Množiny bodů v prostoru

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

MNOŽINY BODŮ V PROSTORU

54

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JOSEF HOLUBÁŘ

Množiny bodů v prostoru

Pro nové vydání upravil
Leo Boček

PRAHA 1983
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

1. kapitola

ÚVOD

Vám, mladí přátelé, je už ze základní školy dobře znám pojem *množiny bodů* a pojem *množiny všech bodů, které mají určitou vlastnost*, pokud se ovšem jedná o útvary v rovině. Slova množina bodů budeme zkracovat m. b. a místo množina všech bodů budeme stručně psát m. v. b. V planimetrii jste už řešili mnoho konstrukčních úloh, při jejichž řešení se m. b. často používá. Vždyť konstrukční geometrická úloha má často řešení, jež dostaneme jako průnik dvou nebo více množin bodů, které jsme předtím nalezli (srovnej např. úlohu 8 řešenou v našem textu na str. 30). Potom je odvození příslušných m. b. vlastně řešením jistých obecnějších konstrukčních úloh, s kterými jsou m. b. v úzké souvislosti.

Ve škole jste se však dosud málo setkali s pojmem m. b., který se vztahuje na útvary prostorové. V této knížce bych vás chtěl, zvláště pak účastníky matematické olympiády, seznámit s některými m. b. v prostoru. Prostorem zde rozumíme *trojrozměrný euklidovský prostor*, v němž se vyskytují všechny geometrické útvary, které jste probírali ve škole. Také m. b. v prostoru se často používají v konstrukčních úlohách, a to prostorových. V našich úvahách, zvláště na začátku knížky, zdůrazníme obdobu a souvislosti m. b. prostorových s m. b. v rovině. Uvidíme, jak se vyšetřování m. v. b. v prostoru často a výhodně převádí na vyšetřování

m. v. b. v rovině a jak se z těchto m. b. rovinných přejde do prostoru zobrazením, např. otáčením, rovnoběžným posunutím nebo stejnolehlostí apod., čímž se studium m. b. v prostoru značně usnadní.

Při vyšetřování m. b. v prostoru se nám vyskytnou plochy běžné v prostorové geometrii, s kterými jste se však na základní škole nesetkali, jako např. další *rotační plochy druhého stupně*, tzv. *kvadriky*. Z nich jste poznali rotační plochu válcovou, kuželovou a kulovou i jejich vznik. Pokud jde o kulovou plochu, připomeňme k její známé definici pomocí středu a poloměru a k jejímu vytvoření pomocí rotace kružnice kolem jejího průměru ještě Thaletovo a Apolloniovo vytvoření kulové plochy. Tato vytvoření jsou jenom prostorovým zobecněním Thaletova a Apolloniova vytvoření kružnice, která znáte z planimetrie, viz příklad 4 kapitoly 2 na str. 11.

Další rotační kvadriky vznikají *rotací kuželoseček* kolem některé z jejich os:

Rotací elipsy, která má ohniska v bodech F, G, kolem její hlavní osy vznikne *rotační elipsoid protáhlý* s ohnisky v bodech F, G, definovaný jako m. v. b. v prostoru, které mají od daných bodů F, G daný součet vzdáleností rovný $2a > |FG|$, kde je a velikost hlavní poloosy výchozí elipsy a také hlavní poloosy vzniklého elipsoidu. Rotací téže elipsy kolem její vedlejší osy vznikne další kvadrika, *rotační elipsoid zploštělý*.

Otáčením hyperboly s ohnisky F, G kolem její hlavní osy vznikne *rotační hyperboloid dvoudílný* s ohnisky v bodech F, G, definovaný jako m. v. b. v prostoru, které mají od daných bodů F, G danou absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností rovnou $2a < |FG|$. Při této rotaci vytvářejí asymptoty rotující hyperboly asymptotickou kuželovou plochu vzniklého hyperboloidu. Rotuje-li tatáž hyperbola kolem své vedlejší osy, vznikne *rotační* *hyperboloid jednodílný*, který má mnoho zajímavých vlastností (např. obsahuje přímky a lze jej také vytvořit rotací každé takové přímky kolem jeho osy).

Rotuje-li parabola s ohniskem v bodě F a řídicí přímkou d kolem své osy, vzniká *rotační paraboloid* s ohniskem v bodě F a řídicí rovinou ϱ, která prochází přímkou d a která je kolmá na osu výchozí paraboly. Rotační paraboloid je definován jako m. v. b. v prostoru, které mají od daného bodu F a od dané roviny ϱ vzdálenosti sobě rovné.

Při našich úvahách o m. b. v prostoru se nám vyskytnou kuželosečky, jejichž ohniskové definice znáte, které však zde dostaneme jako *průniky kvadriky a roviny*, tedy jako *rovinné řezy kvadriky*. Uveďme zde alespoň některé věty, a to bez důkazů.

Průnikem rotační válcové plochy V s osou o a roviny σ je:

a) *dvojice rovnoběžných přímek* plochy V nebo *jedna přímka* plochy V, nebo *množina prázdná*, je-li $\sigma \parallel o$;

b) *elipsa*, je-li rovina σ různoběžná s osou o. Je-li rovina σ kolmá k ose o, je tato elipsa *kružnicí*.

Průnikem rotační kuželové plochy K s osou o a roviny σ je:

a) *dvojice přímek* plochy K nebo *jedna přímka* plochy K, nebo pouze *vrchol* plochy K, jestliže rovina σ prochází vrcholem kuželové plochy;

b) *elipsa* (ve zvláštním případě *kružnice*), je-li rovina σ různoběžná se všemi přímkami plochy K a neprochází jejím vrcholem;

c) *hyperbola*, neprochází-li rovina σ vrcholem plochy K a je-li rovnoběžná právě se dvěma přímkami plochy K;

d) *parabola*, neprochází-li rovina σ vrcholem plochy K a je-li rovnoběžná právě s jednou přímkou plochy K.

V naší knížce půjde v podstatě o řešení příkladů m. v. b. v prostoru vybraných tak, aby vás mohly zaujmout i poučit. Geometrické myšlení pěstované studiem planimetrických útvarů si tím rozšíříte, a hlavně prohloubíte. Pro názornost budeme často používat vedle pravoúhlých průmětů také náčrtů prostorových útvarů sestrojených v známém volném rovnoběžném promítání. Tyto náčrty vám usnadní porozumění vztahům mezi prostorovými útvary a pomohou vám i v dalším rozvoji prostorové představivosti. Některé příklady m. b. jsou ponechány jako úlohy doprovázené částečnými výsledky k řešení vám samotným.

2. kapitola

NĚKTERÉ ANALOGICKÉ MNOŽINY BODŮ V ROVINĚ A V PROSTORU

Dokážeme-li o množině bodů $\mathcal{G}$, že každý její bod má vlastnost $\mathcal{V}$, dokázali jsme, že $\mathcal{G}$ je m. b., které mají vlastnost $\mathcal{V}$. Chceme-li dokázat, že $\mathcal{G}$ je množinou všech bodů (m. v. b.), které mají vlastnost $\mathcal{V}$, musíme ještě dokázat, že každý bod, který má vlastnost $\mathcal{V}$, patří do množiny $\mathcal{G}$.

Všimněme si nyní některých m. b. v prostoru v souvislosti s příslušnými m. b. v rovině a ukažme postup vyšetřování nejdříve na nejjednodušším příkladě.

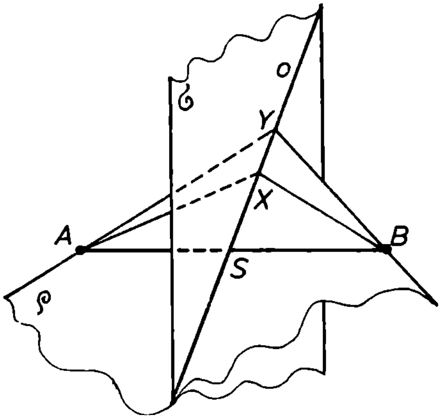
1. Víme, že v rovině platí věta: M. v. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B vzdálenosti sobě rovné, je osa úsečky AB.

V prostoru m. v. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B sobě rovné vzdálenosti, je rovina σ kolmá k přímce AB a procházející středem úsečky AB, tj. rovina souměrnosti bodů A, B.

Důkaz. Nechť o určitém bodu X v prostoru, který neleží na přímce AB, platí vztah $|AX| = |BX|$. Potom body A, B, X určují rovinu ϱ. V této rovině, jak víte, náleží bod X přímce o, která je osou úsečky AB, a obráceně, každý další bod Y zvolený na přímce o má od daných bodů A, B vzdálenosti sobě rovné. Tuto vlastnost můžeme pro body Y dokázat ze shodných pravoúhlých trojúhelníků $\triangle AYS \cong \triangle BYS$, kde bod $S \equiv \equiv AB.o$ je střed úsečky AB. V trojúhelnících $\triangle AYS$,

$\triangle BYS$ totiž platí $\sphericalangle ASY = \sphericalangle BSY$, $|AS| = |BS|$. Bod S má ovšem také dokazovanou vlastnost. Přímka o je tedy v rovině ϱ m. v. b., které mají od bodů A, B sobě rovné vzdálenosti.

Můžeme však v každé rovině ϱ proložené přímkou AB (tyto roviny tvoří tzv. svazek rovin) určit přímku o, osu



Obr. 1

úsečky AB (obr. 1). Všechny takto obdržené přímky o vyplňují, jak známo, rovinu σ kolmou k AB, procházející středem úsečky AB. O bodech roviny σ (tj. o bodech přímek o) jsme tak dokázali, že mají od bodů A, B vzdálenosti sobě rovné a že také obráceně, má-li některý bod stejně velké vzdálenosti od bodů A, B, tak leží v rovině σ. Tím je dokázáno, že rovina σ je hledanou prostorovou m. v. b.

Všimněme si, že všechny přímky o vyplňující rovinu σ vzniknou z jedné z nich otáčením kolem přímky AB jakožto osy rotace, tedy určitým shodným zobrazením.

2. V rovině platí: m. v. b., které mají od daných dvou bodů A, $B (A \neq B)$ daný součet vzdáleností rovný $2a > |AB|$, je elipsa s ohnisky A, B a hlavní poloosou o velikosti a.

V prostoru dostáváme: *M. v. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B daný součet vzdáleností rovný $2a > |AB|$, je rotační elipsoid protáhlý ε s ohnisky A, B a hlavní poloosou velikosti a.* Přímka AB je osou rotace plochy ε.

Důkaz bychom provedli obdobně jako v předchozím příkladě pomocí svazku rovin o ose v přímce AB při použití otáčení jedné z rovin tohoto svazku. Proveďte sami.

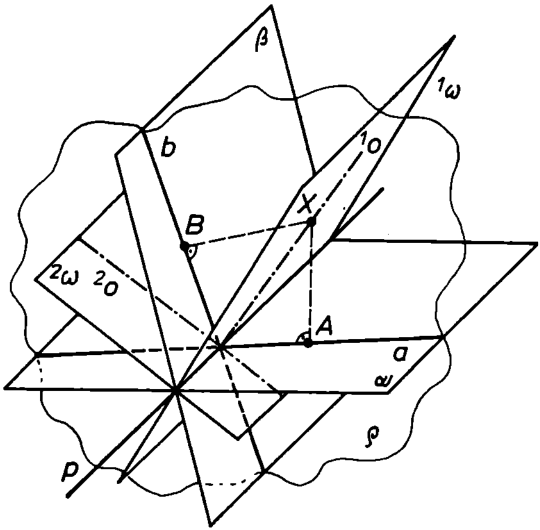
Úloha 1. Určete množinu všech bodů, které mají od daných dvou bodů A, B $(A \neq B)$ danou absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností rovnou $2a < |AB|$. [Rotační dvoudílný hyperboloid.]

Úloha 2. Určete m. v. b., které mají od dané roviny ϱ a od daného bodu A, který neleží v rovině ϱ, stejně velké vzdálenosti. [Rotační paraboloid s ohniskem v bodě A a s řídicí rovinou ϱ.]

3. V rovině platí: M. v. b., které mají od dvou daných různoběžných přímek a, b sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě přímky ${}^1o \perp {}^2o$, a to osy souměrnosti přímek a, b (osy úhlů, které přímky a, b tvoří).

Snadno přejdeme do prostoru. Platí: *M. v. b., které mají od daných dvou různoběžných rovin α, β sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě roviny ${}^1\omega$, ${}^2\omega$, a to roviny souměrnosti* *rovin α, β, tj. roviny souměrnosti klínů, které roviny α, β tvoří.* (Klín se definuje jako průnik dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny mají společnou přímku, hranu klínu.)

Důkaz. Nechť v prostoru pro určitý bod X, který neleží ani v rovině α, ani v rovině β, platí vztah $|XA| = |XB|$, kde body A a B jsou paty kolmic sestrojených bodem X k rovinám α, β. Potom je rovina $\varrho \equiv XAB$ kolmá k průsečnici p rovin α, β a protíná roviny α, β v přímkách $a \equiv \alpha . \varrho$, $b \equiv \beta . \varrho$. Přímky a, b jsou rameny úhlů, jimiž měříme velikosti daných čtyř klínů, určených rovinami α, β (obr. 2). V rovině ϱ lze sestrojit osy souměrnosti ${}^1o$, ${}^2o$ přímek a, b, a zvolený bod X je zřejmě jeden



Obr. 2

z bodů, který náleží m. v. b. tvořené dvojicí přímek $^1o \perp {}^2o$. Jejich body mají od přímek a, b stejné vzdálenosti. Obdobně je tomu také v každé rovině $\varrho \perp p$. V ní dostaneme obdobně dvojici přímek $^1o \perp {}^2o$, jejichž body tvoří v ϱ m. v. b. požadované vlastnosti. Všechny dvojice přímek ^1o, ^2o vyplňují dvě roviny $^1\omega \perp {}^2\omega$, jejichž body mají požadovanou vlastnost. Ze vzniku rovin $^1\omega$, $^2\omega$ vyplývá, že o jejich bodech platí: a) každý bod mající požadovanou vlastnost náleží některé z rovin $^1\omega$, $^2\omega$, b) každý bod náležející rovině $^1\omega$ nebo $^2\omega$ má onu vlastnost (také ovšem body přímky p, kde jde o vzdálenosti nulové).

Připomeňme si, že každá dvojice přímek ^1o, ^2o, vyplňující roviny naší prostorové m. v. b., vznikne z jedné takové dvojice opět shodným zobrazením, a to rovnoběžným posunutím ve směru daném přímkou p.

Úloha 3. Určete m. v. b., které mají stejné vzdálenosti od dvou daných rovnoběžných a různých rovin. [Rovina souměrnosti daných rovin s nimi rovnoběžná.]

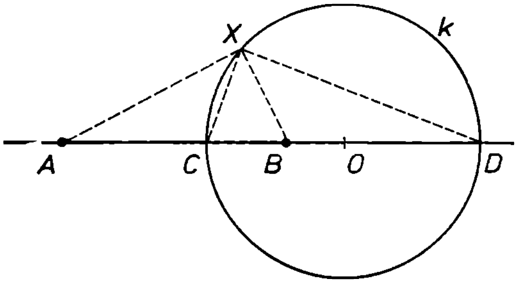
Úloha 4. Určete m. v. b., které mají od dané roviny vzdálenost rovnou dané délce $d > 0$. [Dvě roviny s danou rovinou rovnoběžné.]

Úloha 5. Určete m. v. b., které mají od daných dvou a) různoběžných, b) rovnoběžných rovin vzdálenosti v daném poměru $0 < p : q \neq 1$. [a) Dvě roviny náležející svazku daných rovin, b) dvě roviny s danými rovinami rovnoběžné.]

4. V rovině platí: M. v. b., které mají od daných dvou bodů A, B $(A \not\equiv B)$ daný poměr vzdáleností λ, $0 < \lambda \neq 1$, je kružnice $k(A, B, \lambda)$, tzv. *Apolloniova*.

Její střed O leží na přímce AB a o krajních bodech C, D jejího průměru platí (obr. 3):

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \lambda \neq 1.$$



Obr. 3

Důkaz najde čtenář v knížce: *J. Šedivý*, Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, str. 89—91. (Škola mladých matematiků, sv. 46, Praha 1980.)

V prostoru platí: *M. v. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B daný poměr vzdáleností λ, $0 < \lambda \neq 1$, je kulová plocha $\varkappa(A, B, \lambda)$, zv. Apolloniova, jejíž střed O leží na přímce AB a pro jejíž krajní body C, D průměru AB platí:*

$$|(ABC)| = |(ABD)| = \lambda.$$

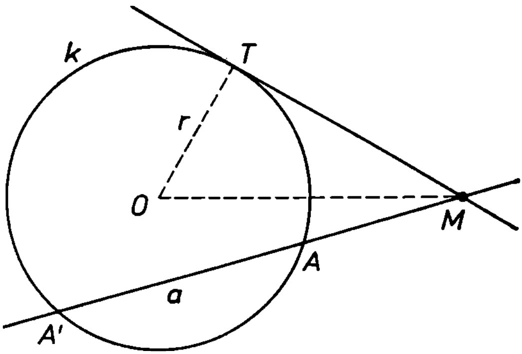
Přitom symbol (ABC) značí tzv. dělicí poměr bodu C na přímce AB vzhledem k základním bodům A, B; je tedy $|(ABC)| = |AC| : |BC|$.

Důkaz této věty se provede pomocí svazku rovin o ose v přímce AB a plochu $\varkappa$ dostaneme otáčením Apolloniovy kružnice $k(A, B, \lambda)$ kolem přímky AB. Proveďte sami.

Úloha 6. Je dána rovina ϱ a mimo ni dva různé body A, B; přitom přímka AB není kolmá k rovině ϱ. Určete v rovině ϱ m. v. b., jejichž spojnice s body A, B mají od roviny ϱ stejné odchylky $\neq 90°$. [Apolloniova kružnice $k(A', B', \lambda)$, kde body A', B' jsou pravoúhlé průměty bodů A, B do roviny ϱ a poměr $\lambda = |AA'| : |BB'|$. V případě, že dané body A, B jsou od dané roviny ϱ stejně vzdáleny, je hledanou m. v. b. osa úsečky $A'B'$.]

Poznámka. Pro vyšetřování množin bodů v prostoru budeme později potřebovat pojem tzv. ***mocnosti bodu ke kulové ploše***; proto si zde tento pojem vysvětlíme.

Začneme opět s obdobným pojmem v rovině. Je-li dána kružnice k a v její rovině bod M, pak víme, že pro kružnici $k(O, r)$ a bod M platí důležitá planimetrická



Obr. 4

poučka, která se často používá při konstrukčních úlohách o kružnici a vyjadřuje tzv. *mocnost bodu M ke kružnici k* (obr. 4).

Sestrojíme-li bodem M sečnu a kružnice k a označíme-li A, A' společné body kružnice k a sečny a, pak platí o velikostech úseček MA, MA' vztah

$$(1) \qquad |MA| . |MA'| = ||MO|^2 - r^2| \; (= \text{konst.}).$$

Číslo $|MO|^2 - r^2$ se nazývá mocnost bodu M ke kružnici k. Je-li $|MO| > r$, tj. leží-li bod M ve vnější oblasti kružnice k, je mocnost bodu M kladné číslo rovné $|MT|^2$, kde je T bod dotyku tečny vedené bodem M ke kružnici k; je-li $|MO| = r$, tj. leží-li bod M na kružnici k, je jeho mocnost k ní rovna nule; je-li $|MO| < r$, tj. leží-li bod M ve vnitřní oblasti kružnice k, je jeho mocnost k ní číslo záporné. Důkaz vztahu (1) najdete také v citované knížce J. Šedivého na str. 98—99.

Nyní snadno dokážeme platnost prostorového vztahu, který vyjadřuje mocnost bodu ke kulové ploše $\varkappa(O, r)$. Plochu $\varkappa$ můžeme vytvořit otáčením kružnice $k(O, r)$ kolem osy MO, takže vztah (1) platí hned také pro všechny kružnice plochy $\varkappa$ vzniklé otáčením kružnice k kolem osy MO (za předpokladu $M \not\equiv O$) a číslo $|MO|^2 - r^2$ udává i mocnost bodu M k ploše $\varkappa$. Je-li $M \equiv O$, otáčíme kružnici k kolem libovolné přímky procházející bodem O.

Než přistoupíme k dalším výkladům, bude prospěšné, když si čtenář sám rozřeší následující úlohy, jejichž výsledky v dalším použijeme.

Úloha 7. Určete množinu středů všech kulových ploch, které procházejí danými třemi navzájem různými body A, B, C. [Přímka kolmá k rovině $\varrho \equiv ABC$, která prochází středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.]

Úloha 8. Jsou dány rovnoběžné roviny ϱ, σ ($\varrho \not\equiv \sigma$). Určete množinu středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod v rovině ϱ a druhý krajní bod v rovině σ. [Rovina souměrnosti rovinové vrstvy (ϱ, σ) určené rovinami ϱ, σ.]

Úloha 9. Jsou dány mimoběžné přímky a, b. Určete množinu středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod na přímce a, druhý krajní bod na přímce b. [Rovina σ souměrnosti nejkratší příčky XY daných mimoběžek, $\sigma \perp XY$, viz obr. 7.]

3. kapitola

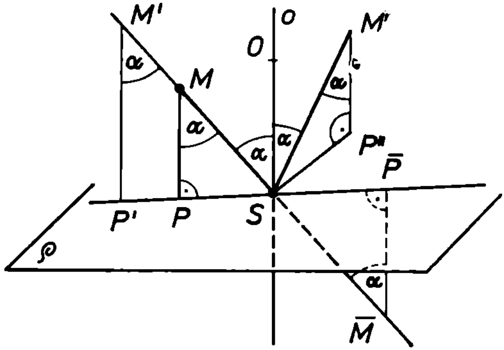
DALŠÍ PŘÍKLADY MNOŽIN BODŮ V PROSTORU

1. Je dána rovina ϱ a v ní bod S. Určete m. v. b., které mají stálý poměr vzdáleností od roviny ϱ a od bodu S, rovný danému kladnému číslu $\lambda < 1$.

Řešení. Nechť pro bod M platí vztah

$$|MP| : |MS| = \lambda, \tag{1}$$

kde bod P je pata kolmice sestrojené bodem M k rovině ϱ. Protože je $\lambda < 1$, je $P \not\equiv S$ (obr. 5). Bod M tedy náleží hledané m. v. b. a zřejmě i každý další bod M' přímky MS až na bod S patří této m. b. To vyplývá



Obr. 5

z vlastnosti podobných pravoúhlých trojúhelníků

$$\triangle MSP \sim \triangle M'SP'.$$

V nich označme α velikost úhlu při vrcholu M, resp. M', což je vzhledem k vztahu (1) známé číslo, neboť $\cos \alpha = \lambda$. Sestrojíme-li bodem S přímku $o \perp \varrho$, pak je i $|\sphericalangle OSM| = \alpha$ (bod $O \neq S$ je vhodně zvolený bod na přímce o). To znamená: Každý bod M, který má vlastnost požadovanou v úloze, náleží rotační kuželové ploše K o vrcholu v bodě S a o ose kolmé k rovině ϱ; úhly tvořících přímek plochy K vzniklé rotací kolem přímky o svírají s osou plochy úhly velikosti α, přičemž $\cos \alpha = \lambda$.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod $M'' \neq S$ na kuželové ploše K, pak má bod M'' vlastnost předepsanou v úloze a patří naší m. b. To vyplývá z pravoúhlého trojúhelníku $M''SP''$ (viz obr. 5), v němž je velikost úhlu $\sphericalangle P''M''S$ rovna α, a v němž tedy platí $|M''P''| : |M''S| = \lambda$. Platí proto: *M. v. b., které mají daný poměr λ vzdáleností od roviny ϱ a od jejího bodu S, je rotační plocha kuželová K s vyloučením jejího vrcholu S.*

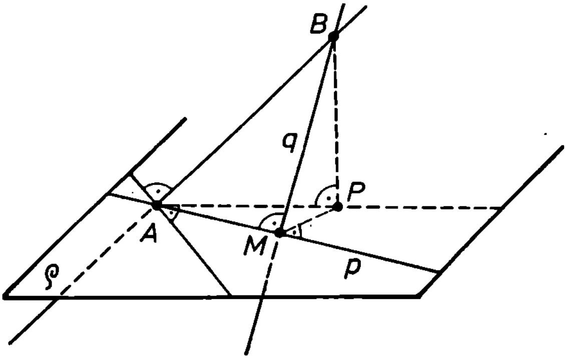
Má-li mít úloha řešení, musí být $0 < \lambda < 1$, což odpovídá tomu, že ze všech úseček, které spojují bod M (neležící na přímce o) s body roviny ϱ, je délka $|MP|$ kolmice k rovině nejkratší.

Úloha 10. Jak by vypadala m. v. b. v předcházejícím příkladě, kdyby dané číslo $\lambda = 1$? [Přímka o s vyloučením bodu S.]

2. Je dána rovina ϱ, v ní bod A a mimo ni bod B. Určete m. v. b., které jsou patou kolmice vedené bodem B k přímce, jež prochází bodem A a leží v rovině ϱ.

Řešení. Hledaná m. v. b. obsahuje zřejmě jen body, které leží v rovině ϱ.

Předpokládejme nejprve, že kolmice vedená bodem B k rovině ϱ protíná rovinu v bodě $P \neq A$ (obr. 6). Bod P je jeden bod naší m. b., neboť je patou kolmice vedené



Obr. 6

bodem B k přímce AP. Rovněž bod A patří do naší m. b., protože je patou kolmice vedené bodem B k přímce, která leží v rovině ϱ, prochází bodem A a je kolmá na přímku AP. Zvolme dále v rovině ϱ libovolnou přímku p procházející bodem A, různou od přímky AP. Označme M patu kolmice q vedené bodem B k přímce p. Snadno dokážeme, že přímka PM je kolmá k přímce p. Je totiž $p \perp BM$ a $p \perp BP$, protože $BP \perp \varrho$. Odtud vyplývá, že je přímka p kolmá ke všem přímkám roviny BMP, a tedy $p \perp PM$. Proto body M leží v rovině ϱ na Thaletově kružnici k sestrojené nad průměrem AP.

Zvolíme-li obráceně libovolný bod $M (M \neq A, M \neq P($ na kružnici k, pak platí $AM \perp PM$ (bod M leží na k),

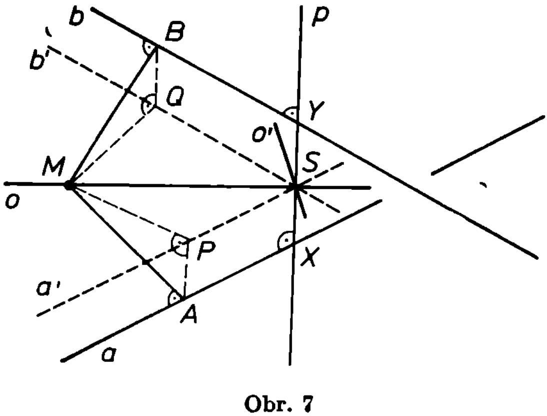
$AM \perp BP$ (protože je $BP \perp \varrho$), a tedy i AM je kolmá k rovině BPM, a proto je $AM \perp BM$.

Protože také body A, P kružnice k patří do hledané m. b., dokázali jsme, že *hledanou m. b. je Thaletova kružnice k.*

Ve zvláštním případě, který jsme zpočátku vyloučili, kdyby splynul bod P s daným bodem A, tj. kdyby byla přímka AB kolmá k dané rovině ϱ, pak by hledanou m. b. byl zřejmě pouze bod A.

Úloha 11. Je dána přímka p a mimo ni bod A. Určete množinu pat kolmic vedených bodem A ke všem rovinám svazku rovin o ose v přímce p. [Thaletova kružnice nad průměrem AP, která leží v rovině $\sigma \perp p$, σ, prochází bodem A a $P \equiv \sigma . p$.]

3. Je dána rovina σ a dvě mimoběžné přímky a, b, které jsou rovnoběžné s rovinou σ a jež mají od roviny σ



Obr. 7

stejnou vzdálenost. Určete v rovině σ množinu středů všech kulových ploch, které se dotýkají daných přímek a, b.

Řešení. Jestliže je bod M (obr. 7) roviny σ středem kulové plochy $\varkappa$, která se dotýká přímek a, b v bodech A, B, pak je přímka MA kolmá k přímce a, přímka MB je kolmá k přímce b a je $|MA| = |MB|$. Označme a', b' pravoúhlé průměty přímek a, b do roviny σ a P, resp. Q patu kolmice vedené bodem A k přímce a', resp. bodem B k přímce b'. Protože je $|AP| = |BQ|$ a úhly APM, BQM jsou pravé, jsou pravoúhlé trojúhelníky MAP, MBQ shodné (mají shodné přepony $|MA| = |MB|$ a shodné odvěsny $|AP| = |BQ|$). Proto je $|MP| = |MQ|$. Leží tedy bod M nutně na ose o úhlu přímek a', b'.

Obráceně, zvolíme-li na jedné z os $o \perp o'$ přímek a', b' libovolný bod M, pak ze shodných trojúhelníků MAP, MBQ snadno dokážeme, že bod M má od přímek a, b stejně velké vzdálenosti, a lze tedy sestrojit plochu kulovou se středem v bodě M, která se dotýká přímek a, b. To zřejmě platí i v případě, kdy za bod M zvolíme průsečík os o, o'.

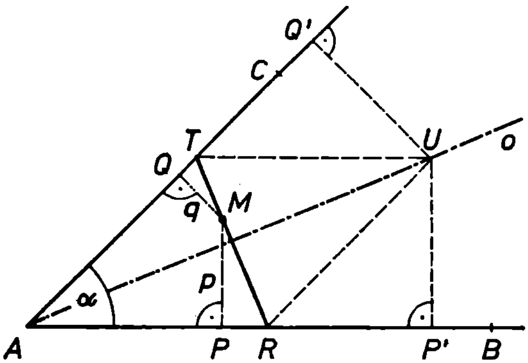
Tím jsme dokázali, že *množinou středů kulových ploch naší úlohy je sjednocení os o, o' přímek a', b'.*

4. Je dán klín K o úhlu velikosti α, $0 < \alpha < 180°$, a kladné číslo s. Určete m. v. b., které náležejí klínu K a jejichž součet vzdáleností od rovin stěn klínu je konstantní, rovný s.

Řešení. Nechť bod M vyhovuje podmínce naší úlohy, tj. pro jeho vzdálenosti $|MP| = v_1$, $|MQ| = v_2$ od rovin stěn klínu K, kde P, Q jsou paty kolmic p, q vedených bodem M ke stěnám klínu, platí vztah

$$v_1 + v_2 = s. \tag{1}$$

Protože přímky p, q jsou kolmé k hraně a klínu K, určují rovinu ω kolmou k přímce a. Průnikem roviny ω a klínu K je úhel. Řešme proto nejdříve planimetrickou úlohu: V daném úhlu určit m. v. b., jejichž součet vzdáleností od ramen úhlu se rovná danému číslu s.



Obr. 8

Nechť je dán úhel BAC velikosti α a nechť bod M tohoto úhlu splňuje podmínku úlohy, tj. součet vzdáleností bodu M od přímek AB, AC se rovná s (obr. 8). Označme P, Q paty kolmic vedených bodem M k přímkám AB, AC. Veďme bodem M mezi rameny úhlu BAC úsečku kolmou k jeho ose, její koncové body označme R na AB a T na AC. V pravoúhlých trojúhelnících MRP a MTQ platí $|\sphericalangle RMP| = |\sphericalangle TMQ| = \frac{1}{2}\alpha$ (ramena těchto ostrých úhlů jsou kolmá na ramena ostrých úhlů

UAB, UAC velikosti $\frac{1}{2}\alpha$, kde U je bod úhlu BAC, který leží zároveň na jeho ose), takže je

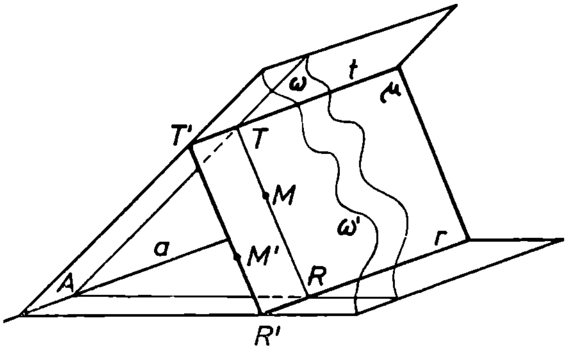
$$v_1 = |MR| \cos\frac{\alpha}{2}, \qquad v_2 = |MT| \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Tyto vztahy platí i v případě, kdy bod M splývá s některým z bodů R, T. V každém případě platí

$$|RT| = |MR| + |MT| = (v_1 + v_2)\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{s}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

velikost úsečky RT je tedy jednoznačně dána velikostí úhlu α a daným číslem s. Můžeme ji proto lehce sestrojit, například jako úhlopříčku kosočtverce $ARUT$, jehož vrchol U protilehlý k vrcholu A dostaneme jako bod ležící uvnitř úhlu BAC, jehož vzdálenosti od přímek AB a AC jsou rovny s. Z naší úvahy vyplývá: a) Platí-li o bodu M vztah (1), pak leží bod M na úsečce RT, b) leží-li bod M na úsečce RT, potom o jeho vzdálenostech v_1, v_2 od přímek AB, AC platí vztah (1). Je tedy hledanou m. v. b. úsečka RT. Podobná úloha je řešena též v 15. svazku Školy mladých matematiků, v knížce: *M. Koman*, Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, Praha 1966.

Nyní už snadno přejdeme k řešení naší prostorové úlohy, a to pomocí shodného zobrazení, v tomto případě pomocí rovnoběžného posunutí úsečky RT ve směru přímky a. Proložíme přímkou RT rovinu μ rovnoběžnou s přímkou a. Rovina μ protne roviny stěn klínu K (obr. 9) v přímkách $r \parallel t \parallel a$, které určují pás $P = (r, t)$. Zvolíme-li nyní libovolný bod M', jehož vzdálenosti od stěn klínu vyhovují podmínce naší úlohy, lze jím proložit rovinu $\omega' \perp a$ a v ní bodem M' úsečku $R'T'$ tak, že $R'T'TR$ je rovnoběžník. Úsečka $R'T'$, vzniklá zmíněným posunutím z úsečky RT, tvoří v rovině ω' m. v. b., které



Obr. 9

mají vlastnost požadovanou v naší úloze, a náleží, a s ní i zvolený bod M', zřejmě uvažovanému pásu P.

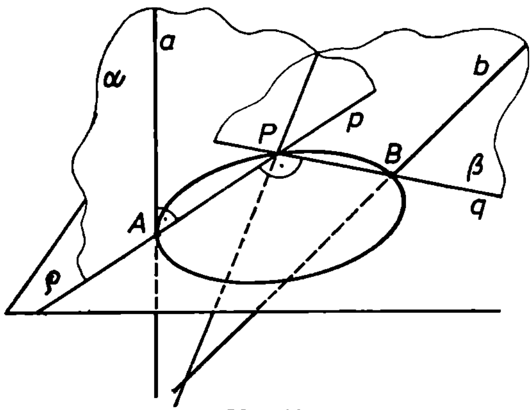
Obráceně: Každý bod M' pásu P má vlastnost požadovanou v naší úloze. Vznikl totiž z určitého bodu M úsečky RT zmíněným posunutím.

Proto nakonec platí: *M. v. b., které náležejí klínu* K *a jejichž součet vzdáleností od rovin stěn klínu* K *je roven danému číslu s, je přímý pás* P *roviny μ určený přímkami r, t.*

Úloha 12. Určete m. v. b., jejichž součet vzdáleností od daných dvou různoběžných rovin je konstantní, rovný danému kladnému číslu s. [Jsou to čtyři přímé pásy tvořící stěny přímé hranolové plochy s pravoúhelníkem jako řídicím mnohoúhelníkem a s osou rovnoběžnou s průsečnicí daných rovin.]

5. Jsou dány dvě různé přímky a, b a rovina ϱ, která je kolmá k přímce a. Každé rovině β svazku rovin o ose b přiřaďme ve svazku rovin o ose a rovinu α, která je kolmá k rovině β. Určete m. v. b. společných rovinám ϱ, α, β. Rozlište různé polohy přímky b vzhledem k rovině ϱ. (Můžeme také říci, že hledáme v rovině ϱ m. v. b., kterými je možno proložit dvě kolmé roviny, z nichž jedna prochází přímkou a a druhá přímkou b.)

Řešení. Případ [1]. Nechť je přímka b různoběžná s rovinou ϱ a průsečíky A, B přímek a, b s rovinou ϱ jsou různé (obr. 10). Průsečnice rovin α s rovinou ϱ tvoří svazek přímek v rovině ϱ o středu A. Stejně tak průsečnice všech rovin β s rovinou ϱ tvoří svazek přímek v rovině ϱ se středem B. Nechť je rovina β určena přímkou b a přímkou q z uvažovaného svazku a podobně



Obr. 10

nechť je příslušná rovina α kolmá k rovině β určena přímkou a a přímkou p ze svazku přímek o středu A, ležícím v rovině ϱ. Hledaná množina bodů naší úlohy je tedy množinou všech společných bodů dvojic přímek p, q.

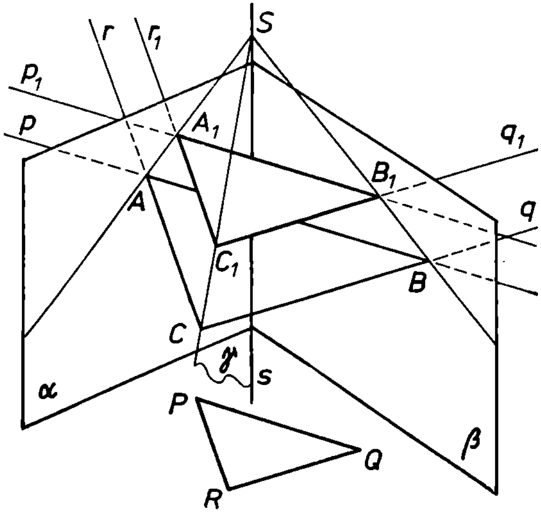
Rovina α obsahuje přímku a a přímku p. Příslušná rovina β kolmá k rovině α obsahuje jistou přímku c, která prochází bodem B a je kolmá k rovině α. Proto je přímka c kolmá k přímce a; leží tedy přímka c v rovině ϱ, a tak $c \equiv q$. Protože je však přímka c kolmá i k přímce p roviny α, je $q \perp p$. *Hledané body $P \equiv p \,.\, q$ vyplní proto v rovině ϱ Thaletovu kružnici m sestrojenou nad průměrem AB.*

Případ [2]. Přímka b je různoběžná s rovinou ϱ a protíná ji v bodě $B \equiv A$. Tu má každá dvojice rovin α, β s rovinou ϱ společný právě jen bod A. *Hledanou m. v. b. je tedy pouze bod A.*

Případ [3]. a) Přímka b je rovnoběžná s rovinou ϱ, ale neleží v ní. V tomto případě je přímka a kolmá k přímce b, takže ke všem rovinám β svazku o ose b je kolmá jediná rovina α, která obsahuje přímku a. Tato rovina α je kolmá k přímce b. *M. v. b. společných rovinám ϱ, α, β je přímka $m \equiv \varrho \,.\, \alpha$.* b) Kdyby přímka b ležela v rovině ϱ, byla by *hledanou m. v. b. celá rovina ϱ.*

6. Jsou dány dvě různé roviny α, β a trojúhelník PQR, přičemž žádná jeho strana není rovnoběžná ani s rovinou α, ani s rovinou β. Určete množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC, jejichž vrchol A leží v rovině α, vrchol B v rovině β a platí $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$, $CA \parallel RP$.

Řešení. Případ [1]: Nechť jsou dané roviny α, β různoběžné (průsečnici označíme s). Zvolme přímku $p_1 \parallel PQ$ a ta nechť protíná rovinu α, resp. β, v bodě A_1, resp. B_1, přitom nechť je $A_1 \neq B_1$ (stačí zvolit p_1 tak, aby neprotínala přímku s). Potom veďme bodem B_1 přímku $q_1 \parallel QR$ a bodem A_1 přímku $r_1 \parallel RP$ (obr. 11). Vznikne trojúhelník $A_1B_1C_1$, jehož rovina je rovnoběžná s ro-



Obr. 11

vinou PQR. Jeho vrchol C_1 je jedním bodem hledané m. b. naší úlohy. Bod C_1 není bodem přímky s, neboť ani úsečka PR, ani úsečka QR nejsou rovnoběžné s rovinami α, β. Bod C_1 s přímkou s určují rovinu γ, o níž dokážeme, že je s vyloučením bodů přímky s hledanou množinou všech vrcholů C.

a) Nejprve dokážeme, že každá přímka $p \parallel PQ$ bez společného bodu s přímkou s vede k bodu C, který leží v rovině γ, ne však na přímce s. Nechť tedy přímka p různá od p_1 protíná rovinu α, resp. β, v bodě A, resp. B, a rovina (p, p_1) přímku s v bodě S. Potom přímka $r \parallel r_1$ vedená bodem A a přímka $q \parallel q_1$ vedená bodem B určují dvě roviny (r, S), (q, S) s průsečnicí SC_1; na přímce SC_1 leží i bod C jakožto společný bod tří rovin (r, S), (q, S), (p, p_1). Leží tedy bod C v rovině γ. K stejnému výsledku bychom dospěli v případě, kdyby byla rovina (p, p_1) rovnoběžná s přímkou s.

b) Obráceně: Zvolme v rovině γ libovolný bod $C (C \not\equiv \not\equiv C_1)$, který neleží na přímce s. Nechť přímka CC_1 protne přímku s v bodě S. Snadno dokážeme obráceným postupem úvahy provedené v a), že lze pro bod C sestrojit $\triangle ABC$ se stranou $CA \parallel RP$ a $CB \parallel RQ$ s vrcholy A, resp. B, v rovině α, resp. β. Úvahu možno sledovat na obr. 11.

Bod C nemůžeme volit na přímce s, neboť by pak přímky CA, CB měly ležet v rovině α, resp. β, protože bod A má být v rovině α a bod B v rovině β, takže by úsečky $RP (\parallel CA)$, $RQ (\parallel CB)$ byly rovnoběžné s rovinou α, resp. β, což odporuje textu naší úlohy.

Všimněme si ještě, že náš předpoklad o existenci bodu S ležícího na přímce s není pro důkaz podstatný, neboť kdyby byla přímka CC_1 rovnoběžná s přímkou s, přešla by jehlanová plocha $SA_1B_1C_1$ v plochu hranolovou obsahující body A_1, B_1, C_1 s tvořícími přímkami směru s.

Případ [2]: Jsou-li dané roviny rovnoběžné, tj. $\alpha \parallel \beta$, pak zcela obdobnou cestou dokážeme, že množinou všech vrcholů C je rovina $\gamma \parallel \alpha \parallel \beta$, kterou určíme jedním bodem C_1, jenž sestrojíme jako v případě [1]. Příslušnou úvahu ponecháme čtenáři.

Poznámka. Trojúhelníky $A_1B_1C_1$, ABC tvoří v prostoru dvojice trojúhelníků stejnolehlých o středu stejnolehlosti v bodě S v případě [1]. V případě [2] jsou všechny trojúhelníky ABC shodné.

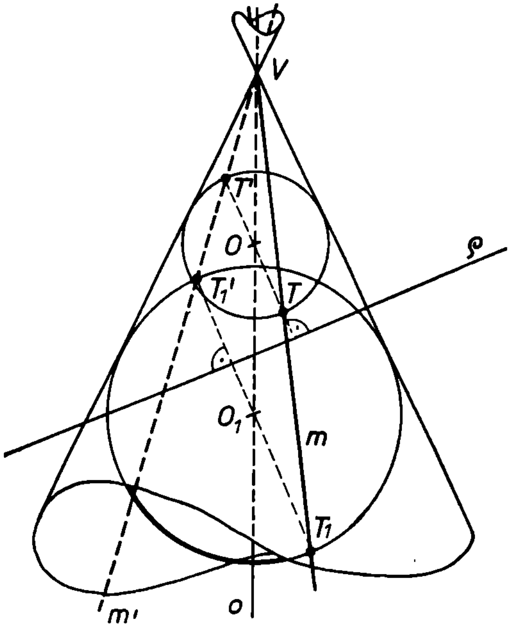
Úloha 13. Je dána přímka a, rovina β neobsahující přímku a a trojúhelník PQR, jehož žádná strana není rovnoběžná ani s přímkou a, ani s rovinou β. Určete množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC, jestliže vrchol A každého z nich leží na přímce a, vrchol B v rovině β a o jeho stranách platí: $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$, $CA \parallel RP$. [Jestliže: a) přímka a a rovina β jsou různoběžné, potom je množinou všech vrcholů C přímka procházející bodem $P \equiv a . \beta$ s vyloučením bodu P; b) jestliže přímka a je rovnoběžná s β (nejsou však podle textu úlohy incidentní), je množinou všech vrcholů C přímka rovnoběžná s přímkou a, určená jedním bodem C_1, který splňuje podmínky úlohy a který snadno sestrojíme.]

7. Je dána rotační kuželová plocha K a rovina ϱ. Určete množinu všech bodů dotyku, v nichž se libovolné kulové plochy $\varkappa$ vepsané do kuželové plochy K dotýká tečná rovina rovnoběžná s rovinou ϱ.

Řešení. Každé dvě kulové plochy vepsané ploše K jsou, jak známo, navzájem stejnolehlé (homotetické) v stejnolehlosti (homotetii) S se středem stejnolehlosti ve vrcholu V plochy K. Středy O všech kulových ploch vepsaných ploše K vyplňují osu o plochy K až na bod V a hledané dotykové body leží na kolmicích vedených body přímky o k rovině ϱ.

Rozeznávejme dva případy: Případ [1]. Nechť daná rovina není kolmá k ose o plochy K. Dotykové body T, T', v nichž se kulové plochy $\varkappa$ vepsané kuželové ploše K dotýkají roviny rovnoběžné s rovinou ϱ, jsou diametrálně protilehlými body plochy $\varkappa$. Jejich spojnice je kolmá na rovinu ϱ a určuje spolu s osou o rovinu σ kolmou na rovinu ϱ. Zvolíme-li jinou kulovou plochu $\varkappa_1$ vepsanou ploše K, budou příslušné body dotyku T_1, T_1'

odpovídat bodům T, T' ve stejnolehlosti S, a budou tedy ležet na přímkách $m \equiv VT$, $m' \equiv VT'$ (obr. 12).



Obr. 12

Obráceně, zvolíme-li na přímce m libovolný bod T_1 nebo na přímce m' bod T_1' různé od V, lze sestrojit plochu $\varkappa_1$ se středem O_1 (nebo $\varkappa_1'$ se středem O_1'), vedeme-li v rovině σ přímku $T_1O_1 \perp \varrho$ (nebo $T_1'O_1' \perp \varrho$). Ze stejnolehlosti plochy $\varkappa$ a $\varkappa_1$ nebo $\varkappa$ a $\varkappa_1'$ vyplývá, že plochy $\varkappa_1$ a $\varkappa_1'$ jsou vepsány do plochy K a že body T_1 a T_1' jsou body hledané množiny.

Proto platí: *Hledanou množinou bodů je sjednocení přímek m, m' s vyloučením jejich společného bodu V.*

Případ [2]. Je-li ve zvláštním případě daná rovina ϱ kolmá k přímce o, pak přímky m, m' splývají s *přímkou o, která je po vyloučení bodu V hledanou množinou bodů.*

Úloha 14. Je dána rovina α, v ní bod A a rovina ϱ. Jsou sestrojeny kulové plochy $\varkappa$, které se dotýkají roviny α v bodě A. Určete množinu bodů dotyku tečných rovin všech ploch $\varkappa$, které jsou rovnoběžné s rovinou ϱ. [Jsou-li roviny α, ϱ různoběžné, pak dvě navzájem kolmé přímky procházející bodem A, z nichž je bod A vyňat, a ležící v rovině, která je kolmá k průsečnici rovin α a ϱ. Ve zvláštním případě obě výsledné přímky splývají.]

8. Je dána rovina ϱ a uvnitř jednoho z poloprostorů s hraniční rovinou ϱ jsou dány body A, B různě vzdálené od roviny ϱ. Určete množinu středů všech kulových ploch $\varkappa$, které se dotýkají roviny ϱ a procházejí body A, B (jinak formulováno: hledáme množinu všech bodů, jejichž vzdálenosti od roviny ϱ a bodů A, B jsou si rovny).

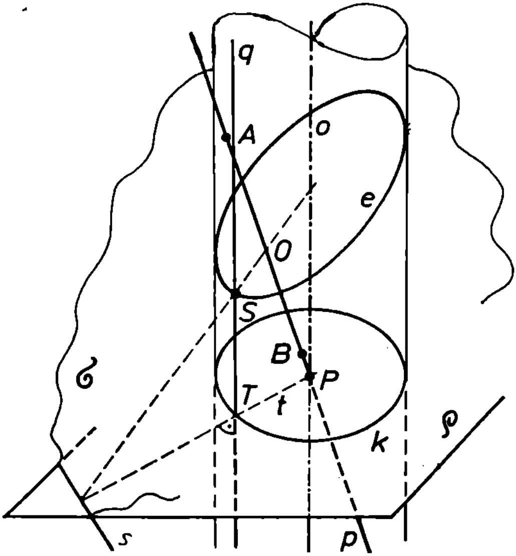
Řešení. Nechť přímka $p \equiv AB$ protíná rovinu ϱ v bodě P. Použijeme mocnosti bodu P ke kulovým plochám $\varkappa$, které procházejí body A, B. Označíme-li ještě T bod dotyku takové plochy s rovinou ϱ, platí vztah (viz kapitola 2, poznámka):

$$(1) \qquad |PA| . |PB| = |PT|^2.$$

Tímto vztahem je délka $|PT|$ jednoznačně určena. Body dotyku uvažovaných kulových ploch s rovinou ϱ leží tedy na kružnici $k \equiv (P, t)$, kde $t^2 = |PA| . |PB|$.

Nechť je bod S středem jedné z uvažovaných kulových ploch $\varkappa$. Potom a) musí být splněn vztah

$|SA| = |SB|$, b) musí pata T kolmice vedené bodem S k rovině ϱ ležet na kružnici k (viz obr. 13). Vztah a) vyžaduje, aby bod S ležel v rovině $\sigma \perp p$, v rovině sou-



Obr. 13

měrnosti bodů A, B. Aby byl splněn i požadavek b), musí bod S ležet na rotační válcové ploše V s řídicí kružnicí k. Je tedy nutné, aby bod S ležel na průniku $e \equiv \sigma . V$, kterým je, jak známo, elipsa. Ve zvláštím případě, když je přímka p kolmá k rovině ϱ, je tato elipsa kružnicí.

Ještě dokážeme, že všechny body elipsy e leží v poloprostoru (ϱ, A):

Podle vztahu (1) platí

$$|PT| = \sqrt{|PA|.|PB|}.$$

Označme O střed úsečky AB; pak je

$$|PO| = (|PA| + |PB|) : 2.$$

Z nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem nezáporných čísel (viz například *A. Kufner*: Nerovnosti a odhady, Škola mladých matematiků, sv. 39, Praha 1975) plyne s ohledem na různost $|PA|$, $|PB|$ nerovnost

$$\sqrt{|PA|.|PB|} < (|PA| + |PB|) : 2,$$

tj. $|PO| > |PT|$. Protože rovina $\sigma \perp AB$ prochází bodem O, platí o vzdálenosti d její průsečnice s s rovinou ϱ od bodu P tím spíše $d > |PT|$, takže přímka s leží ve vnější oblasti kružnice k a tím leží všechny body elipsy e v poloprostoru (ϱ, A).

Obráceně, zvolíme-li na elipse e libovolný bod S, je bod S bodem roviny σ, v níž elipsa e leží, takže platí vztah $|SA| = |SB|$. Vedeme-li dále bodem S přímku $q \perp \varrho$, leží přímka q na ploše V a protíná kružnici k v bodě, který označíme T. Sestrojíme nyní kulovou plochu $\varkappa$ o středu S, která prochází body A, B, a má tedy poloměr $r = |SA| = |SB|$. Mocnost M bodu P ke kulové ploše $\varkappa$ je rovna

(1) $$|PA|.|PB| = |PT|^2,$$

protože $|PT| = t$ je poloměr kružnice k.

Mocnost M můžeme také vyjádřit ve tvaru

$$M = (|PS| + r)(|PS| - r) = |PS|^2 - r^2,$$

takže je $|PS|^2 - r^2 = |PT|^2$.

Ale v pravoúhlém trojúhelníku STP (viz obr. 13) platí

$$|PT|^2 = |PS|^2 - |ST|^2,$$

takže z posledních dvou rovnic dostáváme

$$|PS|^2 - |ST|^2 = |PS|^2 - r^2$$

a odtud

$$|ST| = r = |SA| = |SB|.$$

To znamená, že se kulová plocha $\varkappa$ dotýká roviny ϱ, a že tedy patří mezi uvažované kulové plochy. Bod S je středem kulové plochy daných vlastností, a patří tudíž do hledané množiny bodů.

Závěr. Množinou středů všech kulových ploch $\varkappa$, které se dotýkají roviny ϱ a procházejí body A, B (přímka AB není rovnoběžná s rovinou ϱ), je elipsa, která je ve zvláštním případě, je-li $AB \perp \varrho$, kružnicí.

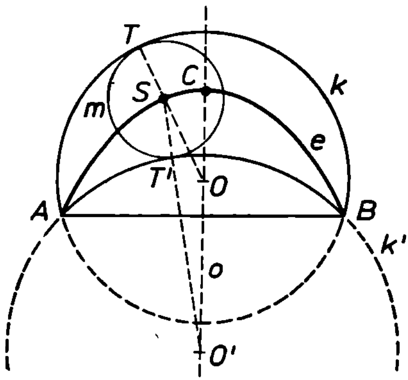
Poznámka. K řešení naší úlohy jsme mohli také použít, kromě roviny σ, rotačního paraboloidu P s ohniskem A a s řídicí rovinou ϱ (viz úloha 2, kap. 2). Protože je možno každou rovinu, která není rovnoběžná s osou paraboloidu, považovat za rovinu souměrnosti ohniska A paraboloidu P a určitého bodu B, pro který není spojnice AB rovnoběžná s řídicí rovinou paraboloidu, je průnik této roviny s plochou P množinou středů všech kulových ploch naší úlohy. Podle dříve uvedeného řešení dospíváme tak k známé geometrické větě o průniku e roviny σ, která není kolmá k rovině ϱ, s rotačním paraboloidem:

Elipsy ležící na rotačním paraboloidu promítají se kolmo na roviny kolmé k ose paraboloidu do kružnic (v našem případě elipsa e do kružnice k).

Úloha 15. Je dána rovina ϱ, přímka p různoběžná s rovinou ϱ a na přímce p bod $A \neq \varrho . p$. Určete množinu středů všech kulových ploch, které se dotýkají roviny ϱ a přímky p v bodě A. [Elipsa, ve zvláštním případě kružnice.]

9. Je dána plocha P skládající se z dvou kulových vrchlíků o společné hraně: První vrchlík je částí kulové plochy $K(O, r)$ a má výšku $v > r$, druhý vrchlík leží uvnitř prvního vrchlíku, je částí kulové plochy $K'(O', r')$ a má výšku $v' < r'$. Určete množinu středů všech kulových ploch, které jsou vepsány do plochy P.

Řešení. Nechť bod S je středem kulové plochy $\varkappa(S, x)$, která je vepsána do plochy P. Označme T dotykový bod plochy $\varkappa$ s plochou K a T' dotykový bod plochy $\varkappa$ s plochou K' (obr. 14). Potom leží bod T na přímce OS a bod T' na přímce $O'S$. Leží tedy body T, T', S v rovině ω, která obsahuje i body O, O'. Rovina ω prochází



Obr. 14

proto osou OO' rotační plochy P a určuje na ploše P její poledník (k, k'), omezený oblouky kružnic $k(O, r)$, $k'(O', r')$ o společné tětivě AB. Na ploše $\varkappa$ určuje rovina ω její hlavní kružnici $m(S, x)$.

Nyní lze naši prostorovou úlohu převést na úlohu planimetrickou v rovině ω: Hledejme množinu středů všech kružnic m, které jsou vepsány rovinnému útvaru (k, k').

Podle obr. 14 platí tyto vztahy:

$$|OS| = |OT| - |ST| = r - x,$$

$$|O'S| = |O'T'| + |T'S| = r' + x.$$

Proto je $|OS| + |O'S| = r + r' > |OO'|$, což znamená, že součet vzdáleností bodu S od daných bodů O, O' je konstantní. Odtud vyplývá, že bod S leží na oblouku ACB elipsy e, která má ohniska v bodech O, O' a která prochází body A, B. Tím je elipsa e určena.

Obráceně platí, že každý bod S, který leží na oblouku ACB elipsy e, je středem kružnice m, kterou lze vepsat do útvaru (k, k'), což vyplývá z předchozích úvah.

Rotací roviny ω a oblouku ACB kolem osy $o \equiv OO'$ vytvoří oblouk ACB plochu E, a to část rotačního protáhlého elipsoidu s ohnisky v bodech O, O', omezenou kruhovou hranou, která je společnou hranou daných vrchlíků. *Plocha E s vyloučením bodů své kruhové hrany je pak množinou středů všech kulových ploch vepsaných do plochy P.*

Úloha 16. Je dáno těleso T, které je průnikem dvou koulí $K(O, r)$, $K'(O', r')$ různých poloměrů, pro které platí $|r - r'| < |OO'| < r + r'$. Určete množinu středů všech kulových ploch, které jsou vepsány do tělesa T. [Část rotačního hyperboloidu dvoudílného, jehož ohniska jsou v bodech O, O'.]

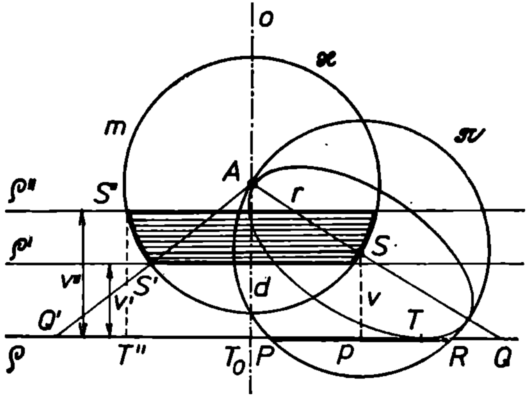
Úloha 17. Je dána polosféra na kulové ploše $\varkappa_1 \equiv (O, r)$ sestrojená nad rovinou ϱ rovníku plochy $\varkappa_1$ a uvnitř kulová plocha $\varkappa_2 \equiv \left(O', \frac{1}{2} r\right)$, které se dotýká plocha $\varkappa_1$ i rovina ϱ. Určete množinu středů všech kulových ploch, které se dotýkají $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a ϱ. [Kružnice v rovině rovnoběžné s ϱ o středu na úsečce OO' a poloměru $r\sqrt{2}/2$.]

10. Je dána rovina ϱ a bod A, který má od roviny ϱ vzdálenost d $(0 < d \leqq 2r)$. Určete množinu středů všech kružnic k daného poloměru $r > 0$, které se dotýkají roviny ϱ a procházejí bodem A.

Řešení. Rovina ϱ se dotýká kružnice k, má-li s ní společný právě jeden bod. Potom je průsečnice roviny kružnice s rovinou ϱ tečnou této kružnice.

Střed S každé kružnice k o poloměru r, která prochází daným bodem A, má od bodu A vzdálenost $|SA| = r$. Body hledané množiny bodů, pokud není prázdná, leží tedy nutně na kulové ploše $\varkappa$ se středem A a s poloměrem velikosti r. Sestrojíme-li jeden bod S naší množiny, pak všechny body vzniklé z bodu S otočením kolem přímky o, která prochází bodem A a je kolmá k rovině ϱ, patří také do hledané množiny. Přímka o je totiž nejen osou plochy $\varkappa$, ale i roviny ϱ. Body odvozené z bodu S touto rotací vyplní na ploše $\varkappa$ kružnici ležící v rovině rovnoběžné s rovinou ϱ. Stačí tedy vyhledat body S na poledníku m (obr. 15a) plochy $\varkappa$, který tvoří obrys pravoúhlého průměru plochy $\varkappa$ do roviny proložené přímkou o. Z nich dostaneme potom všechny ostatní body hledané množiny bodů otočením kolem přímky o.

Nechť bod S zvolený na poledníku m plochy $\varkappa$ je bodem hledané množiny bodů. Pak je přímka SA průměrem kružnice k o středu S. Všechny kružnice o středu S a poloměru rovném r vyplní kulovou plochu $\pi(S, r)$. Z nich vedou k řešení dané úlohy ty kružnice na ploše π, jež se dotýkají průsečnice své roviny σ s rovinou ϱ. Rovina σ protne tedy rovinu ϱ v tečně kulové plochy π.



Obr. 15a

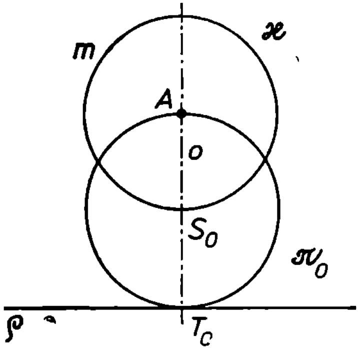
Aby bylo možno tento požadavek splnit, je třeba a stačí, aby a) kulová plocha π měla s rovinou ϱ alespoň společný bod a aby současně b) průsečík Q přímky AS s rovinou ϱ, jímž jde průsečnice hledané roviny σ s rovinou ϱ, neležel uvnitř koule omezené plochou π. Poznamenejme, že v případě, kdy bod Q neexistuje, tj. v případě, kdy je $AS \parallel \varrho$, je průsečnice roviny hledané kružnice s rovinou ϱ rovnoběžná s přímkou AS.

Je tedy zřejmě nutné, aby o vzdálenosti v bodu S od roviny ϱ platilo:

Jednak a) $v \leqq r$ a dále b) $v \geqq \frac{1}{2} d$ (neboť musí platit

$|SQ| \geqq |SA|$, tj. $|SQ| \geqq \frac{1}{2}|AQ|$, a proto $v \geqq \frac{1}{2} d\Big)$.

Body S nemohou podle toho ležet vně kulového pásu omezeného rovinami $\varrho' \parallel \varrho$, $\varrho'' \parallel \varrho$, přičemž roviny ϱ', resp. ϱ'', ležící v poloprostoru (ϱ, A), mají od roviny ϱ vzdálenosti $\frac{1}{2} d$, resp. r.



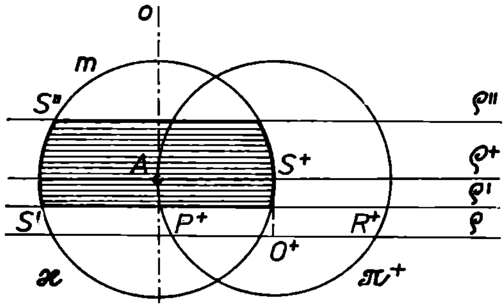
Obr. 15b

Odtud ihned vyplývá:

a) *Množinou všech středů naší úlohy je jediný bod* S_0 *plochy* $\varkappa$ *v případě, kdy je* $d = 2r$ (obr. 15b). Všechny kružnice $k(S_0, r)$, které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ v společném bodě $T_0(AT_0 \perp \varrho)$, vyhovují požadavkům úlohy, a žádné jiné.

b) Jestliže je $d < 2r$, je třeba body S hledat jenom na té části poledníku m plochy $\varkappa$, která náleží kulovému pásu určenému rovinami ϱ', ϱ''. A skutečně, zvolíme-li na oblouku m libovolný bod S uvnitř kulového pásu

(ϱ', ϱ''), tj. ve vzdálenosti v od roviny ϱ, o níž platí $\frac{1}{2} d < v < r$, potom plocha $\pi(S, r)$ protne rovinu ϱ v kružnici p. Dále: z bodu Q, který leží v tomto případě vně plochy π, a tedy i vně kružnice p, lze vést k p dvě tečny t_1, t_2 — dvě průsečnice rovin σ_1 a σ_2 s rovinou ϱ; v rovině $\sigma_1 \equiv (A, t_1)$ a $\sigma_2 \equiv (A, t_2)$ lze sestrojit dvě kružnice k_1 a k_2, které procházejí bodem A, mají polo-



Obr. 15c

měr velikosti r a dotýkají se roviny ϱ, jak žádá naše úloha.

Zvolíme-li dále bod S' v rovině ϱ', tj. ve vzdálenosti $v' = \frac{1}{2} d$ od roviny ϱ, potom příslušný bod Q' padne na kružnici p' a tečna v něm sestrojená k p' je průsečnicí roviny jediné kružnice k', která vyhovuje podmínkám úlohy. Její rovina je kolmá k rovině poledníku m.

Konečně, zvolíme-li bod S'' v rovině ϱ'', tj. ve vzdálenosti $v'' = r$ od roviny ϱ, pak plocha $\pi''(S'', r)$ se dotýká roviny ϱ v bodě T''. Rovina $\sigma_2 \equiv (AS''T'')$ je totožná s rovinou poledníku m a v té také leží kružnice k'', jež splňuje podmínky úlohy.

Podle toho každý bod oblouku $\widehat{S'S''}$ patří do hledané množiny bodů. *Otočením oblouku* $\widehat{S'S''}$ *kolem osy* o *vznikne kulový pás* (ϱ', ϱ'') *omezený kružnicemi plochy* $\varkappa$, *které leží v rovinách* ϱ', ϱ''; *ten je hledanou množinou středů všech kružnic daných vlastností.*

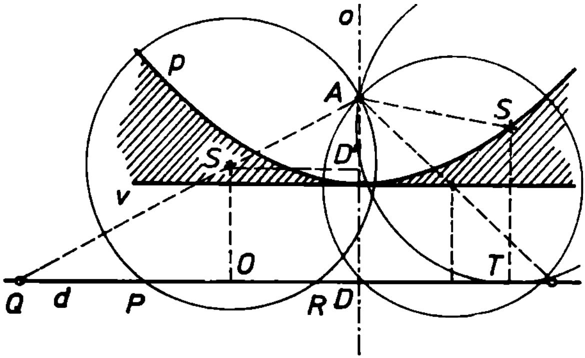
Poznámka. Na obr. 15c je znázorněn případ b) z předcházející diskuse, při kterém však obsahuje naše hledaná množina bodů také rovník plochy $\varkappa$ v rovině ϱ^+. Pro každý bod S^+ rovníku dostaneme dvě kružnice, k_1^+, k_2^+, neboť sestrojíme-li plochu $\pi^+(S^+, r)$, potom π^+ nutně protne rovinu ϱ v kružnici p^+ o středu O^+ (její obraz na obr. 15c je úsečka P^+R^+). Její dvě tečny rovnoběžné s přímkou AS určují s bodem A roviny kružnic k_1^+, k_2^+, které splňují podmínky naší úlohy.

11. Je dána rovina ϱ a bod A, jehož vzdálenost od roviny ϱ je $d > 0$. Určete množinu středů všech kružnic, které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ.

Řešení. Víme, že rovina ϱ a bod A určují plochu P rotačního paraboloidu jako množiny středů všech kulových ploch, které se dotýkají roviny ϱ a procházejí bodem A. Přitom je bod A ohniskem a rovina ϱ řídicí rovinou paraboloidu P (viz úlohu 2, kap. 2). Libovolná rovina μ proložená bodem A kolmo k rovině ϱ má s plochou P společnou parabolu p, která má ohnisko v bodě A a za řídicí přímku průsečnici d roviny μ s rovinou ϱ (obr. 16). Parabola p tvoří jeden poledník plochy P.

Protože daný útvar, tj. rovina ϱ a bod A, se nemění při otáčení kolem přímky o vedené bodem A kolmo k rovině ϱ, je i hledaná množina bodů rotačním útvarem s osou o.

Najdeme-li tedy v rovině μ středy S všech kružnic k, které vyhovují podmínkám naší úlohy, pak body vzniklé



Obr. 16

otočením všech bodů S kolem přímky o vyplní hledanou množinu středů. Hledejme proto zatím jenom body S v rovině paraboly p.

a) Každý bod S, který leží na parabole p, náleží hledané množině středů, neboť je středem kružnice $k(S, |SA|)$, která leží v rovině paraboly p a dotýká se řídicí přímky d, a proto i roviny ϱ v bodě T na přímce d, jak plyne z definice paraboly.

b) Body S zvolené ve vnitřní oblasti paraboly p mají tu vlastnost, že jejich vzdálenost od přímky d je větší než délka úsečky SA, takže příslušná kulová plocha $\pi(S, |SA|)$ nemá s rovinou ϱ žádný společný bod, což znamená, že body S nepatří do hledané množiny.

c) Zvolíme-li dále bod S ve vnější oblasti paraboly p, a jak hned ukážeme, pouze v oblasti ω roviny μ, ohraničené parabolou p a její vrcholovou tečnou v, náleží bod S naší množině. Každý bod S ležící uvnitř oblasti ω má, jak známo, tu vlastnost, že jeho vzdálenost od přímky d je menší než délka úsečky SA. Proto protne kulová plocha $\pi(S, |SA|)$ rovinu ϱ v kružnici, kterou označíme q, její střed O (na obr. 16 je zobrazena kružnice q jako úsečka PR). Přímka AS, pokud není rovnoběžná s přímkou d, protne rovinu ϱ a přímku d v bodě Q, který padne do vnější oblasti kružnice q. Je totiž $|SQ| > |SA|$, neboť je $|D'D| > |AD'|$, a tedy bod Q leží vně plochy π. Z bodu Q lze pak vést ke kružnici q dvě tečny t, t' s dotykovými body T, T'. Potom je už možné sestrojit kružnice $k(S, |SA|)$ a $k'(S, |SA|)$ v rovinách $\sigma \equiv (S, t)$ a $\sigma' \equiv (S, t')$, které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ a její přímky t, resp. t', v bodě T, resp. T'. Kružnice k, k' splňují podmínky naší úlohy, takže bod S náleží hledané množině středů kružnic.

Ještě poznamenejme, že v případě, kdyby bylo $AS \parallel d$, byly by příslušné tečny t, t' rovnoběžné s přímkou AS.

d) Rovněž body S přímky v náležejí naší m. b. Odůvodnění je stejné jako v případě c), jen s tím rozdílem, že v tomto případě padne příslušný bod $Q \equiv SA\,.\,d$ na kružnici $q \equiv \pi\,.\,\varrho$, kde π je kulová plocha $\pi(S, |SA|)$.

e) Zvolíme-li konečně bod S uvnitř poloroviny vyťaté přímkou v, která obsahuje přímku d, nevede bod S k řešení naší úlohy. Důkaz už ponecháme čtenáři.

V odstavcích a) až e) jsme uvažovali o všech bodech roviny μ, takže je naše úloha úplně vyřešena. Odtud vyplývá tento závěr:

Množinou středů všech kružnic, které procházejí daným

bodem A a které se dotýkají dané roviny ϱ, je část poloprostoru (ϱ', A), vyťatého vrcholovou tečnou rovinou ϱ' paraboloidu P, vzniklá z něho vyloučením všech bodů, které leží ve vnitřní oblasti rotačního paraboloidu P.

Body této množiny dostaneme z bodů rovinné oblasti ω, ohraničené parabolou p a její vrcholovou tečnou v, rotací oblasti ω kolem přímky o, která je osou souměrnosti oblasti ω.

12. Jsou dány dvě různé rovnoběžné roviny $\varrho \parallel \sigma$ a přímka p, která neleží v žádné z nich. Určete množinu středů a) všech kulových ploch, b) všech kružnic, které se dotýkají rovin ϱ, σ a přímky p.

Řešení. a) Kulové plochy $\varkappa$, které se dotýkají dvou rovnoběžných rovin ϱ, σ, jejichž vzdálenost je $v > 0$, tj. jsou vepsány do rovinové vrstvy o výšce v, mají průměr rovný $v = 2r$, kde r je poloměr ploch $\varkappa$. Středy ploch $\varkappa$ vyplňují rovinu $\omega \parallel \varrho$, rovinu souměrnosti dané vrstvy.

Je-li přímka p tečnou kulové plochy $\varkappa$, která má poloměr r, potom má střed S plochy $\varkappa$ od přímky p vzdálenost r. Středy S všech ploch $\varkappa(r)$, které se dotýkají přímky p, vyplní rotační válcovou plochu V o ose v přímce p a poloměru řídicí kružnice r.

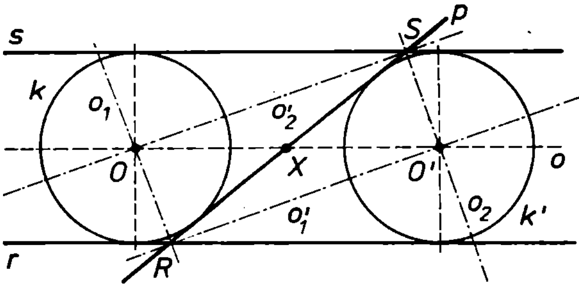
Odtud plyne, že střed S kulové plochy $\varkappa$, která se dotýká rovin ϱ, σ a přímky p, leží v průniku e roviny ω a plochy V. Obráceně, zvolíme-li v průniku e libovolný bod S, potom je jeho vzdálenost od rovin ϱ, σ i od přímky p rovna r; lze tedy opsat okolo bodu S kulovou plochu $\varkappa$, která se dotýká rovin ϱ a σ i přímky p. Proto je *m. v. b. S průnik $e \equiv \omega . V$, a to*:

[1] *elipsa nebo kružnice v případě, že je daná přímka p různoběžná s rovinou ϱ i σ,*

[2] *dvě přímky (náležející ploše V) ležící v rovině ω*

případě, že je přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ a σ a leží uvnitř rovinové vrstvy (ϱ, σ).

[3] *Úloha nemá řešení, leží-li přímka $p \parallel \varrho$ vně rovinové vrstvy (ϱ, σ). Případ, kdy p leží v rovině ϱ nebo σ, je v textu úlohy vyloučen.*



Obr. 17

b) Případ [1]. Nechť je přímka p různoběžná s rovinou ϱ, a tedy i s rovinou σ. Je-li přímka p tečnou kružnice k, o níž předpokládáme, že vyhovuje naší úloze, leží k v rovině α proložené přímkou p. Má-li se dále kružnice k dotýkat rovin ϱ a σ, musí rovina α obsahovat dvě tečny kružnice k, které tvoří průsečnice $r \equiv \alpha . \varrho$ a $s \equiv \alpha . \sigma$; přitom zřejmě platí, že je $r \parallel s$ (obr. 17). Proto je kružnice k vepsána do rovnoběžného pásu (r, s) roviny α a dotýká se přímky p. Jsou tedy v rovině α dvě kružnice $k(O, u)$ a $k'(O', u)$, které vyhovují podmínkám úlohy. Jejich poloměr je $u = d/2$, kde d značí vzdálenost přímek r, s.

Protože osy úhlů přímek r, p a s, p jsou dvojice kolmých přímek o_1, o_1' a o_2, o_2' a přitom je $o_1 \parallel o_2$ a $o_1' \parallel o_2'$, jsou pravoúhlé trojúhelníky ROS, $SO'R$ shodné (s pravými úhly ve vrcholech O a O'). Označíme-li velikost jejich společné přepony $|RS| = q$, platí o jejich těžnicích OX a $O'X$ vztah

$$|OX| = |O'X| = |RS|/2 = q/2,$$

což je úsečka dané velikosti. A to platí analogicky pro všechny roviny α svazku rovin o ose v přímce p. Leží tedy body O, O' na kružnici $m(X, q/2)$, která leží v rovině $\omega \parallel \varrho$, v rovině souměrnosti dané vrstvy (ϱ, σ).

Obráceně, zvolíme-li na kružnici m libovolný bod O, lze v rovině (O, p) vždy sestrojit kružnici k, která vyhovuje podmínkám úlohy. *Proto je množinou středů všech kružnic, které se dotýkají daných rovin ϱ, σ a přímky p, právě popsaná kružnice m.*

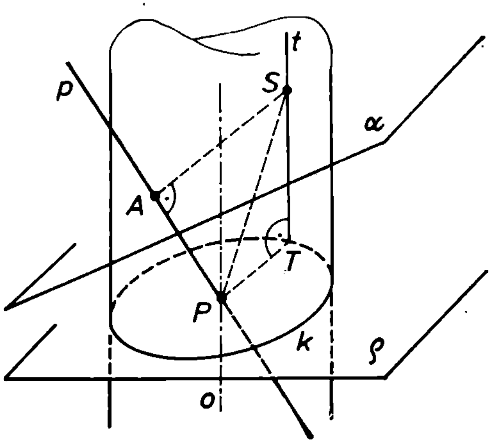
Případ [2]. *Je-li daná přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ a s rovinou σ, ale neleží v žádné z nich, nemá úloha řešení.*

Úloha 18. Jsou dány dvě rovnoběžné a různé roviny ϱ, σ a přímka p, která leží v jedné z nich. Určete množinu středů a) všech kulových ploch, b) všech kružnic, které se dotýkají rovin ϱ, σ a přímky p. [a) Přímka $m \parallel p$, která je průsečnicí dvou rovin: roviny $\omega \parallel \varrho$ souměrnosti vrstvy (ϱ, σ) a roviny γ, proložené přímkou p tak, že je $\gamma \perp \omega$, b) rovina ω.]

13. Je dána rovina ϱ, přímka p různoběžná s rovinou ϱ a na přímce p bod A, který neleží v rovině ϱ. Určete množinu středů a) všech kulových ploch, b) všech kružnic, které se dotýkají roviny ϱ a přímky p v bodě A.

Řešení. a) Nechť přímka p protíná rovinu ϱ v bodě P. Označme T dotykový bod roviny ϱ a kulové plochy $\varkappa$, která splňuje podmínky úlohy. Potom jsou si rovny délky úseček PA a PT, tj. délky tečen vedených z bodu P

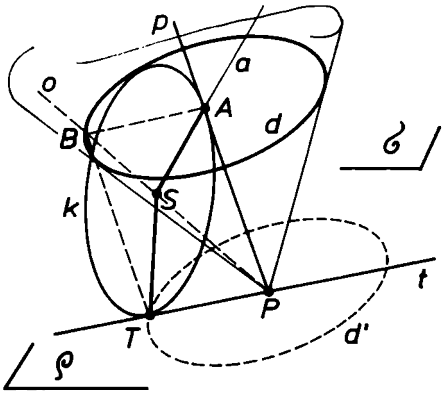
k ploše $\varkappa$, tedy $|PA| = |PT|$. Pro různé plochy $\varkappa$ naší úlohy leží jejich dotykové body T s rovinou ϱ na kružnici $k(P, |PA|)$ a středy S ploch $\varkappa$ na přímkách t vedených body T kolmo k rovině ϱ (obr. 18). Přímky t vytvoří tedy rotační válcovou plochu V o ose $o \perp \varrho$ procházející bodem P; kružnice k je její řídicí kružnicí.



Obr. 18

Dále víme, že množinou středů všech kulových ploch, které se dotýkají přímky p v bodě A, je rovina α vedená bodem A kolmo k přímce p. Proto leží středy ploch $\varkappa$ v průniku e roviny α s plochou V. Obráceně, zvolíme-li na e libovolný bod S, lze z bodu S opsat kulovou plochu $\varkappa(S, r)$, která se dotýká přímky p v jejím bodě A, a jak hned dokážeme, i roviny ϱ v určitém bodě T.

Bod S leží totiž jednak v rovině α, jednak na ploše V, jejíž povrchová přímka $t \perp \varrho$ prochází zvoleným bodem S a protíná rovinu ϱ v bodě T; přitom platí rovnost $|PT| = |PA|$. Proto jsou pravoúhlé trojúhelníky PSA a PST shodné (mají společnou přeponu PS a shodné odvěsny PT, PA), takže je také $|SA| = |ST| = r$. Proto je bod T bodem dotyku kulové plochy se středem v bodě S a roviny ϱ, která se také dotýká v bodě A přímky p.



Obr. 19

Je tedy množinou středů všech kulových ploch, které splňují podmínky naší úlohy, elipsa, která je v případě $p \perp \varrho$ *kružnicí.*

b) Kružnice k, která vyhovuje podmínkám úlohy, leží v určité rovině α proložené přímkou p, jíž se kružnice k dotýká v bodě A; kružnice k se dotýká také přímky $t \equiv \alpha . \varrho$ v bodě T. Střed S kružnice k leží proto na ose o úhlu APT a dále na přímce a roviny α, vedené bodem A kolmo k přímce p (obr. 19). Bude účelné sestrojit v rovině α přímku o jako úhlopříčku PB rovnoběžníku $PABT$, který je kosočtvercem (případně čtvercem), neboť platí rovnost $|PA| = |PT|$ (délky tečen vedených z bodu P ke kružnici k jsou stejně dlouhé).

Protože je $|AB| = |PT| = |AP|$, leží body B na kružnici $d(A, |AP|)$, která leží v rovině $\sigma \parallel \varrho$. Přímky PB, tj. osy úhlů APT, vytvoří kuželovou plochu K, která má vrchol v bodě P a řídicí kružnici d. Protože dále přímky a jako kolmice sestrojené k přímce p v bodě A leží v rovině $\omega \perp p$, leží body S na průniku m roviny ω s plochou K.

K tomu ještě připomeňme, že body T leží v rovině ϱ na kružnici $d'(P, |PA|)$, shodné s kružnicí d.

Obráceně, zvolíme-li v průniku m libovolný bod S, lze kolem bodu S opsat kružnici $k(S)$, která se dotýká přímky p v bodě A a roviny ϱ v určitém bodě T. To dokážeme takto: Bodem S prochází na kuželové ploše K povrchová přímka PS, která určuje na kružnici d bod B. Rovina $\alpha \equiv (p, S)$ protíná rovinu σ v přímce AB a rovinu ϱ v přímce $PT \parallel AB$, kde bod T je bodem kružnice d'. Úhlopříčka vzniklého kosočtverce $BAPT$ je přímka PB, která obsahuje bod S. Přímka $SA \equiv \alpha . \omega$ je kolmá k přímce p. Ze souměrnosti kosočtverce $BAPT$ podle jeho úhlopříčky PS vyplývá, že je úsečka ST kolmá k PT a $|ST| = |SA|$ je poloměr hledané kružnice k.

Odtud vyplývá: *Množinou středů všech kružnic, které splňují podmínky úlohy, je průnik $m \equiv \omega . K$, tj. buď elipsa, nebo ve zvláštním případě, je-li přímka p kolmá k rovině ϱ, kružnice.*

Průnikem m je totiž vždy elipsa, případně kružnice, protože všechny přímky PB kuželové plochy K svírají s přímkou PA úhel menší než úhel pravý, přičemž rovina průniku je kolmá k přímce PA, takže protíná všechny přímky kuželové plochy K.

Úloha 19. Je dána rovina ϱ, přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ (neleží však v ϱ) a na přímce p bod A. Určete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají přímky p v bodě A a roviny ϱ. [Přímka $m \equiv \omega . \sigma$, průsečnice roviny ω vedené bodem A kolmo k přímce p a roviny $\sigma \parallel \varrho$, přičemž rovina σ má od přímky p i od roviny ϱ stejně velké vzdálenosti.]

14. Je dána kulová plocha $\varkappa(S, r)$ a vně plochy $\varkappa$ bod V. Do plochy $\varkappa$ jsou vepsány komolé kužele K tak, že bod V je společným vrcholem úplných kuželů, příslušných kuželům K. Určete m. v. b., které náležejí obvodu středního řezu M některého z uvažovaných komolých kuželů K.

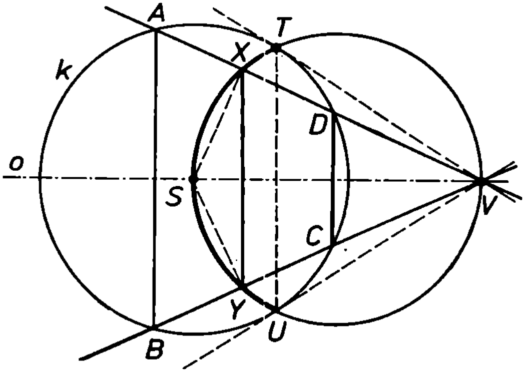
Poznámka. Ke každému komolému kuželi lze sestrojit příslušný kužel doplňkový, který spolu s ním tvoří příslušný kužel úplný. Z tohoto kužele vznikne obráceně daný komolý kužel řezem, který leží ve vhodné rovině rovnoběžné s rovinou podstavy úplného kužele.

Řešení úlohy. Komolý kužel K vepsaný do plochy $\varkappa$ je nutně rotační, neboť obvody jeho podstav leží na ploše $\varkappa$; jsou to tedy kružnice v rovnoběžných rovinách, takže přímka o, která obsahuje středy těchto podstav, prochází středem S plochy $\varkappa$ a je osou komolého kužele K i plochy $\varkappa$. Osa o prochází zřejmě i bodem V.

Zvolme libovolnou rovinu ω obsahující přímku o. Řez vzniklý na našem útvaru rovinou ω je znázorněn na obr. 20. Na ploše $\varkappa$ je to kružnice $k(S, r)$ a na kuželi K rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jehož ramena se v prodloužení protínají v bodě V. Náš prostorový útvar vznikne otáčením uvažovaného řezu ležícího v rovině ω

kolem přímky o, takže se vyšetřování hledaných obvodů M převede na planimetrickou úlohu v rovině ω.

Střední řez M na kuželi K protíná rovinu ω v úsečce XY, která tvoří střední příčku lichoběžníku $ABCD$. Její krajní body X, Y, jakožto středy úseček AD a BC,



Obr. 20

leží na kruhovém oblouku $\widehat{TSU}$, který leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem SV, neboť je $SX \perp AD$ a $SY \perp BC$.

Obráceně: Zvolíme-li libovolný vnitřní bod X oblouku $\widehat{TSU}$ (kromě bodu S), lze jím sestrojit tětivu XY v oblouku $\widehat{TSU}$, kolmou k přímce o; úsečka XY určuje střední příčku příslušného lichoběžníku $ABCD$, kde body A, D leží na přímce VX a body B, C na přímce VY. Je totiž $SX \perp AD$, a proto platí $|AX| = |XD|$. Z vnitřních bodů oblouku $\widehat{TSU}$ je nutno vyloučit bod S, neboť nedává na oblouku $\widehat{TSU}$ žádnou tětivu. Také krajní body T, U oblouku $\widehat{TSU}$ nevedou ke konstrukci lichoběžníku, protože přímky VT, VU jsou tečnami kružnice k a nevzniknou na nich žádné tětivy kružnice k, jež by měly být rameny lichoběžníku. Tím jsme dokázali planimetrickou větu: *Množinou středů ramen všech rovnoramenných lichoběžníků vepsaných do dané kružnice k, přičemž ramena každého z těchto lichoběžníků se protínají v bodě V z vnější oblasti kružnice k, je kruhový oblouk $\widehat{TSU}$, až na jeho body T, S, U.*

Rotací bodů X, Y kolem přímky o vznikají pak obvody středních řezů M kuželů K. Proto platí: *Obvody středních řezů M komolých kuželů K naší úlohy vyplní kulový vrchlík, který je průnikem vnitřku plochy $\varkappa$ a Thaletovy kulové plochy sestrojené nad průměrem SV s vyloučením jeho hrany a jeho bodu ležícího na jeho ose.* Tím je hledaná m. b. určena.

15. Je dán rotační válec V, jehož podstava má poloměr r a výška válce je v. Určete množinu středů S všech koulí o daném poloměru ϱ, které lze celé umístit do válce V.

Řešení. Předpokládejme, že koule $\varkappa(S, \varrho)$ se středem S je celá umístěna ve válci V. Potom leží bod S uvnitř válce a má od všech bodů jeho povrchu vzdálenost větší nebo rovnou ϱ. Musí tedy bod S splňovat dvě podmínky; označme je A a B:

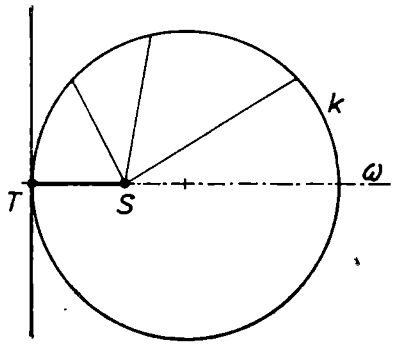
A) Bod S musí být od rovin podstav válce V vzdálen o délku větší nebo rovnou ϱ. Leží proto v průniku P dvou poloprostorů: jednoho opačného k (σ, O), druhého opačného k (σ', O'), kde body O, O' jsou středy podstav daného válce, a to O střed podstavy ležící v rovině π, O' střed podstavy ležící v rovině π'; přitom rovina $\sigma \parallel \pi$

náleží poloprostoru (π, O') a je od roviny π vzdálena o délku rovnou ϱ a rovina $\sigma' \parallel \pi$ patří do poloprostoru (π', O) a její vzdálenost od roviny π' je opět ϱ.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod S v útvaru P, lze z bodu S opsat kouli $\varkappa(S, \varrho)$, která nemá společné body s žádnou z rovin π, π', nebo se v krajním případě roviny π nebo π' dotýká. To znamená, že průnik P, pokud není prázdný, tj. pokud $\varrho \leqq v/2$, je množinou středů S všech koulí $\varkappa$, které splňují podmínku A.

B) Bod S musí mít od všech bodů pláště válce V vzdálenost větší nebo rovnou ϱ.

Ptejme se nejdříve na vzdálenosti bodu S, který leží uvnitř válce V, od površek příslušné válcové plochy. Tyto vzdálenosti zjistíme v rovině μ proložené bodem S kolmo k površkám válcové plochy, tj. kolmo k ose o válce V. Jedná se zřejmě o vzdálenosti bodu S od bodů ležících na obvodu k kruhového řezu, který je průnikem válce V a roviny μ (obr. 21a). Kdyby bod S ležel na ose OO' válce V, měl by od všech površek válce stejnou



Obr. 21a

vzdálenost r. Leží-li bod S mimo úsečku OO', má právě jeden bod T kružnice k od bodu S nejmenší vzdálenost. Úsečka ST délky $d < r$ je obsažena v rovině $\omega \equiv (S, o)$. Úsečka ST je také nejkratší úsečkou ze všech úseček, které spojují bod S a libovolný bod pláště válce. Její velikost nazveme vzdáleností bodu S od pláště válce.

Rovnoběžným posunutím bodu S ve směru přímky o tak, aby zůstal ve válci V, nebo otočením bodu S kolem přímky o se jeho vzdálenost d od pláště válce nemění. Body tak vzniklé vyplní plášť rotačního válce o ose OO' a poloměru $r - d$. Každý bod tohoto válce má od pláště válce V vzdálenost větší nebo rovnou d a současně menší nebo rovnou r.

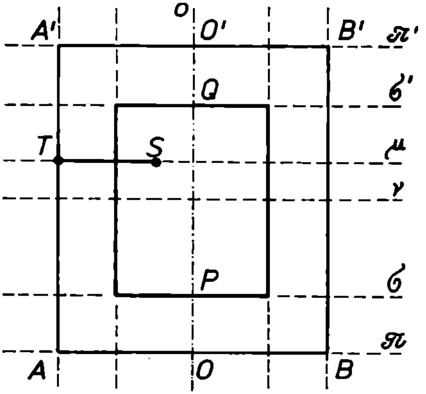
Podmínce B) je tedy možno vyhovět jenom tehdy, když je daný poloměr ϱ menší nebo roven r, takže bod S patří buď rotačnímu válci V' o ose OO' a poloměru $r - \varrho$, když je $\varrho < r$, nebo patří úsečce OO' v případě $r = \varrho$.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod S tak, aby patřil do válce V' (případně úsečce OO'), má podle předchozí úvahy od všech bodů pláště válce V vzdálenost větší nebo rovnou ϱ a lze z něho opsat kouli $\varkappa(S, \varrho)$, která nemá s pláštěm válce V žádný společný bod, nebo se v krajním případě pláště válce V dotýká. Dospěli jsme tak k množině středů všech koulí, které splňují podmínku B).

V průniku obou množin P a V', odvozených v odstavcích A, B, dostáváme už řešení naší úlohy, aniž je třeba pro důkaz tohoto řešení ještě úvahu obracet. Množinou hledaných středů všech koulí $\varkappa$ naší úlohy je průnik útvarů P a V'.

Závěr: a) *Je-li $\varrho < r$ a také $\varrho < v/2$, je hledanou množinou středů všech koulí $\varkappa$ válec* (na obr. 21b je vyznačen jeho osový řez) *souosý a soustředěný s válcem V; jeho podstavy mají poloměr $r - \varrho$ a jeho výška je $v - 2\varrho$.*

b) *Je-li* $\varrho < r$ *a* $\varrho = v/2$ *(možné, jen když je* $v < 2r$*), je hledanou množinou středů koulí kruh, a to průnik roviny* ν*, která je rovinou souměrnosti rovinové vrstvy* (π, π')*, a válce* V'*. Tento kruh má střed na přímce* o *a poloměr* $r - \varrho$.



Obr. 21b

c) *Je-li* $\varrho = r$ *a* $\varrho < v/2$ *(možné, jen když je* $v > 2r$*), je hledanou množinou středů úsečka* PQ *ležící na ose* o *válce* V (viz obr. 21b).

d) *Je-li* $\varrho = r$ *a také* $\varrho = v/2$*, je hledanou množinou pouze jeden bod, a to střed válce* V*. Je to střed koule vepsané rovnostrannému válci* V*.*

e) *Je-li* $\varrho > r$ *nebo* $\varrho > v/2$*, nemá naše úloha řešení.*

Úloha 20. Určete množinu středů všech koulí o daném poloměru ϱ, které lze celé umístit do kvádru o daných rozměrech $a \geqq b \geqq c$. [Kvádr, který má týž střed jako daný kvádr, stěny rovnoběžné se stěnami daného kvádru a rozměry $a - 2\varrho$, $b - 2\varrho$, $c - 2\varrho$.]

Úloha 21. Je dán rotační kužel K, jehož podstava má poloměr $r > 0$ a jehož výška je $v > 0$. Určete množinu středů všech koulí daného poloměru $\varrho > 0$, které lze celé umístit do kužele K. [Rotační kužel souosý s daným kuželem a jemu podobný, případně jediný bod v případě $\varrho(r + \sqrt{r^2 + v^2}) = rv$.]

O B S A H

Seznam dosud vydaných svazků edice
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ
v nakladatelství Mladá fronta

---

1. *František Hradecký - Milan Koman - Jan Vyšín:* Několik úloh z geometrie jednoduchých těles, 1961, 1963 a 1977
2. *Jiří Sedláček:* Co víme o přirozených číslech, 1961, 1965 a 1976
3. *Jaroslav Šedivý:* Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách, 1962
4. *Miroslav Šisler — Jiří Jarník:* O funkcích, 1962 a 1963
5. *František Veselý:* O nerovnostech, 1963
6. *Rudolf Výborný:* Matematická indukce, 1963 a 1966
7. *Jaroslav Šedivý:* O podobnosti v geometrii, 1963 a 1967
8. *Jiří Váňa:* O rovnicích s parametry, 1964 a 1970
9. *Jan Vyšín:* Konvexní útvary, 1964
10. *Jiří Sedláček:* Faktoriály a kombinační čísla, 1964
11. *Josef Holubář:* Geometrická místa bodů v prostoru, 1965
12. *Karel Havlíček:* Prostory o čtyřech a více rozměrech, 1965
13. *Miroslav Šisler — Josef Andrys:* O řešení algebraických rovnic, 1966
14. *František Veselý:* O dělitelnosti čísel celých, 1966
15. *Milan Koman:* Jak vyšetřujeme geometrická místa metodou souřadnic, 1966
16. *Stanislav Horák:* Kružnice, 1966
17. *Jaromír Hroník:* Úlohy o maximech a minimech funkcí, 1967
18. *Karel Havlíček:* Analytická geometrie a nerovnosti, 1967
19. *Jiří Jarník:* Komplexní čísla a funkce, 1967

20. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Goniometrické funkce, 1968
21. *Alois Apfelbeck:* Kongruence, 1968
22. *Tibor Šalát:* Dokonalé a spriatelené čísla, 1969
23. *Jaroslav Morávek - Milan Vlach:* Oddělitelnost množin, 1969
24. *Ján Gatial - Milan Hejný:* Stavba Lobačevského planimetrie, 1969
25. *Leo Bukovský - Igor Kluvánek:* Dirichletov princíp, 1970
26. *Karel Hruša:* Polynomy v moderní algebře, 1970
27. *Stanislav Horák:* Mnohostěny, 1970
28. *Bruno Budinský - Stanislav Šmakal:* Vektory v geometrii, 1971
29. *František Zítek:* Vytvořující funkce, 1972
30. *Milan Koman - Jan Vyšín:* Malý výlet do moderní matematiky, 1972 a 1974
31. *Oldřich Odvárko:* Booleova algebra, 1973
32. *Jan Vyšín - Jitka Kučerová:* Druhý výlet do moderní matematiky, 1973
33. *Jaroslav Morávek:* O dynamickém programování, 1973
34. *Ladislav Rieger:* O grupách, 1974
35. *Alois Kufner:* Co asi nevíte o vzdálenosti, 1974
36. *Ján Černý:* O aplikáciach matematiky, 1976
37. *Boleslav Riečan - Zdena Riečanová:* O pravdepodobnosti, 1976
38. *Juraj Bosák:* Latinské štvorce, 1976
39. *Alois Kufner:* Nerovnosti a odhady, 1975
40. *Antonín Vrba:* Princip matematické indukce, 1977
41. *Bohdan Zelinka:* Rovinné grafy, 1977
42. *Ladislav Beran:* Uspořádané množiny, 1978
43. *Jiří Jarník:* Posloupnosti a řady, 1979
44. *Bohdan Zelinka:* Matematika hrou i vážně, 1979
45. *Antonín Vrba:* Kombinatorika, 1980

46. *Jaroslav Šedivý:* Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách, 1980
47. *Arnošt Niederle:* Zajímavé dvojice trojúhelníků, 1980
48. *František Veselý:* O nerovnostech a nerovnicích, 1982
49. *Pavel Vít:* Řetězové zlomky, 1982
50. *Adam Płocki:* O náhodě a pravděpodobnosti, 1982
51. *N. B. Vasiljev - V. L. Gutenmacher:* Přímky a křivky, 1982
52. *Alois Kufner:* Symetrické funkce, 1982
53. *Ján Gatial, Tomáš Hecht, Milan Hejný:* Hry takmer matematické, 1982

Připravovaný svazek:

Ljubomir Davidov: Funkcionální rovnice

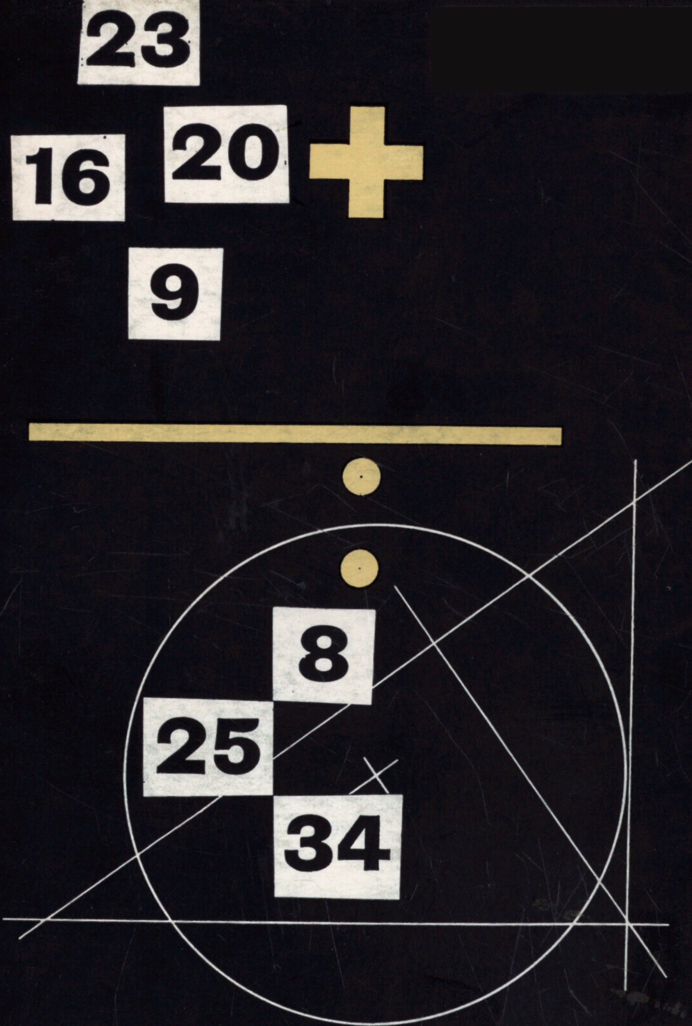
ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

JOSEF HOLUBÁŘ

Množiny bodů v prostoru

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
Pro nové vydání upravil Leo Boček
K tisku připravil Vladimír Doležal
Odpovědná redaktorka Zdena Šmídová
Publikace číslo 4586
Edice Škola mladých matematiků, svazek 54
Vytiskl Mír, novinářské závody, n. p.,
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
1,87 AA, 2,69 VA, 64 stran
Náklad 6000 výtisků, 2. vydání
Praha 1983. 508/21/82.5
23-083-83 03/2

Cena brožovaného výtisku 4 Kčs



23-083-83
03/2
Cena brož.
4 Kčs