\{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$, a sice množinu těch oblastí, jejichž vnitřkem prochází čára objektu. Dále předpokládáme, že oblasti $O_i$ odpovídá jisté zařízení, které vytváří signál hodnoty $a_i$, jestliže vnitřkem oblasti prochází čára písmene, a vytváří signál nula v opačném případě. Jestliže je tedy na destičce jistý objekt, vznikne jistá množina signálů. Tyto signály, pomocí nichž je objekt zakódován, přicházejí dále do centrálního zařízení, jehož úkolem je provést klasifikaci objektu.

Protože nám jde o pouhé vysvětlení principů, přijmeme dále ještě tento zjednodušující předpoklad: Zařízení bude rozlišovat navzájem pouze dvě třídy objektů, např. typ $A$ od typu $B$. Nakonec nám tedy zbývá popsat schéma práce centrálního zařízení. Toto zařízení bude sestávat ze dvou „sériově zapojených" částí: *zařízení na sčítání signálů* a *klasifikující zařízení.* Zařízení na sčítání signálů přijímá jednotlivé signály z destičky a na jeho výstupu se objevuje signál, jehož hodnota je rovna součtu hodnot jednotlivých signálů. Klasifikující zařízení srovnává hodnotu signálu-součtu s jistou danou hodnotou $a$, nazývanou *prahem:* Jestliže hodnota signálu není menší než práh, pak patří objekt do jedné třídy, v opačném případě patří objekt do druhé třídy. Schematicky je popsaný klasifikátor znázorněn na obr. 8.

Nyní napíšeme nerovnosti, popisující funkci klasifikátoru. Za tím účelem oblasti $O_j$ přiřadíme dvouhodnotovou proměnnou $x_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), přičemž položíme $x_j = 1$, jestliže objekt prochází vnitřkem $O_j$ a $x_j = 0$ v opačném případě. Tímto způsobem je tedy objekt




Obr. 8.

na destičce popsán $n$-ticí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Protože zařízení není schopno rozlišit jemnější rozdíly mezi objekty, můžeme jednoduše ztotožnit objekty na destičce s $n$-ticemi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Z tohoto důvodu budeme místo „objekt popsaný $n$-ticí $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$" říkat prostě „objekt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$". Objekt nyní patří do první třídy, jestliže platí

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geqq a, \tag{39}$$

a patří do druhé třídy, jestliže

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j < a. \tag{40}$$

Popsaný klasifikátor tedy rozdělí danou množinu objektů na dvě třídy.

Nyní budeme zkoumat množinu klasifikátorů popsaného typu při pevně zvoleném rozkladu na systém oblastí $\{O_j\}$, avšak při libovolně volitelných hodnotách vah $a_j$ a prahu $a$.

Zformulujeme *problém syntézy klasifikátoru*. Je dána jistá množina objektů $\mathfrak{C} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \subset B^n$ (viz str. 64) a její rozklad na dvě podmnožiny:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \emptyset.$$

Problém záleží v nalezení vah $a_j$ a prahu $a$ tak, aby odpovídající klasifikátor rozlišoval množinu $\mathfrak{A}$ od $\mathfrak{B}$. (Množina $\mathfrak{C}$ je obvykle vlastní podmnožinou[1]) $B^n$.)

Je zřejmé, že k řešení posledního problému je nutno řešit soustavu lineárních nerovností (39), (40). My se však — podobně jako v předcházejícím odstavci — omezíme na otázku existence. Z věty 17 předchozího odstavce vyplývá nsáledující

**Věta 18.** *Klasifikátor (tj. koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ a $a$) rozlišující dvě třídy objektů $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ existuje právě tehdy, jestliže je splněna jedna z těchto dvou podmínek:*

*a) alespoň jedna z množin $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ je prázdná,*

*b) obě dvě množiny jsou neprázdné a platí*

$$K(\mathfrak{A}) \cap K(\mathfrak{B}) = \emptyset.$$

---

[1]) Říkáme, že $M$ je vlastní podmnožinou množiny $N$, jestliže $M \subset N$ a $M \neq N$.

Doufáme, že se nám v tomto odstavci alespoň částečně podařilo ukázat, v čem spočívá problematika rozlišování objektů. Poznamenejme, že celá problematika i metody řešení jsou podstatně složitější. Tak především obvykle jde o rozlišení několika tříd objektů, jak jsme ostatně uváděli na začátku tohoto odstavce. Za druhé v uvažovaném nejjednodušším případě se vytváří prostý součet signálů $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$, zatímco v obecném případě se používá i složitějších (nelineárních) závislostí na proměnných $x_j$, což přirozeně má za následek zvětšení rozlišovacích schopností klasifikátoru.

Nakonec nejdůležitější poznámka. Množina rozlišovaných objektů nebývá zpravidla a priori známa, nebo obsahuje „příliš mnoho“ prvků, nebo je složitá apod. V takových případech se k syntéze klasifikátorů obvykle používá metod adaptace (učení). Tyto metody spočívají v tom, že na klasifikátor přichází v nějaké posloupnosti pouze jistá podmnožina „typických“ objektů, u nichž je známo předem, do které třídy příslušný objekt patří. Na základě učící posloupnosti objektů se určí parametry klasifikátoru.

## Cvičení

Ve cvičeních 1—5 je $x_j \geqq 0$.

**1.** Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leqq 3, \\ -3x_1 + 8x_2 &\leqq -5, \\ 3x_1 - 2x_2 &\to \max. \end{aligned}$$

nemá přípustné řešení.

**2.** Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leqq -1, \\ x_1 - x_2 &\leqq 2, \\ x_1 + x_2 &\to \max \end{aligned}$$

má přípustná řešení a nemá optimální řešení.

**3.** Bez přímých výpočtů dokažte, že úloha duální k úloze ze cvičení 2 nemá přípustné řešení.

**4.** Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqq 4, \\ x_3 + x_4 &\leqq 1, \\ x_2 + x_3 &\leqq 1, \\ x_1 + x_3 &\leqq 1, \\ x_3 + x_4 &\leqq 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\to \max \end{aligned}$$

má optimální řešení $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

5. Dokažte, že úloha lineární optimalizace

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leqq 2, \\ x_1 + 2x_2 &\leqq 2, \\ x_1 + x_2 &\leqq 5, \\ x_1 - x_2 &\to \max \end{aligned}$$

má optimální řešení $x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

6. V odstavci 1.3 jsme definovali pojem konvexní množiny. Nechť $K$ je libovolná konvexní množina obsahující konečnou a neprázdnou množinu bodů $M$ prostoru $R^n$. Potom platí $K \supset K(M)$ (tento fakt se též někdy vyjadřuje slovně: Konvexní obal je „nejmenší“ konvexní množina obsahující danou množinu).

7. a) Určete počet prvků množiny $B^n$ — viz str. 64. (Odpověď: $2^n$.) b) Určete počet všech logických funkcí $n$ proměnných. (Odpověď: $2^{2^n}$.) (Návod: Všimněte si, že tento počet se rovná počtu prvků množiny $B^{2^n}$.)

8. (Ilustrace pojmu logické funkce.) Nechť **A, B, C** označují libovolné výroky. Těmto výrokům přiřadíme dvouhodnotové proměnné $x_A$, $x_B$, $x_C$ definované takto: $x_A = 1$, jestliže je výrok **A** pravdivý, $x_A = 0$, jestliže je nepravdivý; zcela analogický je význam proměnných $x_B$ a $x_C$. Nechť nyní výrok **C** vznikne operací disjunkce (logického součtu), symbolicky to zapisujeme $\mathbf{C} = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, tj. $\mathbf{C} = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ je pravdivý právě tehdy, jestliže je pravdivý alespoň jeden z výroků **A** nebo **B**. V tomto

případě je $x_C$ logickou funkcí proměnných $x_A$ a $x_B$, položme

$$x_C = f_{A \vee B}(x_A, x_B).$$

a) Sestrojte tabulku hodnot funkce $f_{A \vee B}(x_A, x_B)$.
b) Ukažte, že platí

$$x_C = \max(x_A, x_B) = x_A + x_B - x_A x_B.$$

9. Přiřaďme každé uspořádané čtveřici z nul a jedniček $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ číslo

$$d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \xi_1 2^3 + \xi_2 2^2 + \xi_3 2^1 + \xi_4.$$

Ukažte, že lexikograficky uspořádané posloupnosti čtveřic odpovídá rostoucí posloupnosti čísel $d(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$.

10. Uvažujme množinu všech uspořádaných $n$-tic $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ z nul a jedniček. Každé $n$-tici $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ přiřadíme číslo

$$d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1 2^{n-1} + \xi_2 2^{n-2} + \ldots + \xi_n.$$

Na množině všech $n$-tic definujeme vztah lexikografického uspořádání: Budeme říkat, že $n$-tice $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ je před $n$-ticí $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ a zapíšeme to symbolicky $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) < (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, jestliže

$$d(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) < d(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n).$$

Ukažte způsob konstrukce lexikograficky uspořádané posloupnosti $n$-tic, analogický popsanému způsobu uspořádání čtveřic.

# Použitá literatura

[1] K. Havlíček, Prostory o čtyřech a více rozměrech, edice Škola mladých matematiků, sv. 12.

[2] K. Havlíček, Analytická geometrie a nerovnosti, edice Škola mladých matematiků, sv. 18.

[3] J. Vyšín, Konvexní útvary, edice Škola mladých matematiků, sv. 9.

[4] F. Veselý, O nerovnostech a nerovnicích, edice Škola mladých matematiků, sv. 48.

[5] D. Gale, The Theory of Linear Economic Models, McGraw-Hill, 1960, ruský překlad, Moskva 1963.

[6] Linear Inequalities and Related Systems (sborník statí), Princeton 1956, ruský překlad, Moskva 1959.

[7] N. J. Nilsson, Learning Machines (Foundations of Trainable Pattern-Classifying Systems), McGraw-Hill, 1965, ruský překlad, Moskva 1967.

Seznam dosud vydaných svazků edice
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ
v nakladatelství Mladá fronta

1. *František Hradecký — Milan Koman — Jan Vyšín:* Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961, 1963 a 1977
2. *Jiří Sedláček:* Co víme o přirozených číslech, 1961, 1965 a 1976
3. *Jaroslav Šedivý:* Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler — Jiří Jarník:* O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý:* O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný:* Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý:* O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa:* O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín:* Konvexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář:* Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček:* Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler — Josef Andrys:* O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý:* O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák:* Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník:* Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967

18. *Karel Havlíček:* Analytická geometrie a nerovnosti, 1967
19. *Jiří Jarník:* Komplexní čísla a funkce, 1967
20. *Bruno Budinský — Stanislav Šmakal:* Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck:* Kongruence, 1968
22. *Tibor Šalát:* Dokonalé a spriatelené čísla, 1969
23. *Jaroslav Morávek — Milan Vlach:* Oddělitelnost množin, 1969
24. *Ján Gatial — Milan Hejný:* Stavba Lobačevského planimetrie, 1969
25. *Leo Bukovský — Igor Kluvánek:* Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša:* Polynomy v moderní algebře, 1970
27. *Stanislav Horák:* Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský — Stanislav Šmakal:* Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek:* Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman — Jan Vyšín:* Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko:* Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín — Jitka Kučerová:* Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek:* O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger:* O grupách, 1974
35. *Alois Kufner:* Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý:* O aplikáciach matematiky, 1976
37. *Boleslav Riečan — Zdena Riečanová:* O pravdepodobnosti, 1976
38. *Juraj Bosák:* Latinské štvorce, 1976
39. *Alois Kufner:* Nerovnosti a odhady, 1975
40. *Antonín Vrba:* Princip matematické indukce, 1977
41. *Bohdan Zelinka:* Rovinné grafy, 1977
42. *Ladislav Beran:* Uspořádané množiny, 1978
43. *Jiří Jarník:* Posloupnosti a řady, 1979
44. *Bohdan Zelinka:* Matematika hrou i vážně, 1979

45. *Antonín Vrba:* Kombinatorika, 1980
46. *Jaroslav Šedivý:* Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, 1980
47. *Arnošt Niederle:* Zajímavé dvojice trojúhelníků, 1980
48. *František Veselý:* O nerovnostech a nerovnicích, 1982
49. *Pavel Vít:* Řetězové zlomky, 1982
50. *Adam Płocki:* O náhodě a pravděpodobnosti, 1982
51. *N. B. Vasiljev — V. L. Gutenmacher:* Přímky a křivky, 1982
52. *Alois Kufner:* Symetrické funkce, 1982
53. *Ján Gatial — Tomáš Hecht — Milan Hejný:* Hry takmer matematické, 1982
54. *Josef Holubář:* Množiny bodů v prostoru, 1983
55. *Ljubomir Davidov:* Funkcionální rovnice, 1984
56. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1985
57. *Stanislav Horák:* Nerovnosti v trojúhelníku, 1986
58. *Herbert Kästner — Peter Göthner:* Algebra — každý začátek je lehký, 1986

## OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JAROSLAV MORÁVEK
MILAN VLACH

# Oddělitelnost množin

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil a kresbami opatřil Vladimír Doležal
Odpovědné redaktorky Zdena Šmídová a Blanka Fučíková
Technický redaktor Vladimír Váoha
Publikace číslo 4915
Edice Škola mladých matematiků, svazek 59
Vytiskl MÍR 1, n. p., Václavské nám. 15, Praha 1
2,79 AA, 3,41 VA, 88 stran
Náklad 5000 výtisků. Druhé vydání
Praha 1987. 508/21/81.5
23-087-87 03/2
Cena brožovaného výtisku 5 Kčs

[redacted]


23 - 087 - 87
03/2
Cena brož.
5 Kčs