Princip matematické indukce

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

PRINCIP MATEMATICKÉ INDUKCE

40

Vydal ÚV matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ANTONÍN VRBA

Princip matematické indukce

PRAHA 1977
VYDAL ÚV MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
V NAKLADATELSTVÍ MLADÁ FRONTA

Recenzovali E. Nichtburger a dr. O. Odvárko

ÚVODEM

V této edici již vyšla ve dvou vydáních brožura R. Výborného Matematická indukce. *Z vážných důvodů ji však nebylo možno vydat znovu, a proto vznikla tato nová knížka na stejné téma. Postup výkladu je však jiný a dost látky je zde navíc.*

Základ tvoří první dvě kapitoly. Je v nich uvedeno několik variant principu matematické indukce a ukázán jejich význam pro dokazování matematických vět a pro rekurentní definice. Teorie je demonstrována na řešených úlohách. Přestože jsou co nejjednodušší, může se stát, že v nich čtenář narazí na pojmy a souvislosti, k nimž dosud při studiu matematiky nedospěl. V žádném případě to však nebude nic speciálního, složitého či hlubokého a poučení lze nalézt v libovolném přehledu elementární matematiky. Také značení se možná bude místy trochu lišit od momentální školní praxe. V nejhorším případě je možno úlohu, se kterou by snad byly nepřekonatelné potíže, vynechat; v další četbě to nebude vadit.

Ve třetí kapitole jsou shrnuty různé poznámky, mj. jsou tu úvahy o filozofickém a logickém pozadí indukce a také bibliografie.

Čtvrtá kapitola se pak skládá z rozmanitých řešených úloh (většinou zahraniční provenience), jejichž obtížnost je srovnatelná s úlohami matematické olympiády. Jsou seřazeny podle tematické příbuznosti a všechny ovšem spočívají v matematické indukci. Úlohy spolu až na malé výjim-

ky vzájemně nesouvisejí a není nutno je číst v tom pořadí, jak jsou uvedeny.

Za každou z prvních tří kapitol následují cvičení. Některá doplňují úlohy řešené v textu, většinou však vyžadují samostatné použití teorie vyložené v kapitole. Návody k řešení několika složitějších cvičení tvoří pátou část knížky a závěrečná šestá část je složena z řešení téměř všech cvičení.

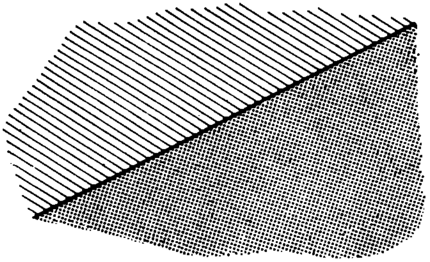
1. kapitola

PRINCIP MATEMATICKÉ INDUKCE A JEHO VYUŽITÍ V DŮKAZECH

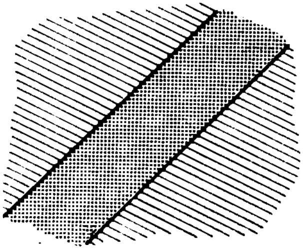
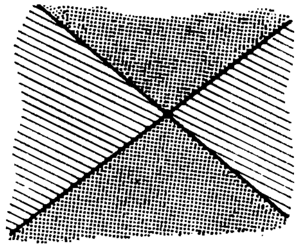
Začneme hned úlohou. Teoretické výklady si necháme na později.

Úloha 1. V rovině je dán konečný počet různých přímek. Ty ji rozdělují na části. Dokažte, že je tyto části možno vybarvit dvěma barvami tak, aby každá část byla celá vybarvena jednou barvou a aby žádné dvě sousední části (tj. části oddělené úsečkou, polopřímkou nebo přímkou) nebyly vybarveny stejnou barvou.

Je-li počet přímek hodně malý, snadno se přesvědčíme, že věta, kterou máme dokázat, v těchto jednotlivých případech platí. Tak např. jedna přímka rozděluje rovinu na dvě sousední poloroviny a ty můžeme obarvit různými barvami.

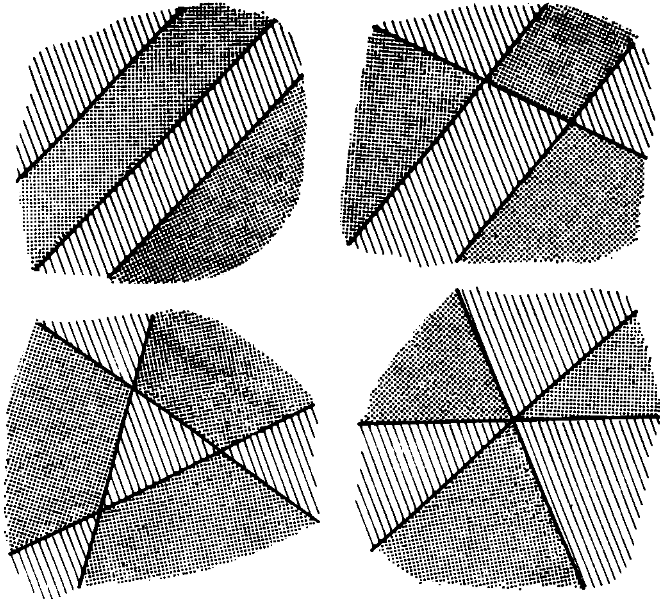


Jsou-li dány dvě přímky, mohou být buď rovnoběžné, nebo různoběžné. Na obrázku je znázorněno, jak lze vybarvit části, aby podmínka byla splněna.

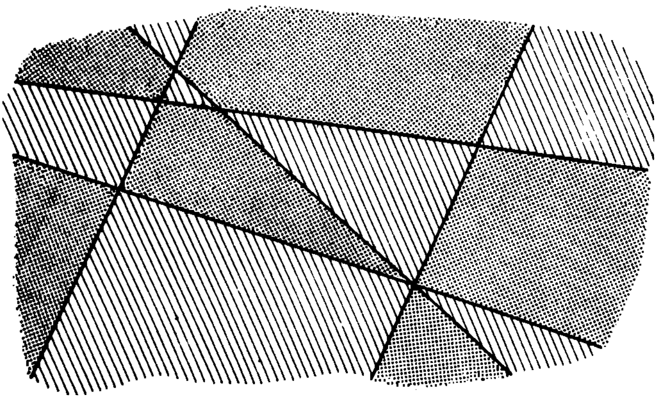
Na dalším obrázku jsou všechny čtyři vzájemné polohy tří přímek. I zde se podařilo části vybarvit náležitým způsobem.

Se vzrůstajícím počtem přímek však rychle rostou technické potíže. Zvětšuje se počet případů vzájemné polohy přímek a nastává problém s tím, aby se na žádný z nich nezapomnělo. Kromě toho obrázky také ztrácejí na přehlednosti a jejich barvení je čím dále složitější. I kdybychom se s těmito obtížemi dokázali vypořádat a dařilo se nám ověřovat platnost věty v dalších jednotlivých konkrétních případech, nebude to mít pro důkaz věty valný význam. Věta totiž tvrdí, že části lze vybarvit popsaným způsobem při jakémkoliv počtu přímek a jakékoliv jejich poloze. Ať ověříme platnost věty v sebevíce jednotlivých případech, zůstane stále nekonečně mnoho případů nevyšetřeno a o platnosti obecné věty stále nemůžeme nic říci. Tento postup by měl smysl pouze tehdy, podařilo-li by se ukázat, že se v určitém případě nedají části roviny vybarvit popsaným způso-

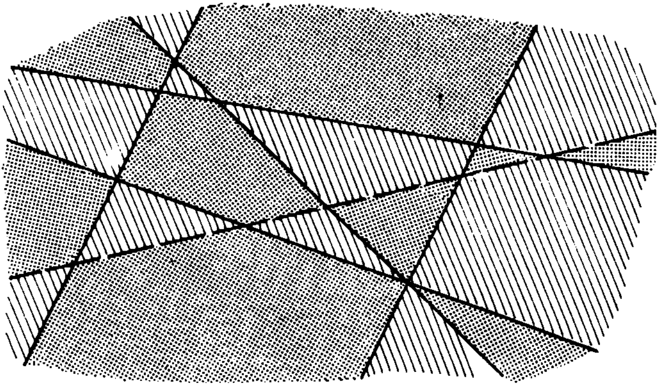


bem. Tak bychom dokázali, že věta neplatí. Jak se však brzy přesvědčíme, věta platí a k jejímu důkazu budeme tedy musit přistoupit z jiné strany.

Zachrání nás tato spásná myšlenka: Dejme tomu, že jsme se o platnosti věty přesvědčili ještě pro p přímek. Což vyjít z vybarvení částí v tomto případě, vést $(p + 1)$-tou přímku a pokusit se nějak upravit původní obarvení tak, aby z něho vzniklo náležité obarvení pro $p + 1$ přímek? Když se nám to podaří, budeme tak mít větu ověřenu i pro $p + 1$ přímek. Pokud však tato metoda přechodu od případu p přímek k případu $p + 1$ přímek bude univerzální, tj. půjde použít pro jakékoliv přirozené číslo p, bude věta vlastně dokázána. Můžeme si totiž představit, jak metodu dále opakovaně používáme: na základě toho, že jsme větu ověřili pro $p + 1$ přímek, ji ověříme i pro $p + 2$ přímek, na základě toho pak pro $p + 3$ přímek atd.



Zbývá jen to hlavní — najít, jak z vybarvení pro p přímek sestrojit vybarvení pro $p + 1$ přímek. Není však tak těžké na to přijít. Představme si, že je v rovině p přímek a že jsou její části vybarveny dvěma barvami tak, aby sousední části měly vždy různé barvy. (Je to znázorněno na obrázku.) Veďme nyní $(p + 1)$-tou přímku (na druhém z obrázků je znázorněna čárkovaně). Ta rozdělí rovinu na dvě poloroviny. V jedné z nich barvy ponecháme tak, jak byly původně, a ve druhé je navzájem vyměníme. Pokud je mezi dvěma sousedními částmi roviny při tomto novém dělení hranice tvořená některou z původních p přímek (nebo její částí), pak byly části obarveny různými barvami a jsou v téže polorovině určené $(p + 1)$-tou přímkou. Zůstaly tedy buď beze změny, nebo se navzájem vyměnily a jsou opět různé. Jsou-li dvě sousední části odděleny $(p + 1)$-tou přímkou (nebo její částí), pak zřejmě vznikly z některé původní



části tak, že ji $(p + 1)$-tá přímka rozetla. Původní barva této části na jedné straně zůstala a na druhé se změnila. I tyto sousední části jsou tedy vybarveny různými barvami.

Důkaz, který jsme právě dokončili, byl založen na tzv. *principu matematické indukce:*

Buď M množina, která má tyto dvě vlastnosti:

(I) $1 \in M$.

(II) Pro každé přirozené číslo p platí: Jestliže $p \in M$, potom je též $p + 1 \in M$.

Potom množina M obsahuje všechna přirozená čísla.

O platnosti tohoto principu se přesvědčíme snadno: Podle (I) je $1 \in M$. Podle (II) z toho plyne, že $2 \in M$. Z toho opět podle (II) plyne, že $3 \in M$, odtud je pak $4 \in M$ atd. Tak můžeme zřejmě postupně dojít ke kterémukoliv přirozenému číslu; množina M tedy obsahuje všechna přirozená čísla.

Jinak si to můžeme ukázat také takto:

Dejme tomu, že existují přirozená čísla, která do M nepatří; nejmenší z nich označme t. Podle (I) je $t > 1$. Číslo $t - 1$ je tedy přirozené a podle definice čísla t platí $t - 1 \in M$. Podle (II) z toho plyne, že $t \in M$ a to je spor.

K oběma úvahám se ještě vrátíme na str. 59 a budeme je podrobněji analyzovat.

Principu matematické indukce lze mj. užít k dokazování vět tak, jak jsme to učinili při řešení úlohy 1. **Chceme-li dokázat platnost nějaké věty, která má tvar** (nebo se dá přeformulovat tak, aby tohoto tvaru nabyla) **„Pro každé přirozené číslo platí...“, stačí dokázat tyto dvě pomocné věty:**

(1) **Věta platí pro číslo 1.**

(2) **Pro každé přirozené číslo p platí: Pokud věta platí pro číslo p, pak platí také pro číslo $p + 1$.**

To plyne bezprostředně z principu matematické indukce, vezmeme-li za M množinu všech čísel, pro něž věta platí.

Pomocné větě (2) se často říká *indukční krok* a jejímu předpokladu „věta platí pro číslo p“ se říkává *indukční předpoklad*.

Ukážeme si ještě na několika typických příkladech, jak se provádějí důkazy metodou matematické indukce.

Úloha 2. Dokažte, že číslo $2^{3k} + 3^{4k}$ není pro žádné přirozené k dělitelno číslem 73.

Řešení. Pro $k = 1$ věta platí, neboť $2^3 + 3^4 = 89$ a to není dělitelno číslem 73. Pomocná věta (1) je dokázána.

Přistupme k důkazu pomocné věty (2). Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že $2^{3p} + 3^{4p}$ není dělitelno číslem 73. Vyšetřme číslo $2^{3(p+1)} + 3^{4(p+1)}$. To je rovno

$$2^{3p+3} + 3^{4p+4} = 2^3 . 2^{3p} + 3^4 . 3^{4p} =$$

$$= 8 . 2^{3p} + 81 . 3^{4p} = 8(2^{3p} + 3^{4p}) + 73 . 3^{4p} .$$

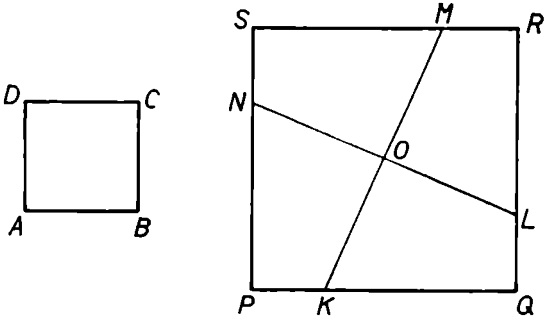
První z obou sčítanců není podle indukčního předpokladu dělitelný číslem 73 a druhý je. Součet tedy číslem 73 dělitelný není.

Tím je důkaz proveden a úloha vyřešena.

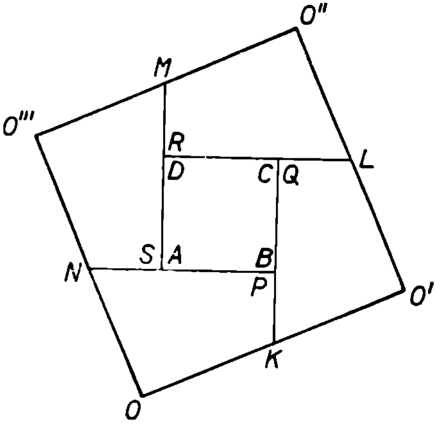
Úloha 3. Je dáno n čtverců. Dokažte, že je lze rozdělit na části tak, aby z nich bylo možno sestavit jediný čtverec.

Řešení. Je-li dán jen jeden čtverec, je možno ho rozdělit jakkoliv. Ze vzniklých částí lze pak vždy sestavit původní čtverec. Pomocná věta (1) je dokázána.

Buď nyní p přirozené číslo. Předpokládejme, že pro p čtverců věta platí, a dokažme, že pak platí i pro $p + 1$ čtverců. Vezmeme si nějaké dva z nich (je $p + 1 \geqq 2$). Označme je $ABCD$, $PQRS$ (sledujte obrázek) tak, aby $AB \leqq PQ$. Na stranách PQ, QR, RS, SP sestrojme po řadě body K, L, M, N tak, aby platilo $KQ = LR = MS = NP = \dfrac{AB + PQ}{2}$. Označme O společný bod úseček KM, LN a rozdělme čtverec $PQRS$ podle těchto



úseček na čtyři shodné části. Přiložíme-li je ke čtverci *ABCD* tak, jak ukazuje další obrázek, vznikne čtverec, o čemž se snadno přesvědčíte. Tento čtverec spolu se zbylými $p - 1$ čtverci umíme podle indukčního předpokladu dále rozdělit tak, aby vzniklé části dávaly jeden



čtverec. Nyní je již zřejmé, jak rozdělit původních $p+1$ čtverců. Dokázali jsme pomocnou větu (2).

Tím je úloha vyřešena.

Věty, které jsme zatím dokazovali, měly velmi jednoduché předpoklady. V další úloze bude lépe vidět, jak se využívá při důkaze matematickou indukcí předpokladů dokazované věty.

Úloha 4. Jsou-li $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kladná čísla, pro něž platí

$$x_1 x_2 \ldots x_n = 1\,,$$

potom je

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n\,.$$

Dokažte.

Řešení. Pro $n = 1$ věta platí (nastává rovnost).

Buď nyní p přirozené číslo. Předpokládejme, že pokud je součin nějakých p kladných čísel roven 1, potom je jejich součet větší nebo roven p. Uvažujme nyní $p+1$ kladných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ takových, že

$$x_1 x_2 \ldots x_{p+1} = 1\,.$$

Můžeme předpokládat, že jsou označena tak, aby

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{p+1}\,.$$

Pro p kladných čísel

$$x_1 x_{p+1}, x_2, \ldots, x_p$$

platí, že jejich součin je 1 a podle indukčního předpokladu je tedy

$$x_1 x_{p+1} + x_2 + \ldots + x_p \geqq p\,.$$

Odtud dostáváme

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{p+1} = (x_1 x_{p+1} + x_2 + \ldots + x_p) +$$
$$+ x_1 + x_{p+1} - x_1 x_{p+1} \geqq p + x_1 + x_{p+1} - x_1 x_{p+1} =$$
$$= p + (1 - x_1)(x_{p+1} - 1) + 1 \geqq p + 1 .$$

Poslední nerovnost vznikla takto:

Kdyby bylo $x_1 > 1$, bylo by také (protože x_1 je nejmenší z uvažovaných čísel) $x_2 > 1, \ldots, x_{p+1} > 1$ a tedy $x_1 x_2 \ldots x_{p+1} > 1$, což odporuje předpokladu*). Je tedy $x_1 \leqq 1$. Analogicky se dokáže, že $x_{p+1} \geqq 1$. Součin $(1 - x_1)(x_{p+1} - 1)$ je tedy nezáporný.

Tím je důkaz proveden.

I když důkaz pomocné věty (1) bývá většinou podstatně snazší než důkaz indukčního kroku (2) (není tomu tak vždycky), není radno tuto etapu důkazu metodou matematické indukce odbývat nebo dokonce vynechávat. Představme si, že bychom se pokoušeli dokázat tuto větu:

Pro každé přirozené k je číslo $2^{3k} + 3^{4k}$ dělitelno číslem 73.

Z úlohy 2 víme, že to není pravda. Pokud bychom se však zmýlili a důkaz pomocné věty (1) (která ve skutečnosti neplatí) se nám podařil, nebo bychom případ $k = 1$ vůbec nezkoumali, podařilo by se nám nepravdivou větu „dokázat“. Pomocná věta (2) totiž platí: Předpokládáme-li, že $2^{3p} + 3^{4p}$ je dělitelno číslem 73, pak z toho vyplývá, že i $2^{3(p+1)} + 3^{4(p+1)} = 8(2^{3p} + 3^{4p}) + 73 . 3^{4p}$ je dělitelno číslem 73.

*) Předpokladu dokazované věty, nikoliv indukčnímu předpokladu.

Ještě na jednom odstrašujícím příkladě si ukažme, jak důležitá jsou slova „pro každé přirozené číslo" ve formulaci pomocné věty (2). „Dokážeme" si, že pro každé přirozené číslo n platí: Každých n přirozených čísel si je navzájem rovno. Provedeme to metodou matematické indukce.

Pro $n = 1$ to platí — každé přirozené číslo je samo sobě rovno. Pomocná věta (1) je dokázána.

Buď dále p přirozené číslo a předpokládejme, že každých p přirozených čísel je si navzájem rovno. Mějme nyní $p + 1$ přirozených čísel $c_1, c_2, \ldots, c_{p+1}$. Podle indukčního předpokladu je

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_p$$

a také

$$c_2 = c_3 = \ldots = c_{p+1} .$$

Je tedy

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_p = c_{p+1} .$$

Tím je důkaz proveden.

Omyl tentokrát spočívá v tom, že pomocná věta (2) neplatí pro $p = 1$. Z toho, že každé číslo je rovno samo sobě neplyne, že každá dvě čísla jsou si rovna.

Uvědomme si dále, že na principu matematické indukce vůbec není podstatné, že se začíná od čísla 1. Zcela analogicky jako u původního znění (I)—(II) lze ověřit pravdivost následující obecnější verse:

Buď M množina, která má tyto vlastnosti:

(III) Pro celé číslo k platí $k \in M$.

(IV) Pro každé celé číslo $c \geqq k$ platí: Jestliže $c \in M$, potom také $c + 1 \in M$.

Potom množina M obsahuje všechna celá čísla větší nebo rovná číslu k.

To plyne také přímo z původního znění principu matematické indukce: Označme L množinu, která vznikne z množiny M odečtením čísla $k - 1$ ode všech celých čísel, která jsou obsažena v množině M. Z předpokladů (III) a (IV) pro množinu M plyne, že jsou splněny předpoklady (I) a (II) pro množinu L. Množina L tedy obsahuje všechna přirozená čísla a tedy množina M obsahuje všechna celá čísla větší nebo rovná číslu k.

Toto znění principu matematické indukce umožňuje mj. **dokazovat věty typu „Pro každé celé číslo větší než číslo k, nebo rovné číslu k platí...“ tak, že dokážeme následující dvě pomocné věty:**

(3) Věta platí pro celé číslo k.

(4) Pro každé celé číslo $c \geqq k$ platí: Pokud věta platí pro číslo c, pak platí i pro číslo $c + 1$.

Tuto metodu si budeme demonstrovat na několika úlohách.

Úloha 5. Dokažte, že pro každé reálné číslo α, které není celočíselným násobkem čísla π, a pro každé nezáporné celé číslo n platí

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \ldots \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}.$$

Řešení. Pro $n = 0$ se dokazovaná rovnost redukuje na

$$\cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha},$$

což je pravda vzhledem ke známému vzorci pro sinus dvojnásobného úhlu. Pomocná věta (3) je dokázána.

Předpokládejme, že $c \geqq 0$ je celé číslo a že pro

$n = c$ dokazovaná rovnost platí. Dokážeme ji pro $n = c + 1$. Postupně dostáváme

$$\cos\alpha \cos 2\alpha \dots \cos 2^c\alpha \cos 2^{c+1}\alpha =$$

$$= \frac{\sin 2^{c+1}\alpha}{2^{c+1}\sin\alpha}\cos 2^{c+1}\alpha = \frac{\frac{1}{2}\sin 2\,.\,2^{c+1}\alpha}{2^{c+1}\sin\alpha} = \frac{\sin 2^{c+2}\alpha}{2^{c+2}\sin\alpha}\,.$$

(První rovnost je důsledkem indukčního předpokladu a druhá plyne ze zmíněného goniometrického vzorce.)

Tím je proveden důkaz pomocné věty (4) a úloha je vyřešena.

Úloha 6. Na poště mají známky pouze v hodnotách 0,30 Kčs a 2,50 Kčs. Dokažte, že jimi lze ofrankovat jakoukoliv zásilku, jejíž poštovné činí alespoň 4,80 Kčs. (Poštovné je vždy zaokrouhleno na desetihaléře.)

Řešení. Užijeme-li matematického vyjadřování místo poštovního, jde o to dokázat následující větu:

Ke každému přirozenému číslu $a \geqq 48$ existují celá nezáporná čísla u, v taková, že

$$a = 3u + 25v\,.$$

(Čísla u, v odpovídají počtu známek za 0,30 Kčs, resp. 2,50 Kčs.) K tomu, abychom ji dokázali, bude stačit dokázat pomocné věty (3) a (4) pro $k = 48$.

Vzhledem k tomu, že $48 = 3\,.\,16 + 25\,.\,0$, pomocná věta (3) platí.

Předpokládejme, že $c \geqq 48$ je přirozené číslo*) a že

*) Zde je jedno, zda řekneme „přirozené" nebo „celé", neboť $c > 0$.

pro ně věta platí, tj. pro jistá nezáporná celá čísla u, v platí

$$c = 3u + 25v .$$

Hledejme nyní podobné vyjádření pro číslo $c + 1$. Všimněme si, že

$$1 . 25 - 8 . 3 = 1$$

a také

$$17 . 3 - 2 . 25 = 1 .$$

Z toho plyne:
Je-li $u \geqq 8$, můžeme psát

$$c + 1 = 3(u - 8) + 25(v + 1) .$$

Je-li $v \geqq 2$, můžeme psát

$$c + 1 = 3(u + 17) + 25(v - 2) .$$

V případech $u \geqq 8$ a $v \geqq 2$ jsme s důkazem pomocné věty (4) hotovi. Vzhledem k tomu, že jsme předpokládali $c \geqq 48$, jiný případ už nenastane. Kdyby totiž bylo současně $u \leqq 7$ i $v \leqq 1$, bylo by

$$c = 3u + 25v \leqq 3 . 7 + 25 . 1 = 46.$$

Tím jsme s důkazem hotovi.

Uveďme si ještě jiné velmi užitečné znění principu matematické indukce.

Buď $\boldsymbol{M}$ množina, která má tyto vlastnosti:
(V) **$1 \in \boldsymbol{M}$.**
(VI) **Pro každé přirozené číslo $\boldsymbol{p}$ platí: Je-li $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{M}$ pro všechna přirozená $\boldsymbol{k} \leqq \boldsymbol{p}$, pak je též $\boldsymbol{p} + 1 \in \boldsymbol{M}$.**
Potom množina $\boldsymbol{M}$ obsahuje všechna přirozená čísla.

O jeho platnosti se můžeme přesvědčit podobně jako u principu (I)—(II). Princip (V)—(VI) je však důsledkem principu (I)—(II): Buď M' množina všech přirozených čísel n takových, že $1 \in M$, $2 \in M$, ..., $n \in M$. Zřejmě platí $M' \subseteq M$. Podle (V) je $1 \in M'$. Buď dále p přirozené číslo, $p \in M'$. Podle (VI) je pak též $p + 1 \in M$ a tedy $p + 1 \in M'$. Vidíme, že podle principu (I)—(II) obsahuje množina M' všechna přirozená čísla a tedy též množina M obsahuje všechna přirozená čísla.

Principu (V)—(VI) odpovídá následující schéma, podle něhož se dají **dokazovat matematické věty** nám již známého **typu „Pro každé přirozené číslo platí...“ tak, že dokážeme následující dvě pomocné věty:**

(5) **Věta platí pro číslo 1.**

(6) **Pro každé přirozené číslo p platí: Pokud věta platí pro všechna přirozená čísla menší než $p + 1$, pak platí i pro číslo $p + 1$.**

Užitečnost tohoto principu si budeme demonstrovat na následujících dvou úlohách.

Úloha 7. Je-li $a + \frac{1}{a}$ celé číslo, pak $a^m + \frac{1}{a^m}$ je pro každé přirozené m také celé číslo. Dokažte.

Řešení. Pro $m = 1$ věta triviálně platí. Pomocná věta (5) je dokázána.

Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro všechna přirozená $m \leqq p$ věta platí. Podle binomické věty je

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^{p+1} = a^{p+1} + \binom{p+1}{1} a^p \frac{1}{a} + \binom{p+1}{2} a^{p-1} \frac{1}{a^2} + \\ + \dots + \binom{p+1}{p} a \frac{1}{a^p} + \frac{1}{a^{p+1}}.$$

Využijeme-li známého vzorce

$$\binom{r}{s} = \binom{r}{r-s},$$

který platí pro všechna přirozená čísla r, s, $r \geqq s$, dostaneme odtud pro sudé p

$$a^{p+1} + \frac{1}{a^{p+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^{p+1} - \binom{p+1}{1}\left(a^{p-1} + \frac{1}{a^{p-1}}\right) -$$

$$- \binom{p+1}{2}\left(a^{p-3} + \frac{1}{a^{p-3}}\right) - \ldots - \binom{p+1}{\frac{p}{2}}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

a pro liché p

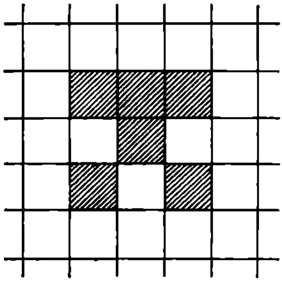
$$a^{p+1} + \frac{1}{a^{p+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^{p+1} - \binom{p+1}{1}\left(a^{p-1} + \frac{1}{a^{p-1}}\right) -$$

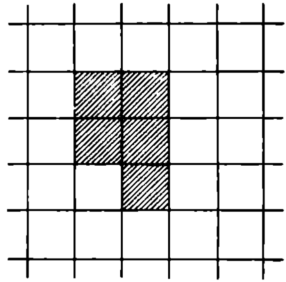
$$- \binom{p+1}{2}\left(a^{p-3} + \frac{1}{a^{p-3}}\right) - \ldots -$$

$$- \binom{p+1}{\frac{p-1}{2}}\left(a^{2} + \frac{1}{a^{2}}\right) - \binom{p+1}{\frac{p+1}{2}}.$$

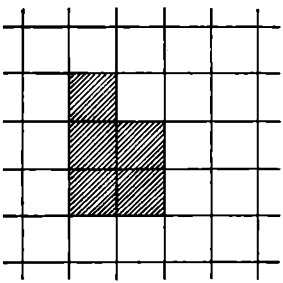
Z indukčního předpokladu vyplývá, že v obou případech jsou všechny sčítance na pravé straně celá čísla a tedy i na levé straně je celé číslo. Věta tedy platí i pro $m = p + 1$, pomocná věta (6) je dokázána a úloha je vyřešena.

Úloha 8. Na bílém čtverečkovém papíře je n čtverečků začerněno. Čtverečky se přebarvují (najednou) podle následujícího pravidla: Každý čtvereček získá takovou

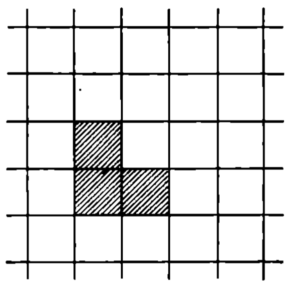




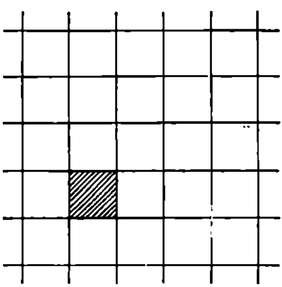
po 1. přebarvení



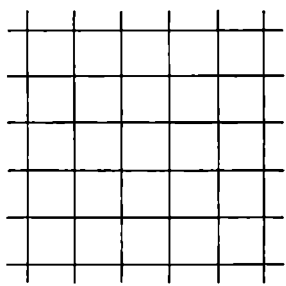
po 2. přebarvení



po 3. přebarvení



po 4. přebarvení



po 5. přebarvení

barvu, jakou měla většina z těchto tří čtverečků: uvažovaný čtvereček, čtvereček bezprostředně vpravo od něho a čtvereček bezprostředně nad ním. Dokažte, že nejvýše po n přebarveních budou všechny čtverečky bílé. (Obrázek ukazuje, jak se při postupném přebarvování mění jedna konfigurace čtverečků.)

Řešení. Pro $n = 1$ je to zřejmě pravda. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro všechna přirozená čísla menší než $p + 1$ věta platí. Dokážeme, že pak platí i pro číslo $p + 1$.

Nechť je tedy právě $p + 1$ čtverečků černých. Uvažujme první svislou řadu čtverečků zleva, která ještě obsahuje černé čtverečky. Ty nemají zřejmě žádný vliv na přebarvování čtverečků v ostatních svislých řadách. V nich je nejvýše p černých čtverečků a podle indukčního předpokladu*) v nich po p krocích už žádný černý čtvereček nebude.

Analogicky dokážeme, že po p krocích nebude žádný černý čtvereček ve vodorovných řadách s výjimkou té, která byla z řad, obsahujících původně černé čtverečky, nejníže. Po p krocích může být tedy černý jediný čtvereček, totiž ten, v němž se kříží uvažovaná levá svislá a dolní vodorovná řada. Po $(p + 1)$-tém kroku bude bílý i ten. Tím je důkaz proveden.

Princip matematické indukce se dá obměňovat nejrůznějšími způsoby. Uveďme si jedno velice speciální znění:

Buď M množina, která má následující vlastnosti:
(VII) **$1 \in M$, $2 \in M$, ..., $r \in M$.**

*) Zde by nám schéma (1)—(2) nepomohlo, neboť počet čtverečků v ostatních řadách je jen nejvýše p, nemusí být právě p, a o jejich počtu nemůžeme nic přesnějšího říci.

(VIII) Pro každé přirozené číslo p platí: Jestliže $p \in M$, $p + 1 \in M$, ..., $p + r - 1 \in M$, pak je také $p + r \in M$.

Potom množina M obsahuje všechna přirozená čísla.

Tomu ovšem odpovídá příslušné důkazové schéma.

Chceme-li dokázat, že nějaká věta (obvyklého typu) platí pro každé přirozené číslo, stačí dokázat následující dvě pomocné věty:

(7) Věta platí pro čísla 1, 2, ..., r.

(8) Pro každé přirozené číslo p platí: Pokud věta platí pro čísla p, $p + 1$, ..., $p + r - 1$, pak platí i pro číslo $p + r$.

Podle tohoto schématu budeme postupovat v další úloze (bude tam $r = 2$).

Úloha 9. Je-li $\cos \alpha = \dfrac{s}{t}$, kde s, t jsou celá čísla, potom pro každé přirozené n je $t^n \cos n\alpha$ číslo celé. Dokažte.

Řešení. Pro $n = 1$ je

$$t \cos \alpha = t \frac{s}{t} = s\,.$$

Pro $n = 2$ dostáváme podle známého vzorce

$$t^2 \cos 2\alpha = t^2(2 \cos^2 \alpha - 1) =$$
$$= t^2 \left(2 \frac{s^2}{t^2} - 1\right) = 2s^2 - t^2\,.$$

Pomocná věta (7) je tím dokázána.

Přistupme k důkazu pomocné věty (8). Není těžké odvodit goniometrický vzorec

$$\cos (k + 2)\, \alpha = 2 \cos \alpha \cos (k + 1)\, \alpha - \cos k\alpha$$

platný pro všechna přirozená k a reálná α. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ a pro $n = p + 1$ věta platí. Podle uvedeného vzorce je

$$t^{p+2} \cos (p + 2) \alpha = 2(t \cos \alpha) (t^{p+1} \cos (p + 1) \alpha) - t^2(t^p \cos p\alpha) .$$

Podle indukčního předpokladu jsou sčítance vpravo celá čísla a vlevo tedy také. Pomocná věta (8) tedy platí a tím je důkaz proveden.

Zatím jsme formulovali několik variant principů matematické indukce, v nichž se tvrdilo, že jistá množina M obsahuje všechna přirozená čísla, resp. všechna celá čísla od určitého počínaje. Někdy se však hodí následující verze, v níž se tvrdí, že jistá množina M obsahuje všechna přirozená čísla až po jistou horní mez.

Buď k přirozené číslo a M množina, která má tyto vlastnosti:
(IX) $1 \in M$.
(X) **Pro každé přirozené číslo $p < k$ platí: Jestliže $p \in M$, potom též $p + 1 \in M$.**
Potom množina M obsahuje přirozená čísla 1, 2, ..., k.

Příslušné důkazové schéma zní pak takto: **Máme-li dokázat, že věta platí pro přirozená čísla 1, 2, ..., k, pak stačí dokázat:**
(9) **Věta platí pro číslo 1.**
(10) **Pro každé přirozené číslo $p < k$ platí: Jestliže věta platí pro číslo p, potom platí i pro číslo $p + 1$.**

Podle tohoto schématu budeme postupovat v následující úloze.

Úloha 10. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla $t \leqq n$ platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^t < 1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{n^2}.$$

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle t. Pro $t = 1$ je nerovnost zřejmá, pomocná věta (9) je dokázána.

Buď $p < n$ přirozené číslo a nechť pro $t = p$ věta platí. Dokážeme její platnost pro $t = p + 1$. Postupně dostáváme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \left(1 + \frac{1}{n}\right) <$$

$$< \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{p^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{p^2 + p}{n^2} + \frac{p^2}{n^3} =$$

$$= 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{(p+1)^2}{n^2} + \frac{p^2}{n^3} - \frac{p+1}{n^2} <$$

$$< 1 + \frac{p+1}{n} + \frac{(p+1)^2}{n^2}.$$

První nerovnost plyne z indukčního předpokladu a druhá je pak důsledkem nerovnosti

$$\frac{p^2}{n^3} < \frac{p+1}{n^2},$$

která zřejmě platí pro každá dvě přirozená čísla $p \leqq n$. Tím je dokázána pomocná věta (10) a úloha je vyřešena.

V nerovnosti z úlohy 10 se vyskytují dvě proměnné, n a t. Nejprve jsme museli rozhodnout, podle které z nich budeme indukci provádět. Uvědomte si, že indukce podle n by patrně nevedla k cíli.

Pět různých znění principu matematické indukce, která jsme si postupně uvedli, bychom mohli ještě dále doplňovat, obměňovat a kombinovat, např. (V)—(VI), (VII)—(VIII) a (IX)—(X) zobecnit v duchu (III)—(IV) tak, aby začínaly od nějakého celého čísla a ne právě od čísla 1, dále (VII)—(VIII) a (IX)—(X) upravit v duchu (V)—(VI) tak, aby se indukční krok neprováděl z p na $p + 1$, ale z $1, 2, \ldots, p$ na $p + 1$ apod.

Závěrem ještě několik poznámek praktického rázu. Někdy se setkáváme s indukčním krokem nikoliv z p na $p + 1$, ale z $p - 1$ na p. Tak třeba (II) v této podobě zní: „Pro každé přirozené číslo $p > 1$ platí: Jestliže $p - 1 \in M$, potom též $p \in M$.“ Uvědomte si, že tento rozdíl je jen formální a není podstatný.

V důkazech vět „Pro každé přirozené číslo n platí...“ se často setkáváme s takovouto formulací indukčního kroku: „Předpokládejme, že věta platí pro číslo n, a dokážeme ji pro číslo $n + 1$“. Zde není pevně zvolené přirozené číslo, ze kterého při indukčním kroku vycházíme, označeno zvláštním symbolem (my jsme je většinou značili písmenem p), ale užívá se pro ně stejný symbol, který se vyskytuje ve znění věty (v našem případě n). Dva různé symboly se zavádějí spíše z metodických důvodů (a my to v této knížce budeme důsledně dělat), podstatné to však není. Kromě toho užívání stejného symbolu je někdy z čistě praktického hlediska výhodnější, neboť umožňuje stručnější vyjadřování. Není totiž třeba to, co už je ve znění věty zformulováno pro n (např. nějaký vzorec, nerovnost nebo pod.) znovu opisovat pro jiné písmeno (např. pro p) pro potřeby indukčního kroku, stačí jen odkaz.

Konečně si uvědomte, že metodou matematické indukce se dají dokazovat nejen věty „Pro každé přirozené číslo n platí...", ale i jejich speciální případy pro konkrétní hodnoty n. Tak např. skutečnost, že číslo $2^{51} + 3^{68}$ není dělitelno číslem 73 bychom dokazovali tak, že bychom dokázali více, totiž obecnou větu z úlohy 2.

Cvičení

1. V rovině je dáno 7 přímek a ty ji rozdělují na části. Vybarvěte tyto části dvěma barvami tak, aby žádné dvě sousední části neměly stejnou barvu.
2. Nakreslete obrázek k úloze 3 pro případ $AB = PQ$.
3. Zhotovte si z papíru tři čtverce a pak je rozstříhejte tak, aby složením všech částí vznikl jeden velký čtverec.
4. Určete, kdy nastává rovnost v nerovnosti z úlohy 4.
5. Uvažujme množinu všech obdélníků o daném obvodu. Ktorý z nich má největší obsah?
6. Navrhněte krabice ve tvaru kvádru tak, aby měly předepsaný objem a aby se na jejich výrobu spotřebovalo co nejméně materiálu.
7. Uvažujte množinu všech trojúhelníků o daném obvodu. Který z nich má největší obsah?
8. Buď n přirozené číslo a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kladná čísla. Potom platí

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqq n\,.$$

   Dokažte.
9. Kolika způsoby lze ofrankovat zásilku známkami v hodnotě 0,30 a 2,50 Kčs, činí-li poštovné 12,70 Kčs?
10. Existují takové n-tice černých čtverečků, že při přebarvování podle úlohy 8 jsou po $n - 1$ krocích ještě nějaké čtverečky černé?

11. Dokažte, že věta z úlohy 7 platí pro každé celé číslo m.
12. Dokažte větu z úlohy 7 podle schematu (7)—(8).
13. Dokažte metodou matematické indukce následující věty:

a) V rovině je dán konečný počet kružnic. Části, na něž je jimi rozdělena, lze vybarvit dvěma barvami tak, aby sousední části měly různou barvu.

b) V rovině je dáno n přímek tak, že žádné tři z nich nemají společný bod a žádné dvě nejsou nerovnoběžné. Rovina je jimi rozdělena na právě $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ částí.

c) Číslo $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ je pro každé přirozené číslo n dělitelné číslem 133.

d) Pro každých r reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_r$ platí $(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^2 \leqq r(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2)$.

e) Pro každé přirozené číslo $n > 1$ a reálné číslo α, pro něž tg má smysl, platí

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + \ldots + \operatorname{tg} (n-1) \alpha \operatorname{tg} n\alpha = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - n \, .$$

f) Pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \, .$$

g) Pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \, .$$

h) Pro každý konvexní n-úhelník je maximální počet úhlopříček, které se uvnitř něho neprotínají, roven $n - 3$. Každá taková soustava $n - 3$ úhlopříček dělí n-úhelník na $n - 2$ trojúhelníků.

i) Pro každé přirozené číslo n a pro libovolná komplexní čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$a_1 + (a_1 + 1) a_2 + (a_1 + 1)(a_2 + 1) a_3 + \ldots + \\ + (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_{n-1} + 1) a_n = \\ = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1) - 1 .$$

14. Kdy nastane rovnost v nerovnosti ze cvič. 13d)?
15. Jsou dány dva konvexní mnohoúhelníky takové, že první leží uvnitř druhého. Dokažte, že obvod prvního není větší než obvod druhého.
16. Najděte chybu v této úvaze: Dokažme podle principu (1)—(2) následující větu: Pro každé přirozené číslo n platí: Je-li v autobuse n cestujících, pak je poloprázdný. Pro $n = 1$ věta zřejmě platí. Je-li autobus poloprázdný při k cestujících, pak přistoupením $(k + 1)$-tého cestujícího nepřestane být poloprázdný.
17. Uvědomte si, že každou větu, kterou jde dokázat pomocí principu (1)—(2), jde dokázat též pomocí principu (5)—(6).
18. Odvoďte přímo (bez použití jiné varianty) ta znění principu matematické indukce, u nichž to není provedeno v textu.
19. Uvědomte si, že principy (I)—(II) a (V)—(VI) jsou ekvivalentní. Princip (V)—(VI) jsme totiž odvodili z principu (I)—(II), ale též princip (I)—(II) vyplývá z principu (V)—(VI).
20. Uvědomte si, že principy (I)—(II) a (1)—(2) jsou ekvivalentní. Vyjdeme-li totiž z principu (1)—(2), pak pomocí něho lze dokázat platnost jisté věty, která tvrdí totéž co princip (I)—(II). Zformulujte a dokažte tuto větu.
21. Uvědomte si, že všech 10 formulací principu matematické indukce, které jsou uvedeny v textu, je navzájem ekvivalentních.

22. Buď n přirozené číslo a M buď množina, která má tyto dvě vlastnosti:

(α) $n \in M$.

(β) Pro každé přirozené číslo p takové, že $1 < p \leqq n$, platí: Jestliže $p \in M$, potom též $p - 1 \in M$.

Dokažte, že množina M pak obsahuje čísla $1, 2, \ldots, n$.

2. kapitola

VÝZNAM PRINCIPU MATEMATICKÉ INDUKCE PRO DEFINICE A KONSTRUKCE

V první kapitole jsme se zabývali výlučně použitím metody matematické indukce při dokazování matematických vět. Indukce je však důležitým nástrojem i při definicích a konstrukcích.

Vzpomeňte si na úlohu 1, v níž jsme dokazovali existenci jistého obarvení roviny, rozdělené přímkami na části. Důkaz jsme provedli tak, že jsme obarvení předepsaných vlastností sestrojili. Přitom jsme vyšli od obarvení v případě jedné přímky a popsali jsme, jak pro libovolné přirozené číslo p z obarvení pro p přímek dostaneme obarvení pro $p + 1$ přímek. Definovali jsme tedy posloupnost obarvení $\{o_n\}$ tak, že jsme přímo popsali její první člen, obarvení o_1, a dále jsme pro libovolné přirozené číslo p popsali, jak od obarvení o_p přejít k obarvení o_{p+1}.

Konstruktivní charakter měly také důkazy provedené v úlohách 3 a 6. I tam jsme definovali posloupnost objektů (dělení čtverců, resp. frankování poštovních zásilek) tak, že jsme popsali první člen a pak pomocí p-tého členu člen $(p + 1)$-tý (pro každé přirozené p).

Uvažujme ještě posloupnost reálných čísel $\{u_n\}$ zadanou předpisem

$$u_1 = 2\,,$$

$$u_{p+1} = u_p^2 - 3u_p + \frac{2}{p} \text{ pro všechna přirozená } p.$$

Počáteční členy této posloupnosti jsou

$$u_1 = 2,$$

$$u_2 = u_1^2 - 3u_1 + \frac{2}{1} = 2^2 - 3 . 2 + 2 = 0,$$

$$u_3 = u_2^2 - 3u_2 + \frac{2}{2} = 0^2 - 3 . 0 + 1 = 1,$$

$$u_4 = u_3^2 - 3u_3 + \frac{2}{3} = 1^2 - 3 . 1 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3},$$

$$u_5 = u_4^2 - 3u_4 + \frac{2}{4} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 3\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{113}{18},$$

atd.

Všechny posloupnosti, o nichž jsme se právě zmínili, byly definovány obdobným způsobem. Symbolicky můžeme takovouto definici posloupnosti $\{c_n\}$ zapsat takto:

(A) $c_1 = a,$

(B) $c_{p+1} = P(c_p)$ pro každé přirozené p.

Zde (A) je požadavek, aby první člen byl a; (B) pak symbolizuje přechod od p-tého k $(p + 1)$-tému členu, přičemž P označuje předpis, který pro každé přirozené p jednoznačně vyjadřuje člen c_{p+1} pomocí členu c_p.

Zdůrazněme, že předpis P musí mít opravdu pro každé c_p smysl. Tak například předpis

$$v_1 = -\frac{5}{3},$$

$$v_{p+1} = \frac{p}{v_p + 1} \quad \text{pro všechna přirozená } p$$

nevyjadřuje člen v_5 pomocí členu v_4, neboť postupně vychází $v_2 = -\frac{3}{2}$, $v_3 = -4$, $v_4 = -1$ a zlomek $\frac{4}{v_4 + 1}$ není tedy definován.

Význam principu matematické indukce spočívá v tom, že zaručuje „správnost" definic typu (A) — (B). S jeho pomocí totiž dokážeme následující větu:

Existuje jediná posloupnost $\{c_n\}$, *jejíž členy vyhovují podmínkám* (A) *a* (B).

Důkaz. Označme M množinu všech přirozených čísel n takových, že n-tý člen c_n je podmínkami (A), (B) jednoznačně určen. Podmínka (A) jednoznačně určuje c_1 a tedy $1 \in M$. Předpokládejme dále, že $p \in M$, tj. člen c_p je jednoznačně určen. Podmínka (B) pak jednoznačně vyjadřuje člen c_{p+1} pomocí c_p a tedy c_{p+1} je také jednoznačně určen, čili $p + 1 \in M$. Podle principu (I)—(II) je tedy M množina všech přirozených čísel, což jsme měli dokázat.

Dále uvažujme posloupnost reálných čísel $\{t_n\}$ určenou podmínkami

$$t_1 = 2,$$

$$t_{p+1} = \frac{t_1 + 2t_2 + \ldots + pt_p}{t_1 + t_2 + \ldots + t_p}$$

pro všechna přirozená p.

Její členy jsou

$$t_1 = 2,$$

$$t_2 = \frac{t_1}{t_1} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$t_3 = \frac{t_1 + 2t_2}{t_1 + t_2} = \frac{2 + 2}{2 + 1} = \frac{4}{3},$$

$$t_4 = \frac{t_1 + 2t_2 + 3t_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{2 + 2 + 4}{2 + 1 + \frac{4}{3}} = \frac{24}{13},$$

atd.

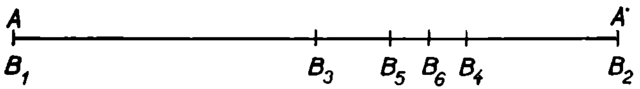
Ta je definována podle schématu

(C) $c_1 = a$,

(D) $c_{p+1} = P(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ pro každé přirozené p,

kde a je předepsaný první člen a P je předpis, který pro každé přirozené p vyjadřuje jednoznačně $(p + 1)$-tý člen c_{p+1} pomocí předcházejících členů $c_1, c_2, \ldots, c_p$. „Správnost" definic typu (C) — (D) zaručuje princip matematické indukce ve tvaru (V) — (VI). Pomocí něho bychom analogicky jako předtím ukázali, že existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}$ splňující podmínky (C) — (D).

Zabývejme se nyní dalšími dvěma posloupnostmi. Jsou-li v prostoru dány dva body A, A', položme $B_1 = A$, $B_2 = A'$ a pro každé přirozené číslo p nechť B_{p+2} je střed úsečky B_pB_{p+1}. Tak je definována posloupnost bodů $\{B_n\}$ (viz obrázek).



Jak známo, ať jsou koeficienty a, b, c, d jakákoliv reálná čísla, má rovnice

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

vždy alespoň jedno reálné řešení. To nám umožňuje definovat posloupnost reálných čísel $\{w_n\}$ takto:

$w_1 = 0{,}77$, $w_2 = -3{,}15$, $w_3 = 1{,}02$, $w_4 = 15{,}60$ a w_{p+4} nechť je pro každé přirozené číslo p největší z reálných řešení rovnice

$$w_{p+3}x^3 + w_{p+2}x^2 + w_{p+1}x + w_p = 0\,.$$

Posloupnosti $\{B_n\}$ a $\{w_n\}$ jsou definovány podle schématu

(E) $c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2\,, \quad \ldots, \quad c_r = a_r\,,$
(F) $c_{p+r} = P(c_p, c_{p+1}, \ldots, c_{p+r-1})$ pro všechna přirozená p.

(U posloupnosti $\{B_n\}$ bylo $r = 2$ a u $\{w_n\}$ $r = 4$.) „Správnost" zde zaručuje princip matematické indukce ve tvaru (VII) — (VIII).

Ukázali jsme si několik definic posloupností různých objektů, při nichž byl každý člen (až na členy počáteční) určen pomocí členů, které mu předcházejí. Takovýmto definicím říkáme *definice rekurentní* a v různých partiích matematiky se s nimi často setkáváme.

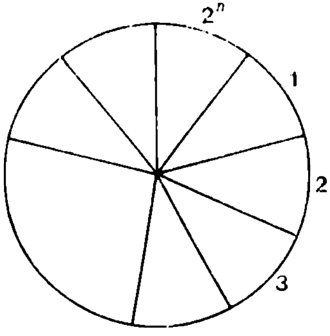
V dalším textu budeme pracovat také s posloupnostmi

$$c_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots$$

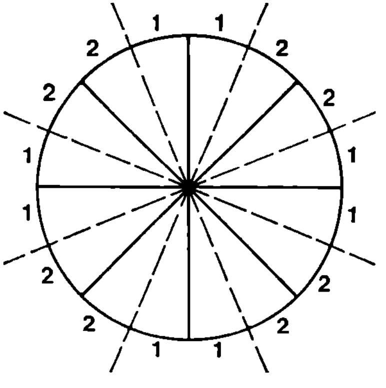
i pro $r > 1$. Není jistě nutno podrobně rozvádět, jak rekurentní definice těchto posloupností souvisejí s principem (III) — (IV) a jeho analogiemi.

Úloha 11. Kruh je rozdělen na 2^n výsečí (viz obrázek). Všech n-ciferných čísel, jež mají jen číslice 1 a 2, je také 2^n. Rozmístěte je po jednom do výsečí tak, aby se čísla v sousedních výsečích lišila jen v jedné číslici.

Řešení. V případě $n = 1$ je kruh rozdělen na dvě výseče, do jedné umístíme číslo 1 a do druhé číslo 2. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že jsme požadovaným způsobem rozmístili do 2^p výsečí 2^p p-ciferných čísel složených z číslic 1 a 2. Každou z těchto výsečí rozdělíme na dvě výseče. Do každé z takto vzniklých 2^{p+1} výsečí dáme $(p + 1)$-ciferné číslo, jehož prvních p číslic



se shoduje s p-ciferným číslem, které bylo ve výseči před rozdělením, a $(p + 1)$-tá číslice bude buď 1 nebo 2 podle schématu na obrázku. Každé číslo se nyní liší od svého



souseda z jedné strany v poslední číslici a z druhé strany v jedné z prvních p číslic.

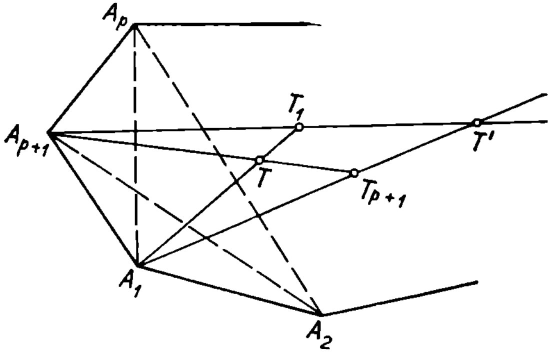
Tak jsme definovali (indukcí typu (A) — (B)) pro každé přirozené číslo n rozdělení, které vyhovuje dané podmínce.

Všimněte si, že šlo o úlohu stejného typu jako byla např. úloha 1, rozdíl je jen ve formulaci.

Úloha 12. Těžnice a těžiště n-úhelníka se definují takto: Pro $n = 3$ (trojúhelník) je těžnice úsečka spojující vrchol se středem protilehlé strany. Těžiště trojúhelníka je průsečík těžnic. Je-li $p \geqq 3$ přirozené číslo, pak těžnice $(p + 1)$-úhelníka je úsečka spojující vrchol s těžištěm p-úhelníka určeného ostatními p vrcholy. Těžiště $(p + 1)$-úhelníka je společný bod všech jeho $p + 1$ těžnic. Ukažte, že tato definice má smysl.

Řešení. Smysl definice zaručuje princip matematické indukce ve tvaru (III)—(IV), pokud má ovšem předpis, určující těžiště $(p + 1)$-úhelníka pomocí těžišť p-úhelníků, smysl. Je nutno dokázat, že těžnice se skutečně protínají v jediném společném bodě.

Provedeme to matematickou indukcí. Pro trojúhelník je známo, že tomu tak je, a že těžiště dělí každou těžnici v poměru 1 : 2 (delší část je při vrcholu). Předpokládejme, že $p \geqq 3$ je přirozené číslo a že pro všechna přirozená čísla k, pro něž $3 \leqq k \leqq p$, je definováno těžiště k-úhelníka, a to dělí každou jeho těžnici v poměru $1 : (k — 1)$, přičemž delší část je při vrcholu. Nyní dokážeme, že všechny těžnice $(p + 1)$-úhelníka se protínají v jediném bodě. K tomu zřejmě stačí dokázat, že každé dvě sousední těžnice (tj. těžnice příslušné sousedním vrcholům) $(p + 1)$-úhelníka se protínají v bodě, který je obě dělí v poměru $1 : p$, přičemž delší část je při vrcholu. Uvažujme tedy $(p + 1)$-úhelník $A_1A_2 \ldots A_pA_{p+1}$ (sledujte obrázek) a dva jeho sousední vrcholy A_1, A_{p+1} (tímto označením zřejmě neztratíme na obecnosti).



Označme T_1 těžiště p-úhelníka $A_2A_3 \ldots A_{p+1}$, T_{p+1} těžiště p-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_p$ a T' těžiště $(p - 1)$-úhelníka*) $A_2A_3 \ldots A_p$.

Bod T_1 (resp. T_{p+1}) leží na úsečce $A_{p+1}T'$ — těžnici p-úhelníka $A_2 \ldots A_{p+1}$ (resp. na úsečce A_1T' — těžnici p-úhelníka $A_1 \ldots A_p$) a podle indukčního předpokladu platí

$$T'T_1 : T_1A_{p+1} = T'T_{p+1} : T_{p+1}A_1 = 1 : p - 1.$$

Z toho je vidět, že T_1, T_{p+1} a T' jsou tři různé body a že trojúhelníky $T_1T'T_{p+1}$, $A_{p+1}T'A_1$ jsou podobné s poměrem p. Úsečky A_1T_1, $A_{p+1}T_{p+1}$ mají společný

*) V případě $p = 3$ bude T' střed strany A_2A_3.

bod, označme ho T. Trojúhelníky A_1TA_{p+1} a T_1TT_{p+1} jsou podobné s poměrem p a proto

$$A_{p+1}T : T_{p+1}T = A_1T : T_1T = p : 1\,,$$

což jsme měli dokázat.

Vlastnosti rekurentně definovaných posloupností se často dokazují metodou matematické indukce. Není to nic překvapivého — vždyť, jak víme, princip matematické indukce stojí v pozadí rekurentních definic.

Úloha 13. Posloupnost $\{f_n\}$ je dána předpisem

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1,$$
$$f_{p+2} = f_p + f_{p+1} \quad \text{pro všechna přirozená } p.$$

Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla s, t platí: Je-li s dělitelno t, potom je též f_s dělitelno f_t.

Řešení. Nejprve dokážeme pomocnou větu: Pro každá dvě přirozená čísla m, k platí

$$f_{m+k+1} = f_m f_k + f_{m+1} f_{k+1}\,.$$

Budeme postupovat indukcí podle m. Pro $m = 1$ se pomocná věta redukuje na

$$f_{k+2} = f_1 f_k + f_2 f_{k+1} = 1 . f_k + 1 . f_{k+1} = f_k + f_{k+1},$$

což je podle definice posloupnosti $\{f_n\}$ splněno pro každé přirozené k. Pro $m = 2$ nabude pomocná věta tvaru

$$f_{k+3} = f_2 f_k + f_3 f_{k+1} = 1 . f_k + 2 . f_{k+1} =$$
$$= f_k + f_{k+1} + f_{k+1} = f_{k+2} + f_{k+1}\,,$$

což také platí.

Buď r přirozené číslo a předpokládejme, že pomocná věta platí pro $m = r$ a pro $m = r + 1$, tj. že platí

$$f_{r+k+1} = f_r f_k + f_{r+1} f_{k+1}$$

a

$$f_{r+k+2} = f_{r+1} f_k + f_{r+2} f_{k+1} .$$

Dokážeme, že pak platí i pro $m = r + 2$. Sečtením obou posledních rovností dostaneme

$$f_{r+k+1} + f_{r+k+2} = f_k(f_r + f_{r+1}) + f_{k+1}(f_{r+1} + f_{r+2}).$$

Upravíme-li obě strany podle definice, vyjde

$$f_{r+k+3} = f_{r+2} f_k + f_{r+3} f_{k+1} ,$$

což jsme měli dokázat.

Přistupme k důkazu věty z úlohy 13. Předpokládáme, že s je dělitelno t, tj. existuje přirozené číslo q takové, že $s = tq$. Budeme postupovat indukcí podle q. Je-li $q = 1$, věta triviálně platí, neboť pak $s = t$ a f_s ovšem dělí $f_t = f_s$. Buď nyní w přirozené číslo a nechť pro $q = w$ věta platí, tj. f_{tw} je dělitelno f_t. Dokážeme, že také $f_{t(w+1)}$ je dělitelno f_t. Podle pomocné věty dostáváme

$$f_{t(w+1)} = f_{tw+t} = f_{tw-1} f_t + f_{tw} f_{t+1} .$$

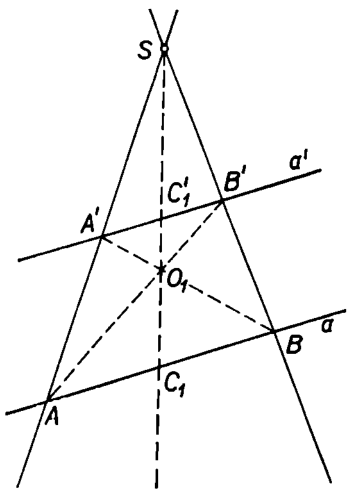
Vidíme, že první sčítanec je dělitelný f_t a druhý podle indukčního předpokladu také. Právě provedená úvaha však neplatí pro $t = w = 1$, neboť f_{tw-1} nemá smysl (člen f_0 nebyl definován). V tomto případě je však $f_2 = f_1 = 1$ a f_2 je dělitelno f_1. Tím je důkaz proveden.

Posloupnost $\{f_n\}$, se kterou jsme pracovali v úloze 13, je tzv. Fibonacciova posloupnost. Ta má řadu pozoruhodných vlastností a hraje důležitou úlohu v různých matematických disciplinách. Studium Fibonacciovy posloupnosti a určitých jiných s ní úzce souvisejících posloupností není dosud uzavřeno. Vychází dokonce speciální časopis, objemný čtvrtletník *Fibonacci Quarterly*, v němž jsou publikovány výlučně nové výsledky z této oblasti.

V další úloze si ukážeme význam rekurentních definic pro konstruktivní geometrii.

Úloha 14. Jsou dány dvě různé rovnoběžky a, a', přirozené číslo n a na přímce a dva body A, B. Sestrojte pouze pomocí pravítka uvnitř úsečky AB bod C_n tak, aby $AC_n : BC_n = 1 : n$.

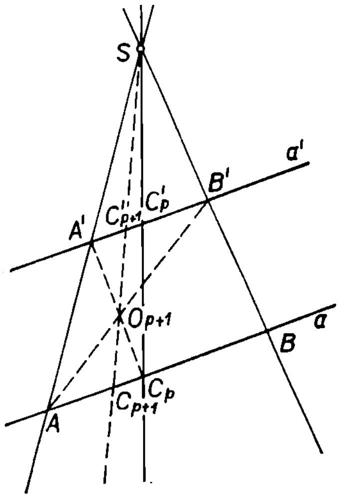
Řešení. Buď $n = 1$. Zvolme bod S tak, aby neležel v pásu určeném danými rovnoběžkami (sledujte obrázek).



Označme A' (resp. B') průsečík přímky SA (resp. SB) s přímkou a'. Průsečík přímek AB', $A'B$ označme O_1 a průsečík přímky SO_1 s přímkou a (resp. a') označme C_1 (resp. C_1'). Z podobných trojúhelníků dostáváme

$$\frac{C_1B}{C_1'A'} = \frac{O_1B}{O_1A'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{SA}{SA'} = \frac{C_1A}{C_1'A'}$$

a je tedy $C_1B = C_1A$, čili C_1 je hledaný bod.



Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že bod C_p dělí úsečku AB v poměru $AC_p : BC_p = 1 : p$. Zvolme bod S tak, aby neležel v pásu určeném danými rovnoběžkami. Průsečík přímky SA (resp. SB, SC_p) s přímkou a' označme A' (resp. B', C_p'). Průsečík přímek $A'C_p$ a AB' označme O_{p+1} a průsečík přímky SO_{p+1} s přímkou a

(resp. a') označme C_{p+1} (resp. C'_{p+1}). Z podobných trojúhelníků dostáváme vztahy

$$\frac{C_{p+1}C_p}{A'C'_{p+1}} = \frac{C_pO_{p+1}}{A'O_{p+1}} = \frac{AC_p}{A'B'},$$

$$\frac{AC_{p+1}}{A'C'_{p+1}} = \frac{SA}{SA'} = \frac{AB}{A'B'},$$

$$\frac{C_{p+1}C_p}{AC_{p+1}} = \frac{A'C'_{p+1}}{B'C'_{p+1}} = \frac{AC_{p+1}}{BC_{p+1}}.$$

Z nich plyne

$$\frac{AC_{p+1}}{BC_{p+1}} = \frac{AC_p}{AB} = \frac{AC_p}{AC_p + BC_p} = \frac{1}{1+p}.$$

Popsali jsme rekurentně konstrukci takové posloupnosti bodů $\{C_n\}$ na úsečce AB, že pro každé přirozené číslo n je $AC_n : BC_n = 1 : n$. Jiných nástrojů než pravítka není při konstrukcích zapotřebí.

Úloha 15. Jsou dána reálná čísla $a > 0$, $A > 0$. Posloupnost $\{x_n\}$ je definována předpisem

$$x_1 = A,$$

$$x_{p+1} = \frac{1}{2}\left(x_p + \frac{a}{x_p}\right) \text{ pro každé přirozené } p.$$

Dokažte, že tato posloupnost je konvergentní a její limita je $\sqrt{a}$.

Řešení. Je vidět, že $x_n \neq 0$ pro všechna přirozená n a definice má tedy smysl. Pro každé přirozené n dále platí

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \geqq 0$$

a

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n}.$$

Z první nerovnosti plyne, že pro všechna $n \geqq 2$ je $x_n \geqq \sqrt{a}$; posloupnost $\{x_n\}$ je tedy zdola omezená a pro všechna $n \geqq 2$ je (z druhého vztahu) $x_n \geqq x_{n+1}$, čili posloupnost $\{x_n\}$ je (až případně na první člen) nerostoucí. Podle známé věty je tedy posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní. Její limitu označme L; podle toho, co jsme už zjistili, je $L \geqq \sqrt{a}$. Posloupnost $\{x_{n+1}\}$ *) konverguje ovšem také k limitě L. Posloupnost $\left\{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right\}$ konverguje k limitě $\frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right)$ a přitom je vzhledem k rekurentní definici totožná s posloupností $\{x_{n+1}\}$**). Platí tedy

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right)$$

čili

$$L^2 = a\,.$$

Vzhledem k tomu, co už víme, je $L = \sqrt{a}$. Tím je důkaz proveden.

Právě dokázané vlastnosti posloupnosti $\{x_n\}$ lze využít k praktickému výpočtu $\sqrt{a}$. Dejme tomu, že je dáno kladné číslo a a malé kladné číslo ε; máme vypočíst číslo $\sqrt{a}$ tak přesně, aby chyba nepřesáhla ε. Zvolíme číslo $A > 0$, položíme $x_1 = A$ a postupně počítáme další členy posloupnosti $\{x_n\}$. Podle definice limity posloup-

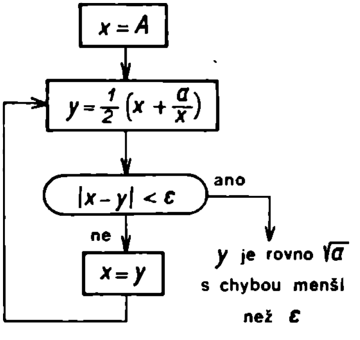
*) Posloupnost $\{x_{n+1}\}$ je posloupnost $\{y_n\}$, kde $y_p = x_{p+1}$ pro všechna přirozená p.
**) Až na první člen.

nosti existuje index n_0 takový, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $| x_n - \sqrt{a} | < \varepsilon$. Člen x_{n_0} a všechny následující členy jsou tedy rovny $\sqrt{a}$ s chybou menší než ε; můžeme tedy ukončit výpočet; jakmile dojdeme k dostatečně velkému indexu, a příslušný člen je hledaný výsledek. Naskýtá se však otázka, jak v praxi poznáme, že jsme už dospěli k dostatečně přesné hodnotě. Podle vyjádření odvozeného na začátku řešení úlohy je však pro všechna n

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \leqq \frac{(x_n - \sqrt{a})\,(x_n + \sqrt{a})}{2x_n} =$$

$$= x_n - x_{n+1}\,.$$

Budeme-li počítat členy tak dlouho, než se dva po sobě následující členy budou lišit méně než o ε, bude poslední vypočtený člen dostatečně blízko k $\sqrt{a}$. Výpočet bude probíhat podle schématu



Podotkněme ještě, že v praxi nebudeme členy posloupnosti $\{x_n\}$ počítat přesně, ale jen na určitý počet míst (samozřejmě alespoň na tolik, na kolik míst chceme dostat odmocninu). Dá se ukázat, že chyby způsobené zaokrouhlováním nebudou mít na výsledek podstatný vliv.

Zbývá ještě vyjasnit, jaký vliv na průběh výpočtu bude mít volba čísla A. Je vidět, že bude-li se A velmi lišit od $\sqrt{a}$, bude nutno k tomu, aby se došlo k náležitě přesnému výsledku, počítat více členů posloupnosti $\{x_n\}$, než v případě, kdy se A a $\sqrt{a}$ příliš lišit nebudou. Abychom si ušetřili práci nebo náklady na provoz počítače, budeme proto volit A tak, aby se od $\sqrt{a}$ příliš nelišilo. V případě, kdy např. připravujeme program složitějšího výpočtu, během něhož se nejprve vypočte jakési číslo, které nedovedeme předem odhadnout, a to se teprve pak bude odmocňovat, bude vhodné položit třeba $A = a$.

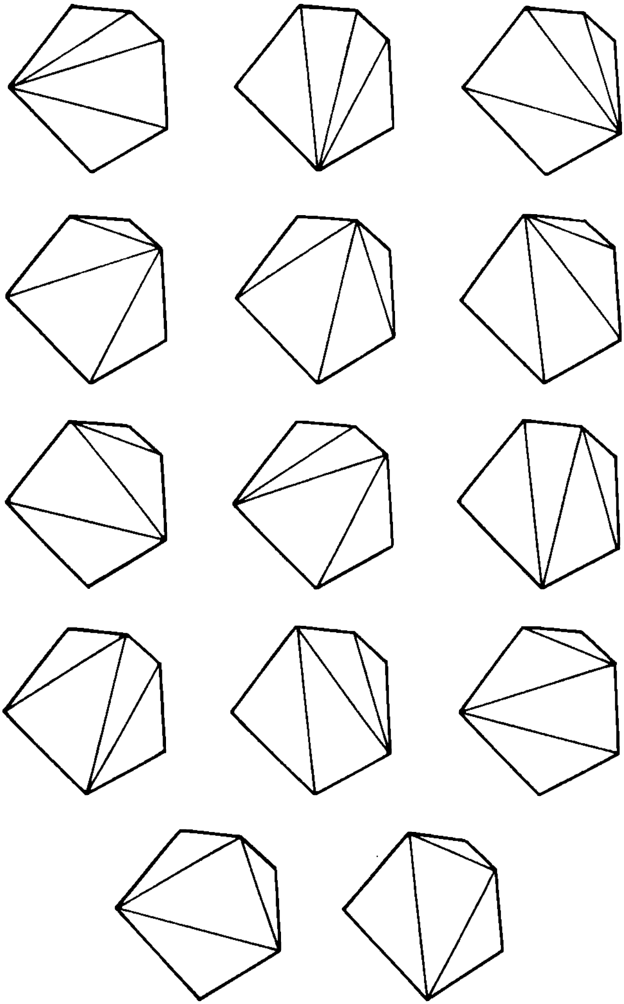
Podobné procesy, založené na postupném výpočtu konečného počtu členů rekurentně definované posloupnosti, se v numerické matematice hojně používají a říká se jim *iterační procesy*.

Úloha 16. Určete, kolika způsoby lze rozdělit konvexní n-úhelník na trojúhelníky jeho úhlopříčkami, které se uvnitř něho neprotínají.

Řešení. Připomeňme si, co jsme dokázali ve cvič. 13h): Maximální počet úhlopříček konvexního n-úhelníka, které se uvnitř něho neprotínají, je n-3. Takové úhlopříčky ho dělí na n-2 trojúhelníky.

Na obrázku je čtrnácti různými způsoby rozdělen popsaným způsobem šestiúhelník.

Naším úkolem je najít počet (označme ho t_n) všech takových dělení n-úhelníka. Zřejmě $t_3 = 1$. Buď $p \geqq 3$ přirozené číslo a buď dán konvexní $(p + 1)$-úhelník



$A_1A_2 \ldots A_{p+1}$. Buď dále $3 \leqq k \leqq p + 1$ a uvažujme, v kolika děleních je obsažen trojúhelník $A_1A_2A_k$. Pro $k = 3$ (resp. $k = p + 1$) je jich zřejmě právě tolik, kolika způsoby lze rozdělit p-úhelník $A_1A_3 \ldots A_{p+1}$ (resp. $A_2A_3 \ldots A_{p+1}$), totiž t_p. Pro $3 < k < p + 1$ je jich tolik, kolika způsoby lze zkombinovat dělení $(k - 1)$-úhelníka $A_2A_3 \ldots A_k$ s děleními $(p - k + 3)$-úhelníku $A_1A_k \ldots A_{p+1}$, totiž $t_{k-1}t_{p-k+3}$. Každé dělení $(p + 1)$-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_{p+1}$ obsahuje právě jeden trojúhelník, jehož jedna strana je A_1A_2, je proto

$$t_{p+1} = t_p + t_3t_{p-1} + t_4t_{p-2} + \ldots + t_{p-2}t_4 + t_{p-1}t_3 + t_p$$

pro všechna přirozená čísla $p \geqq 3$. Tento vztah spolu s podmínkou $t_3 = 1$ definuje rekurentně posloupnost $\{t_n\} = \{t_3, t_4, \ldots\}$ a umožňuje postupně počítat jednotlivé členy této posloupnosti:

$$\begin{aligned}
t_3 &= 1,\\
t_4 &= t_3 + t_3 = 2,\\
t_5 &= t_4 + t_3t_3 + t_4 = 5,\\
t_6 &= t_5 + t_3t_4 + t_4t_3 + t_5 = 14,\\
t_7 &= t_6 + t_3t_5 + t_4t_4 + t_5t_3 + t_6 = 42,\\
t_8 &= t_7 + t_3t_6 + t_4t_5 + t_5t_4 + t_6t_3 + t_7 = 132,
\end{aligned}$$

atd. (Všimněte si, že na obrázku byla všechna dělení šestiúhelníka.)

Mohli jsme postupovat ještě jiným způsobem: Označme v_{ik} počet všech dělení, která obsahují úhlopříčku A_iA_k*). Sečteme-li všechna čísla v_{ik} (pro všechny úhlopříčky), dostaneme vzhledem k tomu, že v každém dělení je obsaženo právě $(p + 1) - 3 = p - 2$ úhlopří-

*) Tj. A_iA_k je stranou některého z trojúhelníků vzniklých dělením.

ček, $(p - 2)$-násobek počtu všech dělení, tedy číslo $(p - 2)\, t_{p+1}$. Pro každé $3 \leqq k \leqq p$ je $v_{1k} = t_k t_{p-k+3}$, neboť úhlopříčka A_1A_k rozděluje $(p + 1)$-úhelník $A_1A_2 \dots A_{p+1}$ na k-úhelník $A_1A_2 \dots A_k$ a na $(p - k + 3)$-úhelník $A_kA_{k+1} \dots A_{p+1}\, A_1$. Součet všech čísel v_{1k} (pro všechny úhlopříčky vycházející z vrcholu A_1) je tedy

$$v_{13} + v_{14} + \dots + v_{1,p-1} + v_{1p} =$$
$$= t_3t_p + t_4t_{p-1} + \dots + t_{p-1}t_4 + t_pt_3\,.$$

Stejně vyjde součet i pro úhlopříčky vycházející z ostatních vrcholů. Součet všech čísel v_{ik} (pro všechny úhlopříčky) bude tedy (s přihlédnutím k tomu, že každá úhlopříčka spojuje dva vrcholy) roven

$$\frac{p+1}{2}\,(t_3t_p + t_4t_{p-1} + \dots + t_{p-1}t_4 + t_pt_3)\,.$$

Posloupnost $\{t_n\}$ je tedy definována také předpisem

$$t_3 = 1,$$

$$t_{p+1} = \frac{p+1}{2(p-2)}\,(t_3t_p + t_4t_{p-1} + \dots + t_pt_3) \quad \text{pro} \quad p \geqq 3.$$

Porovnáme-li obě rekurentní definice téže posloupnosti $\{t_n\}$, zjistíme, že pro každé přirozené $n > 3$ je

$$t_n = \frac{n}{2(n-3)}\,(t_3t_{n-1} + t_4t_{n-2} + \dots + t_{n-1}t_3) =$$
$$= \frac{n}{2(n-3)}\,(t_{n+1} - 2t_n)$$

a odtud

$$t_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n}\,t_n\,.$$

Poslední vztah platí i pro $n = 3$ (neboť $t_4 = 2$) a spolu s podmínkou $t_3 = 1$ je další rekurentní definicí posloupnosti $\{t_n\}$. Ta je podstatně jednodušší než obě definice předcházející a nadto umožňuje snadno odvodit vyjádření n-tého členu t_n pomocí jeho indexu n, totiž

$$t_n = 2^{n-2} \frac{1.3.5\ldots(2n-5)}{(n-1)!}.$$

To lze dokázat metodou matematické indukce a dále pak upravit na elegantnější tvar, např.

$$t_n = \frac{1}{2n-3}\binom{2n-3}{n-2}.$$

Cvičení

1. Udejte řešení úlohy 11 pro $n = 4$.
2. Sestrojte těžiště daného šestiúhelníka.
3. Těžištěm úsečky je její střed. Uvědomte si, jak to zapadá do rekurentní definice těžiště n-úhelníka.
4. Je dán $(n+1)$-úhelník $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$. Označme O_1 těžiště n-úhelníka $A_2A_3 \ldots A_{n+1}$, O_2 těžiště n-úhelníka $A_1A_3 \ldots$ $\ldots A_{n+1}$, $\ldots$, O_{n+1} těžiště n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$. Dokažte, že $(n+1)$-úhelníky $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, $O_1O_2 \ldots O_{n+1}$ jsou podobné.
5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí pro členy Fibonacciovy posloupnosti $\{f_n\}$ definované v úloze 13
   a) $f_nf_{n+1} = f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2$,
   b) $f_{n+1}^2 - f_nf_{n+2} = (-1)^n$.
6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí pro n-tý člen Fibonacciovy posloupnosti

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

7. Vyřešte cvičení 5b) pomocí výsledku cvičení 6.
8. Určete, kolik existuje různých vlajek složených z n vodorovných stejně širokých červených a bílých pruhů tak, že žádné dva bílé pruhy nejsou vedle sebe.
9. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí pro členy Fibonacciovy posloupnosti $\{f_n\}$ vyjádření

$$f_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{n-m-1}{m},$$

kde $m = \dfrac{n-1}{2}$ pro lichá n a $m = \dfrac{n}{2} - 1$ pro sudá n.

Jak to souvisí se cvičením 8?
10. Je dána úsečka AB a přímka $a \parallel AB$. Sestrojte jen pomocí pravítka na úsečce AB bod C tak, aby $AC : BC = 1 : 4$.
11. V úloze 14 jsme sestrojili bod C_n, který dělil úsečku AB v poměru $AC_n : BC_n = 1 : n$. Sestrojte ještě $n - 1$ dalších bodů této úsečky tak, aby ji spolu s bodem C_n rozdělovaly na $n + 1$ stejných částí. Použijte přitom jen pravítka a dané rovnoběžky s úsečkou AB.
12. Rozdělte danou úsečku AB na čtyři stejné díly pomocí pravítka a dané rovnoběžky s úsečkou AB.
13. Spočtěte $\sqrt{2}$ na čtyři desetinná místa pomocí posloupnosti $\{x_n\}$ definované v úloze 15.
14. Všimněte si, že pokud A, a jsou kladná racionální čísla, jsou všechny členy posloupnosti $\{x_n\}$ z úlohy 15 racionální čísla, zatímco její limita může být číslo iracionální.
15. Buď $a > 0$. Uvažujme funkci $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$ v intervalu $(0, +\infty)$. Dokažte, že pro členy posloupnosti $\{x_n\}$ z úlohy 15 platí

$$x_{n+1} = f(f(\dots(f(A))\dots))$$

(vpravo je n-krát složená funkce f).

16. Dokažte, že pro členy posloupnosti $\{x_n\}$ z úlohy 15 platí

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{x_{n+1}+\sqrt{a}}=\left(\frac{A-\sqrt{a}}{A+\sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

Odvoďte odtud, že $\{x_{n+1}\}$ je omezená a nerostoucí posloupnost konvergující k limitě $\sqrt{a}$.

17. Jsou dána kladná čísla a, A. Posloupnost $\{y_n\}$ je rekurentně definována předpisem

$$y_1 = A\,,$$
$$y_{p+1}=\frac{1}{3}\left(2y_p+\frac{a}{y_p^2}\right) \text{ pro všechna přirozená } p.$$

Dokažte, že posloupnost $\{y_n\}$ konverguje k limitě $\sqrt[3]{a}$.

18. Spočtěte $\sqrt[3]{2}$ na čtyři desetinná místa podle předcházejícího cvičení.

19. Určete, kde se při řešení úlohy 16 využilo předpokladu o konvexnosti n-úhelníka.

20. Spočtěte číslo t_{10} z úlohy 16 pomocí všech čtyř definic a porovnejte jejich výhodnost pro praktický výpočet.

21. Na kružnici je dáno $2n$ navzájem různých bodů. Určete, kolika způsoby je lze po dvou pospojovat n tětivami tak, aby se uvnitř kružnice neprotínaly.

3. kapitola

POZNÁMKY A KOMENTÁŘE

Indukce je přechod od zvláštního k obecnému. Úsudky induktivního charakteru jsou obvyklé ve fyzice, chemii, biologii a dalších oborech. Tam se na základě konečného počtu pozorování či experimentů vytvářejí obecné zákony. Tak třeba chemik na základě dostatečného počtu pokusů prohlásí, že smísíme-li za určitých podmínek určité látky, proběhne vždy určitá chemická reakce. Nebo mykolog shrne výsledky pozorování v přírodní zákon, že klouzek bílý *(Boletus placidus BONORD.)* se vyskytuje pouze v bezprostřední blízkosti vejmutovky *(Pinus strobus)* nebo limby *(Pinus cembra)*. Fyzik zobecní konečný počet experimentů a zformuluje zákon o řížení světla na rozhraní dvou prostředí. Také statistici usuzují z vlastností výběru na obecné vlastnosti celé populace apod.

Dedukce je přechod od obecného ke zvláštnímu. Matematika je vybudována důsledně deduktivně. Vyjde se od axiomů daných a priori a z nich se odvozují jejich důsledky a důsledky již odvozených důsledků. I v experimentálních vědách se setkáváme s deduktivními úvahami. Tak např. pokročily-li chemie a fyzika natolik, že poznaly zákony, podle nichž probíhají jisté jevy na atomární a molekulární úrovni, ukáže se, že zákon o určité chemické reakci, k němuž se původně dospělo indukcí na základě pokusů, je vlastně speciálním případem jistého obecného fyzikálně chemického zákona. Zejména pro moderní fyziku je typické prolínání a střídání deduktivních a induktivních metod.

Podívejme se nyní na strukturu úsudků, které jsme prováděli na základě principu matematické indukce. Při důkazu určité matematické věty jsme nejprve ověřili, zda jsou v tomto případě splněny předpoklady obecné věty o matematické indukci (tj. např. zda dokazovaná věta platí pro $n = 1$ a dále zda z její platnosti pro $n = p$ plyne pro každé p její platnost pro $n = p + 1$). V kladném případě jsme usoudili, že z obecné věty o matematické indukci vyplývá platnost dokazované věty. Vidíme, že tento úsudek měl ryze deduktivní charakter. *Důkaz matematickou indukcí je tedy vlastně dedukce.*

Nejen, že se některým deduktivním úvahám, totiž důkazům metodou matematické indukce, přezdívá indukce. ale existují také úvahy spíše induktivního charakteru, jimž se, hlavně v detektivní literatuře, říká dedukce*). Dokumentuje to úryvek z povídky A. C. Doyla *Liga zrzavých*.

„*Víte, Watsone,*“ *vysvětloval Holmes v časných hodinách toho rána, když jsme už seděli nad skleničkou whisky v Baker Street,* „*od samého začátku bylo zřejmé, že jediným cílem onoho trochu podivného inzerátu Ligy a opisování naučného slovníku bylo odstranit každý den na několik hodin z cesty toho nepříliš bystrého zastavárníka. Zařídili to zvláštním způsobem, ale myslím, že lze stěží přijít na něco lepšího. Metodu bezpochyby vnukla Clayově důvtipné hlavě barva vlasů jeho spolupachatele. Čtyři libry týdně, to bylo vnadidlo, kterým přilákali zastavárníka. Co to bylo pro lidi, kteří hráli o tisíce? A tak uveřejnili inzerát. Jeden*

*) Porovnáme-li počet čtenářů detektivek a matematické literatury, zjistíme, že dedukci se děje větší křivda.

z těch darebáků si zřídí dočasnou kancelář, druhý darebák přemluví toho chlapíka, aby se o místo ucházel, a oba si pak zajistí jeho nepřítomnost v krámě každý den na dopoledne. Od okamžiku, co jsem se dověděl, že příručí byl ochoten pracovat za poloviční mzdu, bylo mi jasné, že měl nějaký pádný důvod, aby získal zaměstnání právě u tohoto zastavárníka.“

„Ale jak jste uhádl, co ho k tomu přimělo?“

„Krám toho chlapíka je docela malý a v domě není nic, co by odůvodňovalo tak promyšlené přípravy a výdaje. Jistě to bylo něco mimo dům. Co to mohlo být? Vzpomněl jsem si na zálibu příručího ve fotografování i na to, že často zmizel na dlouhou dobu ve sklepě. Sklep! Tam vězel jeden konec zamotaného klubka. Pak jsem se vyptával na toho tajemného příručího a zjistil jsem, že mám co dělat s jedním z nejchladnokrevnějších a nejodvážnějších zločinců v Londýně. Páchal něco ve sklepě, něco, co trvalo několik hodin denně po řadu týdnů. Co to jen mohlo být? Nepřicházelo nic jiného v úvahu, než že se prokopává do jiné budovy.

Když jsem došel ve svých úvahách až sem, šli jsme si obhlédnout místo děje. Překvapilo vás, že jsem ťukal holí na chodník. Zjišťoval jsem, zda sklep vybíhá před dům nebo na opačnou stranu. Vpředu sklep nebyl. Pak jsem zazvonil a — jak jsem očekával — otevřel mi příručí. Už jsme spolu měli několik potyček, ale dosud nikdy jsme nestáli tváří v tvář. Jeho tváři jsem však příliš pozornosti nevěnoval. Chtěl jsem vidět jeho kalhoty. Jistě jste si sám všiml, jak byly zmačkané, špinavé a otrhané. Mluvily jasnou řečí o dlouhých hodinách strávených kopáním. Zbývala otázka, proč a kam se ti dva chtějí prokopat. Zašel jsem tedy za roh, a když jsem zjistil, že City a banka sousedí těsně s domem našeho přítele, věděl jsem, že problém je vyřešený. Hned, jak jste po koncertě odjel domů, zašel *jsem do Scotland Yardu a pak jsem navštívil ředitele banky. Výsledek jste viděl na vlastní oči.“*

„A jak jste věděl, že banku vyloupí dnes v noci?“ zeptal jsem se.

„To bylo snadné. Když zrušili úřadovnu Ligy, bylo to znamení, že na panu Wilsonovi už nemají zájem. Jinými slovy: tunel už prokopali. Důležité však bylo, aby tunelu využili co nejdříve, protože by mohl být objeven. A za druhé také proto, že zlato by zatím mohli přemístit. Sobota se jim hodila ze všech dní v týdnu nejvíce, neboť jim zaručovala dva klidné dny k provedení záměru a k útěku. Z těchto důvodů jsem je očekával už dnes v noci.“

„Skvělá dedukce!“ vykřikl jsem s nepředstíraným obdivem. „Tak spletitý řetěz a přitom každý článek je průhledný jako studánka!“

„Vytrhlo mě to z nudy,“ řekl Holmes a zívl. „Vida, už se zase začínám nudit. Celý svůj život trávím v jediném dlouhém úsilí uniknout jednotvárnosti. A tyto drobné případy mi v tom pomáhají.“

Nemůžeme neobdivovat Holmesovu intuici a schopnosti kombinovat a bystře vytvářet pravděpodobné domněnky. Rozhodně však geniální detektiv nevyvozoval z obecných principů speciální závěry, ačkoliv jeho přítel dr. Watson tolik jásal nad jeho „dedukcemi“.

I matematici však uvažují induktivně. Takové úvahy však mívají pomocný ráz a obvykle se s nimi veřejnost neseznámí, skončí totiž v koši mezi koncepty. Než matematik zformuluje a dokáže nějakou větu, vychází z určitých dohadů. O platnosti svých domněnek se často nejprve přesvědčuje na jednotlivých speciálních případech a teprve pokud se při tom neukáže, že domněnka v některém z nich neplatí, přistoupí k jejímu deduktivnímu odvození. Právě platnost domněnek typu „Pro každé přirozené číslo n platí...“ je ovšem velmi přirozené zkoušet tak, že se prozkoumá situace pro některé konkrétní hodnoty n. Asociace metody matematické indukce s tímto postupem vysvětluje původ rozporu v názvu matematická indukce.

Připomeňme ještě, že i proces zobecňování, v matematice tak důležitý, má své kořeny v indukci: všímáme si společných rysů jednotlivých speciálních případů a to nás inspiruje k formulaci obecnější věty, jež v sobě zahrnuje speciální případy, od nichž jsme vyšli. Obecné větě však můžeme věřit teprve až ji deduktivně odvodíme z jiných již dokázaných vět.

*

Mezi tím, jak se chápe platnost nějakého výroku v matematice a jak v empirických vědách, je podstatný rozdíl. Je-li např. velmi zřídka nalezen klouzek bílý v oblasti, kde žádná vejmutovka ani limba nejsou a jaktěživy nebyly, pokládá se to za podivuhodnou výjimku, která nikterak neotřásá pravdou o symbioze zmíněných organismů. Ojedinělý výskyt bílé vrány nevyvrací skutečnost, že vrány jsou černé. V matematice se však uznává jen pravdivost absolutní, žádné výjimky se nepřipouštějí, jediný protipříklad vyvrací obecnou větu. I to je důvod, proč v matematice nejsou úsudky induktivního charakteru dostatečně přesvědčivé.

* *

Z dějin matematiky je známa celá řada příkladů dokládajících, jak by se nevyplatilo nepodloženě zobecňovat.

Tak například se zdálo věrohodné, že pro žádné prvočíslo p není $2^{p-1} - 1$ dělitelno číslem p^2 a bylo to potvrzeno pro všechna $p < 1000$. Později se však ukázalo, že pro prvočíslo 1093 hypotéza neplatí, neboť číslo $2^{1092} - 1$ (má 329 číslic) je dělitelno číslem 1093^2.

Nejmenší přirozené číslo n, pro něž je $991n^2 + 1$ druhou mocninou přirozeného čísla, je

12 055 735 790 331 359 447 442 538 677.

Rozkládáme-li mnohočleny $x^n - 1$ v součin mnohočlenů s celými koeficienty, vychází

$$
\begin{aligned}
x - 1 &= x - 1, \\
x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1), \\
x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1), \\
x^4 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1), \\
x^5 - 1 &= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1), \\
x^6 - 1 &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),
\end{aligned}
$$

atd. I další pokusy sugerují domněnku, že pro každé přirozené číslo n mají mnohočleny vpravo za koeficienty pouze čísla 0, 1 a -1. Platí to však jen pro $n < 105$. V rozkladu mnohočlenu $x^{105} - 1$ se vyskytuje činitel

$$
\begin{aligned}
&x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + \\
&+ x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - \\
&- x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + \\
&+ x^{12} - x^9 - x^8 - 2x^7 - x^6 - x^5 + x^2 + x + 1,
\end{aligned}
$$

který již dál rozložit nelze.

* * *

Všechny solidní matematické teorie jsou vybudovány axiomaticky. Jak už jsme se zmínili, vychází se při tom ze soustavy základních vět, tzv. axiomů, jejichž platnost se konstatuje. Z nich se pak dedukují věty tvořící příslušnou teorii. Tak např. již Euklides uvedl ve svých proslulých *Základech* pět axiomů a z nich odvodil (s určitými mezerami) celou tehdejší planimetrii.

Aritmetika a teorie čísel jakož i podstatné části jiných matematických disciplin spočívají na pojmu přirozeného čísla. Zatímco celá, racionální, reálná a komplexní čísla jsou přesně definována, základ, z něhož se při jejich zavádění vychází, totiž pojem přirozeného čísla, je značně mlhavý. Již v předškolním věku si dítko uvědomí, že čtyři švestičky, čtyři pejskové a čtyři prstíčky mají cosi společného, totiž právě ty čtyři. Abstrahuje-li se (jak se tomu učeně říká) od švestiček atd., dospěje se k pojmu přirozeného čísla 4.

Proto se i přirozená čísla zavádějí axiomaticky. Nejznámější je soustava tzv. *Peanových axiomů*. Základní pojmy jsou 1 (jedna) a následovník (budeme ho označovat čárkou).

(1) 1 je přirozené číslo.
(2) Ke každému přirozenému číslu a existuje jediný jeho následovník a', je to také přirozené číslo.
(3) 1 není následovníkem žádného přirozeného čísla.
(4) Různá přirozená čísla mají různé následovníky.
(5) Nechť množina M má tyto vlastnosti:
    (a) Obsahuje číslo 1.
    (b) S každým přirozeným číslem a obsahuje i jeho následovníka a'.

Potom množina M obsahuje všechna přirozená čísla. Vidíme, že pátý Peanův axiom je vlastně princip matematické indukce. (Zavedeme-li sčítání přirozených čísel, odpovídá následovníku a' číslo $a + 1$). Přitom soustava Peanových axiomů je nezávislá, tzn. že žádný z nich není důsledkem ostatních; princip matematické indukce nelze tedy z ostatních Peanových axiomů odvodit. Jak to, že se nám ho v 1. kapitole podařilo ověřit? Nepracovali jsme totiž s axiomaticky zavedenými přirozenými čísly, ale s názornými představami o nich. Při jednom „důkaze“ jsme se opřeli o intuitivně zřejmou skutečnost, že každá neprázdná podmnožina množiny všech přirozených čísel obsahuje nejmenší číslo. Tuto větu však v axiomaticky založené teorii (máme-li definováno, co znamená „nejmenší“) nelze dokázat bez pátého axiomu. Podobně v jiném „důkaze“, který jsme uvedli, jsme „zdravým rozumem“ usoudili, že k libovolnému přirozenému číslu lze dojít tak, že vyjdeme od čísla 1 a opakovaně přičítáme 1. Ani to však nevyplývá z Peanových axiomů (1) až (4).

* * * *

Zamysleme se nad hodnotou důkazů metodou matematické indukce ve srovnání s jinými metodami. Tak např. větu

pro každé přirozené číslo $n > 1$ je

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

lze dokázat nejen matematickou indukcí (viz cvič. 1.13g), ale též následující úvahou: Ekvivalentní nerovnost

$$\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} > n$$

platí pro každé přirozené číslo $n > 1$, neboť vlevo je $n - 1$ sčítanců větších než 1 a jeden rovný 1.

Metodou matematické indukce snadno dokážeme, že n přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem, se protíná právě v $\frac{n(n-1)}{2}$ bodech. Stačí si však uvědomit, že každá z daných n přímek je protínána ostatními $n - 1$ přímkami, přičemž každý průsečík odpovídá dvěma přímkám. Nebo ještě stručněji, každé dvojici přímek odpovídá právě jeden průsečík, průsečíků je tedy $\binom{n}{2}$.

Ani k důkazu rovnosti

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \ldots + \frac{1}{(4n - 3)(4n + 1)} = \frac{n}{4n + 1}$$

pro každé přirozené číslo n nepotřebujeme matematickou indukci. Pro každý sčítanec platí

$$\frac{1}{(4k - 3)(4k + 1)} = \frac{1 - k}{4k - 3} + \frac{k}{4k + 1}$$

a je tedy

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \ldots + \frac{1}{(4n - 7)(4n - 3)} +$$

$$+ \frac{1}{(4n - 3)(4n + 1)} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{n}{4n - 7} + \frac{n - 1}{4n - 3} - \frac{n - 1}{4n - 3} + \frac{n}{4n + 1} =$$

$$= \frac{n}{4n + 1},$$

neboť dvojice sousedních členů se zruší a zbude jen poslední člen.

V mnohých učebnicích se binomická věta dokazuje matematickou indukcí: Zřejmě platí

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 .$$

Předpokládejme, že pro přirozené číslo p je

$$(a + b)^p = \binom{p}{0} a^p b^0 + \binom{p}{1} a^{p-1} b^1 + \ldots +$$
$$+ \binom{p}{p-1} a^1 b^{p-1} + \binom{p}{p} a^0 b^p .$$

Potom je

$$(a + b)^{p+1} = (a + b)(a + b)^p =$$
$$= \binom{p}{0} a^{p+1} b^0 + \left[\binom{p}{0} + \binom{p}{1}\right] a^p b^1 + \ldots$$
$$\ldots + \left[\binom{p}{p-1} + \binom{p}{p}\right] a^1 b^p + \binom{p}{p} a^0 b^{p+1} .$$

Využijeme-li vzorců

$$\binom{p}{k} + \binom{p}{k+1} = \binom{p+1}{k+1},$$
$$\binom{p}{0} = \binom{p+1}{0} = 1 = \binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1},$$

dostaneme

$$(a + b)^{p+1} = \binom{p+1}{0} a^{p+1} b^0 + \binom{p+1}{1} a^p b^1 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{p+1}{p} a^1 b^p + \binom{p+1}{p+1} a^0 b^{p+1}$$

a věta je dokázána. Lze ji však odvodit také jinak: Roznásobíme podle distributivního zákona součin n dvojčlenů $(a + b)(a + b) \ldots (a + b)$. Dostaneme tak součet členů tvaru $a^i b^j$, kde $i + j = n$. Přitom koeficient u $a^{n-k} b^k$ bude roven počtu všech způsobů, jak z n

dvojčlenů vybrat k dvojčlenů, z nichž se vzal člen b (z ostatních $n - k$ dvojčlenů se vzal člen a). Koeficient bude tedy roven počtu všech k-prvkových kombinací z n prvků, tj. $\binom{n}{k}$.

Snad tyto příklady stačí k ilustraci skutečnosti, že důkaz mnohých vět lze provést nejen matematickou indukcí, ale též jiným přirozenějším způsobem. Oba důkazy jsou ovšem stejně platné a hodnověrné, přece jen však nemají stejnou hodnotu. Nehledíme-li k estetickým zřetelům, je podstatné, že důkaz matematickou indukcí bývá většinou formální, zatímco jiné metody poskytují daleko více informací o podstatě dokazované věty, o souvislostech apod. Tak např. z důkazu binomické věty matematickou indukcí není vůbec vidět, kde se tam vzala kombinační čísla. V matematické praxi je proto obvyklé nespokojit se s důkazem matematickou indukcí, ale hledat ještě důkaz přirozenější, který by na zkoumaný problém vrhl jasnější světlo. Na druhé straně bývá ale důkaz matematickou indukcí spolehlivý; pravděpodobnost, že se dopustíme omylu, není tak velká jako u bezprostředních úvah. Jsou ovšem věty, v jejichž podstatě tkví, že je nelze dokázat jinak než metodou matematické indukce, a také jsou samozřejmě věty, k jejichž dokazování se matematická indukce nehodí.

* * * * *

Dokážeme, že pro každé přirozené číslo n platí nerovnost

$$\frac{1 . 3 \ldots (2n - 1)}{2 . 4 \ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}.$$

Zkusíme to metodou matematické indukce: Pro $n = 1$

dostáváme $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, což platí. Buď p přirozené číslo a nechť nerovnost platí pro $n = p$, tj.

$$\frac{1.3 \ldots (2p-1)}{2.4 \ldots 2p} < \frac{1}{\sqrt{3p}}.$$

Pro $n = p + 1$ je levá strana

$$\frac{1.3 \ldots (2p-1)(2p+1)}{2.4. \ldots 2p(2p+2)} < \frac{2p+1}{(2p+2)\sqrt{3p}}$$

(využili jsme indukčního předpokladu) a pravá strana

$$\frac{1}{\sqrt{3p+3}}.$$

Stačilo by tedy dokázat, že pro každé přirozené p je

$$(*) \qquad \frac{2p+1}{(2p+2)\sqrt{3p}} \leqq \frac{1}{\sqrt{3p+3}}.$$

Důsledkem této nerovnosti je však nerovnost

$$p + 1 \leqq 0,$$

která ovšem pro žádné přirozené číslo p neplatí. Co to znamená? Pouze to, že neplatí ani nerovnost $(*)$; o správnosti nerovnosti

$$(**) \qquad \frac{1.3 \ldots (2p+1)}{2.4 \ldots (2p+2)} < \frac{1}{\sqrt{3p+3}}$$

to nic neříká. Pokud by nerovnost $(*)$ platila, znamenalo by to i platnost nerovnosti $(**)$, ale obráceně to není pravda. (Ostatně uvidíme, že dokazovaná nerovnost platí.)

Důkaz se nám nepodařil. Podívejme se proč. Označme levou stranu dokazované nerovnosti L_n a pravou P_n. Předpokládali jsme, že $L_p < P_p$, a chtěli dokázat, že $L_{p+1} < P_{p+1}$. Nabízí se možnost využít indukčního předpokladu takto: Z $L_p < P_p$ plyne

$$L_{p+1} = L_p \frac{L_{p+1}}{L_p} < P_p \frac{L_{p+1}}{L_p}$$

a podaří-li se dokázat, že

$$P_p \frac{L_{p+1}}{L_p} \leqq P_{p+1},$$

neboli

$$\frac{P_p}{P_{p+1}} \leqq \frac{L_p}{L_{p+1}},$$

byli bychom hotovi. To se nám ale nepodařilo, tato poslední nerovnost dokonce pro žádné přirozené číslo p neplatila.

Nevzdávejme se a pokusme se pravou stranu poněkud „opravit“ — označme ji pak P'_n — tak, aby

$$L_1 < P'_1,$$

$(* * *)$ $P'_n \leqq P_n$ pro každé přirozené n,

$$\frac{P'_n}{P'_{n+1}} \leqq \frac{L_n}{L_{n+1}} \quad \text{pro každé přirozené } n.$$

Podaří-li se nám najít vhodné P'_n, pak se podaří i důkazy nerovnosti $L_n < P'_n$ metodou matematické indukce uvedeným způsobem a tím bude dokázána i slabší (viz $(* * *)$) nerovnost $L_n < P_n$.

Pokusme se modifikovat pravou stranu tak, že pod odmocnítko přidáme vhodnou kladnou konstantu a; bude tedy

$$P'_n = \frac{1}{\sqrt{3n + a}}\,.$$

Zřejmě bude $P'_n \leqq P_n$ pro každé n a každé a. Dále bude

$$L_1 = \frac{1}{2} < P'_1 = \frac{1}{\sqrt{3 + a}}$$

pro všechna $a < 1$. Třetí požadavek bude splněn pro všechna a, pro něž platí

$$a \geqq \frac{3n + 3}{4n + 3}\,,$$

tj. pro všechna $a \geqq \frac{6}{7}$ (vzhledem k tomu, že posloupnost $\left\{\frac{3n + 3}{4n + 3}\right\}$ je — jak se snadno přesvědčíme — klesající).

Pro každé $a \in \left\langle \frac{6}{7}, 1\right)$ a pro každé přirozené n tedy platí

$$\frac{1.3 \ldots (2n - 1)}{2.4 \ldots 2n} < \frac{1}{\sqrt{3n + a}} < \frac{1}{\sqrt{3n}}\,.$$

Viděli jsme, že dokázat více bylo snadnější než dokazovat méně.

* * * * * *

Pomocí logických symbolů lze princip matematické indukce (1)—(2) zapsat takto:

Buď $T(n)$ výroková forma, jejíž definiční obor je množina P všech přirozených čísel. Pak platí

$$T(1) \wedge (\forall\, p \in P)\,[T(p) \Rightarrow T(p + 1)] \;\Rightarrow\; (\forall\, n \in P)\, T(n)\,.$$

* * * * * * *

V edici Škola mladých matematiků již vyšla r. 1964 jako šestý svazek knížka R. Výborného *Matematická indukce*. V českém jazyce máme ještě brožurku I. S. Sominského *Metoda matematické indukce*, jejíž překlad byl vydán r. 1953. Velmi hodnotná je knížka L. I. Golovina - I. M. Jaglom: *Индукция в геометрии* z r. 1956. Obsahuje řadu netriviálních a netradičních úloh a čtenář se z ní dozví mnoho zajímavého z planimetrie i kombinatorické geometrie, mimo jiné též o známém problému čtyř barev. Tato knížka vyšla také ještě r. 1967 společně se zmíněnou Sominského brožurkou v jednom svazku pod názvem *О математической индукции.*

O Fibonacciově posloupnosti, kterou jsme uvedli v úloze 13, pojednává brožura N. N. Vorobjeva *Fibonacciova čísla*, jejíž český překlad vyšel r. 1953. Zajímavá je také knížka N. J. Vilenkina *Индукция, комбинаторика* z r. 1976.

Fibonacciova posloupnost je zvláštním případem tzv. lineárních rekurentních posloupností, definovaných takto:

$$v_1 = a_1, v_2 = a_2, \ldots, v_r = a_r,$$

$$v_{p+r} = b_1 v_{p+r-1} + b_2 v_{p+r-2} + \ldots + b_{r-1} v_{p+1} + b_r v_p ,$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_r$ jsou daná čísla. Vlastnostem těchto posloupností je věnována brožura A. I. Markuševiče *Rekurentní posloupnosti*, která byla v českém překladu vydána r. 1954. Je zajímavé, že ke každé lineární rekurentní posloupnosti lze nalézt vzorec, který udává hodnotu n-tého členu přímo pomocí jeho indexu n (což je jiná, nikoliv rekurentní definice téže posloupnosti). Ve vzorci se vyskytují řešení algebraické rovnice

$$x^r = b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \ldots + b_{r-1} x + b_r$$

(viz cvič. 2.6).

O tom se lze kromě citovaných brožurek dočíst stručně také v knize N. J. Vilenkina *Kombinatorika* (čes. překlad 1977). Některé z uvedených publikací vyšly ještě v dalších vydáních.

Cvičení

1. Dokažte, že z principu matematické indukce plyne věta o existenci nejmenšího prvku neprázdné podmnožiny množiny všech přirozených čísel.
2. Dokažte tzv. *Bernoulliovu nerovnost:* Je-li x kladné číslo a n přirozené číslo, pak $(1 + x)^n \geqq 1 + nx$
   a) metodou matematické indukce,
   b) pomocí binomické věty.
   Porovnejte oba důkazy.
3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n > 1$ platí
$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$$
4. Zapište principy matematické indukce (3)—(4), (5)—(6), (7)—(8) a (9)—(10) pomocí logických symbolů.

4. kapitola

JEŠTĚ PĚTADVACET ÚLOH

Úloha 17. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n a pro každá dvě reálná čísla a, b platí

$$a^{2^n} + b^{2^n} + n \geqq (ab)^{2^n-1} + (ab)^{2^n-2} + \ldots$$
$$\ldots + ab + a + b\,.$$

Řešení. Pro $n = 1$ nabývá dokazovaná nerovnost tvaru

$$a^2 + b^2 + 1 \geqq ab + a + b\,,$$

což je ekvivalentní s nerovností

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geqq 0\,,$$

která zřejmě platí pro každá dvě reálná čísla a, b.

Buď nyní k přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = k$ nerovnost platí. Dokážeme, že potom platí i pro $n = k + 1$. Postupně dostáváme (nejprve využijeme toho, že nerovnost platí pro $n = 1$ a potom indukčního předpokladu)

$$a^{2^{k+1}} + b^{2^{k+1}} + k + 1 = (a^{2^k})^2 + (b^{2^k})^2 + 1 + k \geqq$$
$$\geqq (ab)^{2^k} + a^{2^k} + b^{2^k} + k \geqq (ab)^{2^k} + (ab)^{2^k-1} +$$
$$+ \ldots + ab + a + b\,.$$

Úloha 18. Jsou dána reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 1)$, pro něž platí

$$0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq 2a_1,$$
$$a_2 \leqq a_3 \leqq 2a_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} \leqq a_n \leqq 2a_{n-1}.$$

Dokažte, že existují přirozená čísla $p_1, p_2, \ldots, p_n$ taková, že

$$0 \leqq (-1)^{p_1}a_1 + (-1)^{p_2}a_2 + \ldots + (-1)^{p_n}a_n \leqq a_1.$$

Řešení. Jde o to opatřit čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ znaménky tak, aby jejich součet byl pak mezi čísly 0 a a_1. Budeme postupovat indukcí podle počtu čísel n.

Pro $n = 2$ věta platí, protože

$$0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq 2a_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqq -a_1 + a_2 \leqq a_1.$$

Buď nyní $k > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro ně věta platí, tj. že pro jakýchkoliv k čísel $b_1, b_2, \ldots, b_k$ splňujících předpoklady věty, existují přirozená čísla $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tak, že

$$0 \leqq (-1)^{r_1}b_1 + (-1)^{r_2}b_2 + \ldots + (-1)^{r_k}b_k \leqq b_1.$$

Dokážeme, že potom věta platí i pro $n = k + 1$. Uvažujme $k + 1$ čísel $c_1, c_2, \ldots, c_{k+1}$ splňujících předpoklady věty. Pro k čísel $c_2, c_3, \ldots, c_{k+1}$ jsou předpoklady také splněny a podle indukčního předpokladu tedy existují přirozená čísla $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tak, že pro součet

$$S = (-1)^{r_1}c_2 + (-1)^{r_2}c_3 + \ldots + (-1)^{r_k}c_{k+1}$$

platí

$$0 \leqq S \leqq c_2.$$

Rozeznávejme dva případy:

1. Je-li $0 \leqq S \leqq c_1$, je $0 \leqq c_1 - S \leqq c_1$, neboli

$$0 \leqq (-1)^2 c_1 + (-1)^{r_1+1} c_2 + \ldots + (-1)^{r_k+1} c_{k+1} \leqq c_1.$$

2. Je-li $c_1 \leqq S \leqq c_2 \leqq 2c_1$, je $0 \leqq S - c_1 \leqq c_1$, neboli

$$0 \leqq (-1)^1 c_1 + (-1)^{r_1} c_2 + \ldots + (-1)^{r_k} c_{k+1} \leqq c_1 .$$

Tím je důkaz proveden.

Úloha 19. Buď n přirozené číslo a t buď přirozené číslo, dávající při dělení čtyřmi zbytek 1. Dokažte že součet

$$s_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} t + \binom{n}{5} t^2 + \ldots$$

je dělitelný číslem 2^{n-1}. (Poslední nenulový člen součtu s_n je $\binom{n}{n} t^{\frac{n-1}{2}}$ pro liché n a $\binom{n}{n-1} t^{\frac{n}{2}-1}$ pro sudé n).

Řešení. Je $s_1 = 1$, což je dělitelno číslem 2^0 a $s_2 = 2$, což je dělitelno číslem 2^1. Pro $n = 1$ a $n = 2$ věta tedy platí. Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = k$ a $n = k + 1$ věta platí; dokažme její platnost pro $n = k + 2$. Podle binomické věty je

$$s_n = \frac{(1 + \sqrt{t})^n - (1 - \sqrt{t})^n}{2\sqrt{t}}.$$

Je tedy

$$s_{k+2} = \frac{(1 + \sqrt{t})^{k+2} - (1 - \sqrt{t})^{k+2}}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{[(1+\sqrt{t})^{k+1} - (1-\sqrt{t})^{k+1}]\,[(1+\sqrt{t}) + (1-\sqrt{t})]}{2\sqrt{t}} -$$

$$- \frac{[(1+\sqrt{t})^{k} - (1-\sqrt{t})^{k}]\,(1+\sqrt{t})\,(1-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} =$$

$$= 2s_{k+1} + (t-1)\,s_k\,.$$

Číslo $t - 1$ je dělitelno čtyřmi a použijeme-li indukční předpoklad, jsou oba sčítance dělitelny číslem 2^{k+1}. Tím je důkaz proveden.

Úloha 20. Dokažte, že každé přirozené číslo, které je nejvýše rovno $n!$, je součtem nejvýše n navzájem různých dělitelů čísla $n!$.

Řešení. Pro $n = 1$ je platnost dokazované věty zřejmá. Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že věta pro ně platí. Dokážeme, že potom věta platí i pro $k + 1$. Buď tedy $c \leqq (k + 1)!$ přirozené číslo. Při dělení číslem $k + 1$ dostaneme

$$c = (k+1)\,d + r\,,$$

kde $0 \leqq r < k + 1$. Zřejmě je $d \leq k!$ a podle indukčního předpokladu je

$$d = d_1 + \ldots + d_k\,,$$

kde $d_1, \ldots, d_k$ jsou buď nuly, nebo navzájem různí dělitelé čísla $k!$. Je tedy

$$c = (k+1)\,d_1 + \ldots + (k+1)\,d_k + r\,,$$

kde čísla $(k + 1)\,d_1, \ldots, (k + 1)\,d_k$ jsou nuly nebo navzájem různí dělitelé čísla $(k + 1)!$ (to je zřejmé) a r je také nula nebo dělitel čísla $(k + 1)!$ (neboť $r < k + 1$)

různý ode všech čísel $(k + 1) d_1, \ldots, (k + 1) d_k$ (neboť $r < k + 1 \leqq (k + 1) d_j$ pro $d_j \neq 0$). Tím je úloha vyřešena.

Úloha 21. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí: Přičteme-li k číslu, jež má $4n - 3$ číslic, číslo, které z něho vznikne obrácením pořadí číslic, bude mít výsledný součet alespoň jednu číslici sudou (vše je v desítkové soustavě).

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle n. Pro $n = 1$ je $4n - 3 = 1$ a pro jednociferná čísla věta zřejmě platí. Buď dále p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ věta platí. Dokážeme ji pro $n = p + 1$ sporem. Nechť pro $n = p + 1$ věta neplatí, tj. existuje číslo, které má $4p + 1$ číslic a sečteme-li je s týmž číslem napsaným obráceně, bude mít součet samé liché číslice. Vzhledem k tomu nenastal při sčítání přenos jedničky z $4p$-tého na $(4p + 1)$-té místo počítáno zprava. Proto nenastal ani přenos z druhého na třetí místo zprava a tedy vynecháním posledních dvou číslic vpravo ze součtu dostaneme číslo, jež má také všechny číslice liché. Z toho je vidět, že odstraníme-li z $(4p + 1)$-ciferného čísla, od něhož jsme vyšli, poslední dvě číslice a počáteční dvě číslice, bude jeho součet s obráceně napsaným číslem mít všechny číslice liché, což odporuje indukčnímu předpokladu. Tím je důkaz proveden.

Úloha 22. Jsou dána celá čísla j, n, pro něž platí $0 \leqq j < n$. Uvažujme všechna celá nezáporná čísla, která mají nejvýše n číslic. Dokažte, že součet j-tých mocnin všech těch uvažovaných čísel, která mají lichý ciferný součet, je stejný jako pro sudý ciferný součet. (Klademe $0^0 = 1$.)

Řešení. Budeme pracovat v desítkové soustavě, ale to není podstatné. Pro každé přirozené n označme L_n (resp. S_n) množinu všech uvažovaných čísel s lichým (resp. sudým) ciferným součtem. (Je zřejmé, že obě množiny mají stejně, a to $5 . 10^{n-1}$ prvků.) Budeme postupovat indukcí podle n.

Pro $n = 1$ věta tvrdí, že

$$1^0 + 3^0 + 5^0 + 7^0 + 9^0 = 0^0 + 2^0 + 4^0 + 6^0 + 8^0,$$

což je zřejmé.

Buď k přirozené číslo a nechť věta pro ně platí, dokážeme ji pro $k + 1$. Buď $0 \leqq j < k + 1$ celé číslo. Použijeme-li binomickou větu, dostáváme postupnými úpravami součtů

$$\sum_{a \in S_{k+1}} a^j = \sum_{\substack{b \in S_k \\ c \in S_1}} (10b + c)^j + \sum_{\substack{b \in L_k \\ b \in L_1}} (10b + c)^j =$$

$$= \sum_{\substack{b \in S_k \\ c \in S_1}} \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} 10^r b^r c^{j-r} + \sum_{\substack{b \in L_k \\ c \in L_1}} \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} 10^r b^r c^{j-r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} 10^r \left[\sum_{c \in S_1} c^{j-r} \sum_{b \in S_k} b^r + \sum_{c \in L_1} c^{j-r} \sum_{b \in L_k} b^r \right] =$$

$$= 10^j . 5 \sum_{b \in L_k \cup S_k} b^j +$$

$$+ \sum_{r=0}^{j-1} \binom{j}{r} 10^r \left[\sum_{c \in S_1} c^{j-r} \sum_{b \in S_k} b^r + \sum_{c \in L_1} c^{j-r} \sum_{b \in L_k} b^r \right].$$

Analogickým postupem dostaneme

$$\sum_{a \in L_{k+1}} a^j = \sum_{\substack{b \in S_k \\ c \in L_1}} (10b + c)^j + \sum_{\substack{b \in L_k \\ c \in S_1}} (10b + c)^j =$$

$$= 10^j . 5 \sum_{b \in L_k \cup S_k} b^j +$$

$$+ \sum_{r=0}^{j-1} \binom{j}{r} 10^r \left[\sum_{c \in S_1} c^{j-r} \sum_{b \in L_k} b^r + \sum_{c \in L_1} c^{j-r} \sum_{b \in S_k} b^r \right].$$

Oba součty jsou stejné, neboť podle indukčního předpokladu pro každé $r = 0, 1, \ldots, j - 1$ platí

$$\sum_{b \in L_k} b^r = \sum_{b \in S_k} b^r .$$

Úloha 23. Dokažte, že

$$\mathbf{D}(\mathbf{n}(a_1, \ldots, a_m), b) = \mathbf{n}(\mathbf{D}(a_1, b), \ldots, \mathbf{D}(a_m, b)) ,$$

kde $m > 1$, $a_1, \ldots, a_m$, b jsou přirozená čísla a symboly $\mathbf{D}(\ldots)$ resp. $\mathbf{n}(\ldots)$ označují největšího společného dělitele resp. nejmenší společný násobek čísel, uvedených v závorce.

Řešení. Budeme postupovat indukcí podle m. Nejprve větu dokážeme pro $m = 2$. Označme $\mathbf{D}(a_1, a_2, b) =$

$$= p, \mathbf{D}\left(\frac{a_1}{p}, \frac{a_2}{p}\right) = q, \ \mathbf{D}\left(\frac{a_1}{p}, \frac{b}{p}\right) = r, \ \mathbf{D}\left(\frac{a_2}{p}, \frac{b}{p}\right) = s.$$

Platí

$$\mathbf{D}(q, r) = \mathbf{D}\left(\mathbf{D}\left(\frac{a_1}{p}, \frac{a_2}{p}\right), \mathbf{D}\left(\frac{a_1}{p}, \frac{b}{p}\right)\right) =$$

$$= \mathbf{D}\left(\frac{a_1}{p}, \frac{a_2}{p}, \frac{b}{p}\right) = 1 .$$

Stejně dokážeme, že $\mathbf{D}(q, s) = \mathbf{D}(r, s) = 1$. Platí tedy

$$a_1 = pqru, \quad a_2 = pqsv, \quad b = prsw ,$$

kde každá dvě z čísel u, v, w jsou nesoudělná. Je proto

$$\mathrm{D}(\mathrm{n}(a_1, a_2), b) = \mathrm{D}(\mathrm{n}(pqru, pqsv), prsw) =$$
$$= \mathrm{D}(pqrsuv, prsw) = prs\,,$$
$$\mathrm{n}(\mathrm{D}(a_1, b), \mathrm{D}(a_2, b)) = \mathrm{n}(\mathrm{D}(pqru, prsw), \mathrm{D}(pqsv, prsw)) =$$
$$= \mathrm{n}(pr, ps) = prs\,.$$

Je tedy
$$\mathrm{D}(\mathrm{n}(a_1, a_2), b) = \mathrm{n}(\mathrm{D}(a_1, b), \mathrm{D}(a_2, b))$$
a pro $m = 2$ věta platí.

Buď nyní k přirozené číslo a nechť pro $m = k$ věta platí. Dokážeme, že pak platí i pro $m = k + 1$. Postupně dostáváme

$$\mathrm{D}(\mathrm{n}(a_1, \ldots, a_{k+1}), b) = \mathrm{D}(\mathrm{n}(\mathrm{n}(a_1, \ldots, a_k), a_{k+1}), b) =$$
$$= \mathrm{n}(\mathrm{D}(\mathrm{n}(a_1, \ldots, a_k), b), \mathrm{D}(a_{k+1}, b)) =$$
$$= \mathrm{n}(\mathrm{n}(\mathrm{D}(a_1, b), \ldots, \mathrm{D}(a_k, b)), \mathrm{D}(a_{k+1}, b)) =$$
$$= \mathrm{n}(\mathrm{D}(a_1, b), \ldots, \mathrm{D}(a_k, b), \mathrm{D}(a_{k+1}, b))\,.$$

Druhá rovnost je důsledkem toho, že věta platí pro $m = 2$ a třetí rovnost platí podle indukčního předpokladu. Tím je důkaz proveden.

Všimněte si, že důkaz pro $m = 2$ byl daleko obtížnější než indukční krok.

Úloha 24. Uspořádejte čísla 1, 2, ..., n tak, aby pro žádná dvě z nich nebyl jejich aritmetický průměr roven některému z čísel, která jsou v uspořádání mezi nimi.

Řešení. Pro $n = 1$ je problém triviální. Předpokládejme, že k je přirozené číslo a že pro všechna menší přirozená čísla problém umíme vyřešit. Má-li být číslo $\dfrac{a + b}{2}$ celé, musejí mít celá čísla a, b stejnou paritu (tj.

být obě lichá nebo obě sudá). Můžeme tedy uspořádat lichá čísla samostatně a sudá také samostatně a pak ve výsledném uspořádání dát např. nejprve takto uspořádaná lichá a pak sudá čísla. Nechť příslušná lichá čísla jsou 1, 3, ..., $2t - 1$. Zřejmě je $t < k$ a podle indukčního předpokladu čísla 1, 2, ..., t uspořádat umíme. Čísla 1, 3, ..., $2t - 1$ můžeme uspořádat analogicky, neboť

$$\frac{a + b}{2} = c \Leftrightarrow \frac{(2a - 1) + (2b - 1)}{2} = 2c - 1 .$$

Stejně je tomu i se sudými čísly. Tím je problém vyřešen.

Ukážeme si ještě, jak budeme postupovat v konkrétním případě, např. pro $n = 13$. Symboliku snad není třeba vysvětlovat.

$$\begin{aligned}
&(1, 2, \ldots, 13) = \\
&= (1, 3, \ldots, 13)\,(2, 4, \ldots, 12) \sim (1, 2, \ldots, 7)\,(1, 2, \ldots, 6), \\
&(1, 2, \ldots, 7) = (1, 3, 5, 7)\,(2, 4, 6) \sim (1, 2, 3, 4)\,(1, 2, 3), \\
&(1, 2, \ldots, 6) = (1, 3, 5)\,(2, 4, 6) \sim (1, 2, 3)\,(1, 2, 3), \\
&(1, 2, 3, 4) = (1, 3)\,(2, 4) \sim (1, 2)\,(1, 2), \\
&(1, 2, 3) = (1, 3)\,(2) \sim (1, 2)\,(1), \\
&(1, 2) = (1)\,(2) \sim (1)\,(1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1) \to [1], \\
&(1, 2) \to [1, 2], \\
&(1, 2, 3) \to [1, 3, 2], \\
&(1, 2, 3, 4) \to [1, 3, 2, 4], \\
&(1, 2, \ldots, 6) \to [1, 5, 3, 2, 6, 4], \\
&(1, 2, \ldots, 7) \to [1, 5, 3, 7, 2, 6, 4], \\
&(1, 2, \ldots, 13) \to [1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 2, 10, 6, 4, 12, 8].
\end{aligned}$$

Uspořádáme-li tedy čísla 1, 2, ..., 13 tak, jak je popsáno v poslední řádce schematu, nebude aritmetický průměr žádných dvou z nich roven číslu, které je v uspořádání mezi nimi.

Postup si podstatně ulehčíme a urychlíme zejména pro velká n, když si uvědomíme, že jsou-li $p < q$ přirozená čísla a známe-li řešení problému pro q, dostaneme z něho řešení pro p vynecháním čísel $p + 1$, $p + 2$, ..., q. Můžeme tedy postupně konstruovat řešení pro mocniny čísla 2 a z vhodného z nich vynechat případná nadbytečná čísla. V našem případě bude

(1) → [1],
(1, 2) → [1, 2],
(1, 2, 3, 4) → [1, 3, 2, 4],
(1, 2, ..., 8) → [1, 5, 3, 7, 2, 6, 4, 8],
(1, 2, ..., 13, 14, 15, 16) → [1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 2, 10, 6, 14, 4, 12, 8, 16].

Došli jsme ke stejnému řešení.

Úloha 25. Dokažte, že každý zlomek $0 < \frac{r}{s} < 1$ lze vyjádřit jako součet

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_k},$$

kde $q_1 < q_2 < \ldots < q_k$ jsou přirozená čísla a q_j je dělitelno q_{j-1} pro všechna $j = 2, 3, \ldots, k$.

Řešení. Stačí se zabývat pouze zlomky v základním tvaru, tj. takovými, kde $r < s$ jsou nesoudělná přirozená čísla. Budeme postupovat matematickou indukcí podle čitatele r.

Pro $r = 1$ má zlomek $\frac{1}{s}$ požadovaný tvar. Buď p přirozené číslo a nechť pro všechna $r \leqq p$ věta platí.

Zabývejme se zlomkem $\frac{p+1}{s}$. Dělíme-li*) jmenovatele čitatelem $p + 1$, dostaneme $s = (p + 1) y - z$, kde y, z jsou nezáporná celá čísla a $z \leqq p$. Vzhledem k tomu, že $p + 1 < s$, bude $y > 1$, a protože $p + 1$, s jsou nesoudělná čísla, bude $z > 0$. Je tedy

$$\frac{p+1}{s} = \frac{(p+1)y}{sy} = \frac{s+z}{sy} = \frac{1}{y}\left(1 + \frac{z}{s}\right) =$$
$$= \frac{1}{y}\left(1 + \frac{z'}{s'}\right),$$

kde $\frac{z'}{s'}$ je zlomek $\frac{z}{s}$ uvedený na základní tvar. Protože $z' \leqq z \leqq p$, je podle indukčního předpokladu

$$\frac{z'}{s'} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n},$$

kde $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, přičemž t_j je dělitelno t_{j-1} pro $j = 2, 3, \ldots, n$. Odtud dostáváme hledané vyjádření

$$\frac{p+1}{s} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t_1 y} + \frac{1}{t_2 y} + \ldots + \frac{1}{t_n y}.$$

Úloha 26. Uvažujme všechna racionální čísla z uzavřeného intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, která zapsána v základním tvaru, mají jmenovatele nejvýše n a jsou seřazena podle velikosti. Dokažte, že pro každá dvě sousední uvažovaná čísla $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ platí $bc - ad = 1$. (Říkáme, že racionální

*) Jde vlastně o trochu jiné dělení, než je obvyklé, o „dělení se záporným zbytkem“.

číslo je v základním tvaru, je-li zapsáno jako zlomek, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná celá čísla, přičemž jmenovatel je kladný. Základní tvar čísla 0 je $\frac{0}{1}$.)

Řešení. Označme M_n uvažovanou množinu. Pak $M_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ a pro $n = 1$ věta zřejmě platí. Předpokládejme, že k je přirozené číslo a že věta platí pro $n = k$. Uvažujme množinu M_{k+1}. Zřejmě $M_k \subseteqq M_{k+1}$. Patří-li některá dvě sousední čísla množiny M_{k+1} obě do množiny M_k, pak pro ně podle indukčního předpokladu platí dokazovaný vztah. Je-li $a < k$ přirozené číslo, pak zřejmě platí nerovnost

$$\frac{a}{k+1} < \frac{a}{k} < \frac{a+1}{k+1}$$

a odtud je zřejmé, že každé číslo z množiny $M_{k+1} - M_k$ má za sousedy z obou stran čísla z množiny M_k. Uvažujme tedy tři sousední čísla (píšeme je v základním tvaru)

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{k+1} < \frac{s}{t},$$

kde prostřední je z množiny $M_{k+1} - M_k$ a obě krajní jsou z množiny M_k. Předpokládejme, že alespoň jedno z čísel $D_1 = qr - p(k+1)$, $D_2 = s(k+1) - rt$ je různé od 1 (a tedy větší než 1). Potom je

$$q + t < qD_2 + tD_1 = (k+1)(qs - pt) = k + 1$$

(poslední rovnost nastává podle indukčního předpokladu). Pak ale platí

$$\frac{p+s}{q+t} \neq \frac{r}{k+1}, \qquad \frac{p}{q} < \frac{p+s}{q+t} < \frac{s}{t},$$

což není možné.

Věta tedy platí i pro $n = k + 1$ a důkaz je proveden.

Úloha 27. Buď $n \geqq 2$ přirozené číslo. Dokažte, že součet všech čísel tvaru $\frac{1}{pq}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla taková, že $p < q \leqq n$ a $p + q > n$, je $\frac{1}{2}$.

Řešení. Pro každé n označme M_n množinu všech uspořádaných dvojic nesoudělných přirozených čísel p, q, pro něž platí $p < q \leqq n$ a $p + q > n$. Máme dokázat, že pro každé přirozené $n \geqq 2$ je

$$\sum_{(p, q) \in M_n} \frac{1}{pq} = \frac{1}{2}.$$

Tak např.

$$M_6 = \{(1, 6), (5, 6), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)\}$$

a skutečně

$$\frac{1}{1.6} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{3.4} = \frac{1}{2}.$$

Buď $k \geqq 2$ přirozené číslo a uvědomme si, jak se liší množiny M_k a M_{k+1}. Množina $M_{k+1} - M_k$ obsahuje zřejmě právě všechny uspořádané dvojice nesoudělných přirozených čísel tvaru $(p, k + 1)$, kde $p < k + 1$. Množina $M_k - M_{k+1}$ obsahuje právě všechny uspořádané dvojice nesoudělných přirozených čísel tvaru

$(p, k + 1 - p)$, kde $p < \frac{k+1}{2}$. Pro příslušné součty zřejmě platí

$$\sum_{(p,q) \in M_{k+1}} \frac{1}{pq} - \sum_{(p,q) \in M_k} \frac{1}{pq} =$$

$$= \sum_{(p,q) \in M_{k+1} - M_k} \frac{1}{pq} - \sum_{(p,q) \in M_k - M_{k+1}} \frac{1}{pq}.$$

Dokážeme, že rozdíl vpravo je roven nule. Postupně dostáváme

$$\sum_{(p,q) \in M_k - M_{k+1}} \frac{1}{pq} = \sum_{\substack{p < \frac{k+1}{2} \\ p,\, k+1-p \text{ nesoud.}}} \frac{1}{p(k + 1 - p)} =$$

$$= \sum_{\substack{p < \frac{k+1}{2} \\ p,\, k+1-p \text{ nesoud.}}} \frac{1}{p(k+1)} + \sum_{\substack{p < \frac{k+1}{2} \\ p,\, k+1-p \text{ nesoud.}}} \frac{1}{(k+1-p)(k+1)} =$$

$$= \sum_{\substack{p < k+1 \\ p,\, k+1 \text{ nesoud.}}} \frac{1}{p(k + 1)} = \sum_{(p,q) \in M_{k+1} - M_k} \frac{1}{pq}.$$

Využili jsme přitom toho, co již víme o množinách $M_k - M_{k+1}$ a $M_{k+1} - M_k$ a dále zřejmých faktů, že čísla p, $k + 1 - p$ jsou nesoudělná právě když čísla p, $k + 1$ jsou nesoudělná a že čísla $\frac{k+1}{2}$, $k + 1$ nejsou nesoudělná. Pro každé $k \geqq 2$ je tedy

$$\sum_{(p,q) \in M_k} \frac{1}{pq} = \sum_{(p,q) \in M_{k+1}} \frac{1}{pq}.$$

Zřejmě je $M_2 = \{(1, 2)\}$ a tedy

$$\sum_{(p,q) \in M_2} \frac{1}{pq} = \frac{1}{1.2}.$$

Předpokládáme-li, že pro $k \geqq 2$ je

$$\sum_{(p,q) \in M_k} \frac{1}{pq} = \frac{1}{2},$$

je též

$$\sum_{(p,q) \in M_{k+1}} \frac{1}{pq} = \frac{1}{2}$$

a důkaz je proveden.

Úloha 28. Je dán polynom $f(x)$, jehož koeficienty jsou celá čísla. Označme D největší celé číslo, pro něž $D \mid f(i)$ pro každé celé číslo i. Dokažte, že D je rovno největšímu společnému děliteli čísel $f(c), f(c + 1), \ldots, f(c + n)$, kde c je libovolné celé číslo a n je stupeň polynomu $f(x)$. (Symbolem $a \mid b$ označujeme, že číslo b je dělitelno číslem a.)

Řešení. Nejprve dokážeme dvě pomocné věty:

1. Je dán polynom $f(x)$, jehož koeficienty jsou celá čísla, má stupeň n a u x^n má koeficient a_0. Buď c celé číslo a d buď společný dělitel čísel $f(c), f(c + 1), \ldots, f(c + n)$. Potom $d \mid n!\, a_0$.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle stupně n polynomu f.

Buď $f(x) = a_0x + a_1$ polynom 1. stupně a c celé číslo. Nechť $d \mid f(c) = d \mid (a_0c + a_1)$ a $d \mid f(c + 1) = d \mid (a_0c + a_1 + a_0)$. Pak též $d \mid (f(c + 1) - f(c)) = a_0 = 1!\, a_0$. Pro polynomy 1. stupně tedy 1. pomocná věta platí.

Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že pro polynomy k-tého stupně věta platí. Uvažujme polynom $f(x)$

stupně $k + 1$, který má celé koeficienty a koeficient u x^{k+1} označme a_0. Buď c celé číslo a pro číslo d nechť platí $d \mid f(i)$ pro $i = c, c + 1, \ldots, c + k + 1$. Polynom $g(x) = f(x + 1) - f(x)$ má zřejmě (binomická věta) stupeň k, u x^k má koeficient $b_0 = (k + 1) a_0$ a všechny jeho koeficienty jsou čísla celá. Pro $i = c, c + 1, \ldots, c + k$ je $d \mid g(i)$ a proto podle indukčního předpokladu

$$d \mid k!b_0 = k! (k + 1) a_0 = (k + 1)! a_0 ,$$

což jsme potřebovali dokázat.

2. Je dán polynom $f(x)$, jehož koeficienty jsou celá čísla a má stupeň n. Buď c celé číslo a d buď společný dělitel čísel $f(c), f(c + 1), \ldots, f(c + n)$. Potom $d \mid f(i)$ pro každé celé číslo i.

Důkaz. Opět použijeme metodu matematické indukce podle stupně n polynomu f.

Buď $f(x) = a_0x + a_1$ polynom 1. stupně. Jestliže $d \mid f(c) = d \mid (a_0c + a_1)$ a $d \mid f(c + 1) = d \mid (a_0c + a_1 + a_0$, pak zřejmě $d \mid a_0$ a $d \mid a_1$ a tedy $d \mid a_0i + a_1$ pro každé celé číslo i. Pro polynomy 1. stupně tedy 2. pomocná věta platí.

Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že věta platí pro všechny polynomy stupně nejvýše k. Uvažujme polynom $f(x)$ stupně $k + 1$ s celými koeficienty, jenž má u x^{k+1} koeficient a_0. Buď c celé číslo a nechť $d \mid f(i)$ pro $i = c, c + 1, \ldots, c + k + 1$. Polynom

$$g(x) = f(x) - a_0(x - c)(x - c - 1) \ldots (x - c - k)$$

je nejvýše k-tého stupně, má celé koeficienty a zřejmě $d \mid g(i)$ pro $i = c, c + 1, \ldots, c + k$. Podle indukčního předpokladu $d \mid g(i)$ pro všechna celá čísla i. Aplikujeme-li na polynom $f(x)$ 1. pomocnou větu, dostáváme

$$d \mid (k + 1)! a_0 .$$

Vzhledem k tomu, že číslo

$$\frac{(i-c)(i-c-1)\dots(i-c-k)}{(k+1)!}$$

je pro každé celé číslo i celé*), platí též

$$d \mid (k+1)!\, a_0 \frac{(i-c)\dots(i-c-k)}{(k+1)!} =$$
$$= d \mid a_0 (i-c)\dots(i-c-k)$$

pro každé celé číslo i. Je tedy $d \mid f(i)$ pro všechna celá čísla i a 2. pomocná věta je dokázána.

Teď už snadno vyřešíme naši úlohu. Buď tedy $f(x)$ polynom n-tého stupně s celými koeficienty a D největší celé číslo takové, že $D \mid f(i)$ pro všechna celá čísla i. Dále buď c celé číslo a d největší společný dělitel čísel $f(c), f(c+1), \dots, f(c+n)$. Protože $D \mid f(c), D \mid f(c+1), \dots, D \mid f(c+n)$, je $D \leqq d$. A protože podle 2. pomocné věty $d \mid f(i)$ pro každé celé číslo i, je $d \leqq D$. Je tedy $d = D$, což jsme měli dokázat.

Úloha 29. Je dána soustava r lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s &= 0, \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rs}x_s &= 0 \end{aligned}$$

o s neznámých $x_1, x_2, \dots, x_s$. Koeficienty $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{rs}$ jsou reálná čísla, z nichž alespoň jedno je různé od

---

*) Pro $i > c + k$ je rovno $\binom{i-c}{k+1}$, pro $i < c$ je rovno $(-1)^{k+1}\binom{c+k-i}{k+1}$ a pro ostatní i je rovno nule.

nuly. Dokažte, že pokud je $r < s$, existují taková reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_s$ vyhovující soustavě, že každé lze vyjádřit pomocí koeficientů $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{rs}$ a operací sčítání, odečítání a násobení a přitom alespoň jedno z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_s$ je různé od nuly.

Řešení. Jsou-li všechny koeficienty v prvním sloupci rovny nule, tj. $a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{r1} = 0$, vyhovují čísla $x_1 = a_{uv}$, kde a_{uv} je některý nenulový koeficient, $x_2 = x_3 = \ldots = x_s = 0$.

Zabývejme se dále případem, kdy alespoň jeden koeficient v prvním sloupci je nenulový. Vzhledem k tomu, že na pořadí rovnic jejich řešení nezávisí, můžeme předpokládat $a_{11} \neq 0$, aniž bychom ztratili na obecnosti. Budeme postupovat indukcí podle počtu rovnic r. Pokud $r = 1$, vyhovují čísla $x_1 = a_{12}, x_2 = -a_{11}, x_3 = \ldots = x_s = 0$. Buď nyní $r > 1$ a předpokládejme, že pro $r - 1$ rovnic věta platí. Všechny rovnice až na první vynásobíme číslem a_{11}. Dostaneme tak soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s &= 0,\\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 + \ldots + a_{11}a_{2s}x_s &= 0,\\ \ldots\\ a_{11}a_{r1}x_1 + a_{11}a_{r2}x_2 + \ldots + a_{11}a_{rs}x_s &= 0. \end{aligned}$$

Odečteme-li od j-té rovnice a_{j1}-násobek první rovnice (pro všechna $j = 2, 3, \ldots, r$), dospějeme k soustavě

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s &= 0,\\ b_{22}x_2 + \ldots + b_{2s}x_s &= 0,\\ \ldots\\ b_{r2}x_2 + \ldots + b_{rs}x_s &= 0, \end{aligned}$$

kde $b_{jk} = a_{11}a_{jk} - a_{j1}a_{1k}$ pro všechna $2 \leqq j \leqq r$, $2 \leqq k \leqq s$. Snadno nahlédneme, že vynásobením některé z rovnic nenulovým číslem či přičtením některé rovnice k jiné rovnici dostaneme ekvivalentní soustavu. Poslední soustava je tedy ekvivalentní soustavě, od níž jsme vyšli. Je-li alespoň jeden z koeficientů b_{ik} nenulový, vyhovují soustavě

$$\begin{aligned} b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \dots + b_{2s}y_s &= 0, \\ b_{32}y_2 + b_{33}y_3 + \dots + b_{3s}y_s &= 0, \\ \dots \\ b_{r2}y_2 + b_{r3}y_3 + \dots + b_{rs}y_s &= 0 \end{aligned}$$

podle indukčního předpokladu čísla $y_2, y_3, \dots, y_s$ taková, že nejsou vesměs rovna nule a každé z nich lze vyjádřit pomocí sčítání, odčítání, násobení a čísel $b_{22}, b_{23}, \dots, b_{rs}$ (a tedy též čísel $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{rs}$). To platí i v případě, kdy všechny koeficienty b_{ik} jsou nuly, pak vyhovují čísla $y_2 = y_3 = \dots = y_s = a_{uv}$ (nenulový koeficient). Třetí soustavě — a tedy i soustavě původní — vyhovují čísla

$$x_1 = a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + \dots + a_{1s}y_s,$$
$$x_2 = -a_{11}y_2, \dots, x_s = -a_{11}y_s.$$

Tím je důkaz proveden.

Úloha 30. Reálná funkce $f(x)$ je v intervalu $\langle a, b\rangle$ kladná a omezená. Dokažte, že existují čísla $x_1 \in \langle a, b\rangle$, $x_2 \in \langle a, b\rangle$ taková, že

$$\frac{(x_2 - x_1)\, f^2(x_1)}{f(x_2)} > \frac{1}{4}(b - a)\, f(a).$$

(Symbolem $f^2(x)$ značíme $(f(x))^2$).

Řešení. Předpokládejme, že tomu tak není, tj. že pro každou dvojici čísel $x_1 \in \langle a, b\rangle$, $x_2 \in \langle a, b\rangle$ je

$$\frac{(x_2 - x_1)\, f^2(x_1)}{f(x_2)} \leqq \frac{1}{4}(b - a)\, f(a)$$

neboli

$$f(x_2) \geqq \frac{4(x_2 - x_1)\, f^2(x_1)}{(b - a)\, f(a)},$$

a odvodíme spor.

Definujme posloupnost $\{c_n\}$ takto:

$$c_1 = \frac{a + b}{2}, \quad c_n = c_{n-1} + \frac{b - a}{2^n} \text{ pro } n > 1 .$$

pro $n > 1$ je zřejmě

$$\frac{a + b}{2} \leqq c_n = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2^2} + \frac{b - a}{2^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{b - a}{2^n} \leqq \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} = b$$

(součet geometrické řady). Pro každé přirozené n je tedy $c_n \in \langle a, b \rangle$.

Dokážeme indukcí, že pro každé přirozené n je

$$f(c_n) \geqq 2^n f(a) .$$

Podaří-li se nám to, dospějeme ke sporu s omezeností funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$.

Pro $x_1 = a$, $x_2 = c_1$ podle předpokladu platí

$$f(c_1) \geqq \frac{4(c_1 - a)\, f^2(a)}{(b - a)\, f(a)} = 2f(a) .$$

Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že

$$f(c_k) \geqq 2^k f(a) .$$

Potom je (položíme-li $x_1 = c_k$, $x_2 = c_{k+1}$)

$$f(c_{k+1}) \geqq \frac{4(c_{k+1} - c_k)\, f^2(c_k)}{(b - a)\, f(a)} = \frac{(b - a)\, 2^{1-k} f^2(c_k)}{(b - a)\, f(a)} \geqq$$

$$\geqq \frac{(b-a)\, 2^{1-k} 2^{2k} f^2(a)}{(b-a)\, f(a)} = 2^{k+1} f(a)\,.$$

Tím jsme s důkazem hotovi.

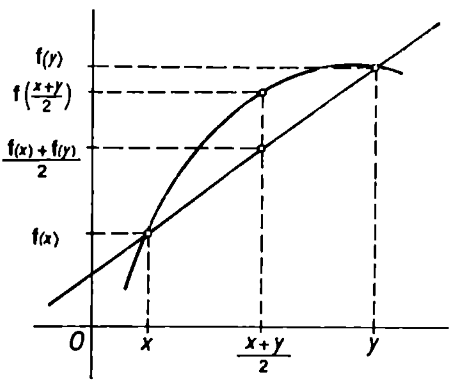
Úloha 31. Funkce f jedné reálné proměnné je definována v nějakém intervalu a pro každá dvě čísla x, y z jejího definičního oboru platí

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Dokažte, že pro libovolných n čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z jejího definičního oboru platí

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \leqq f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right).$$

(Jde o tzv. *Jensenovu nerovnost*. Funkce f, které splňují uvedenou podmínku, se nazývají *konkávní funkce*. Podmínka se názorně projevuje na jejich grafu (viz obrázek).



Pokud funkce f není příliš „divoká“ (např. pokud je na nějakém intervalu ležícím v definičním oboru shora nebo zdola omezená), dá se ukázat, že pro každá dvě čísla x, y z definičního oboru dokonce platí, že všechny body o souřadnicích $[t, f(t)]$, kde $x \leqq t \leqq y$, leží „nad“ úsečkou o krajních bodech $[x, f(x)]$ a $[y, f(y)]$ nebo na ní.)

Řešení. Pro $n = 1$ je platnost nerovnosti triviální a pro $n = 2$ splývá s předpokladem.

Nejprve dokážeme pomocnou větu (1): Pokud nerovnost platí pro $n = k$, pak platí též pro $n = 2k$ (k je libovolné přirozené číslo).

Postupně dostáváme

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2k}}{2k}\right) =$$

$$= f\left(\frac{\dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k} + \dfrac{x_{k+1} + \ldots + x_{2k}}{k}}{2}\right) \geqq$$

$$\geqq \frac{f\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right) + f\left(\dfrac{x_{k+1} + \ldots + x_{2k}}{k}\right)}{2} \geqq$$

$$\geqq \frac{\dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_k)}{k} + \dfrac{f(x_{k+1}) + \ldots + f(x_{2k})}{k}}{2} =$$

$$= \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{2k})}{2k}.$$

Dále dokážeme pomocnou větu (2): Pokud nerovnost platí pro $n = k + 1$, potom platí též pro $n = k$.

Nejprve dostaneme

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right) =$$

$$= f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k + \dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k}}{k+1}\right) \geqq$$

$$\geqq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_k) + f\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right)}{k+1}$$

a odtud odečtením $\dfrac{1}{k+1} f\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right)$ od obou stran

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_k)}{k+1} \leqq \frac{k}{k+1} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right)$$

čili

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_k)}{k} \leqq f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right).$$

Z pomocné věty (1) vyplývá podle principu matematické indukce, že věta platí pro všechna přirozená čísla n, která jsou mocninou (s přirozeným exponentem) čísla 2. Z pomocné věty (2) plyne podle principu matematické indukce (viz cvič. 1.22), že pokud věta platí pro $n = p$, pak platí pro všechna $1 \leqq n \leqq p$. Odtud je zřejmé, že věta platí pro každé přirozené číslo n. Stačí totiž vzít nějakou mocninu čísla 2 větší než n (například 2^n). Pro ni věta platí a pro všechna menší přirozená čísla (tedy i pro n) také.

(Myšlence, na níž byl založen tento důkaz, se říkává *obrácená* nebo také *zpětná indukce*. Pomocná věta (2) (přechod od $k + 1$ ke k) je totiž jakýmsi obrácením obvyklého indukčního kroku (přechodu od k ke $k + 1$).)

Jiné řešení. Pro $n = 1$ a $n = 2$ věta platí. Buď $k > 1$, předpokládejme, že pro $n = k$ věta platí a dokážeme ji pro $n = k + 1$. Postupně dostáváme

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right) =$$

$$= f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{2k} + \frac{x_{k+1}}{k} + \right.$$

$$\left. + \frac{(k-1)(x_1 + \ldots + x_{k+1})}{2k(k+1)}\right) \geqq \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{2k}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} f\left(\frac{x_{k+1}}{k} + \frac{(k-1)(x_1 + \ldots x_{k+1})}{k(k+1)}\right) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2} \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_k)}{k} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{f(x_{k+1}) + (k-1) f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right)}{k} =$$

$$= \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{k+1})}{2k} + \frac{k-1}{2k} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right).$$

Odtud ihned plyne

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{k+1})}{k+1} \leqq f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right).$$

Úloha 32. Pokud pro každé i ($1 \leqq i \leqq n$) je $0 \leqq \alpha_i \leqq \leqq \pi$, potom

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{n} \leqq$$

$$\leqq \sin \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} \right).$$

Dokažte.

Řešení. Pro $n = 1$ je věta triviální. Pro $n = 2$ je

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{2} = \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \leqq$$

$$\leqq \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

a nerovnost platí. Z toho vidíme, že funkce $\sin x$ je na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ konkávní. Věta platí v důsledku Jensenovy nerovnosti (viz úloha 31).

Úloha 33. Dokažte, že pro každé přirozené $n > 1$ platí: Jestliže $0 < x_i < \pi$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, potom

$$|\sin (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)| < \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n.$$

Řešení. Pro $n = 2$ je

$$|\sin (x_1 + x_2)| = |\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2| \leqq$$

$$\leqq |\sin x_1| \, |\cos x_2| + |\cos x_1| \, |\sin x_2| < |\sin x_1| + |\sin x_2| =$$

$$= \sin x_1 + \sin x_2 .$$

Buď $k > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro

$n = k$ věta platí. Dokážeme ji pro $n = k + 1$. Postupně dostáváme

$$|\sin (x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1})| \leqq$$
$$\leqq |\sin (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)| \, |\cos x_{k+1}| +$$
$$+ |\cos (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)| \, |\sin x_{k+1}| <$$
$$< |\sin (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)| + |\sin x_{k+1}| <$$
$$< \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_{k+1} \, .$$

Úloha 34. Dokažte, že pro nezáporná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \, .$$

Řešení. Pro $n = 1$ se nerovnost redukuje na $a_1 \leqq a_1$, což je pravda.

Buď k přirozené číslo, předpokládejme, že pro $n = k$ věta platí a dokažme ji pro $n = k + 1$. Podle indukčního předpokladu je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1} \geqq k \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} + a_{k+1} \, .$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$k \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} + a_{k+1} \geqq (k + 1) \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}} \, .$$

Je-li $a_{k+1} = 0$, tato nerovnost zřejmě platí. V případě $a_{k+1} > 0$ je ekvivalentní nerovnosti

$$k \sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{a_{k+1}^{k+1}}} + 1 \geqq (k + 1) \sqrt[k+1]{\frac{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{a_{k+1}^{k+1}}} \, .$$

Označíme-li

$$x = \sqrt[k(k+1)]{\frac{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{a_{k+1}^{k+1}}},$$

nabude poslední nerovnost tvaru

$$kx^{k+1} + 1 \geqq (k+1)\,x^k,$$

což je ekvivalentní s

$$(k+1)\,x^k(x-1) \geqq x^{k+1} - 1\,.$$

Ukážeme, že tato nerovnost platí pro každé reálné $x \geqq 0$. Pro $x = 1$ je její platnost zřejmá (nastává rovnost). Pro $x > 1$ dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$(k+1)\,x^k \geqq \frac{x^{k+1} - 1}{x-1} = x^k + x^{k-1} + \ldots + x + 1\,.$$

Poněvadž v tomto případě je

$$x^k > x^{k-1} > \ldots > x > 1\,,$$

nerovnost platí. Zbývá vyšetřit případ $x < 1$. Zde dostaneme

$$(k+1)\,x^k \leqq x^k + x^{k-1} + \ldots + x + 1$$

a poněvadž

$$x^k < x^{k-1} < \ldots < x < 1\,,$$

nerovnost také platí. Tím je důkaz proveden.

2. řešení. Pro $n = 1$ je platnost nerovnosti zřejmá. Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = k$ nerovnost platí. Dokážeme ji pro $n = k + 1$.

Označme

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}}{k+1}\,.$$

Aniž bychom ztratili na obecnosti, můžeme předpokládat, že čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ jsou vzestupně uspořádána, takže

$$a_1 - A \leqq 0, \quad a_{k+1} - A \geqq 0.$$

Je tedy

$$a_1 a_{k+1} = (a_1 - A)(a_{k+1} - A) + \\ + A(a_1 + a_{k+1} - A) \leqq A(a_1 + a_{k+1} - A).$$

Podle indukčního předpokladu platí

$$\sqrt[k]{(a_1 + a_{k+1} - A) a_2 \ldots a_k} \leqq \\ \leqq \frac{(a_1 + a_{k+1} - A) + a_2 + \ldots + a_k}{k} = A$$

a tedy

$$(a_1 + a_{k+1} - A) a_2 \ldots a_k \leqq A^k.$$

Odtud již plyne, použijeme-li předtím odvozenou nerovnost pro $a_1 a_{k+1}$, že

$$a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} \leqq A^{k+1},$$

neboli

$$\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}}{k+1},$$

což jsme měli dokázat.

3. řešení je podobné předešlému, jen se pracuje s druhou stranou nerovnosti.

Pro $n = 1$ nerovnost platí. Předpokládejme, že platí pro $n = k$ a dokažme ji pro $n = k + 1$. Můžeme se omezit na případ

$$0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_k \leqq a_{k+1},$$

takže

$$a_1 - G \leqq 0, \quad a_{k+1} - G \geqq 0\,,$$

kde $G = \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}$.

Je tedy

$$a_1 a_{k+1} = (a_1 - G)\,(a_{k+1} - G) +$$
$$+ G\,(a_1 + a_{k+1} - G) \leqq G\,(a_1 + a_{k+1} - G).$$

Podle indukčního předpokladu

$$G = \sqrt[k]{a_2 a_3 \ldots a_k \frac{a_1 a_{k+1}}{G}} \leqq$$

$$\leqq \frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \dfrac{a_1 a_{k+1}}{G}}{k}$$

a tedy

$$G \leqq a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \frac{a_1 a_{k+1}}{G}.$$

Přihlédneme-li k nerovnosti pro $a_1 a_{k+1}$, kterou jsme předtím odvodili, dostaneme dokazovanou nerovnost.

4. řešení. Pro $n = 1$ věta platí. Buď k přirozené číslo, předpokládejme, že pro $n = k$ věta platí a dokažme ji pro $n = k + 1$.

Nejprve provedeme pomocné úvahy. Jsou-li p, q nezáporná reálná čísla, platí

$$(p^k - q^k)\,(p - q) \geqq 0$$

a tedy

$$p^{k+1} + q^{k+1} \geqq pq^k + p^k q\,.$$

Z této nerovnosti plyne pro nezáporná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$

$$k(x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + \ldots + x_{k+1}^{k+1}) = (x_1^{k+1} + x_2^{k+1}) +$$
$$+ (x_1^{k+1} + x_3^{k+1}) + \ldots + (x_1^{k+1} + x_{k+1}^{k+1}) +$$
$$+ (x_2^{k+1} + x_3^{k+1}) + \ldots + (x_2^{k+1} + x_{k+1}^{k+1}) + \ldots +$$
$$+ (x_k^{k+1} + x_{k+1}^{k+1}) \geqq (x_1x_2^k + x_1^kx_2) + (x_1x_3^k + x_1^kx_3) +$$
$$+ \ldots + (x_1x_{k+1}^k + x_1^kx_{k+1}) + (x_2x_3^k + x_2^kx_3) + \ldots$$
$$\ldots + (x_2x_{k+1}^k + x_2^kx_{k+1}) + \ldots + (x_kx_{k+1}^k + x_k^kx_{k+1}) =$$
$$= x_1(x_2^k + x_3^k + \ldots + x_{k+1}^k) +$$
$$+ x_2(x_1^k + x_3^k + \ldots + x_{k+1}^k) + \ldots$$
$$\ldots + x_{k+1}(x_1^k + x_2^k + \ldots + x_k^k) \cdot$$

Buďte nyní dána nezáporná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Položíme-li v nerovnosti, kterou jsme právě odvodili,

$$x_1 = \sqrt[k+1]{a_1}, \quad x_2 = \sqrt[k+1]{a_2}, \ldots, x_{k+1} = \sqrt[k+1]{a_{k+1}}$$

a pak užijeme indukčního předpokladu, vyjde

$$k(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}) \geqq$$
$$\geqq a_1^{\frac{1}{k+1}}\left(a_2^{\frac{k}{k+1}} + a_3^{\frac{k}{k+1}} + \ldots + a_{k+1}^{\frac{k}{k+1}}\right) +$$
$$+ a_2^{\frac{1}{k+1}}\left(a_1^{\frac{k}{k+1}} + a_3^{\frac{k}{k+1}} + \ldots + a_{k+1}^{\frac{k}{k+1}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + a_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}\left(a_1^{\frac{k}{k+1}} + a_2^{\frac{k}{k+1}} + \ldots + a_k^{\frac{k}{k+1}}\right) \geqq$$

$$\geqq k(k+1)\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}\,,$$

což dává dokazovanou nerovnost.

5. řešení. Pro $n = 1$ věta platí. Buď k přirozené číslo, předpokládejme, že věta platí pro $n = k$ a dokažme ji pro $n = k + 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že a_{k+1} je největší z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Označíme-li

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}\,,$$

$$A_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}}{k+1}$$

a položíme-li

$$b = a_{k+1} - A_k\,,$$

bude $b \geqq 0$ a

$$A_{k+1} = \frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1} = \frac{kA_k + A_k + b}{k+1} =$$

$$= A_k + \frac{b}{k+1}\,.$$

Podle binomické věty je

$$A_{k+1}^{k+1} = \left(A_k + \frac{b}{k+1}\right)^{k+1} =$$

$$= A_k^{k+1} + (k+1)\,A_k^k \frac{b}{k+1} + \ldots \geqq$$

$$\geqq A_k^{k+1} + A_k^k b = A_k^k\,(A_k + b) = A_k^k a_{k+1} \geqq$$

$$\geqq a_1 a_2 \ldots a_{k+1}$$

(poslední nerovnost je důsledkem indukčního předpokladu).

6. řešení. Je-li některé z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rovno nule, je platnost dokazované nerovnosti zřejmá. Jsou-li všechna různá od nuly, položme pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} .$$

Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kladná a platí pro ně $x_1 x_2 \ldots \ldots x_n = 1$. Podle věty, kterou jsme dokázali v úloze 4, je pak

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n ,$$

což okamžitě dává nerovnost, kterou dokazujeme.

7. řešení. Pro $n = 1$ věta platí. Pro $n = 2$ nabývá nerovnost tvaru

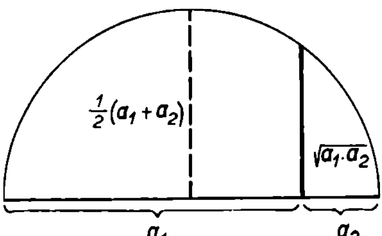
$$\sqrt{a_1 a_2} \leqq \frac{a_1 + a_2}{2} ,$$

a je ekvivalentní s nerovností

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqq 0 ,$$

jejíž platnost je zřejmá.*)

*) Uvědomte si, že pro $n = 2$ plyne nerovnost také z Eukliddovy věty o výšce (viz obrázek).



Funkce $\log x$ (na základu nezáleží, je-li větší než 1) je definována pro všechna $x > 0$ a je v tomto intervalu rostoucí, tj. pokud $0 < x \leqq y$, je $\log x \leqq \log y$. Protože pro $x > 0$, $y > 0$ je

$$\sqrt{xy} \leqq \frac{x + y}{2},$$

platí

$$\frac{\log x + \log y}{2} = \log \sqrt{xy} \leqq \log \frac{x + y}{2}$$

a funkce $\log x$ je tedy konkávní. Podle Jensenovy nerovnosti (úloha 31) je pro kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\log \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n}{n} \leqq$$

$$\leqq \log \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

a tedy též

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Ještě jinak je tato důležitá nerovnost mezi tzv. *aritmetickým* (vpravo) a *geometrickým průměrem* (vlevo) odvozena např. v 39. svazku této edice, v brožuře A. Kufnera *Nerovnosti a odhady* z r. 1975.

Úloha 35. Abeceda se skládá z n druhů písmen. Určete maximální délku slova, které z ní jde sestavit tak, aby byly současně splněny podmínky:

(A) písmena téhož druhu nejsou vedle sebe,

(B) vynecháním písmen nelze dospět ke slovu $p_1 p_2 p_1 p_2$, kde p_1, p_2 jsou písmena různého druhu.

Řešení. Slovům, která vyhovují oběma podmínkám, budeme říkat přípustná slova. Je zřejmé, že ze slova splňujícího podmínku (B), dostaneme vynecháním písmen slovo, které opět splňuje podmínku (B). Dále si uvědomme, že každé přípustné slovo obsahuje takové písmeno (označme je p), že v něm už další písmena toho druhu nejsou. Kdyby totiž každý druh vyskytující se ve slově, byl zastoupen alespoň dvěma písmeny, vezměme dvě písmena stejného druhu, která jsou sobě nejblíže (označme je r). Ta nemohou být vedle sebe, to by odporovalo podmínce (A). Vezměme nějaké písmeno, které je mezi nimi (označme je s). Další exempláře písmene s už nemohou být mezi nimi, neboť by si pak obě písmena s byla blíže než uvažovaná písmena r. Vynecháním všech ostatních písmen bychom došli tedy ke slovu $r\ s\ r\ s$ nebo $s\ r\ s\ r$, což odporuje podmínce (B).

Slovo $p_1p_2 \ldots p_{n-1}p_np_{n-1} \ldots p_2p_1$ je zřejmé přípustné a má délku $2n - 1$. Dokážeme, že žádné delší přípustné slovo neexistuje. Budeme postupovat indukcí podle počtu druhů písmen n. Je-li $n = 1$, je p_1 jediné přípustné slovo. Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že nejdelší přípustné slovo obsahující k druhů písmen má délku $2k - 1$. Buď nyní dáno nějaké přípustné slovo složené z $k + 1$ druhů písmen, které má délku alespoň 3. Označme p písmeno, které se v něm vyskytuje jen jednou. Rozeznávejme tři případy:

1. Je-li p na kraji slova, pak jeho vynecháním dostaneme přípustné slovo.
2. Není-li p na kraji slova a sousední písmena jsou různého druhu, pak jeho vynecháním dostaneme přípustné slovo.
3. Není-li p na kraji slova a sousední písmena jsou stejného druhu, pak vynecháním písmene p a jednoho sousedního písmene dostaneme přípustné slovo.

Tím jsou všechny možnosti vyčerpány. V každém případě vznikne popsaným vynecháním slovo složené z k druhů písmen, a to má podle indukčního předpokladu délku nejvýše $2k — 1$. Slovo, od kterého jsme vyšli, nebylo tedy delší než $2k + 1$. Tím je důkaz proveden.

Úloha 36. Každý ze svatebních hostů se zná alespoň s polovinou ostatních hostů. Dokažte, že se hosté mohou posadit kolem kulatého stolu tak, aby se každí dva sousedé znali.

Řešení. Počet hostů označme n. Každý host se tedy zná alespoň s $n/2$ ostatními hosty (pokud je n liché míníme tím, že se zná alespoň s $(n + 1)/2$ hosty). Nejprve dokážeme pomocnou větu:

Lze-li r osob posadit na přímou lavici tak, aby se každí dva sousedé znali a aby každý krajník se znal alespoň s $r/2$ ostatními osobami, potom je lze posadit kolem kulatého stolu tak, aby se každí dva sousedé znali.

Důkaz. Očíslujme osoby tak, jak sedí na lavici zleva doprava $L_1, L_2, \ldots, L_r$. Pokud se krajníci L_1 a L_r znají, můžeme osoby rozesadit kolem stolu v tom pořadí, jak sedí na lavici. Nechť se L_1 a L_r neznají. Označme M množinu všech známých krajníka L_r sedících na lavici a N množinu všech, kdo zprava sousedí s nějakým známým krajníka L_1. Množina M má podle předpokladu alespoň $r/2$ prvků. Množina N má také alespoň $r/2$ prvků, neboť na lavici sedí alespoň $r/2$ známých krajníka L_1 a množina N se skládá z jejich sousedů zleva. Množina $M \cup N$ má nejvýše $r — 1$ prvků, neboť $L_r \notin M$, $L_r \notin N$.

Množiny M, N mají tedy neprázdný průnik; nechť $L_j \in M \cap N$. Posadíme-li osoby kolem stolu v pořadí

$$L_1, L_2, \ldots, L_{j-1}, L_j, L_r, L_{r-1}, \ldots, L_{j+1},$$

každí dva sousedé se znají. Pomocná věta je dokázána.

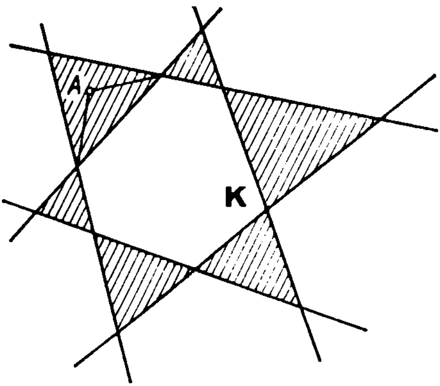
Nyní stačí dokázat, že n hostů lze posadit na lavici tak, aby se každí dva sousedé znali. Budeme postupovat indukcí. Vyberme libovolně jednoho hosta a vedle něho posaďme některého z jeho známých. Buď $2 \leqq r < n$ a předpokládejme, že na lavici již sedí r hostů tak, že každí dva sousedé se znají. Ukážeme, jak k nim posadit $(r + 1)$-tého hosta tak, aby se každí dva sousedé znali. Pokud se některý z dosud neusazených hostů zná s některým z hostů, kteří sedí na kraji, posadíme ho na kraj vedle něho. Dejme tomu, že tomu tak není. Pak jsou všichni známí každého z krajníků již na lavici a tedy $r > n/2$. Hosté na lavici dále splňují předpoklady pomocné věty a proto je lze posadit popsaným způsobem za kulatý stůl; nechť tam sedí v pořadí $H_1, H_2, \ldots, H_r$. Vezměme libovolného hosta H z dosud neusazených hostů. Těch je $n - r < n/2$, a proto se H zná alespoň s jedním hostem za stolem, např. s H_j (je $1 < j < r$). Posadíme-li hosty $H_1, H_2, \ldots, H_r, H$ na lavici v pořadí

$$H, H_j, H_{j+1}, \ldots, H_r, H_1, H_2, \ldots, H_{j-1},$$

budou se každí dva sousedé znát. Tím je důkaz proveden.

Úloha 37. Je dáno $n \geqq 4$ bodů v rovině takových, že každé čtyři z nich jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka. Dokažte, že jsou to vrcholy konvexního n-úhelníka.

Řešení. Pro $n = 4$ věta zřejmě platí. Buď $k \geqq 4$ přirozené číslo. Předpokládejme, že pro $n = k$ věta platí a dokažme ji pro $n = k + 1$. Zvolme libovolný bod z $k + 1$ daných bodů a označme ho A. Ostatních k bodů jsou podle indukčního předpokladu vrcholy konvexního k-úhelníka. Označme ho **K** a prodlužme jeho strany (sledujte obrázek). Bod A leží uvnitř některého



z vyšrafovaných trojúhelníků. (Jinak by totiž existovaly tři vrcholy k-úhelníka **K**, které by nebyly spolu s bodem A vrcholy konvexního čtyřúhelníka.) Odtud je zřejmé, že uvažovaných $k + 1$ bodů jsou vrcholy konvexního $(k + 1)$-úhelníka.

Úloha 38. V rovině je dán konečný počet přímek. Označme a počet průsečíků těchto přímek, b počet částí, na něž jsou přímky průsečíky rozděleny, a c počet částí, na něž přímky rozdělují rovinu. Dokažte, že $a - b + c = 1$.

Řešení. Je-li přímka pouze jedna, je $a = 0$, $b = 1$ a $c = 2$, takže věta platí. Buď p přirozené číslo a v rovině buď dáno p přímek. Předpokládejme, že pro ně věta platí. Sestrojme $(p + 1)$-tou přímku (nakreslete si obrázek). Počet jejích průsečíků s původními p přímkami označme k. Pro každý z nich označme r_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ počet původních p přímek, které jím procházejí. (Je-li q z původních p přímek rovnoběžných s $(p + 1)$-tou přímkou, bude

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k + q = p,$$

ale to nebudeme potřebovat.) Označme ještě j počet těch r_i, která jsou rovna 1 (jinými slovy počet těch původních p přímek, které se s $(p + 1)$-tou přímkou protínají v bodě, jímž už žádná jiná přímka neprochází). Je zřejmé, že po sestrojení $(p + 1)$-té přímky se počet průsečíků zvětšil o j a počet částí roviny o $k + 1$. Počet částí přímek se zvětšil o $k + 1$ (části $(p + 1)$-té přímky) a ještě o j (původních p přímek), celkem o $k + j + 1$. Vidíme, že číslo $a - b + c$ se nezměnilo a věta platí i pro $p + 1$ přímek.

Úloha 39. V prostoru je dáno $n \geqq 3$ bodů, pro něž platí, že každé tři z nich určují trojúhelník, v němž je jeden úhel větší než 120°. Dokažte, že tyto body lze označit písmeny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tak, aby pro každé $1 \leqq i < j < k \leqq n$ byl úhel $A_iA_jA_k$ větší než 120°.

Řešení. Pokud budeme mluvit o bodech, budeme mínit body zadané v textu úlohy, pokud budeme mluvit o trojúhelnících, budou to trojúhelníky, jejichž všechny vrcholy jsou tyto body, a pokud budeme mluvit o úhlech, půjde o vnitřní úhly těchto trojúhelníků. Je zřejmé, že každý úhel je buď menší než 60° nebo větší než 120°.

Jestliže všechny úhly s vrcholem A jsou menší než 60°, řekneme, že bod A je ostrý. Zřejmě existují nejvýše dva ostré body; kdyby existovaly tři, pak by určovaly trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly by byly menší než 60°. Vezměme nějaké dva body (označme je B, C), které mají maximální vzájemnou vzdálenost ze všech dvojic bodů. Buďte D, E dva body různé od bodu B. Zřejmě je $\sphericalangle BDC > 120°$ a tedy $\sphericalangle DBC < 60°$. Podobně $\sphericalangle BEC > 120°$ a tedy $\sphericalangle CBE < 60°$. Je tedy

$$\sphericalangle DBE \leqq \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBE < 60° + 60° = 120°,$$

čili dokonce $\sphericalangle DBE < 60°$. Analogicky dokážeme, že pro každé dva body F, G různé od bodu C platí $\sphericalangle FCG < 60°$. Došli jsme k tomuto závěru: Existují právě dva ostré body. Jsou to body, které mají největší vzájemnou vzdálenost.

Po předběžných úvahách přikročíme k řešení úlohy. Dokážeme o něco více: body lze označit tak, jak je uvedeno v textu úlohy a přitom ještě A_1, A_n budou ostré body. Budeme postupovat indukcí podle počtu bodů. Pro $n = 3$ dokazovaná věta zřejmě platí.

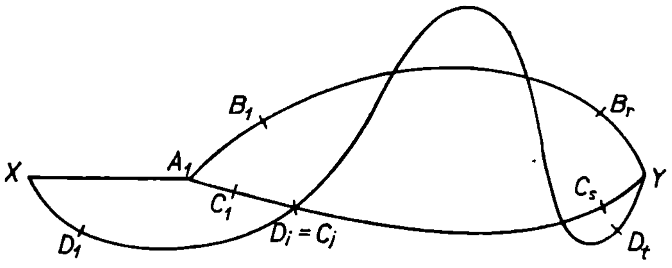
Buď t přirozené číslo a předpokládejme, že věta pro ně platí. Mějme nyní $t + 1$ bodů. Mezi nimi jsou dva ostré, označme je A_1 a A_{t+1}. Podle indukčního předpokladu lze ostatní body označit písmeny $A_2, \ldots, A_t$ tak, aby pro $1 \leqq i < j < k \leqq t$ bylo $\sphericalangle A_iA_jA_k > 120°$. Zbývá dokázat, že pro $1 \leqq i < j \leqq t$ je $\sphericalangle A_iA_jA_{t+1} > > 120°$. Protože body A_1, A_{t+1} jsou ostré, je $\sphericalangle A_1A_jA_{t+1} > 120°$ pro každé $1 < j \leqq t$. Buď nyní $1 < i < j \leqq t$ a uvažujme trojúhelník $A_iA_jA_{t+1}$. Ten má při vrcholu A_{t+1} úhel menší než 60° (neboť A_{t+1} je ostrý bod). Kdyby byl úhel při vrcholu A_i větší než 120°, pak by v čtyřstěnu (případně degenerovaném) $A_1A_iA_jA_{l+1}$ byly všechny tři úhly při vrcholu A_i větší než 120°, což není možné. Je tedy $\sphericalangle A_iA_jA_{l+1} > 120°$ a důkaz je proveden.

Úloha 40. Ve městě jsou alespoň tři křižovatky. Pro libovolné tři různé křižovatky A, B, C platí, že z A do B se lze dostat jinudy než přes C. Dokažte, že pro libovolné dvě různé křižovatky X, Y platí, že z X do Y se lze dostat dvěma cestami, které nemají kromě X, Y žádnou společnou křižovatku.

Řešení. Takové cesty, na nichž se některou křižovatkou prochází vícekrát, uvažovat nebudeme. Každá cesta z jedné křižovatky na druhou je charakterizována posloupností všech křižovatek, kterými prochází, a budeme ji tak také zapisovat. Tak např. cestu z R do S přes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ (v tomto pořadí) označíme $(R\, Z_1Z_2\ldots Z_pS)$. Budeme postupovat indukcí podle počtu křižovatek na cestách mezi dvěma křižovatkami.

Nechť X, Y jsou dvě křižovatky takové, že existuje cesta (X, Y), tj. cesta neprocházející žádnou další křižovatkou. Uvažujme ještě třetí křižovatku Z. Podle předpokladu věty existuje cesta $(X \ldots Z)$ neprocházející křižovatkou Y a dále cesta $(Z \ldots Y)$ neprocházející křižovatkou X. Jejich složením dostaneme cestu $(X \ldots Z \ldots Y)$. Pro dvojice bezprostředně spojených křižovatek tedy věta platí.

Buď $k > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že věta platí pro všechny dvojice křižovatek takové, že nějaká cesta mezi nimi obsahuje právě k křižovatek. Dokážeme ji pro dvojice křižovatek takové, že nějaká cesta mezi nimi obsahuje $k + 1$ křižovatek. Uvažujme dvojici X, Y a cestu $(XA_1 \ldots A_{k-1}Y)$. Podle indukčního předpokladu existují cesty $(A_1B_1 \ldots B_rY)$ a $(A_1C_1 \ldots C_sY)$, které nemají žádnou křižovatku společnou.*) Dále podle předpokladu věty existuje cesta $(XD_1 \ldots D_tY)$, která nevede přes křižovatku A_1. Pokud tato cesta nemá žádnou křižovatku společnou s cestou $(A_1B_1 \ldots B_rY)$ nebo s cestou $(A_1C_1 \ldots C_sY)$, pak cesty $(XD_1 \ldots D_tY)$ a $(XA_1B_1 \ldots$ $\ldots B_rY)$ nebo $(XA_1C_1 \ldots C_sY)$ nemají žádnou křižovatku společnou a jsme hotovi. V opačném případě (viz obrázek) uvažujme první společnou křižovatku cesty



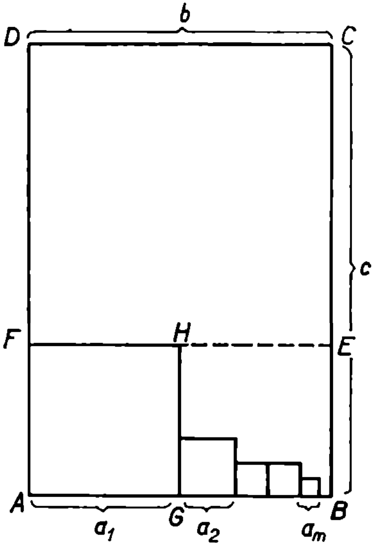
$(XD_1 \ldots D_tY)$ s cestou $(A_1B_1 \ldots B_rY)$ nebo $(A_1C_1 \ldots$ $\ldots C_sY)$, např. $D_i = C_j$. Pak cesty $(XD_1 \ldots D_iC_j \ldots C_sY)$, $(XA_1B_1 \ldots B_rY)$ nemají žádnou křižovatku společnou. Důkaz je proveden. (Tím, že jsme první společnou křižovatku uvažovali na cestě $(A_1C_1 \ldots C_sY)$, jsme neztratili na obecnosti.)

Úloha 41. Je dán konečný počet čtverců, součet jejich obsahů je 1. Dokažte, že se všechny dají umístit do čtverce, jehož obsah je 2, tak, aby se nepřekrývaly.

---

*) Samozřejmě různou od A_1, Y. To nebudeme zdůrazňovat.

Řešení. Dokážeme větu o něco obecnější: Buď n přirozené číslo a $c \geqq b \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n > 0$ reálná čísla taková, že $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leqq \frac{bc}{2}$. Potom lze n čtverců se stranami $a_1, a_2, \ldots, a_n$ umístit do obdélníka o stranách b, c tak, aby se nepřekrývaly.



Budeme postupovat indukcí podle počtu čtverců. Pro $n = 1$ věta zřejmě platí. Buď $k > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro všechna $n < k$ věta platí. Dokážeme, že pak platí i pro $n = k$.

Ukážeme, jak se do obdélníka $ABCD$ o stranách $AB = b$, $BC = c$ vejde k čtverců (sledujte obrázek).

Ke straně AB budeme od vrcholu A postupně umisťovat po řadě těsně vedle sebe podle velikosti uvažované čtverce, dokud to půjde. Počet čtverců, které se podařilo umístit, označme m. Je tedy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m \leqq b$$

a (v případě $m < k$)

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} > b\,.$$

Je-li $m = k$, jsme s důkazem hotovi. Buď tedy nadále $m < k$.

Je-li

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 \geqq \frac{a_1 b}{2}\,,$$

potom

$$a_{m+1}^2 + \ldots + a_k^2 \leqq \frac{b(c - a_1)}{2}$$

a podle indukčního předpokladu lze čtverce o stranách $a_{m+1}, \ldots, a_k$ umístit do obdélníka $FECD$ a jsme hotovi. Soustředíme se tedy na případ

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 < \frac{a_1 b}{2}.$$

Všimněme si, že v tomto případě je $m > 1$: Kdyby totiž bylo $a_1 + a_2 > b$, bylo by $a_1 > \frac{b}{2}$ a tedy $a_1^2 > \frac{a_1 b}{2}$ a to odporuje předpokladu dokazované věty. Dále si všimněme, že $a_m < \frac{a_1}{2}$: Kdyby totiž bylo $a_m \geqq \frac{a_1}{2}$, bylo by

$$a_2^2 + \ldots + a_m^2 \geqq \frac{a_1}{2}(a_2 + \ldots + a_m)$$

a protože

$$a_1^2 \geqq a_1 a_{m+1} > a_1(b - a_1 - a_2 - \ldots - a_m),$$

čili

$$a_1^2 > \frac{a_1}{2}(b - a_2 - \ldots - a_m)\,,$$

platilo by

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 > \frac{a_1 b}{2}$$

a to odporuje předpokladu.

Označme j největší index takový, že

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_j^2 \leqq \frac{a_1(b + a_1)}{2}\,.$$

V našem případě je zřejmě $j \geqq m$. Všimněme si, že

$$a_2^2 + \ldots + a_j^2 \leqq \frac{a_1(b + a_1)}{2} - a_1^2 = \frac{a_1(b - a_1)}{2}$$

a tedy podle indukčního předpokladu se čtverce o stranách $a_2, \ldots, a_j$ vejdou do obdélníka $GBEH$. Pokud je $j = k$, jsme s důkazem hotovi. Zbývá vyřešit případ $j < k$. Poněvadž

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_j^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_j^2 + a_{j+1}^2 - a_{j+1}^2 >$$

$$> \frac{a_1(b + a_1)}{2} - a_{j+1}^2 = \frac{a_1 b}{2} + \frac{a_1^2}{2} - a_{j+1}^2 \geqq$$

$$\geqq \frac{a_1 b}{2} + \frac{a_1^2}{2} - a_m^2 > \frac{a_1 b}{2}$$

(poslední nerovnost je důsledkem nerovnosti $\frac{a_1}{2} \leqq a_m$, kterou jsme odvodili dříve), platí

$$a_{j+1}^2 + \ldots + a_k^2 < \frac{bc}{2} - \frac{a_1 b}{2} = \frac{b(c - a_1)}{2}$$

a podle indukčního předpokladu se čtverce o stranách $a_{j+1}, \ldots, a_k$ vejdou do obdélníka *FECD*. Tím je důkaz proveden.

5. kapitola

NÁVODY KE CVIČENÍM

1.5. Použijte výsledku cvič. 1.4.

1.6. Použijte výsledku cvič. 1.4.

1.7. Použijte výsledku cvič. 1.4 a *Heronova vzorce* pro obsah trojúhelníka: Má-li trojúhelník strany a, b, c, poloviční obvod o a obsah p, je
$p = \sqrt{o(o - a)(o - b)(o - c)}$.

1.8. Aplikujte větu z úlohy 4.

1.12. Použijte vzorce

$$a^{p+2} + \frac{1}{a^{p+2}} =$$

$$= \left(a^{p+1} + \frac{1}{a^{p+1}}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^p + \frac{1}{a^p}\right).$$

1.13. e) Podle vzorce pro tangens součtu úhlů platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} [(k + 1)\alpha - k\alpha] = \frac{\operatorname{tg} (k + 1) \alpha - \operatorname{tg} k\alpha}{1 + \operatorname{tg} (k + 1) \alpha \operatorname{tg} k\alpha}.$$

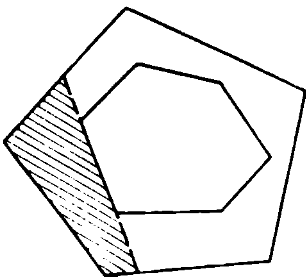
Vyjádřete odtud $\operatorname{tg} k\alpha \operatorname{tg} (k + 1)\alpha$.

1.15. Idea je na obrázku na následující stránce.

2.6. Ukažte, že posloupnost definovaná uvedeným vzorcem vyhovuje rekurentnímu vzorci pro Fibonacciovu posloupnost.

2.8. Odvoďte rekurentní vzorec. Jiné řešení: Určete, kolik existuje vlajek s uvedenou vlastností, které mají právě k červených pruhů. Pak sčítejte přes k.

2.9. Nalezněte souvislost mezi rekurentním vzorcem odvozeným ve cvičení 2.8 a rekurentním vzorcem pro Fibonacciovu posloupnost. Pak užijte druhé řešení cvič. 2.8. Jiné řešení: Ukažte, že posloupnost definovaná uvedeným vzorcem vyhovuje rekurentnímu vzorci pro Fibonacciovu posloupnost.



2.17. Z vyjádření

$$J_{n+1} = J_n\left(1 + \frac{a - J_n^3}{3J_n^3}\right)$$

nejprve odvoďte, že $\{J_{n+1}\}$ je zdola omezená a nerostoucí posloupnost.

2.21. Označme body $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ tak, jak jdou na kružnici za sebou. Nejprve ukažte, že bod A_1 může být spojen pouze s bodem se sudým indexem. Pak vyjádřete, kolika způsoby lze provést spojování tak, aby bod A_1 byl spojen s nějakým pevným bodem. To vede na rekurentní vzorec.

3.1. Stačí dokázat pro konečné podmnožiny.

3.3. Dokazujte nerovnost

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \leqq \frac{1}{4} - \frac{a}{n^2},$$

kde a je vhodná konstanta.

6. kapitola

ŘEŠENÍ CVIČENÍ

1.4. V případě $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ nastává rovnost. V opačném případě zjistíme, projdeme-li důkaz, že platí ostrá nerovnost.

1.5. Označme strany obdélníka a, b, jeho obvod o a obsah p. Podle cvič. 1.4. nastane v nerovnosti

$$\frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{\sqrt{ab}} \geqq 2$$

čili

$$4\sqrt{p} \leqq o$$

rovnost v případě $a = b$, kdy bude $p = \frac{o^2}{16}$, zatímco v případě $a \neq b$ bude $p < \frac{o^2}{16}$. Největší obsah má tedy čtverec. (Místo odvolání na cvič. 1.4. jsme mohli přímo diskutovat nerovnost $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$).

1.6. Označme hrany kvádru a, b, c, jeho objem o a povrch p. Podle cvičení 1.4. nastane v nerovnosti

$$\frac{ab}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} + \frac{ac}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} + \frac{bc}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \geqq 3$$

čili

$$p \geqq 6o^2$$

rovnost v případě $a = b = c$, kdy bude $p = 6o^2$, zatímco jinak bude $p > 6o^2$. Nejmenší povrch má tedy krychle.

1.7. Označme strany trojúhelníka a, b, c, polovinu jeho obvodu o a obsah p. Podle Heronova vzorce je

$$p = \sqrt{o(o-a)(o-b)(o-c)}\,.$$

Podle cvič. 1.4. nastane v nerovnosti

$$\frac{o-a}{\sqrt[3]{(o-a)(o-b)(o-c)}} + \frac{o-b}{\sqrt[3]{(o-a)(o-b)(o-c)}} + \frac{o-c}{\sqrt[3]{(o-a)(o-b)(o-c)}} \geqq 3$$

neboli

$$27p^2 \leqq o^4$$

rovnost právě když $a = b = c$. Největší obsah má tedy rovnostranný trojúhelník.

1.8. Čísla $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{x_n}{x_1}$ jsou kladná a jejich součin je 1. Podle věty z úlohy 4 není jejich součet menší než n.

1.9. Dvěma způsoby: $4 . 2{,}50 + 9 . 0{,}30$ a $1 . 2{,}50 + 34 . 0{,}30$.

1.10. Např. u čtverečků vedle sebe v tomtéž řádku.

1.11. Pro $m = 0$ je $a^m + \frac{1}{a^m} = 2$ a pro $m < 0$ je $a^m + \frac{1}{a^m} =$

$$= a^{-m} + \frac{1}{a^{-m}}\text{, což je celé číslo podle věty z úlohy 7.}$$

1.12. Pro $m = 1$ platí věta. Pro $m = 2$ také, neboť

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2\,.$$

Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $m = p$ i pro $m = p + 1$ věta platí. Pro $m = p + 2$ dostáváme

$$a^{p+2} + \frac{1}{a^{p+2}} = a^{p+2} + \frac{1}{a^{p+2}} + a^p + \frac{1}{a^p} - a^p - \frac{1}{a^p} =$$

$$= \left(a^{p+1} + \frac{1}{a^{p+1}}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^p + \frac{1}{a^p}\right).$$

To je podle indukčního předpokladu celé číslo.

1.13. a) Pro jednu kružnici věta platí. Buď p přirozené číslo a nechť věta platí pro p kružnic. Je-li dáno $p + 1$ kružnic, obarvěme nejprve dvěma barvami části, na něž dělí rovinu některých p z nich. Potom vyměňme barvy uvnitř $(p + 1)$-té kružnice.

b) Pro $n = 1$ věta platí. Buď p přirozené číslo a nechť pro p přímek věta platí. Buď dáno $p + 1$ přímek. Zvolme jednu z nich. Ta protíná ostatních p přímek v p různých bodech a prochází tedy právě $p + 1$ z $\frac{p(p+1)}{2} + 1$ částí, na něž dělí rovinu ostatních p přímek; $p + 1$ přímek tedy dělí rovinu na

$$\frac{p(p+1)}{2} + 1 + p + 1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2} + 1$$

částí.

c) Pro $n = 1$ věta platí. Buď p přirozené číslo a nechť pro $n = p$ věta platí. Pro $n = p + 1$ platí

$$11^{p+2} + 12^{2p+1} = 11 . 11^{p+1} + 144 . 12^{2p-1} =$$
$$= 144 \, (11^{p+1} + 12^{2p-1}) - 133 . 11^{p+1} .$$

Podle indukčního předpokladu je první sčítanec dělitelný číslem 133 a věta tedy platí i pro $n = p + 1$.

d) Pro $r = 1$ věta platí. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $r = p$ věta platí. Pro $r = p + 1$ dostáváme $(x_1 + \ldots + x_{p+1})^2 = (x_1 + \ldots + x_p)^2 + x_{p+1}^2 + 2x_{p+1}(x_1 + \ldots + x_p) \leq p(x_1^2 + \ldots + x_p^2) + x_{p+1}^2 + 2x_{p+1}(x_1 + \ldots + x_p) = (p + 1)(x_1^2 + \ldots + x_{p+1}^2) - x_1^2 - \ldots - x_p^2 - px_{p+1}^2 + 2x_{p+1}(x_1 + \ldots + x_p) = (p + 1)(x_1^2 + \ldots + x_{p+1}^2) - (x_1 - x_{p+1})^2 - \ldots - (x_p - x_{p+1})^2 \leq (p + 1)(x_1^2 + \ldots + x_{p+1}^2)$.

e) Pro $n = 2$ jde o rovnost

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 2 .$$

Dosadíme-li do ní podle vzorce

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} ,$$

zjistíme, že platí. Buď nyní $p > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ věta platí. Podle vzorce pro tangens součtu úhlů platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} [(p + 1)\alpha - p\alpha] = \frac{\operatorname{tg}(p + 1)\alpha - \operatorname{tg} p\alpha}{1 + \operatorname{tg}(p + 1)\alpha \operatorname{tg} p\alpha}$$

a odtud plyne

$$\operatorname{tg} p\alpha \operatorname{tg}(p + 1)\alpha = \frac{\operatorname{tg}(p + 1)\alpha - \operatorname{tg} p\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 1 .$$

Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \ldots + \operatorname{tg} p\alpha \operatorname{tg}(p + 1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} p\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - p +$$

$$+\frac{\operatorname{tg}(p+1)\alpha-\operatorname{tg}p\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-1=\frac{\operatorname{tg}(p+1)\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-(p+1).$$

f) Pro $n = 2$ jde o nerovnost $\frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}}$ a ta platí. Buď $p > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ nerovnost platí. Vynásobme obě její strany číslem $\frac{2p+1}{2p+2}$. K tomu, abychom dokázali platnost věty pro $n = p + 1$, stačí dokázat nerovnost

$$\frac{2p+1}{(2p+2)\sqrt{3p+1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{3p+4}}.$$

To se nám snadno podaří.

g) Pro $n = 2$ jde o nerovnost $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$ a ta, jak se snadno přesvědčíme, platí. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ nerovnost platí. Přičtěme k ní $\frac{1}{\sqrt{p+1}}$. K tomu, abychom dokázali platnost věty pro $n = p + 1$, stačí dokázat nerovnosti

$$\sqrt{p+1} \leqq \sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p+1}}, \quad 2\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p+1}} \leqq 2\sqrt{p+1}.$$

To je snadné.

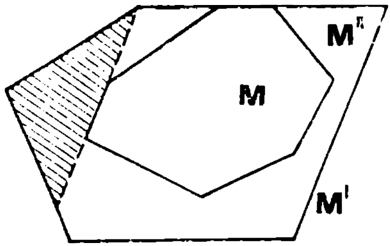
h) Pro $n = 3$ věta triviálně platí. Buď $p \geqq 3$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro všechna přirozená k taková, že $3 \leqq k \leqq p$, věta platí. Uvažujeme konvexní $(p + 1)$-úhelník a v něm maximální počet úhlopříček, které se uvnitř něho neprotínají. Zvolme některou z nich. Ta rozděluje $(p + 1)$-úhelník na dva konvexní mnohoúhelníky, z nichž jeden má v vrcholů a druhý $p - v + 3$ vrcholy $(3 \leqq v \leqq p$ a tedy $3 \leqq p - v + 3 \leqq p)$. Původní úhlopříčky se tak rozpadnou na dvě části podle toho, v kterém z menších mnohoúhelníků leží. Každá část je přitom maximální soustavou úhlopříček příslušného menšího mnohoúhelníka (jinak bychom došli ke sporu s maximalitou v původním mnohoúhelníku). Podle indukčního předpokladu je jich i s rozdělující úhlopříčkou celkem $(v - 3) + (p - v + 3 - 3) + 1 = p - 2$ a dělí původní mnohoúhelník na $(v - 2) + (p - v + 3 - 2) = p - 1$ částí.

i) Pro $n = 1$ věta platí. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ věta platí. Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$a_1 + (a_1 + 1) a_2 + \ldots + (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_p + 1) a_{p+1} = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_p + 1) - 1 + (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_p + 1) a_{p+1} = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_p + 1)(a_{p+1} + 1) - 1 .$$

1.14. Projdeme-li důkazy, zjistíme, že rovnost nastane právě když $x_1 = x_2 = \ldots = x_r$.

1.15. Označme $o(\mathbf{K})$ obvod n-úhelníka $\mathbf{K}$. Pro monohoúhelníky $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$ označme $n(\mathbf{K}, \mathbf{L})$ počet stran mnohoúhelníka $\mathbf{K}$, jež nejsou obsaženy ve stranách mnohoúhelníka $\mathbf{L}$. Vnitřní z mnohoúhelníků uvažovaných ve cvičení označme $\mathbf{M}$ a vnější $\mathbf{M}'$. Je-li $n(\mathbf{M}, \mathbf{M}') = 0$, jsou mnohoúhelníky $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ totožné a $o(\mathbf{M}) = o(\mathbf{M}')$. Buď p celé nezáporné číslo a předpokládejme, že věta platí pro všechny mnohoúhelníky $\mathbf{K}$ obsahující mnohoúhelník $\mathbf{M}$ takové, že $n(\mathbf{M}, \mathbf{K}) = p$. Nechť $n(\mathbf{M}, \mathbf{M}') = p + 1$. Prodlužme jednu ze stran mnohoúhelníka $\mathbf{M}$ neležící ve straně mno-



houúhelníka $\mathbf{M}'$ až k obvodu mnohoúhelníka $\mathbf{M}'$ (viz obrázek). Tak rozdělíme mnohoúhelník $\mathbf{M}'$ na dva mnohoúhelníky. Ten z nich, který obsahuje mnohoúhelník $\mathbf{M}$, označme $\mathbf{M}''$. Zřejmě je $o(\mathbf{M}'') < o(\mathbf{M}')$ a $n(\mathbf{M}, \mathbf{M}'') = p$. Podle indukčního předpokladu je $o(\mathbf{M}) \leqq o(\mathbf{M}'')$ a tedy $o(\mathbf{M}) < o(\mathbf{M}')$.

1.16. Nejprve musíme nějak definovat, co to znamená, že autobus je poloprázdný, abychom věděli, o čem vlastně uvažujeme. Ať to třeba znamená, že v autobuse je nejvýše m cestujících. Poslední věta úvahy není pravdivá pro $k = m$. Princip matematické indukce však požaduje, aby platila pro každé přirozené číslo k.

1.17. Platí-li pro nějakou větu pomocná věta (2), pak tím spíše platí pomocná věta (6), jejíž předpoklady v sobě zahrnují předpoklady pomocné věty (2).

1.19. Princip (I)—(II) vyplývá z principu (V)—(VI) takto: Nechť množina M má vlastnosti (I) a (II). Vlastnost (I) je identická s vlastností (V) a vlastnost (VI) je důsledkem vlastnosti (II). Množina M má tedy vlastnosti (V) a (VI) a podle principu (V)—(VI) obsahuje všechna přirozená čísla.

1.20. V textu jsme odvodili (1)—(2) z (I)—(II). Pomocí (1)—(2)

dokážeme, že platí věta „Pro každé přirozené číslo n platí: Množina M, která má vlastnosti (I) a (II), obsahuje číslo n“.

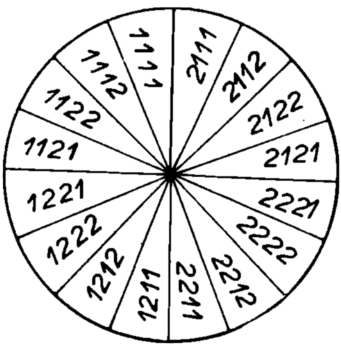
1.21. Stejně jako ve cvič. 1.20. dokážeme, že formulace označené římskými číslicemi jsou ekvivalentní s formulacemi označenými arabskými číslicemi. V textu je dokázáno (I)—(II) $\Rightarrow$ (III)—(IV) a (I)—(II) $\Rightarrow$ (V)—(VI). Ve cvič. 1.19 je dokázáno (V)—(VI) $\Rightarrow$ (I)—(II). Dále je zřejmé (III)—(IV) $\Rightarrow$ (I)—(II) (položíme $k = 1$) a (VII)—(VIII) $\Rightarrow$ (I)—(II) (položíme $r = 1$). Dokážeme nyní (IX)—(X) $\Rightarrow$ (I)—(II). Zvolme přirozené číslo k. Jestliže má množina M vlastnosti (I) a (II), má též vlastnosti (IX) a (X) a podle principu (IX)—(X) obsahuje k. Protože k bylo libovolné, obsahuje M všechna přirozená čísla.

Dokažme dále (I)—(II) $\Rightarrow$ (IX)—(X). Buď k přirozené číslo a množina M nechť má vlastnosti (IX) a (X). Označme M' množinu všech přirozených čísel větších než k. Množina $M \cup M'$ má vlastnost (I). Buď p přirozené číslo, $p \in M \cup M'$. Je-li $p < k$, je podle (IX) $p + 1 \in M$. Je-li $p \geqq k$, je $p + 1 > k$ a proto $p + 1 \in M'$. V každém případě je tedy $p + 1 \in M \cup M'$ a množina $M \cup M'$ má vlastnost (II). Podle (I)—(II) obsahuje množina $M \cup M'$ všechna přirozená čísla. Množina M tedy obsahuje čísla $1, 2, \ldots, k$.

Konečně dokažme (III)—(IV) $\Rightarrow$ (VII)—(VIII). Buď r přirozené číslo a množina M nechť má vlastnosti (VII) a (VIII). Uvažujme ještě množinu M' obsahující právě všechna celá čísla m taková, že $m - r + 1 \in M, \ldots, m - 1 \in M$, $m \in M$. Podle (VII) je $r \in M'$. Nechť $c \geqq r$, $c \in M'$. Podle definice M' je $c - r + 1 \in M, \ldots, c - 1 \in M$, $c \in M$, podle (VIII) je pak $c + 1 \in M$ a podle definice M' je pak $c + 1 \in M'$. Množina M' má tedy vlastnosti (III) a (IV) (kde $k = r$) a podle (III)—(IV) obsahuje všechna přirozená čísla větší nebo rovná číslu r. Podle definice množiny M' obsahuje množina M všechna přirozená čísla.

1.22. Buď M' množina všech přirozených čísel j takových, že $n + 1 - j \in M$. Podle (α) je $1 \in M'$. Buď r přirozené číslo, $1 \leqq r < n$, a předpokládejme, že $r \in M'$. Protože $1 < n + 1 - r \leqq n$, $n + 1 - r \in M$, je podle (β) $n + 1 - r - 1 \in M$ a tedy $r + 1 \in M'$. Podle (IX)—(X) obsahuje množina M' čísla $1, 2, \ldots, n$ a tedy množina M obsahuje čísla $n, \ldots, 2, 1$.

2.1.



2.4. Označme ještě O těžiště $(n + 1)$-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$. Jak víme z úlohy 12, je

$$A_1O : OO_1 = A_2O : OO_2 = \ldots = A_{n+1}O : OO_{n+1} = n : 1$$

a

$$A_1A_2 \parallel O_2O_1,\ A_2A_3 \parallel O_3O_2,\ \ldots,\ A_{n+1}A_1 \parallel O_1O_{n+1}\,.$$

2.5. a) Pro $n = 1$ jde o rovnost $f_1 f_2 = f_1^2$ a ta platí, neboť $f_1 = f_2$. Buď p přirozené číslo a nechť pro $n = p$ rovnost platí. Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$f_{p+1} f_{p+2} = f_{p+1}(f_p + f_{p+1}) = f_p f_{p+1} + f_{p+1}^2 =$$
$$= f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_{p+1}^2 \, .$$

b) Pro $n = 1$ jde o rovnost

$$f_2^2 - f_1 f_3 = 1^2 - 1 . 2 = -1 \, .$$

Buď p přirozené číslo a nechť pro $n = p$ rovnost platí. Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$f_{p+2}^2 - f_{p+1} f_{p+3} = f_{p+2}(f_p + f_{p+1}) - f_{p+1}(f_{p+1} + f_{p+2}) =$$
$$= f_p f_{p+2} - f_{p+1}^2 = -(-1)^p = (-1)^{p+1} \, .$$

2.6. Ukážeme, že posloupnost definovaná uvedeným vzorcem vyhovuje rekurentnímu vzorci, jímž byla zavedena Fibonacciova posloupnost.

Pro $n = 1$ dostáváme

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \, ,$$

pro $n = 2$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = 1$$

a dále

$$f_n + f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] =$$

$$= f_{n+2}\,.$$

2.8. Hledaný počet vlajek označme v_n. Zřejmě je $v_1 = 2$ (červená vlajka a bílá vlajka) a $v_2 = 3$ (červenobílá, bíločervená a červená). Buď k přirozené číslo. Všechny vlajky složené z $k + 2$ pruhů, z nichž spodní je červený, lze získat tak, že se ke všem v_{k+1} vlajkám složeným z $k + 1$ pruhů přišije dolů červený pruh. Všechny vlajky složené z $k + 2$ pruhů, z nichž spodní je bílý, lze získat tak, že ke všem v_k vlajkám složeným z k pruhů přišijeme dolů červený pruh a pod něj bílý pruh. Platí tedy

$$v_{k+2} = v_{k+1} + v_k$$

pro každé přirozené k.

Jiné řešení: Nejprve určeme, kolik existuje vlajek, které mají uvedenou vlastnost a obsahují právě k červených pruhů (a tedy $n - k$ bílých pruhů). Mezi každými dvěma červenými pruhy jakož i na okrajích bude nejvýše po jednom bílém pruhu. Vlajek s k červenými pruhy bude tedy právě tolik, kolika způsoby lze rozmístit $n - k$ bílých pruhů na $k + 1$ míst ($k - 1$ mezer a dva kraje), tedy $\binom{k+1}{n-k}$ v případě $k + 1 \geqq n - k$ (neboli $k \geqq \frac{n-1}{2}$) a 0 v případě $k < \frac{n-1}{2}$. (Stále předpokládáme, že $k \leqq n$.) Celkový počet bude

$$\binom{a+1}{n-a} + \binom{a+2}{n-a-1} + \ldots + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{0},$$

kde $a = \frac{n}{2}$ pro sudé n, $a = \frac{n-1}{2}$ pro liché n.

2.9. Z prvního řešení cvičení 8 je vidět, že pro každé přirozené n je $v_n = f_{n+2}$. Pro $n > 2$ je tedy podle druhého řešení

$$f_n = v_{n-2} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \ldots + \binom{a+1}{n-2-a},$$

kde $a = \frac{n}{2} - 1$ pro sudé n, $a = \frac{n-3}{2}$ pro liché n. Položíme-li $m = n - 2 - a$ a dosadíme sem za a, dostaneme $m = \frac{n-1}{2}$ pro lichá n a $m = \frac{n}{2} - 1$ pro sudé n a vzorec nabude tvaru uvedeného ve cvič. 9.

Jiné řešení: Ukážeme, že členy posloupnosti f_n definované vzorcem ze cvič. 9 vyhovují rekurentní definici Fibonacciovy posloupnosti. Pro $n=1$ je $m=0$ a $f_1 = \binom{0}{0} = 1$. Pro $n = 2$ je též $m = 0$ a $f_2 = \binom{1}{0} = 1$. Pro sudé n je

$$f_n + f_{n+1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \ldots +$$

$$+ \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1} + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}$$

a

$$f_{n+2} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}}.$$

Pro liché n je

$$f_n + f_{n+1} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \ldots +$$

$$+ \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} + \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$$

a

$$f_{n+2} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}}.$$

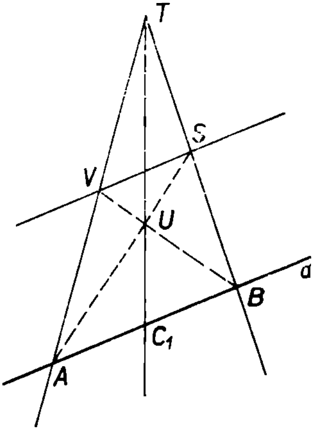
Vzhledem k tomu, že $\binom{r}{s} + \binom{r}{s+1} = \binom{r+1}{s+1}$ pro nezáporná celá $r > s$, a $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$, platí v obou případech

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

2.11. Jedna možnost je opakovat celý postup a sestrojit bod C^*_{n-1}, který dělí úsečku C_nB_n v poměru $C_nC^*_{n-1} : BC^*_{n-1} = 1 : (n-1)$, dalším provedením konstrukce z úlohy 14 sestrojit bod C^*_{n-2}, který dělí úsečku $C^*_{n-1}B$ v poměru

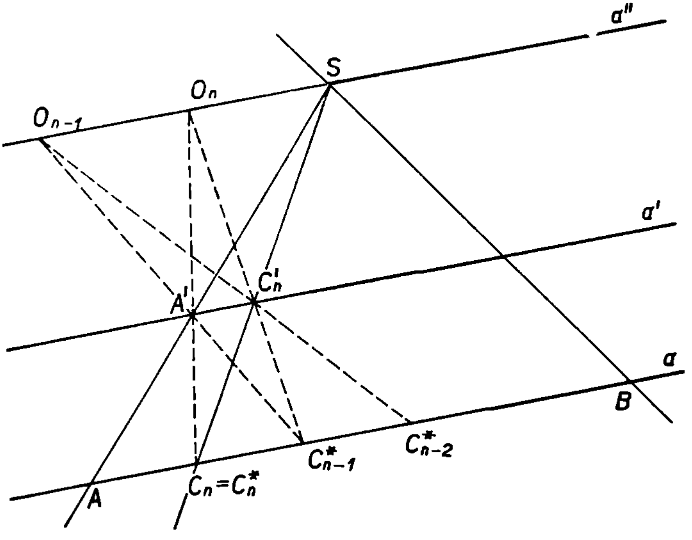
$$C^*_{n-1}C^*_{n-2} : BC^*_{n-2} = 1 : (n - 2), \text{ atd.}$$

Méně pracný je však následující postup: Nejprve vedeme bodem S rovnoběžku s přímkou a. To provedeme takto: Na polopřímce opačné k SB zvolíme bod $T \neq S$ (viz obrázek). Průsečík přímek AS, TC_1 označme U a průsečík přímek AT, BU označme V. Přímky AB, VS jsou rovnoběžné, což se dokáže následujícím způsobem:



Rovnoběžku s přímkou a procházející bodem S označme a''. Její průsečík s přímkou AT označme V'. Dále označme U' průsečík přímek AS a BV'. Jak víme z prvního kroku úlohy 14, prochází přímka TU' bodem C_1. Je proto $U' = U$, $V' = V$ a přímky a, VS jsou totožné.

Vraťme se ke konstrukci. Sestrojili jsme bodem S rovnoběžku a'' s přímkou a. Položme $C^*_n = C_n$ (viz obrázek).



Buď $1 < k \leq n$ přirozené číslo a předpokládejme, že je sestrojen bod C_k^* na úsečce AB. Průsečík přímek a'', $A'C_k^*$ označme O_k. Bod C_{k-1}^* bude průsečík přímek a, O_kC_n'. Z podobných trojúhelníků snadno zjistíme, že

$$AC_n^* = C_n^*C_{n-1}^* = \ldots = C_1^*B.$$

2.13. Vyjdeme-li od $x_1 = 1{,}5$ a zaokrouhlujeme-li dílčí výsledky na pět desetinných míst, vychází $x_2 = 1{,}41667$, $x_3 = 1{,}41422$, $x_4 = 1{,}41421$. Je tedy $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142$.

2.15. Pro $n = 1$ je $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(A + \dfrac{a}{A}\right) = f(A)$. Nechť p je přirozené číslo a předpokládejme, že $x_p = f(\ldots(f(A))\ldots)$, kde vpravo je p-krát složená funkce f. Potom je $x_{p+1} = f(x_p) = f(f(\ldots f(A))\ldots))$, kde vpravo je $(p + 1)$-krát složená funkce f.

2.16. Pro $n = 1$ je

$$\frac{x_1 - \sqrt{a}}{x_1 + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right) + \sqrt{a}} =$$

$$= \frac{A^2 + a - 2A\sqrt{a}}{A^2 + a + 2A\sqrt{a}} = \left(\frac{A - \sqrt{a}}{A + \sqrt{a}}\right)^2.$$

Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že

$$\frac{x_p - \sqrt{a}}{x_p + \sqrt{a}} = \left(\frac{A - \sqrt{a}}{A + \sqrt{a}}\right)^{2^p}.$$

Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$\frac{x_{p+1} - \sqrt{a}}{x_{p+1} + \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}\left(x_p + \frac{a}{x_p}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(x_p + \frac{a}{x_p}\right) + \sqrt{a}} =$$

$$= \frac{x_p^2 + a - 2x_p\sqrt{a}}{x_p^2 + a + 2x_p\sqrt{a}} = \left(\frac{x_p - \sqrt{a}}{x_p + \sqrt{a}}\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{A - \sqrt{a}}{A + \sqrt{a}}\right)^{2^p}\right]^2 = \left(\frac{A - \sqrt{a}}{A + \sqrt{a}}\right)^{2^{p+1}}$$

Buď $\{K_n\}$ posloupnost $\left\{\left(\frac{A - \sqrt{a}}{A + \sqrt{a}}\right)^{2^n}\right\}$. Ze vzorce, který jsme právě odvodili, plyne, že pro každé přirozené n je

$$x_{n+1} = \frac{(K_n + 1)\sqrt{a}}{1 - K_n}.$$

Posloupnost $\{K_n\}$ je zřejmě omezená a nerostoucí a proto i posloupnost $\{x_{n+1}\}$ má tyto vlastnosti. Posloupnost $\{K_n\}$ konverguje k 0 a posloupnost $\{x_{n+1}\}$ tedy konverguje k $\dfrac{(0+1)\sqrt{a}}{1-0} = \sqrt{a}$.

2.17. Definice má smysl, neboť $y_n \neq 0$ pro každé n. Dokažme, že $y_n \geqq \sqrt[3]{a}$ pro všechna $n > 1$. Pro každé n je $y_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2y_n + \dfrac{a}{y_n^2}\right) = \dfrac{2y_n^3 + a}{3y_n^2} = y_n\left(1 + \dfrac{a - y_n^3}{3y_n^3}\right)$.
Z rekurentní definice posloupnosti $\{y_n\}$ je zřejmé, že $y_n > 0$ pro každé n. Z toho plyne, jak se snadno přesvědčíme, že

$$\frac{a - y_n^3}{3y_n^3} > -1 .$$

Podle Bernoulliovy nerovnosti (viz cvič. 3.2) je tedy

$$y_{n+1}^3 = y_n^3\left(1 + \frac{a - y_n^3}{3y_n^3}\right)^3 \geqq y_n^3\left(1 + 3\,\frac{a - y_n^3}{3y_n^3}\right) = a .$$

Dále dokažme, že $y_{n+1} \leqq y_n$ pro každé $n > 1$. To je také vidět z výše uvedeného vyjádření pro y_{n+1}, je totiž

$$1 + \frac{a - y_n^3}{3y_n^3} \leqq 1 ,$$

neboť $a \leqq y_n^3$ pro každé $n > 1$.
Posloupnost $\{y_{n+1}\}$ je tedy zdola omezená a nerostoucí, má tedy limitu; označme ji L. Z toho, co už víme, je zřejmé, že $L \geqq \sqrt[3]{a}$. Z rekurentního vzorce pro posloupnost $\{y_n\}$ plyne, že platí

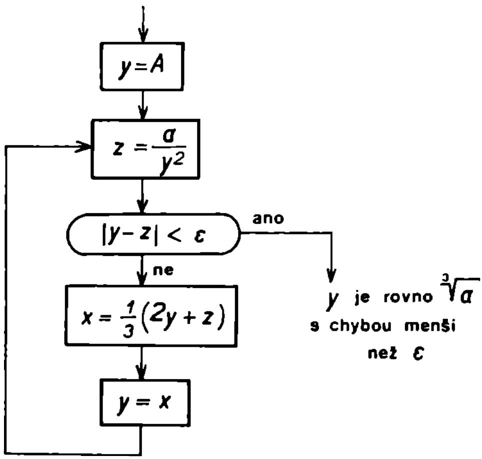
$$L = \frac{1}{3}\left(2L + \frac{a}{L^2}\right),$$

čili $L^3 = a$.

Zjistili jsme, že $y_n \geqq \sqrt[3]{a}$. Z toho vyplývá, že

$$\frac{a}{y_n^2} \leqq \sqrt[3]{a} = y_n$$

(pro $n > 1$). To umožňuje pohodlně odhadnout, jak se y_n liší od $\sqrt[3]{a}$. Praktický výpočet $\sqrt[3]{a}$ s chybou menší než ε bude probíhat podle schématu



2.18. Vyjdeme-li od $y_1 = 1{,}5$ a zaokrouhlujeme-li dílčí výsledky na pět desetinných míst, vychází $x_2 = 1{,}29629$, $x_3 = 1{,}26093$, $x_4 = 1{,}25992$, $x_5 = 1{,}25992$. Je tedy $\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}2599$.

2.20. $t_{10} = 1430$.

2.21. Označme body $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ tak, jak jdou na kružnici za sebou. Bod A_1 může být spojen pouze s bodem se sudým indexem. Jinak by totiž na každé straně tětivy spojující bod A_1 s bodem o lichém indexu byl lichý počet bodů a alespoň jedna z $n - 1$ ostatních tětiv by ji pak protínala. Hledaný počet označme p_n. Nechť je bod A_1 spojen s bodem A_{2k}. Pak na jedné straně zůstane $2(k - 1)$ bodů (ty lze pospojovat p_{k-1} způsoby) a na druhé straně $2(n - k)$ bodů (ty lze pospojovat p_{n-k} způsoby). Bude tedy

$$p_1 = 1\,,$$

$$p_n = p_{n-1} + p_1 p_{n-2} + \ldots + p_{n-2} p_1 + p_{n-1} \text{ pro } n > 1\,.$$

Je zajímavé, že pro každé n je $p_n = t_{n+2}$, kde $\{t_n\}$ je posloupnost z úlohy 16.

3.1. Vzhledem k tomu, že $M \neq \emptyset$, existuje přirozené číslo $n \in M$. Stačí tedy větu dokázat pro množinu $M \cap \{1, 2, \ldots, n\}$, což je konečná množina. Dokážeme následující větu: Buď k přirozené číslo a buď dána k-prvková podmnožina $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ množiny přirozených čísel. Potom existuje $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že $p_i \leqq p_j$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Provedeme to matematickou indukcí. Pro $k = 1$ věta triviálně platí. Buď r přirozené číslo a nechť pro $k = r$ věta platí. Buď dána $(r + 1)$-prvková podmnožina $\{p_1, p_2, \ldots, p_{r+1}\}$ množiny všech přirozených čísel. Podle indukčního předpokladu existuje $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ takové, že $p_i \leqq p_j$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Je-li $p_i \leqq p_{r+1}$, položme $y = i$. Je-li $p_i > p_{r+1}$, položme $y = r + 1$. Pak je $p_y \leqq p_j$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, r + 1\}$.

3.2. a) Pro $n = 1$ platí nerovnost. Buď p přirozené číslo a nechť pro $n = p$ nerovnost platí. Pro $n = p + 1$ dostáváme

$$(1 + x)^{p+1} = (1 + x)^p (1 + x) \geqq (1 + px)(1 + x) =$$
$$= 1 + (p + 1) x + px^2 \geqq 1 + (p + 1) x .$$

b) Podle binomické věty je

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \ldots \geqq 1 + nx .$$

Druhý důkaz je názornější, ale platí jen pro $x \geqq 0$ (členy na místě teček jsou nezáporné). Důkaz indukcí však platí pro $x \geqq -1$. (V tomto oboru jsme Bernoulliovu nerovnost potřebovali při řešení cvič. **2.18.**)

3.3. Obvyklý postup selhává. Pokusme se modifikovat pravou stranu a převést úlohu na důkaz nerovnosti

$$\frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} \leqq \frac{1}{4} - \frac{a}{n^2} ,$$

kde a je vhodná kladná konstanta. Především musí být pro $n = 2$

$$\frac{1}{8} \leqq \frac{1}{4} - \frac{a}{4}$$

a tedy $a \leqq \frac{1}{2}$. K tomu, aby se zdařil indukční krok postačí, aby pro každé n bylo

$$\frac{1}{4} - \frac{a}{n^2} + \frac{1}{(n + 1)^3} \leqq \frac{1}{4} - \frac{a}{(n + 1)^2} ,$$

což platí pro všechna a splňující při každém n nerovnost

$$a \geqq \frac{1}{2} - \frac{3n^3 + 7n^2 + 5n + 1}{2\,(2n^4 + 7n^3 + 9n^2 + 5n + 1)} .$$

Zvolíme-li tedy např. $a = \frac{1}{2}$, důkaz modifikované nerovnosti se podaří.

Jiné řešení (ne podle návodu). Pro $n = 2, 3, 4$ dokazovaná nerovnost platí. Pro $n > 4$ dokážeme indukcí nerovnost

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} \leqq \frac{n}{4\,(n+1)},$$

jejíž pravá strana je zřejmě menší než 1/4: Pro $n = 5$ ověříme, že poslední nerovnost platí. Předpokládejme, že platí pro $n = k \geqq 5$. Pro $n = k + 1$ dostaneme

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(k+1)^3} \leqq \frac{k}{4\,(k+1)} + \frac{1}{(k+1)^3} = \frac{k^3 + 2\,k^2 + k + 4}{4\,(k+1)^3} < \frac{k+1}{4\,(k+2)}.$$

Ještě jiné řešení (bez použití indukce). Pro každé $k > 1$ platí

$$\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k\,(k+1)\,(k-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k\,(k-1)} - \frac{1}{(k+1)\,k}\right)$$

a tedy

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n\,(n+1)}\right) < \frac{1}{4}.$$

A ještě poznámka pro toho, kdo zná pojem součtu nekonečné řady:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots = 0{,}20205\ldots$$

3.4. Označme P množinu všech přirozených čísel, Q_c množinu všech celých čísel větších nebo rovných celému číslu c a R_k množinu všech přirozených čísel menších nebo rovných přirozenému číslu k. Je-li k přirozené číslo, c celé číslo a $T(n)$ výroková forma s příslušným definičním oborem, jsou principy (3)—(4) až (9)—(10) formálně zapsány takto:

(3)—(4): $T(c) \wedge (\forall q \in Q_c) [T(q) \Rightarrow T(q + 1)] \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall q \in Q_c) T(q)$

(5)—(6): $T(1) \wedge (\forall p \in P) [(\forall r \in R_p) T(r) \Rightarrow$
$\Rightarrow T(p + 1)] \Rightarrow (\forall p \in P) T(p)$

(7)—(8): $(\forall r \in R_k) T(r) \wedge (\forall p \in P) [(\forall r \in R_{p+k-1} -$
$- R_{p-1}) T(r) \Rightarrow T(p + k)] \Rightarrow (\forall p \in P) T(p)$

(9)—(10): $T(1) \wedge (\forall r \in R_{k-1}) [T(r) \Rightarrow T(r + 1)] \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall r \in R_k) T(r)$

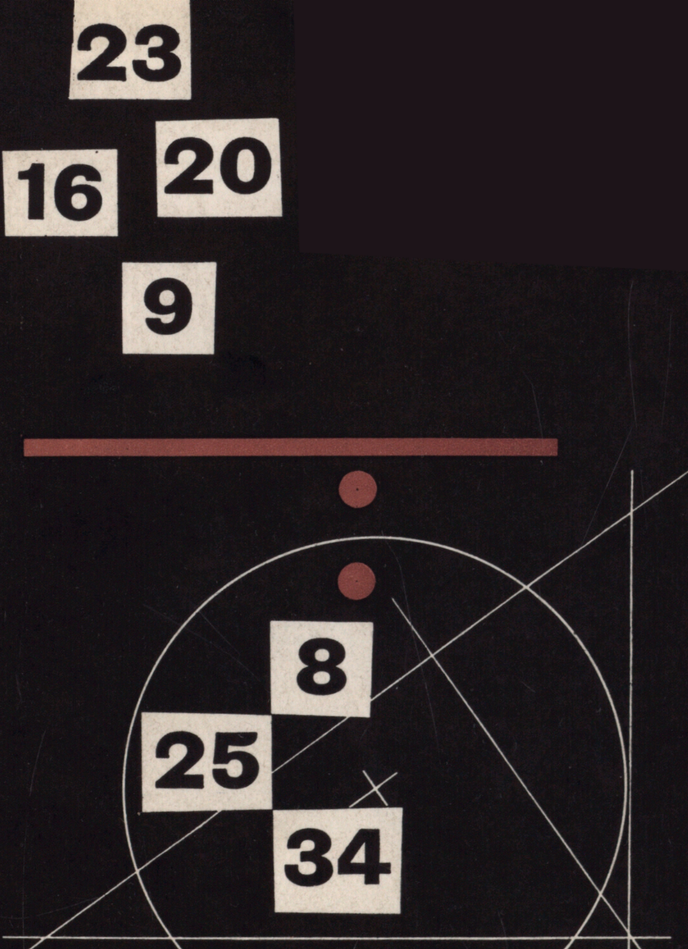
OBSAH

ŠKOLA MLADÝCH MATEMATIKŮ

ANTONÍN VRBA

Princip matematické indukce

Pro účastníky matematické olympiády
vydává ÚV matematické olympiády
v nakladatelství Mladá fronta
Řídí akademik Josef Novák
Obálku navrhl Jaroslav Příbramský
K tisku připravil Vladimír Doležal
Odpovědná redaktorka Libuše Rousková
Technický redaktor Vladimír Vácha
Publikace číslo 3771
Edice Škola mladých matematiků, svazek 40
Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p.
závod 1, Praha 1, Václavské nám. 15
6,12 AA, 6,49 VA. 144 stran
Náklad 5500 výtisků. 1. vydání
Praha 1977. 508/21/82.5
23-027-77 03/2 Cena brož. výt. Kčs 9,—



23-027-77
03/2
Cena brož.
Kčs 9,—